Ciclo de conferencias "Matemáticas en Acción 2011"

noviembre de 2011

# Dimensión: algunas intuiciones físicas y matemáticas

Marco Castrillón López
Depto. Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid

# Esquema

- Introducción
- Espacios vectoriales
- Visualización de dimensión 4
- Dimensión y Topología
- Dimensión y fractales
- Dimensión y Física

# INTRODUCCIÓN

R.A.E. (Del lat. *dimensĭo, -ōnis*).

•Aspecto o faceta de algo

•Longitud, área o volumen de una línea, una superficie o un cuerpo, respectivamente.

• *Fís*. Cada una de las magnitudes de un conjunto que sirven para definir un fenómeno.

# INTRODUCCIÓN

R.A.E. (Del lat. *dimensĭo, -ōnis*).

•Aspecto o faceta de algo

•Longitud, área o volumen de una línea, una superficie o un cuerpo, respectivamente.

• *Fís.* Cada una de las magnitudes de un conjunto que sirven para definir un fenómeno.

Relacionado con la noción de ***medida***

•Dimensión 1--- longitud

•Dimensión 2--- área

•Dimensión 3--- volumen

# Euclides (≈325 a.C.- 265 a.C.)

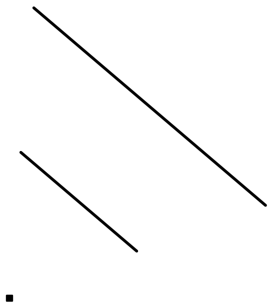
- Un **punto** es lo que no tiene partes.

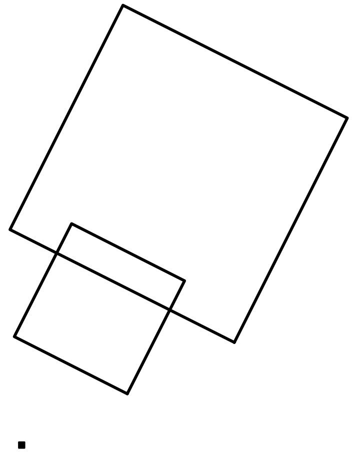
- Un **línea** es una longitud sin anchura.
- Los extremos de una línea son puntos.

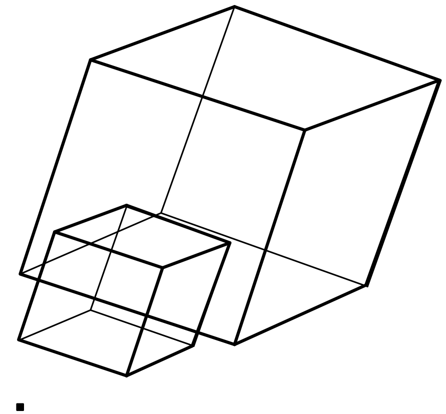
- Una **superficie** es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
- Los extremos de una superficie son líneas.

- Un **sólido** es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad.
- Y el extremo de un sólido es una superficie.

# Si se realiza una homotecia de razón $k$



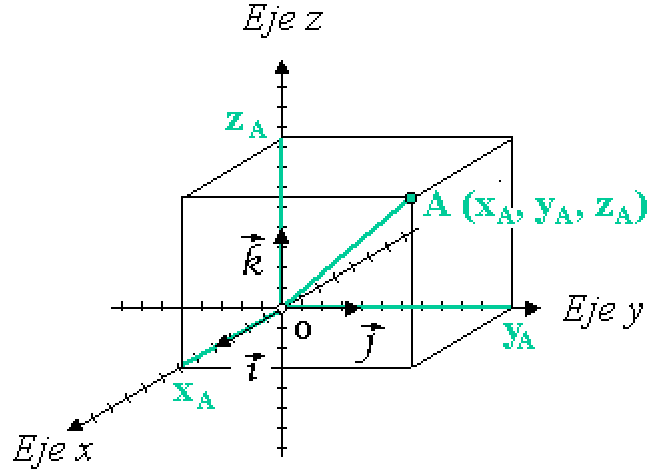




long($S$')=$k$ long($S$)    área($C$')=$k^2$ área(C)    vol($K$')=$k^3$ vol($K$)

# Descartes (1.596 d.C.- 1.650 d.C.)

En 1619 (observando el vuelo de una mosca en una habitación) da forma a la idea de *coordenadas cartesianas*



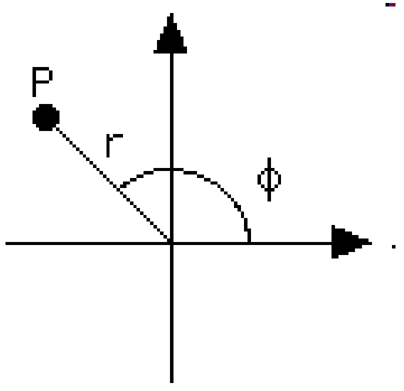

**Sistema de Coordenadas Cartesianas Espaciales**

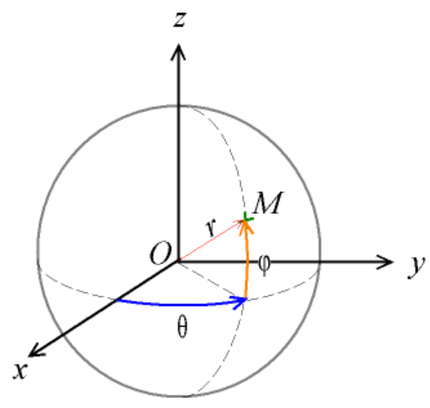
*"Un punto en la recta necesita un número para definirse"*

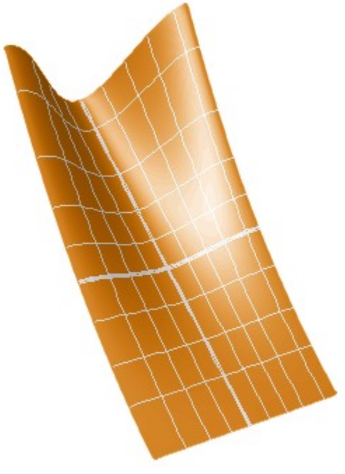
*"Un punto en el plano necesita de dos números para definirse"*

*"Un punto en el espacio necesita de tres números para definirse"*

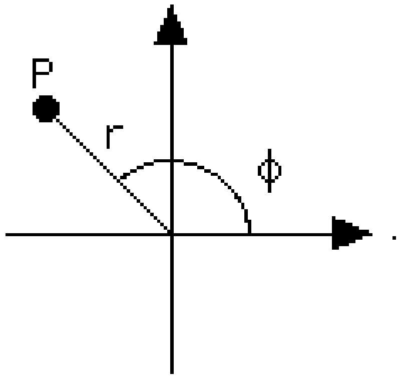
## La noción se extiende al concepto de ***coordenadas curvilíneas***

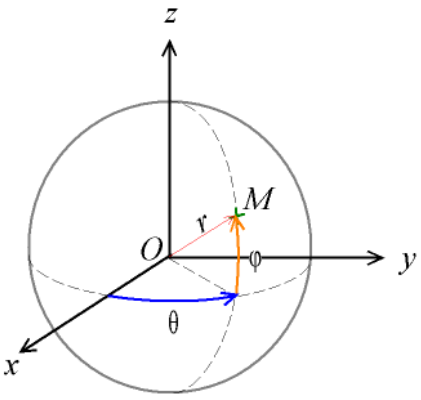


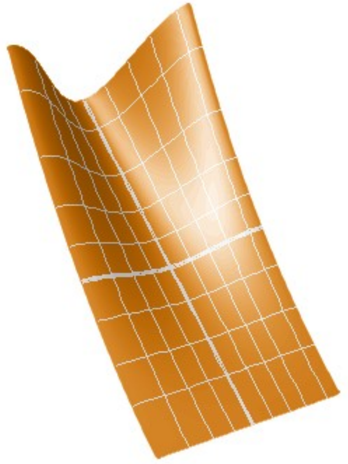



La noción se extiende al concepto de ***coordenadas curvilíneas***



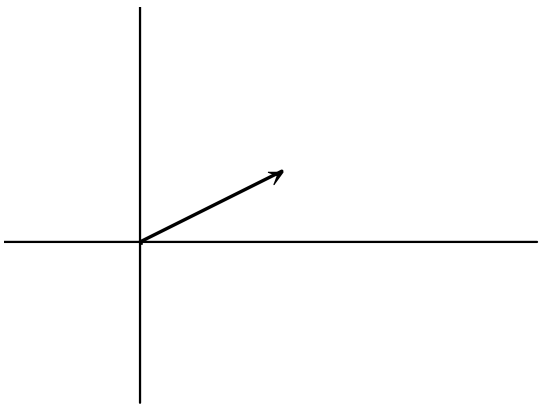
Si se necesitan ***n*** coordenadas (de forma local) se dice que el objeto tiene **dimensión *n***.

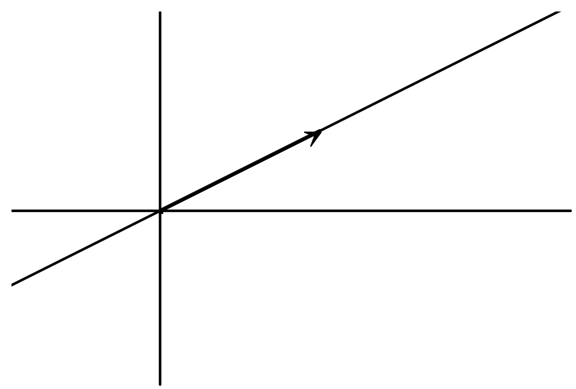
- Por otra parte, en el siglo XIX hay tres trabajos importantes
  - "Chapters in the Analytical Geometry of *n* dimensions" de Cayley (1843).
  - "Die lineale Ausdehnungslehre" de Grassmann (1844).
  - "Theorie der vielfachen Kontinuität" de Schläfli (1852).

Se fundamentan la conocida hoy como **dimensión de espacio vectorial.**

•Partimos de un espacio vectorial, es decir, un conjunto de ***vectores*** con dos operaciones: *suma* y *multiplicación por escalar.*

•Si tomamos un vector no nulo $v$, se define una recta como la formada por todos los $\lambda v$, siendo $\lambda$ un número.





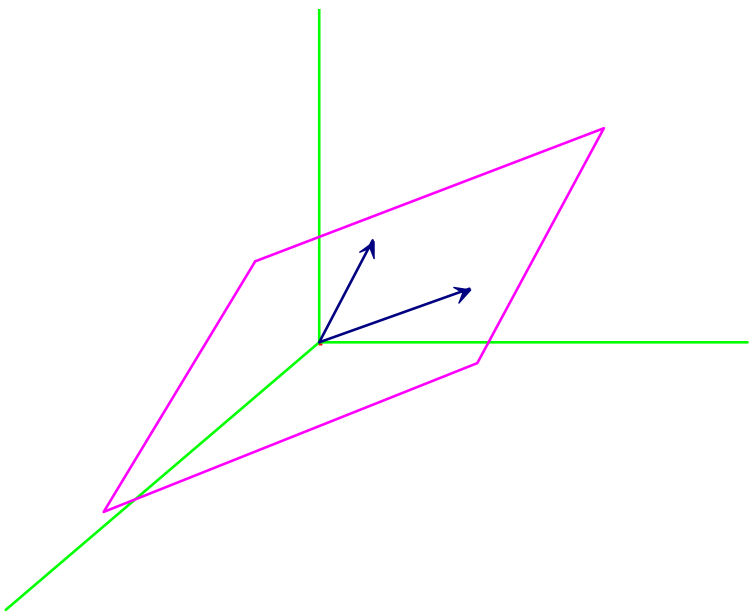
•Así generada, la recta tiene dimensión 1, pues requiere de un único vector para generarse.

•Si tomamos un nuevo vector $w$ que **no** esté en la recta podemos considerar

$$\lambda\, v + \mu\, w$$

Y obtenemos el plano que generan.

El plano tiene dimensión 2.



Así, la dimensión corresponde con el número de vectores independientes que generan el espacio. Independientes quiere decir que $v_{i+1}$ no está en el espacio generado por $\{v_1,\ldots,v_i\}$.

# VISUALIZACIÓN DE CUARTA DIMENSIÓN

•La tradición siempre hablaba de 3 dimensiones. Por ejemplo, Aristóteles (*De Caelo*), E. Kant (*Crítica de la Razón Pura*), aunque este último habla de también de otros *posibles espacios*.

•D'Alembert en la *Encyclopédie* de Diderot, en el concepto de dimensión, sugiere ***el tiempo*** como cuarta dimensión (1754).

•Por otra parte, una vez madurada la idea de dimensión cartesiana, en el siglo XVIII se empieza a experimentar con la idea de espacio de **4 dimensiones.**

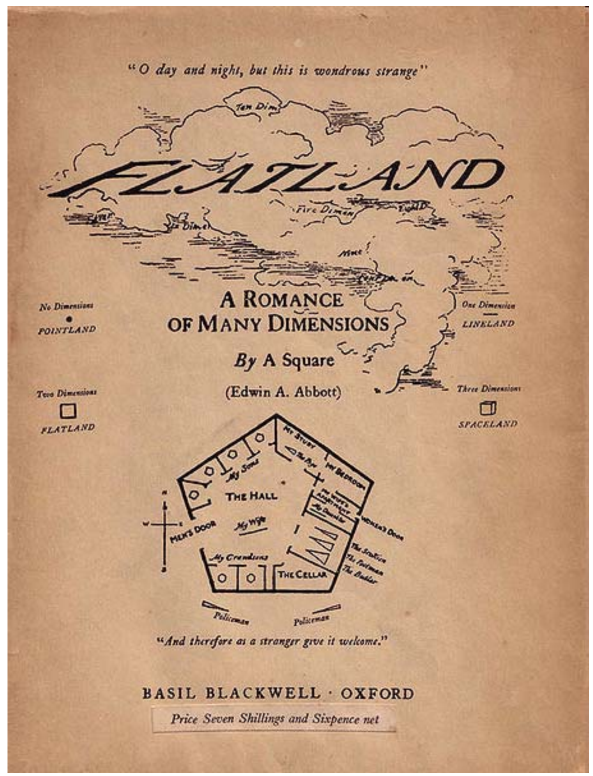
- Möbius (1827) sugiere la equivalencia de la mano derecha y la mano izquierda moviéndolas en un espacio de cuatro dimensiones.
- Cayley, Grassmann, Schläfli y Riemann…

•Para visualizar la dimensión 4, la idea fundamental es generalizar el paso de dimensión 2 a dimensión 3.

•Para visualizar la dimensión 4, la idea fundamental es generalizar el paso de dimensión 2 a dimensión 3.

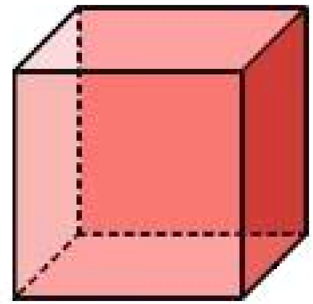
•Un hito es el cuento de E. Abbot (1884) titulado

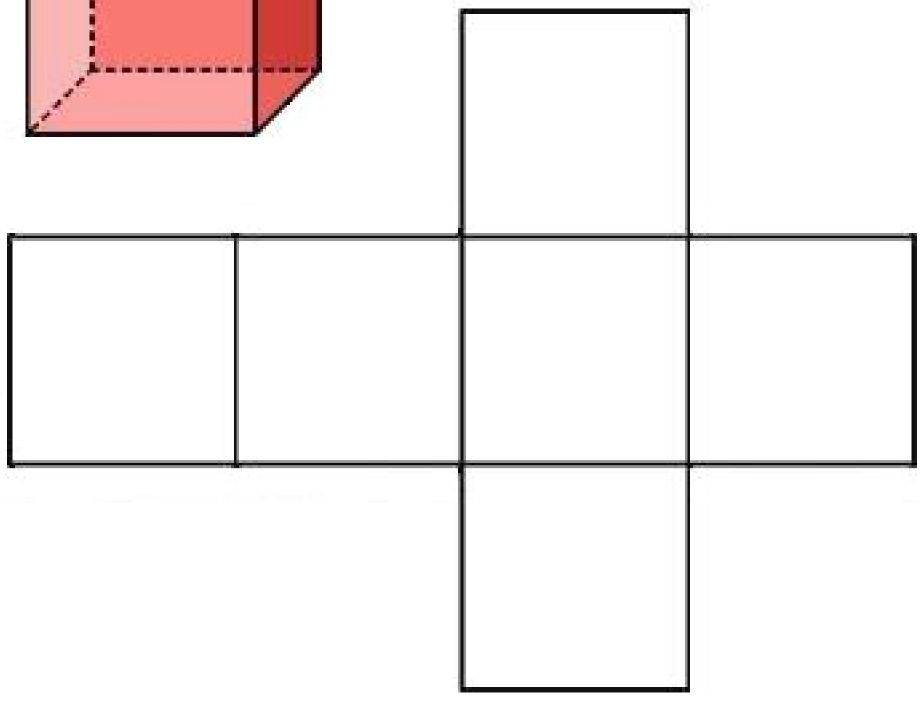
*Flatland: A Romance of Many Dimensions*



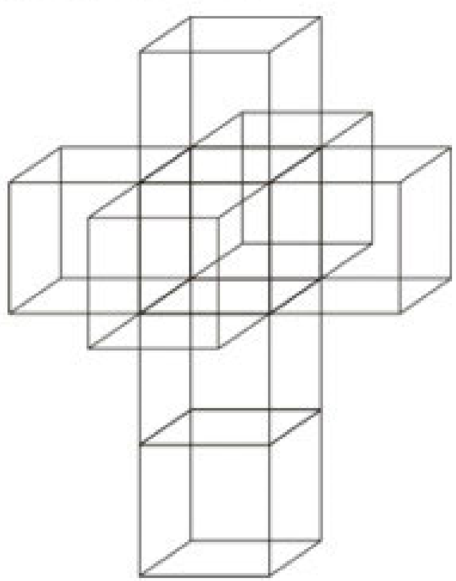
Vamos a trabajar con un CUBO.

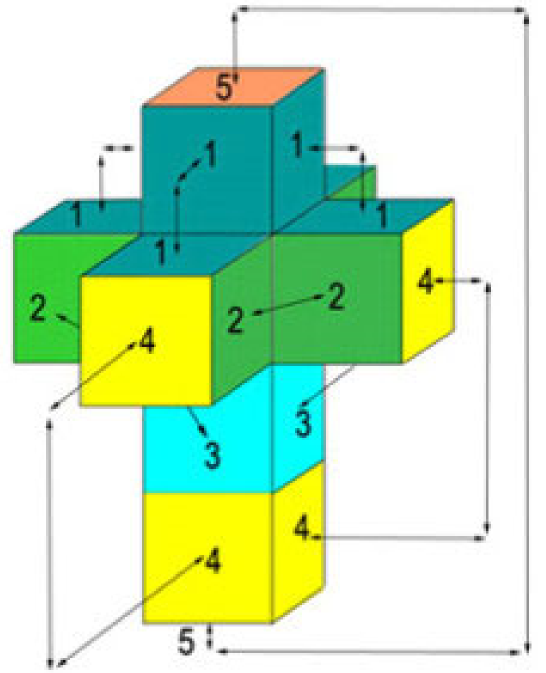
- Primer método: *DESARROLLO*





## Hipercubo en 3D



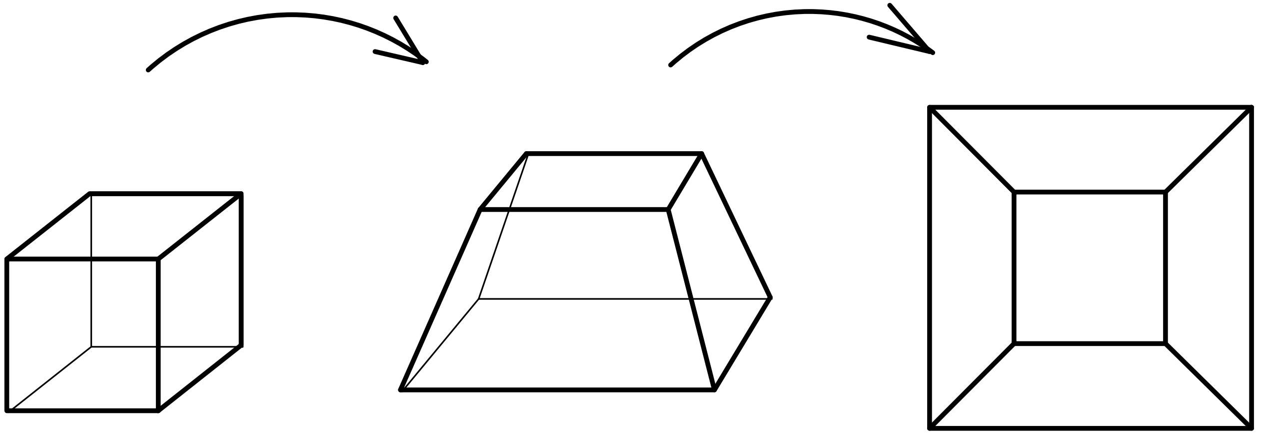


"La crucifixión" (1954) o
"Corpus Hypercubus"

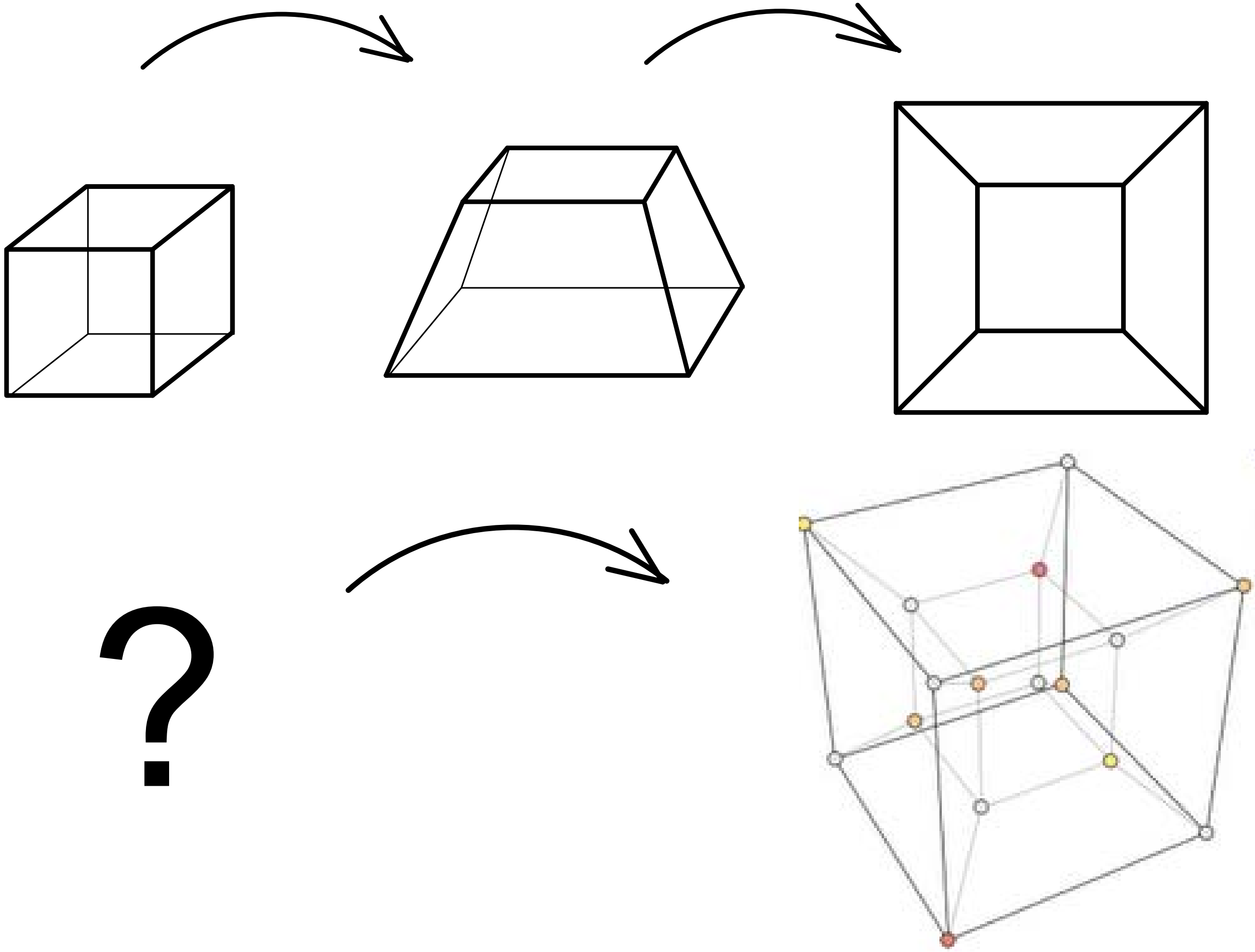
"Dalí al hipercubo",

de Francesc Català-Roca

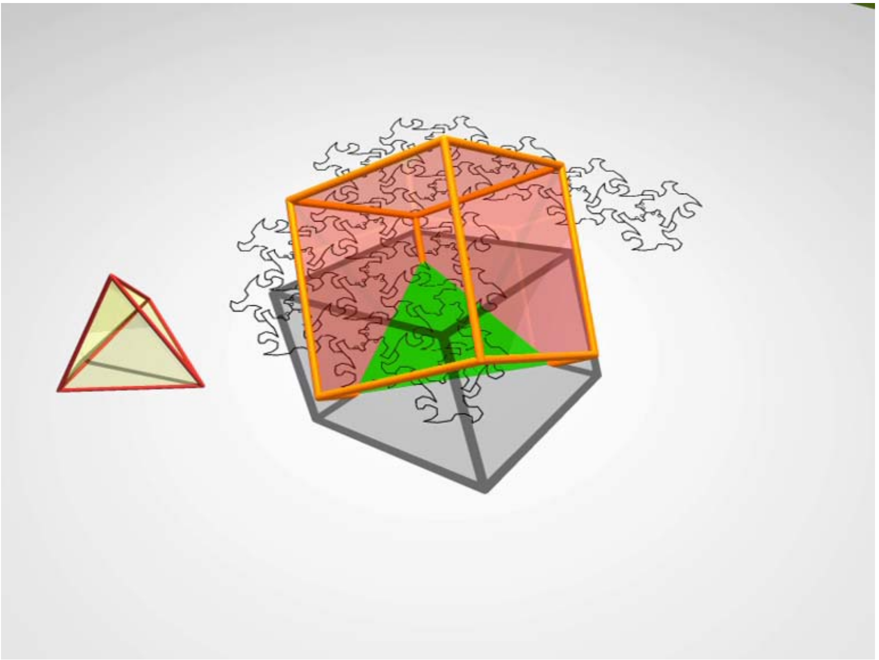
•Segundo método: "*APLASTAMIENTO*"



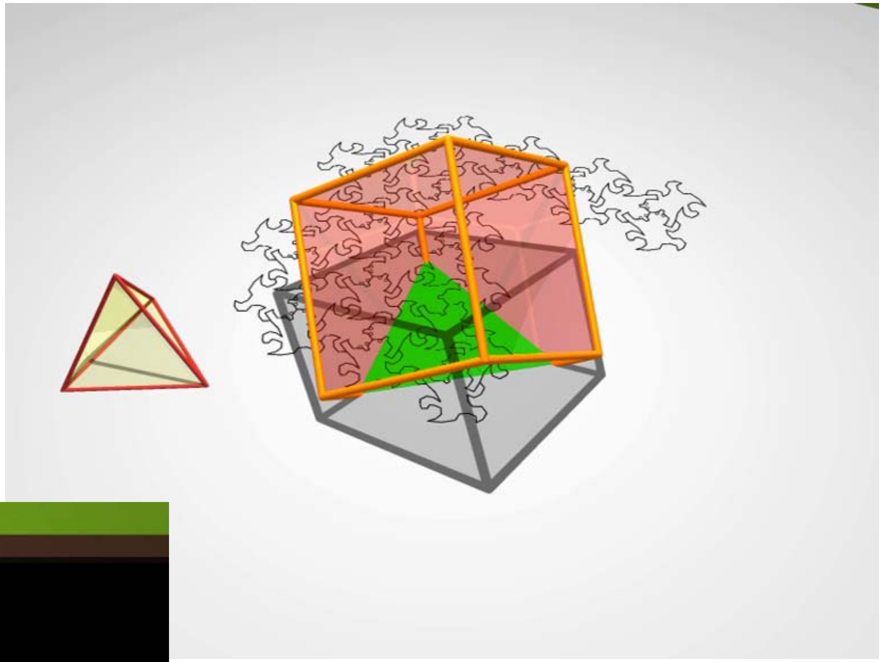
•Segundo método: “*APLASTAMIENTO*”

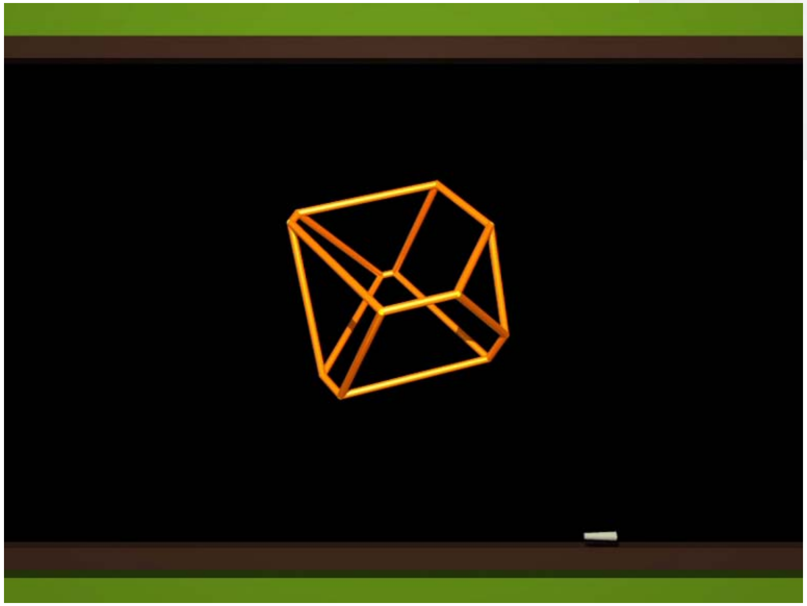


•Tercer método: *SECCIÓN*



•Tercer método: *SECCIÓN*





# DIMENSIÓN Y TOPOLOGÍA

- La noción de dimensión como el número de parámetros para determinar un punto entra en crisis
  - La biyección de Cantor entre

$$\mathbf{R} \quad \text{y} \quad \mathbf{R}^2$$

  - La aplicación continua y supreyectiva de Peano deç

$$[0,1] \quad \text{y} \quad [0,1] \times [0,1]$$

- ¿Se puede establecer una biyección continua (homeomorfismo) entre $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$?
- Brower (1913) prueba la imposibilidad de tal biyección asignando un *número a un espacio topológico que es invariante por homoemorfismo.*
- Se define la primera dimensión topológica.

•Dimensión inductiva (Menger-Urison 1922)

- El conjunto vacío tiene **ind** = -1.
- Un conjunto tiene dimensión **ind** = $n$ si todo punto admite una base de entornos abiertos $\{U\}$ con **ind**(frontera $U$) = n-1.
- Si **ind**>$n$ para todo $n$, se dice que **ind** es infinita.

Si dos espacios son homeomorfos, entonces tiene la misma dimensión inductiva.

•Dimensión inductiva (Menger-Urison 1922)

- •El conjunto vacío tiene **ind** = -1.
- •Un conjunto tiene dimensión **ind** = $n$ si todo punto admite una base de entornos abiertos $\{U\}$ con **ind**(frontera $U$) = n-1.
- •Si **ind**>$n$ para todo $n$, se dice que **ind** es infinita.

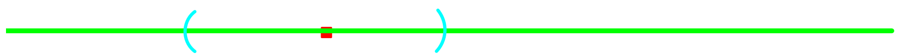
Si dos espacios son homeomorfos, entonces tiene la misma dimensión inductiva.

E. Kant:

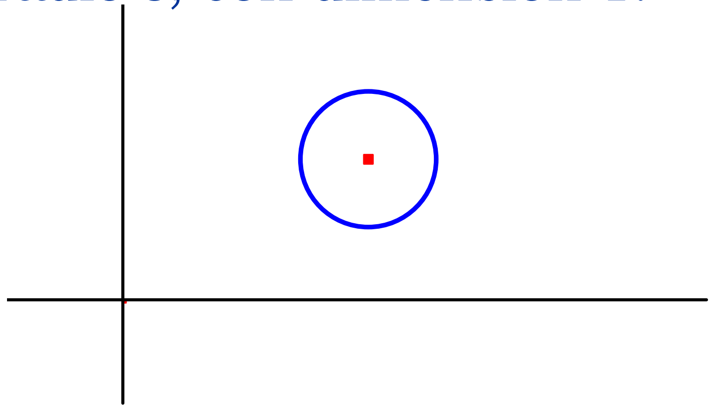
“El espacio tiene tres dimensiones ya que no es frontera de otro espacio…”

Ejemplo:

- $\{p\}$ tiene dimensión 0 porque no tiene frontera.
- **R** tiene dimensión 1, ya que todo punto $p$ tiene una base de entornos $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ cuya frontera es $\{p-\varepsilon, p+\varepsilon\}$ tiene dimensión 0.



- $\mathbf{R}^2$ tiene dimensión 1, ya que todo punto $p$ tiene una base de entornos $B(p, \varepsilon)$ cuya frontera es la circunferencia de centro p y radio ε, con dimensión 1.



Ejemplo:

•En general $\mathbf{R}^n$ tiene dimensión $n$.

¡OJO! Juega un papel importante la topología:

•**Ind** $(\mathbf{R}, T_u) = 1 \rightarrow$ La recta como continuo unidimensional

pero

•**Ind** $(\mathbf{R}, T_D) = 0$ ó **Ind** $(\mathbf{R}, T_T) = 0 \rightarrow$

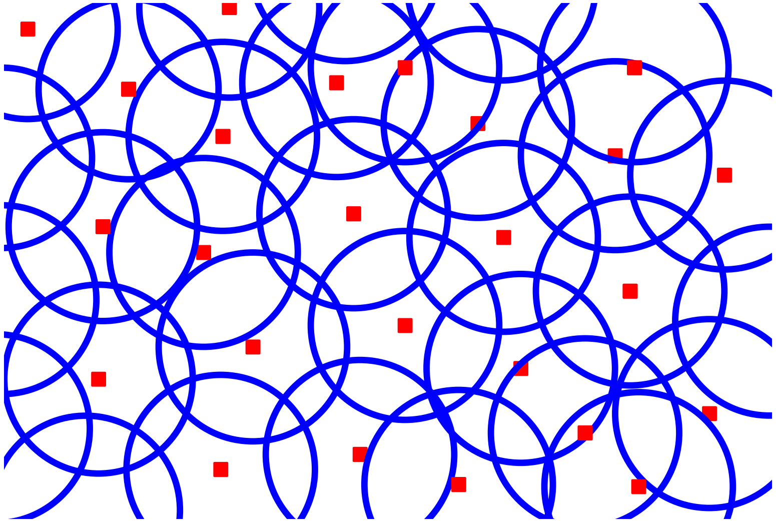
La recta como conjunto de puntos aislados.

•<u>Dimensión de recubrimiento</u> (Čech 1933)

Se basa en le principio de recubrimiento de Lebesgue:

*"En* $\mathbf{R}^n$*, si tengo un recubrimiento por discos abiertos,*

*siempre hay puntos cubiertos por al menos* $n$+1 *discos".*



•Dimensión de recubrimiento (Čech 1933)

- El conjunto vacío tiene **dim** = -1.
- Un conjunto $X$ tiene dimensión **dim** = $n$ si todo recubrimiento abierto de $X$ tiene un refinamiento abierto en de orden $n$+1.

  (El orden es $k$ si hay una familia de $k$ conjuntos con intersección no vacía pero toda intersección de $k$+1 es vacía).

- Si **dim**>$n$ para todo $n$, se dice que **dim** es infinita.

- Dimensión de recubrimiento (Čech 1933)
  - El conjunto vacío tiene **dim** = -1.
  - Un conjunto $X$ tiene dimensión **dim** = $n$ si todo recubrimiento abierto de $X$ tiene un refinamiento abierto en de orden $n$+1.

    (El orden es $k$ si hay una familia de $k$ conjuntos con intersección no vacía pero toda intersección de $k$+1 es vacía).
  - Si **dim**>$n$ para todo $n$, se dice que **dim** es infinita.

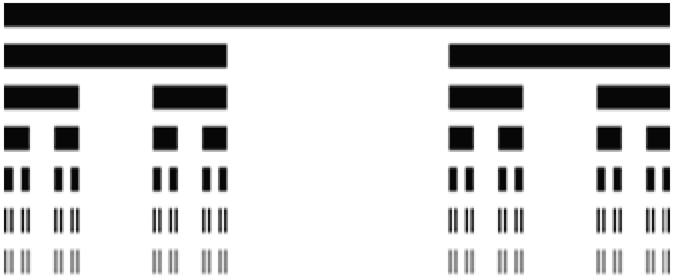
En espacios métricos separables, las nociones ind y dim coinciden, pero en general no.

Los espacios de dimensión infinita requieren estudio a parte.

# DIMENSIÓN Y FRACTALES

En el siglo XIX surgen unos objetos de *complicado* tratamiento:

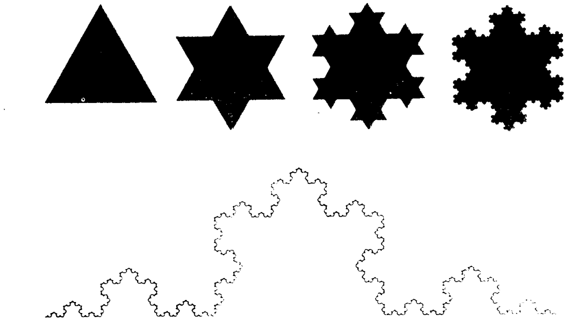
•El conjunto de Cantor:



Longitud =0

Infinitos puntos no numerables

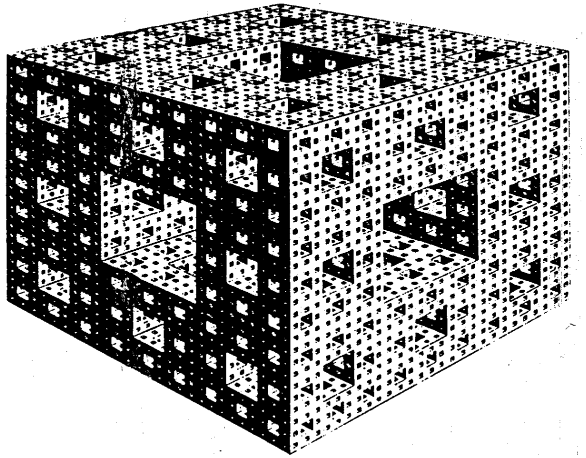
•La curva de Koch:



Área finita

Longitud infinita

• El conjunto de Cantor:



Volumen encerrado =0

Área infinita

• La curva de Peano…

## Surgen dimensiones fractales:

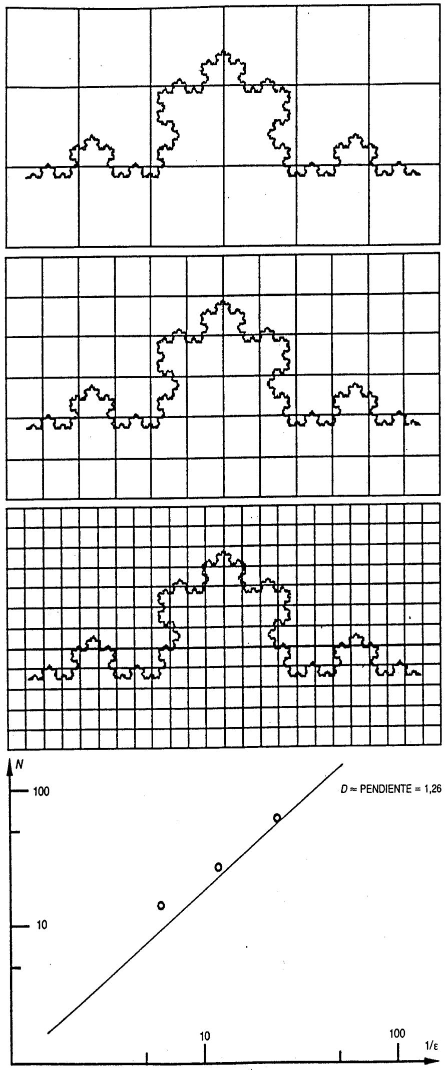
- <u>Dimensión por recubrimiento</u>:
  - La idea consiste en recubrir el conjunto en cuestión por bolas (o cuadrados) de radio igual a $1/n$ para posteriormente contar el menor número de bolas necesitadas $N(n)$. Haciendo tender $n$ a $\infty$, se define la dimensión de recubrimiento como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log N(n)}{\log n}$$

En distintos conjuntos, que el número $N(n)$ se comportaba como $n^D$ para cierto $D$, cuando $n$ es grande.

Ese $D$ es 1 para un segmento, 2 para una recta, 3 para un cubo…

Ejemplo:




**LA DIMENSION FRACTAL** de un objeto geométrico dado –en este caso la curva de copo de nieve de Koch– puede caracterizarse por medio del número de mallas que intercepta sobre un retículo. Se cuenta el número $N$ de cuadrados que recubren el objeto. La relación entre $N$ y el valor del lado $\varepsilon$ (epsilon) de los cuadrados del retículo aparece claramente en un diagrama doblemente logarítmico: los puntos correspondientes se sitúan aproximadamente sobre una recta, cuya pendiente, expresada por la razón $\log N / \log(1/\varepsilon)$, nos proporciona el valor de la dimensión fractal $D$.

En general:

- Cantor

  log2/log3 ≈ 0,631

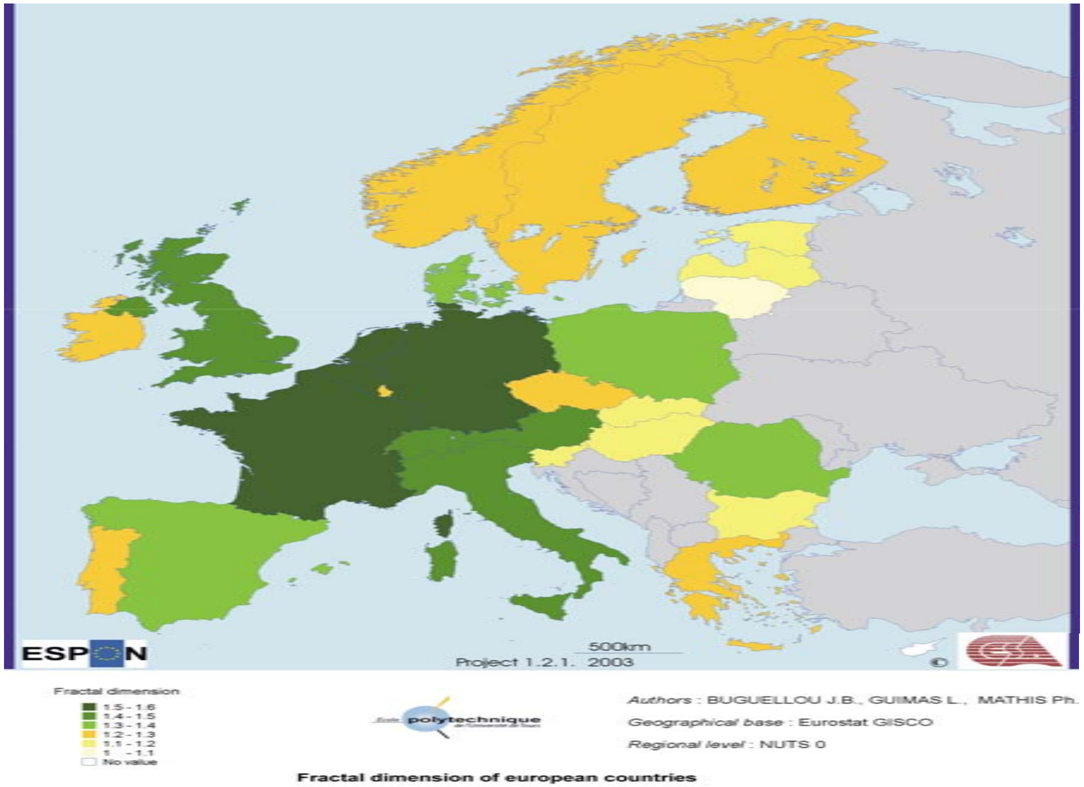
- Koch

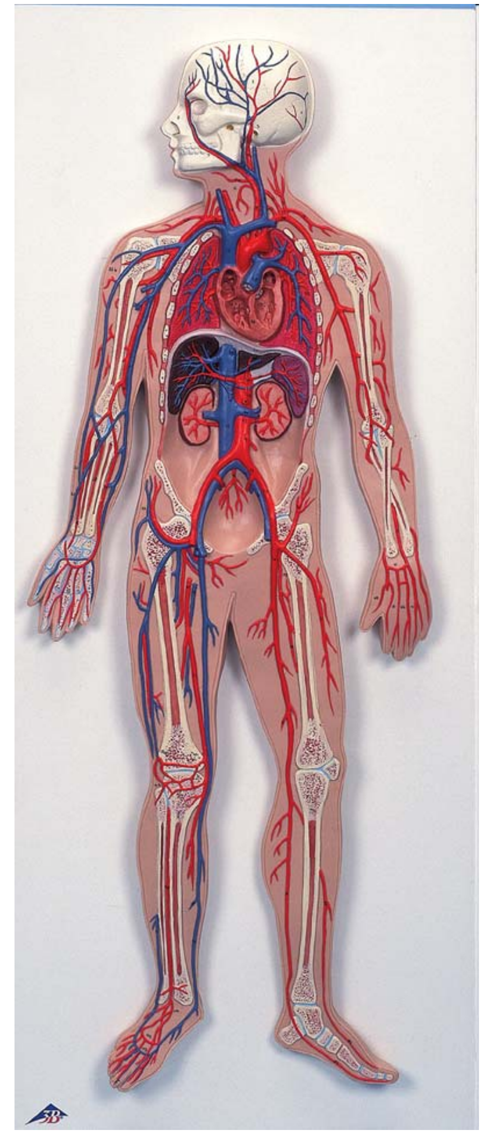
  log4/log3 ≈ 1,262

- Menger

  log20/log3 ≈ 2,727

- En otros contextos…



Por ejemplo, el sistema circulatorio

de un ser humano “tiene” una dimensión

fractal de ≈ 2'7.

## Surgen dimensiones fractales:

•Dimensión de Hausdorff-Besicovitch:

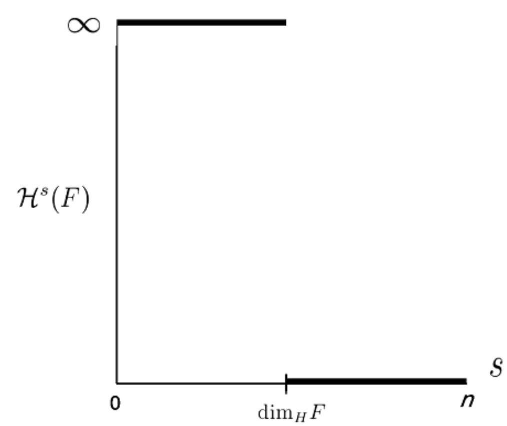
Dado un conjunto $F$, se define

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s\}$$

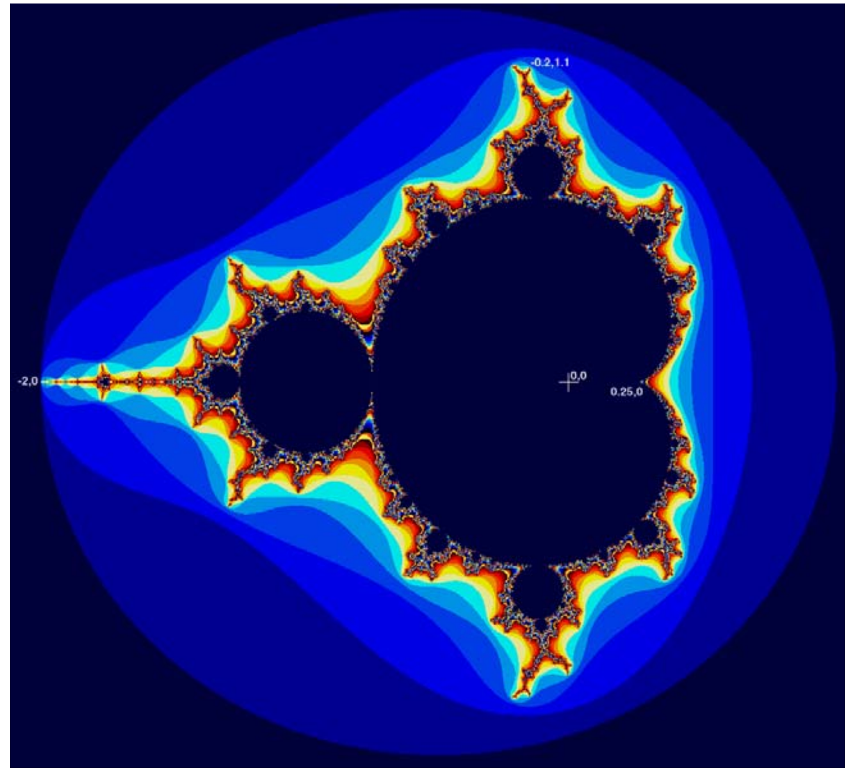
siendo $\{U_i\}$ un recubrimiento numerable de diámetro $<\delta$. Sea

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F)$$

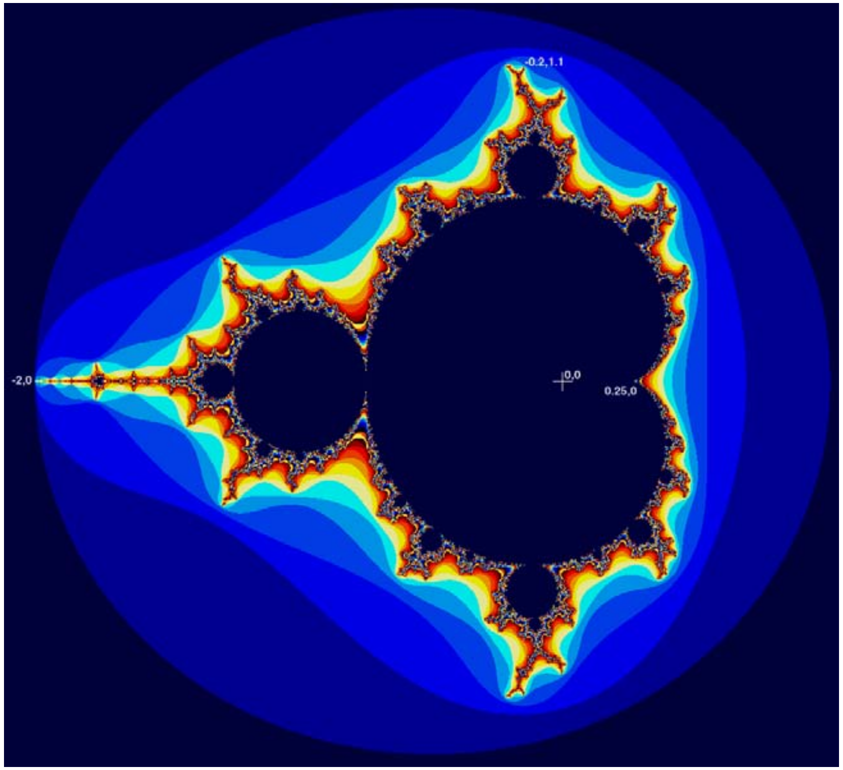
La función $H$ se comporta como



Fractal: *Conjunto cuya dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica ¿?*



Fractal: *Conjunto cuya dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica ¿?*




La dimensión fractal como medida… usos en **CAOS**.

# DIMENSIÓN Y RELATIVIDAD

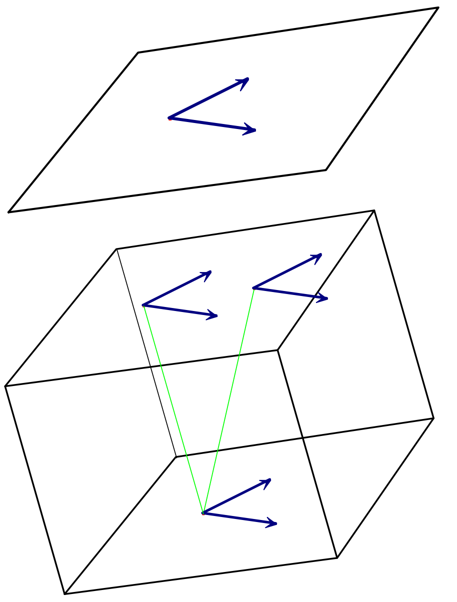
El eterno problema de la definición de un observador "bueno" pasa rápidamente por el matrimonio del espacio y el tiempo.

# DIMENSIÓN Y RELATIVIDAD

El eterno problema de la definición de un observador "bueno" pasa rápidamente por el matrimonio del espacio y el tiempo.

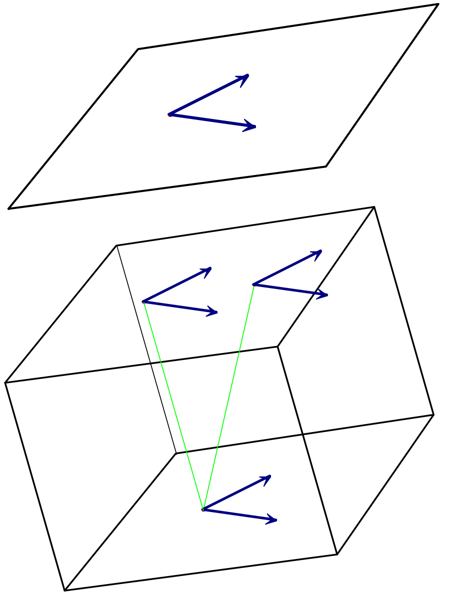
Observador primitivo en el plano:

Observador E-T en el plano:



# DIMENSIÓN Y RELATIVIDAD

El eterno problema de la definición de un observador “bueno” pasa rápidamente por el matrimonio del espacio y el tiempo.



Observador primitivo en el plano:

Observador E-T en el plano:

En el último punto, se destaca la *Relatividad General* (1915) de Einstein…

…**el espacio y el tiempo no se pueden separar**

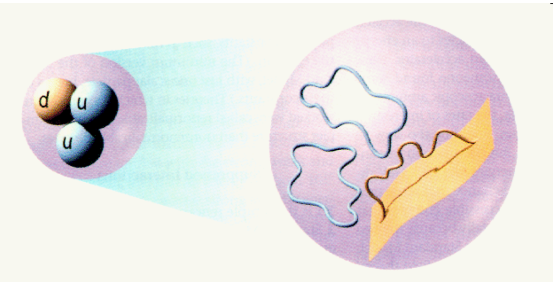
y tiene dimensión 4.

# DIMENSIÓN Y MUCHAS DIMENSIONES

La concepción de dimensión como cada una de las magnitudes de un espacio para describir cada suceso va recogiendo más variables para describir los fenómenos existentes:

- La carga.
- La polaridad.
- El espín.
- El isospín.
- El color.
- …

En la actualidad, una de las teorías en donde la idea de dimensión en Física se muestra más emocionante es en la **Teoría de Cuerdas**




•Surge en el intento de crear un marco consistente que explique todas las fuerzas de la naturaleza (modelo Estándar).

•Ya en tiempos de Eisntein. Aunque la primera persona fue T. Kaluza (1919), añadiendo una **quinta** dimensión al espacio tiempo para unificar gravedad y electromagnetismo.

•La Teoría de cuerdas propiamente dicha se desarrolla a partir de los finales de los 60 y principios de los 70.

Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.
El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.
El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

¿Cómo es que no "percibimos" esas otras dimensiones?

Se entiende que las dimensiones extra (6, 7 ó 22) son tan pequeñas (están "apretadas") que no se detectan con los experimentos actuales.

Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.
El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

¿Cómo es que no "percibimos" esas otras dimensiones?

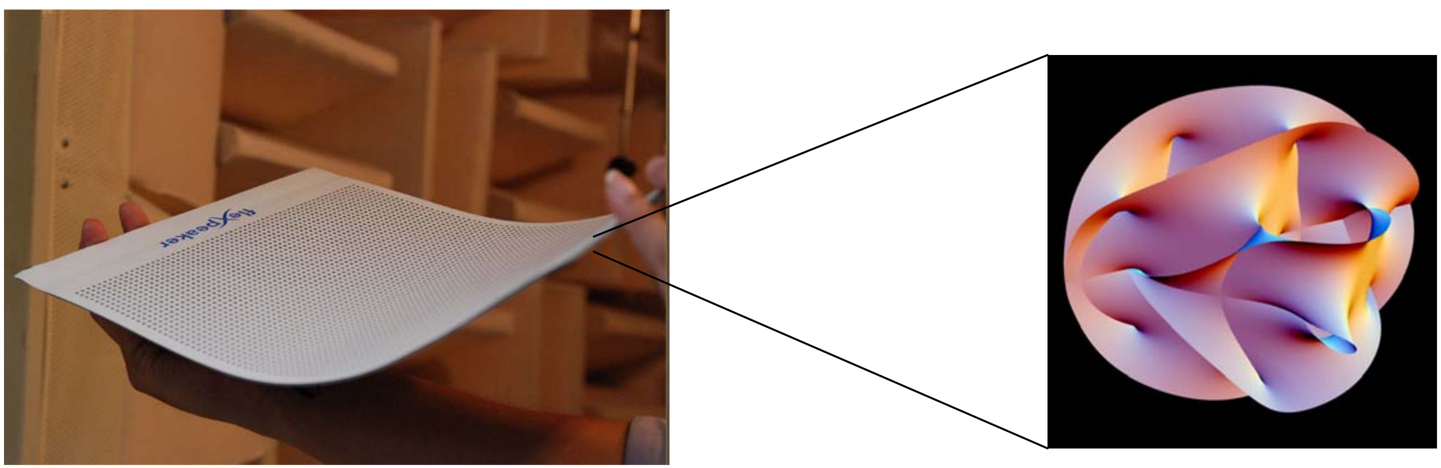
Se entiende que las dimensiones extra (6, 7 ó 22) son tan pequeñas (están "apretadas") que no se detectan con los experimentos actuales.

Para la teoría, los leptones y *quarks* (las partículas elementales) son **lazos unidimensionales** generalmente cerrados que vibran y se mueven.
El modelo se sumerge en un espacio de dimensión

**10, 11 ó 26 dimensiones**

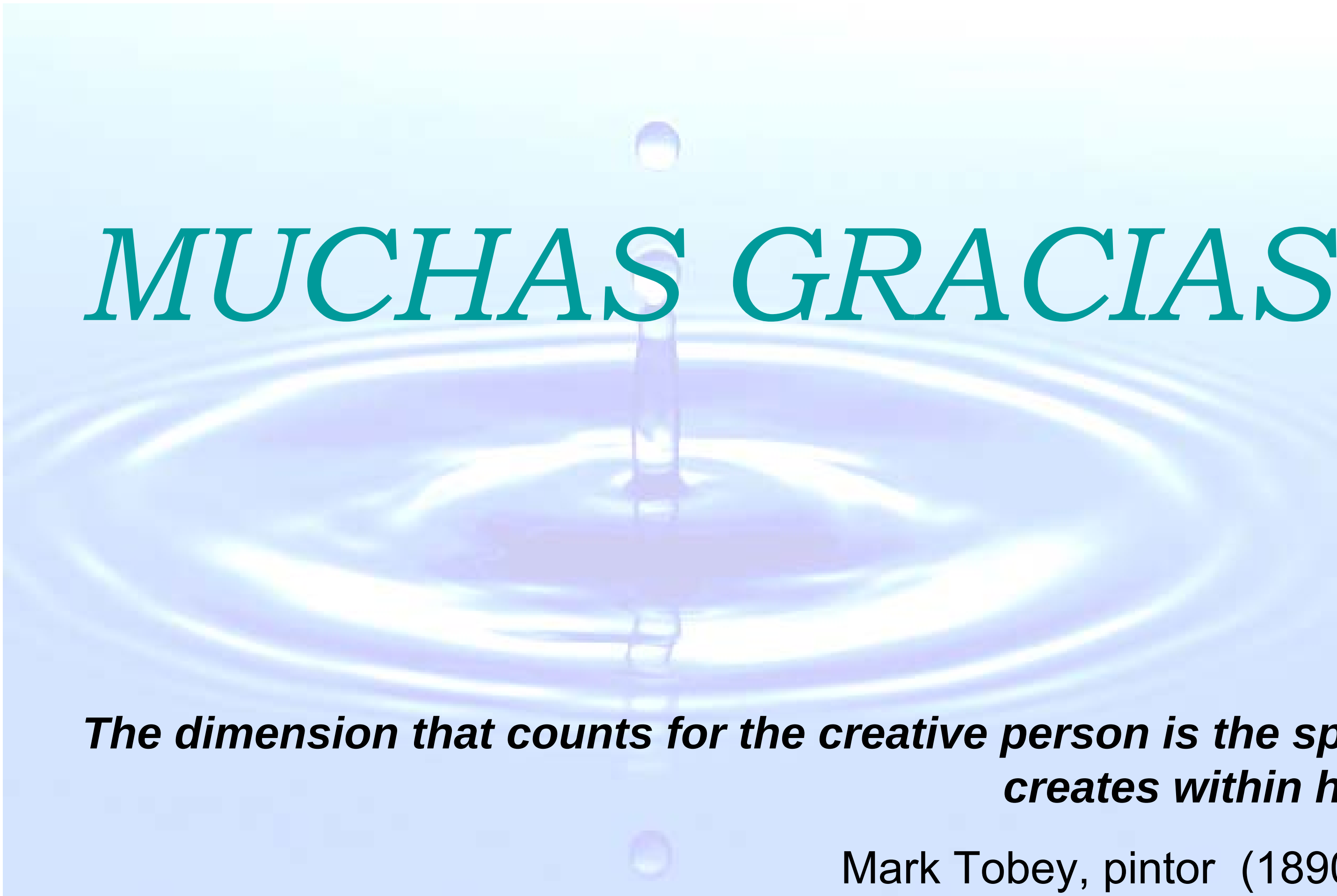
¿Cómo es que no “percibimos” esas otras dimensiones?

Se entiende que las dimensiones extra (6, 7 ó 22) son tan pequeñas (están “apretadas”) que no se detectan con los experimentos actuales.



# BIBLIOGRAFÍA


- E. Abbot, *Flatland:* ***A Romance of Many Dimensions***, Seely & Co. 1884.
- A. Alvarez, E. Ghys, J. Leys, ***www.dimensions-math.org***
- R. Engelkin, ***Dimension theory***, *North-Holland Publishing Co* 1979.
- B. Greene, ***The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory***, Norton & Company, New York 2003.
- M. de Guzmán et al., ***Estructuras fractales y sus aplicaciones***, Editorial Labor, Barcelona 1993.
- L. Henderson, ***The 4th dimension and non euclidean geometries in Modern Art***, Princeton University Press 1989.
- W. Hurewicz, H. Wallman, ***Dimension theory***, Princeton University Press 1969.



# *MUCHAS GRACIAS*

***The dimension that counts for the creative person is the space he creates within himself.***

Mark Tobey, pintor (1890-1976)