UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CICLO DE TALLERES: "MATEMÁTICAS EN ACCIÓN"
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación

LAS MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA

Dr. Ángel Cobo Ortega
Dpt. Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación
acobo@unican.es

Las matemáticas y la actividad económica

- Las ciencias económicas manejan variables cuantitativas (precio, coste, tasa inflación,...), por tanto es ineludible su tratamiento matemático
- Ventajas del enfoque matemático a la hora de la búsqueda del conocimiento económico:
  - Lenguaje más conciso y preciso
  - Agilizan el razonamiento
  - Obligan a formular explícitamente las hipótesis, evitando de esta forma el riesgo de adoptar hipótesis implícitas no deseadas

La economía matemática

- Cournot (1838): Recherches sur les principles mathématiques de la théorie des richesses.
  - Discípulo de destacados matemáticos del siglo XIX: Laplace, Lagrange y Poisson
- Etapas en la historia de la economía matemática (Intriligator):
  - Periodo marginalista: cálculo diferencial, optimización clásica
  - Periodo de teoría de conjuntos y modelos lineales (a partir de 1930): análisis convexos, topología, teoría de la medida, teoría de conjuntos, análisis input-output, programación lineal,...
  - Periodo de integración (a partir de 1961): combinación del cálculo y los modelos lineales con incertidumbre y técnicas de análisis dinámico (ecuaciones diferenciales y en diferencias)

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Las áreas funcionales de la empresa

Área de personal

- *Administración de los recursos humanos*

Área de comercialización

- *Análisis de mercados*
- *Propuesta de bienes a producir*
- *Promoción de ventas*

Área de financiación e inversión

- *Captación de recursos*
- *Empleo de los recursos*

Área de producción

- *Transformación de inputs en bienes y servicios*

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Funciones de la administración

- Planificar
  - ¿qué quiere lograrse?
  - ¿cuándo?
  - ¿de qué forma?
- Organizar
  - ¿qué lugar concreto ocupa cada elemento patrimonial?
  - ¿qué papel debe desempeñar cada elemento?
- Dirigir
  - Tomar decisiones
  - Ejercer la autoridad
- Controlar
  - Comprobar que todo va según lo planificado
  - Detectar desviaciones y corregirlas

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

La toma de decisiones

- La teoría de la decisión es un intento de descripción ordenada de las variables que influyen en las elecciones
- Orientaciones:
  - **Positiva** o **empírica**: explicar y predecir el comportamiento de los decisores (¿cómo se comportan?)
  - **Normativa**: deducción del comportamiento óptimo de los decisores (¿cómo deben comportarse?)
- La teoría económica, especialmente la de raíz microeconómica, se apoya en la teoría de la decisión normativa
- En los administradores, el proceso de toma de decisión es sin duda uno de los de mayor responsabilidad.
- En gran parte el éxito de cualquier organización depende de la adecuada selección de alternativas.

Importancia de la toma de decisiones mediante modelización matemática

- Exige una valoración profunda del problema para elegir la mejor solución.
- Obliga a definir explícitamente las metas y objetivos, a identificar las decisiones que influyen en esos objetivos y sus interacciones
- Contribuye a mantener la armonía y coherencia del grupo, y por ende su eficiencia.
- Útil en la toma de decisiones tanto estratégicas como operacionales

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

- Un proceso eficaz de toma de decisiones debe satisfacer los siguientes criterios:
  - Concentrarse en lo que es importante
  - Ser lógico y consecuente
  - Exigir solamente la cantidad de información y análisis necesarios para resolver el problema específico
  - Reconocer tanto los factores subjetivos como objetivos
  - Fomentar y guiar la recopilación de información pertinente

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Investigación Operativa

- Uso de modelos matemáticos y herramientas informáticas para la toma de decisiones racionales en la resolución de los problemas
- Proporciona una aproximación científica al análisis de problemas de decisión referentes a la asignación de recursos escasos
- Se compone de una amplia gama de modelos y métodos:
  - Teoría de colas
  - Optimización
  - Modelización estocástica
  - Simulación
  - Técnicas inteligentes,...

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Investigación Operativa: orígenes

- Kantorovich (1939): utilización de técnicas lineales para organizar y planificar la producción
- Dantzig (años 40): Programa SCOOP (Scientific Computation of Optima Program)
- Método Simplex (1949)
- Koopmans (1951): el problema del transporte
- Karush - Kuhn – Tucker (1950): programación no lineal
- Markowitz (1956): programación cuadrática, el problema de selección de cartera con riesgo

Paquetes informáticos de apoyo para la toma de decisiones

- Sistemas integrados de gestión empresarial, ERPs (Enterprise Resource Planner): SAP, Navision
- Hojas de cálculo electrónicas: Excel
- Software de Investigación Operativa: Lindo, Lingo, Gams
- Software científico de carácter general: Mathematica, Matlab

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Proceso tradicional en la toma de decisiones

- Elaboración de premisas.
  - Identificación de variables endógenas y exógenas
- Identificación de alternativas.
  - Construcción de la región factible
- Evaluación alternativas en términos de la meta deseada.
  - Función objetivo
- Elección de una alternativa (toma de la decisión)
  - Método matemático de resolución
  - Solución óptima

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

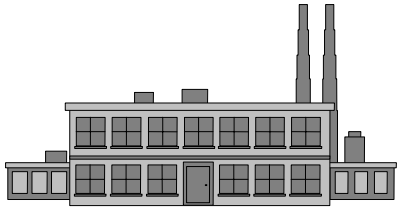
Críticas al modelo tradicional

- Existencia de varios criterios para la evaluación de las alternativas
- Posibilidad de uso de criterios no formalizables
- Dificultades en algunos problemas para encontrar soluciones óptimas

Técnicas de decisión multicriterio
Métodos basados en "poblaciones"
Técnicas heurísticas

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CICLO DE TALLERES:
"MATEMÁTICAS EN ACCIÓN"
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación



Una decisión estratégica: la localización de la planta productiva

Búsqueda la la ubicación óptima para nuestra empresa

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

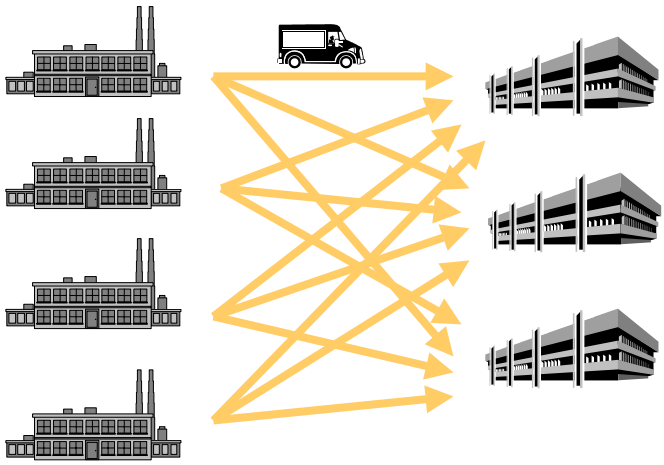
Técnicas de localización

- Método de los factores ponderados
  - Se pondera la importancia que los responsables de la administración conceden a cada uno de los factores considerados
    - Coste del terreno, mano de obra,...
- Método del punto muerto
  - El punto muerto corresponde al volumen de ventas por periodo de tiempo para el que se igualan los ingresos por ventas con los costes de producción
- Localización basada en el coste de distribución del producto
  - Método del centro de gravedad
- Método del transporte

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

El problema del transporte



PLANTEAMIENTO DEL PROGRAMA LINEAL

- Variables de decisión:
  - unidades transportadas desde cada fábrica a cada mercado
- Función objetivo:
  - coste total del transporte
- Restricciones:
  - Atender la demanda de cada mercado
  - No sobrepasar las capacidades de producción de cada fábrica

$$\begin{cases} min \sum_{i=1}^{nf}\sum_{j=1}^{nm} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{j=1}^{nm} x_{ij} \le p_i \qquad i=1,2,...,nf \\ \sum_{i=1}^{nf} x_{ij} \ge d_j \qquad j=1,2,...,nm \\ x_{ij} \ge 0 \qquad i=1,2,...,nf;\ j=1,2,...,nm \end{cases}$$

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Ejemplo ilustrativo

- ***MaxiTex***, empresa especializada en la elaboración de tejidos destinados a la industria de la confección dispone en la actualidad de dos plantas productivas en las provincias de Valladolid y Zaragoza.
- Sus principales clientes se encuentran en Galicia, Comunidad Valenciana y Cataluña, por lo que dispone de 3 centros de distribución en La Coruña, Valencia y Barcelona.
- Ante el incremento de la demanda de sus telas se plantea abrir una nueva planta productiva, para la que valora dos posibilidades:
  - Opción 1: Santander
  - Opción 2: Murcia

Plantas productivas actuales	Coste unitario de envío al centro de distribución			Producción anual	Coste unitario de producción
	La Coruña	Valencia	Barcelona		
Valladolid	12	15	18	1500	10
Zaragoza	21	12	10	2600	12
Posibles localizaciones de la nueva planta					
Santander	11	19	18	1900	9
Murcia	16	10	12	1900	7
Previsión de demanda	3000	1200	1800	6000	

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Microsoft Excel - MaxiTex.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H
5		Coste unitario envío						
6	Plantas productivas actuales	La Coruña	Valencia	Barcelona	Prod anual	Coste u. prod		
7	Valladolid	12,00 €	15,00 €	18,00 €	1500	10,00 €		
8	Zaragoza	21,00 €	12,00 €	10,00 €	2600	12,00 €		
10	Localización de la nueva planta							
11	Santander	11,00 €	19,00 €	18,00 €	1900	9,00 €		
12	Previsión de demanda	3000	1200	1800	6000			
15	*Plan de distribución y abastecimiento*							
17		La Coruña	Valencia	Barcelona	Prod planta	Cap prod	Coste prod	Costes transp
18	Valladolid	1100	400	0	1500	1500	15.000,00 €	19.200,00 €
19	Zaragoza	0	800	1800	2600	2600	31.200,00 €	27.600,00 €
20	Santander	1900	0	0	1900	1900	17.100,00 €	20.900,00 €
21	Unid recibidas	3000	1200	1800	Total	6000	63.300,00 €	67.700,00 €
22	Unid necesarias	3000	1200	1800				
24	Costes totales	131.000,00 €						

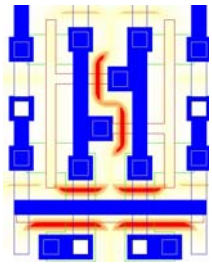
Hoja1 / Hoja2 / Hoja3 — Listo — NUM

¿Cuál sería la localización óptima para la nueva planta?

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CICLO DE TALLERES: "MATEMÁTICAS EN ACCIÓN"

Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación



La distribución de la planta productiva (layout)

Técnicas metaheurísticas para problemas de distribución en planta orientados a procesos

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Distribución en planta orientada a procesos

- Determinar la organización física de un sistema productivo
- Decisión de carácter estratégico
- Una buena distribución en planta puede permitir a la empresa alcanzar…
  - ventajas competitivas
  - eficiencia en el sistema productivo
  - flexibilidad.
- Distribución Job-shop (orientada a procesos): encontrar la localización más eficiente para un conjunto de secciones o departamentos dentro de la planta
- La eficiencia de la distribución se mide en términos de costes de traslado de materiales o personas

Costes de traslado

$$Cost = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} d_{ij} c_{ij}$$

- t_{ij} número de unidades de mercancía (o personas) a trasladar durante un periodo de tiempo desde la sección *i* hasta la sección *j*
- *n* número total de secciones
- d_{ij} distancia de la sección *i* a la sección *j*
- c_{ij} coste unitario de traslado por unidad de distancia de *i* a *j*

El objetivo del problema es minimizar el coste total del traslado, sujeto a diferentes restricciones

Problema de Optimización Combinatoria

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Restricciones

- Requerimientos de superficie y forma de las secciones o departamentos
  - los departamentos deben tener cabida dentro del área asignada
  - se pueden considerar factores como posición de escaleras, pilares,...
- Restricciones de localización de los departamentos
  - algunos departamentos deben estar asignados a áreas fijas
  - áreas incompatibles con departamentos
  - departamentos adyacentes
  - distancias de seguridad entre departamentos

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Optimización combinatoria y metaheurística

- Los problemas de optimización combinatoria suelen ser fáciles de plantear pero difíciles de resolver
- Se suele recurrir a métodos aproximados que obtienen soluciones cercanas al óptimo con reducidos tiempos de cómputo (heurísticas).
- Nueva clase de algoritmos, metaheurísticas:
  - *"Una metaheurística es un técnica de resolución iterativa que guía a una heurística subordinada combinando de forma inteligente diferentes técnicas de exploración del espacio de búsqueda; y utilizando estrategias de aprendizaje para estructurar la información con objeto de encontrar de forma eficiente soluciones cercanas al óptimo." (Osman and Laporte, 1996).*

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Clasificación de metaheurísticas

- Métodos de trayectoria
  - Búsqueda Tabú
  - Simulated Annealing
  - Búsqueda local iterada
- Métodos basados en poblaciones
  - Algoritmos genéticos
  - Algoritmos de colonias de hormigas (ACO)

Ejemplo ilustrativo

- ***MaxiTex*** ha comprado una nave industrial para la instalación de su nueva planta de Santander
- La nave tiene 18 áreas diferentes en las que se deben ubicar las 18 secciones (S1,…,S18) necesarias para la producción

Cada posible solución del problema puede ser representada como una permutación P del conjunto {1,2,3,...,18}
P(i) = j significa que S_j es situada en el área A_i

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

- Flujos (número de mercancías o personas) a mover entre las secciones *(t_{ij})*

De/a	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}	S_{17}	S_{18}
S_1	0	45	32	30	0	0	0	12	23	31	11	0	40	0	12	15	31	0
S_2	12	0	27	0	45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_3	14	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	11	7	34	23	0
S_4	22	12	0	0	32	0	0	0	0	60	45	0	0	0	0	0	0	0
S_5	0	0	0	0	0	43	32	16	48	0	0	0	0	0	0	0	21	12
S_6	0	12	0	0	0	0	0	8	4	8	11	0	20	7	9	3	8	12
S_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21	80	97	56	76	0
S_8	0	0	0	45	23	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_9	0	0	0	0	0	11	32	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{10}	0	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33	0	0	0	0	0	0
S_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	45	0	0	0	0	5	23
S_{12}	0	0	0	0	0	0	14	28	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{13}	0	0	0	0	43	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{14}	11	0	15	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{15}	0	0	0	0	0	0	23	11	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56	24	0	18	0	45	39
S_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	22	0	45	0	11
S_{18}	0	0	0	0	12	15	18	0	0	0	0	0	36	49	67	23	11	0

Distancias entre áreas (d_{ij})

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	Areas
0	1	3	5	6	3	5	6	1	3	5	2	3	3	5	6	8	9	A_1
	0	1	3	4	1	3	4	1	1	3	2	5	3	4	5	7	8	A_2
		0	1	2	1	2	3	4	3	2	5	8	6	5	4	5	6	A_3
			0	1	2	1	2	6	4	3	7	10	8	7	5	4	5	A_4
				0	3	2	1	7	5	4	8	11	9	8	6	5	4	A_5
					0	1	2	3	1	1	4	7	5	4	3	4	5	A_6
						0	1	4	2	1	4	7	5	4	2	1	2	A_7
							0	5	3	2	5	8	6	5	3	2	1	A_8
								0	1	3	1	2	2	3	4	6	7	A_9
									0	1	1	4	2	1	1	3	4	A_{10}
										0	3	6	4	3	1	2	3	A_{11}
											0	1	1	2	3	5	6	A_{12}
												0	1	3	4	6	7	A_{13}
													0	1	2	4	5	A_{14}
														0	1	3	4	A_{15}
															0	1	2	A_{16}
																0	1	A_{17}
																	0	A_{18}

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Restricciones de capacidad:

Area	Tamaño
A_1	4
A_2	4
A_3	2
A_4	1
A_5	1
A_6	2
A_7	3
A_8	3
A_9	3
A_{10}	4
A_{11}	2
A_{12}	3
A_{13}	2
A_{14}	4
A_{15}	2
A_{16}	4
A_{17}	2
A_{18}	2

Sección	Espacio necesario
S_1	1
S_2	1
S_3	1
S_4	1
S_5	1
S_6	1
S_7	1
S_8	2
S_9	2
S_{10}	2
S_{11}	2
S_{12}	2
S_{13}	2
S_{14}	3
S_{15}	3
S_{16}	3
S_{17}	4
S_{18}	4

P(7)=13
factible

P(15)=17
infactible

- Restricciones de proximidad:
  - *Por motivos de seguridad, se necesita una distancia de al menos 4 entre las secciones 2 y 8*

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

- Violación de restricciones: estrategia de penalización

$$C(P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} d_{ij} + p_c \, CapacityViolations(P) + p_p \, ProximityViolation(P)$$

$$CapacityViolations(P) = \#\left\{S_k \,\middle|\, P(i) = k \text{ and } Size(A_i) < Need(S_k)\right\}$$

$$ProximityViolation(P) = \max\left\{0, 4 - d_{ab} \,\middle|\, P(a) = 2 \text{ and } P(b) = 8\right\}$$

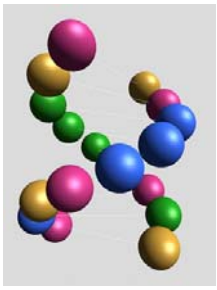
coeficientes de penalización

$$p_c = 0.5 \qquad p_p = 0.2$$

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Algoritmos Genéticos (GA)



- Procedimientos de búsqueda inspirados en los principios de la evolución y selección natural
- Se aplican a problemas de optimización cuyas soluciones factibles puedan ser codificadas mediante cadenas de longitud finita
- Manejan "poblaciones" de posibles soluciones
- En cada iteración se obtiene una nueva población usando "operadores genéticos"
- GA's han demostrado ser una poderosa herramienta para la resolución de problemas en diversos campos de aplicación

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Implementación del GA

- Representación genética

  $P=(P(1),P(2),...,P(18))$

- Función de ajuste (fitness)

$$F(P) = C_{\max} - C(P)$$

- Población inicial de posibles soluciones
  - Elección aleatoria de 20 soluciones
    - Coste mínimo: 18182,5
    - Coste máximo: 37931,6
    - Coste medio: 27367,2
    - Número de soluciones factibles: Ninguna

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

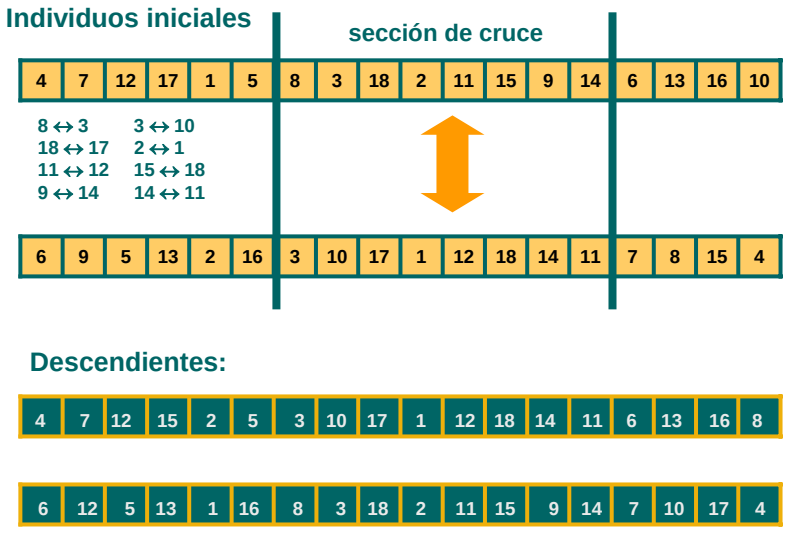
Operadores genéticos

- Operador de reproducción
  - Selección de las mejores soluciones
  - Las probabilidades de "supervivencia" son proporcionales al valor de la función de ajuste
- Operador de cruce
  - Creación de dos nuevas soluciones combinando partes de dos soluciones de partida elegidas aleatoriamente
  - El cruce se produce con una probabilidad preestablecida
  - Un buen funcionamiento del algoritmo suele requerir una alta probabilidad de cruce
  - Operador PMX (Partial Matched Crossover)

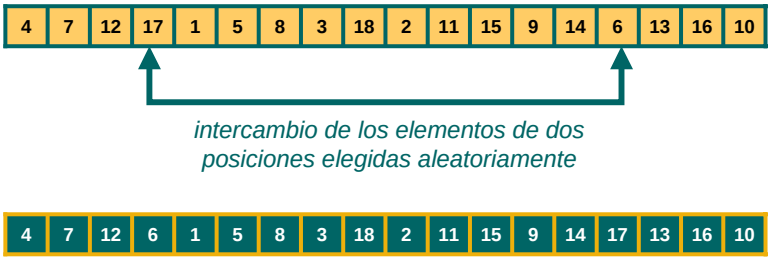
MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PMX (Partial Matched Crossover)



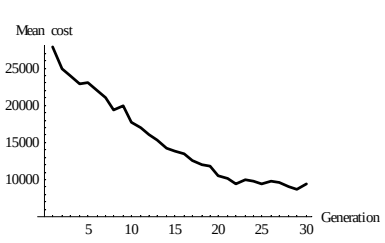
- Operador de mutación
  - Transformación que afecta a un único individuo, que sufre, con probabilidad baja, un pequeño cambio que lo transforma en uno nuevo



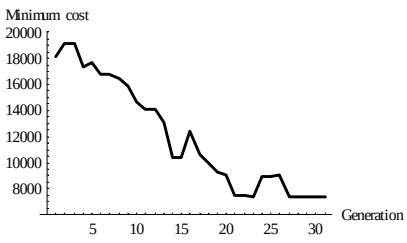
MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Resultados experimentales

- *Probabilidad de mutación = 0.1*
- *Probabilidad de cruce = 0.7*
- *Número de generaciones = 30*



Evolución del coste medio



Evolución del coste mínimo

- *Población final con 20 posibles soluciones*
- *Solo 5 soluciones factibles*
- *Mejor solución:*

P = (16,17,1,4,3,13,10,8,5,14,7,15,6,18,2,9,12,11)
Coste mínimo = 7356

Solución	*Coste total*
9, 17, 1, 4, 3, 13, 10, 8, 5, 14, 7, 15, 11, 18, 2, 16, 12, 6	*7733*
16, 17, 1, 4, 3, 13, 10, 8, 5, 14, 7, 15, 6, 18, 2, 9, 12, 11	*7356*
9, 17, 1, 4, 5, 13, 10, 8, 3, 14, 7, 15, 6, 18, 2, 16, 12, 11	*7566*
16, 17, 7, 4, 5, 13, 10, 8, 12, 14, 9, 15, 6, 18, 2, 1, 3, 11	*7967*

Se obtiene un conjunto de buenas posibles soluciones , observándose ciertas similitudes (schemata) entre ellas.

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Optimizacion basada en colonias de hormigas (ACO)

- Metaheurística inspirada en el comportamiento de las hormigas
  - Una colonia de "hormigas artificiales" coopera en la búsqueda de buenas soluciones de problemas de optimización discreta.
- ACO ha sido utilizada con éxito en una amplia variedad de problemas de optimización combinatoria
  - Problema del viajante (TSP) (Dorigo, 1992).

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Hormigas artificiales

- Una hormiga artificial es un procedimiento de construcción estocástica que construye una solución de manera incremental, añadiendo paso a paso componentes oportunamente elegidas.
- La hormiga artificial usa...
  - ***información heurística*** que proviene de un conocimiento a priori del problema
  - memoria de la evolución del proceso de búsqueda desde su inicio (***rastros de feromona***).
- En cada iteración, una nueva población de posibles soluciones es construida por un conjunto de hormigas artificiales

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Implementación del algoritmo ACO

- Algoritmo ACO para problemas de distribución en planta.
- Cada hormiga artificial construye una solución realizando paso a paso asignaciones parciales de secciones a áreas.
- Información heurística: distancias, flujos entre secciones y costes.
- Rastro de feromona: información sobre la calidad de las soluciones encontradas por las hormigas previas.

Información heurística

- La información heurística es representada por una matriz

$$\eta = (\eta_{ij})$$

η_{ij} can be seen as a measure of the quality of partial assignment of section S_i to area A_j

Una buena estrategia de asignación es colocar las secciones con fuertes interacciones con otras en las áreas centrales de la planta.

Medida de la centralidad de las áreas: uso de la desviación típica del vector de distancias

$$C(A_j) = r - SD(d_{1j}, d_{2j}, ..., d_{nj})$$

En el ejemplo propuesto:

r = 4

*C = (1.57734, 1.80672, 1.85417, 1.23703, 0.959962, 2.16711, 2.14849, 1.83597, 1.80375, **2.56286**, **2.46075**, 1.69911, 0.851704, 1.48404, 1.90659, 2.16979, 1.72985, 1.45306)*

Áreas centrales: A_{10} y A_{11}

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Medida de la interacción con otras secciones:

$$I(S_i) = \frac{\lambda_1}{M}\frac{\sum_{k=1}^{n}(t_{ik}+t_{ki})}{n} + \frac{\lambda_2}{N} Card\left\{S_k \,\middle|\, t_{ik} \neq 0 \text{ or } t_{ki} \neq 0\right\}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1] \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

donde *M* es el flujo medio máximo de las secciones y *N* el máximo número de interacciones que una sección tiene con otras.

En el ejemplo propuesto:

λ_1 = λ_2 = 0.5

*I = (**0.841271**, 0.428987, 0.477471, 0.568785, 0.710296, 0.757238, **0.846154**, 0.457427, 0.471903, 0.367141, 0.386671, 0.526469, 0.462395, 0.511992, 0.59277, 0.744818, 0.735395, 0.71141)*

Secciones con más alta interación: S_1 y S_7

Matriz heurística: $$\eta_{ij} = \frac{1}{\left|1 - \frac{\bar{I}(S_i)}{\bar{\bar{C}}(A_j)}\right|} \qquad i, j = 1,\ldots,n$$

Los vectores I y C son normalizados para obtener magnitudes comparables

Cuando los niveles normalizados de interacción y centralidad son similares, el valor heurístico será alto y el algoritmo tenderá a localizar las secciones con fuerte interacción en las áreas centrales.

Matriz heurística en el ejemplo:

12.9056	5.13849	4.64642	5.67224	1.93871	3.04372	3.09863	4.82065	5.17384	2.31359	2.44697	6.96393	1.41148	51.3163	4.22304	3.03607	6.29657	704.234
1.88827	1.6969	1.66717	2.49892	4.40437	1.52067	1.52756	1.67827	1.69886	1.4075	1.43171	1.77526	7.76399	1.99996	1.63714	1.51969	1.75114	2.04353
2.09899	1.84198	1.80313	3.00859	7.15876	1.61575	1.62442	1.8176	1.84455	1.47546	1.50515	1.94575	32.9627	2.25479	1.76418	1.61452	1.91359	2.31677
2.65755	2.19552	2.13034	4.88513	40.2556	1.83141	1.84471	2.15448	2.19986	1.62304	1.66611	2.37539	6.44721	2.96672	2.06613	1.82953	2.31871	3.09657
4.52265	3.12502	2.96385	146.269	3.57377	2.30903	2.33554	3.02268	3.13602	1.92077	1.99708	3.61105	2.25993	5.80923	2.81201	2.30531	3.45092	6.473
5.89504	3.63559	3.40588	17.007	2.74426	2.52771	2.56164	3.48909	3.65148	2.04523	2.13796	4.36412	1.85935	8.51582	3.19457	2.52295	4.11792	10.141
13.8635	5.26495	4.74688	5.46077	1.90619	3.08026	3.13683	4.92997	5.30229	2.33136	2.46769	7.21362	1.39199	72.4837	4.30354	3.07238	6.49627	138.272
2.00643	1.7791	1.74432	2.77463	5.68811	1.57503	1.58292	1.75729	1.78139	1.44658	1.4739	1.87145	14.0757	2.14196	1.70934	1.57392	1.84291	2.19541
2.07244	1.82407	1.7864	2.93973	6.67908	1.60423	1.61267	1.80044	1.82656	1.46732	1.49634	1.92453	24.0126	2.22227	1.74859	1.60303	1.89342	2.28174
1.67391	1.54198	1.52088	2.05486	2.95435	1.41449	1.41959	1.52878	1.54336	1.3294	1.34782	1.59679	3.93082	1.74797	1.49941	1.41377	1.58803	1.7763
1.73615	1.58775	1.56423	2.17703	3.29714	1.44638	1.452	1.57302	1.5893	1.35311	1.37323	1.64915	4.65686	1.8284	1.54033	1.44558	1.63034	1.85281
2.36581	2.01619	1.96509	3.78973	19.4536	1.72473	1.73563	1.98407	2.01958	1.55114	1.58744	2.15489	14.4574	2.58804	1.91429	1.72319	2.11155	2.67874
2.0286	1.79428	1.75854	2.82916	5.99328	1.58493	1.59301	1.77186	1.79664	1.45363	1.48152	1.88933	16.4057	2.16886	1.72261	1.58379	1.85993	2.22429
2.28017	1.96138	1.91429	3.51973	12.9051	1.69103	1.70122	1.93179	1.9645	1.52798	1.56221	2.08856	25.1451	2.47975	1.86735	1.68959	2.04892	2.56054
2.85727	2.31208	2.23697	5.84228	14.6935	1.89795	1.91284	2.26473	2.31709	1.66883	1.71426	2.52164	4.90641	3.23501	2.16339	1.89585	2.45524	3.39689
5.4569	3.48493	3.27658	24.1359	2.92383	2.46592	2.49766	3.35222	3.49929	2.01075	2.09878	4.13589	1.95085	7.58121	3.06357	2.46147	3.91757	8.81872
5.16564	3.37872	3.18485	35.3895	3.07655	2.42102	2.45122	3.25535	3.39204	1.98537	2.07001	3.97808	2.0265	6.99852	3.00438	2.41678	3.77812	8.02494
4.54777	3.13546	2.973	189.407	3.54832	2.31378	2.34044	3.0323	3.14656	1.92355	2.0002	3.62589	2.24844	5.85336	2.82002	2.31004	3.46423	6.52902

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Rastros de feromona

- Los rastros de feromona son almacenados en una nueva matriz

$$\tau = (\tau_{ij})$$

Una estrategia recomendada para inicializar estos valores es asignarles a todos ellos un valor ligeramente superior que la cantidad de feromona depositada por una hormiga en cada iteración:

$$\tau_{ij} = \tau_0 = \frac{m}{C(P_0)} \qquad i, j = 1,\ldots,n$$

donde m es el número de hormigas que trabajan en paralelo en cada iteración, P_0 es una solución generada aleatoriamente y $C(P_0)$ su coste asociado.

Construcción de la solución de cada hormiga

- *m* hormigas artificiales construirán de forma concurrente *m* posibles soluciones realizando asignaciones parciales de secciones a áreas.
- Cada hormiga elige aleatoriamente el orden en el que las secciones serán asignadas y usa una regla probabilística para decidir el área al que será asignada.
- La probabilidad con la que la hormiga *k* decide situar la sección S_i en el área A_j es:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \dfrac{(\tau_{ij})^\alpha (\eta_{ij})^\beta}{\sum_{q \in N_k} (\tau_{iq})^\alpha (\eta_{iq})^\beta} & if \ \ j \in N_k \\ 0 \qquad if \ \ j \notin N_k \end{cases}$$

N_k es el conjunto de índices correspondientes a las áreas que la hormiga aún no ha utilizado
α y β son dos parámetros que determinan la influencia relativa del rastro de feromona y la información heurística.

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Actualización de los rastros de feromona

- Los valores de la matriz de feromona son reducidos por un factor constante ρ, conocido como tasa de evaporación:

$$\tau_{ij} = (1-\rho)\tau_{ij} \qquad i, j = 1,...,n$$

Si las hormigas deciden no realizar determinada asignación parcial, el valor de feromona asociado tenderá a decrecer exponencialmente con el número de iteraciones.

- Después de la evaporación, las hormigas incrementan los valores de feromona asociados a las asignaciones parciales que han realizado. Este aumento es proporcional a la calidad de la solución construida:

$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij} + \dfrac{1}{C(P^k)} & if \ P^k(j) = i \\ \tau_{ij} & if \ P^k(j) \neq i \end{cases} \qquad i, j = 1,...,n; \ \ k = 1,...,m$$

- *Estrategia elitista*: realizar un incremento adicional en los valores de la feromona correspondientes a las asignaciones de la mejor solución encontrada desde el inicio del algoritmo:

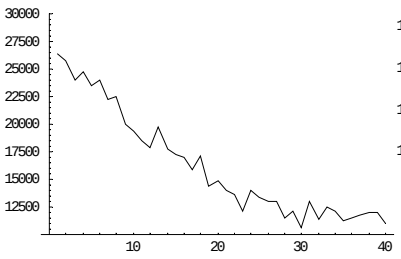
$$\tau_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij} + \dfrac{e}{C(P^{best})} & if\ P^{best}(j) = i \\ \tau_{ij} & if\ P^{best}(j) \neq i \end{cases} \qquad i, j = 1,...,n;$$

donde e es un nuevo parámetro que define el peso dado a la mejor solución hasta el momento y P^{best} es dicha solución.

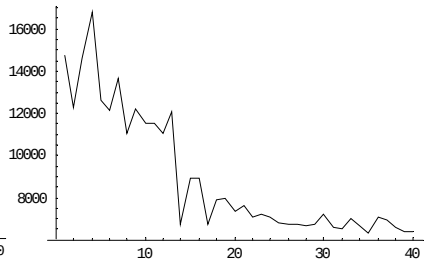
MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Resultados experimentales

- *Número de hormigas: m = 20*
- *Pesos de los rastros de feromona y de la información heurística: α = 1, β = 0.15*
- *Tasa de evaporación: ρ = 0.5*
- *Peso de la mejor solución: e = 20*



Evolución del coste medio



Evolución del coste mínimo

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

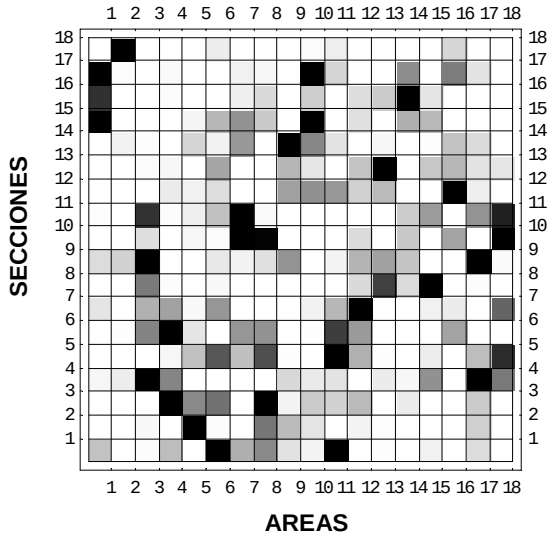
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Solución	*Coste total*	*Nº viol. capacidad*	*Violación proximidad*	*Solución factible*
15, 18, 9, 6, 2, 12, 11, 3, 4, 17, 1, 7, 13, 16, 8, 10, 14, 5	12120	1	No	No
9, 18, 11, 7, 2, 1, 6, 15, 14, 12, 3, 5, 13, 16, 8, 17, 4, 10	8231	0	No	Si
15, 18, 7, 6, 12, 3, 17, 1, 2, 4, 5, 13, 9, 16, 8, 14, 11, 10	19492	2	Si	No
16, 18, 4, 6, 3, 1, 11, 2, 12, 17, 14, 7, 9, 15, 8, 13, 5, 10	10372.5	1	No	No
17, 18, 8, 12, 2, 5, 15, 3, 14, 13, 1, 9, 16, 10, 7, 6, 4, 11	20246.4	2	Si	No
7, 18, 10, 3, 2, 5, 11, 1, 14, 15, 17, 6, 13, 16, 8, 12, 9, 4	10948.5	1	No	No
15, 18, 8, 4, 2, 1, 10, 9, 14, 17, 6, 7, 13, 16, 11, 12, 3, 5	9214.8	0	Si	No
15, 18, 4, 6, 14, 1, 11, 5, 2, 16, 12, 3, 13, 17, 8, 10, 9, 7	14922.6	1	Si	No
15, 18, 4, 1, 2, 3, 10, 6, 14, 17, 5, 7, 13, 16, 8, 12, 9, 11	6420	0	No	Si
17, 18, 7, 6, 3, 11, 10, 2, 12, 15, 1, 9, 8, 16, 13, 14, 4, 5	7999	0	No	Si
17, 18, 4, 3, 2, 1, 11, 5, 14, 15, 6, 7, 13, 16, 8, 12, 9, 10	6661	0	No	Si
15, 18, 9, 7, 2, 13, 6, 3, 14, 17, 1, 10, 8, 16, 4, 12, 11, 5	7916	0	No	Si
1, 18, 11, 6, 2, 3, 15, 10, 14, 17, 5, 7, 13, 16, 8, 12, 9, 4	7338	0	No	Si
15, 18, 9, 6, 2, 1, 10, 3, 14, 17, 5, 8, 13, 16, 11, 12, 4, 7	8429	0	No	Si
17, 9, 6, 3, 2, 7, 5, 10, 14, 15, 1, 12, 13, 16, 8, 18, 4, 11	7094	0	No	Si
16, 18, 4, 6, 2, 15, 11, 5, 1, 14, 7, 3, 12, 10, 8, 17, 9, 13	11667	1	No	No
17, 18, 6, 4, 2, 1, 14, 10, 13, 3, 5, 7, 16, 15, 8, 12, 9, 11	10095	1	No	No
16, 18, 11, 3, 2, 15, 1, 6, 9, 14, 7, 5, 13, 17, 8, 12, 4, 10	10420.5	1	No	No
17, 4, 9, 6, 11, 5, 1, 3, 14, 12, 18, 7, 8, 16, 15, 13, 2, 10	18100	0	No	Si
15, 18, 8, 3, 2, 5, 11, 1, 9, 14, 12, 7, 13, 16, 4, 6, 17, 10	13708.5	1	Si	No

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Gráfico de densidad del rastro de feromona al finalizar el algoritmo

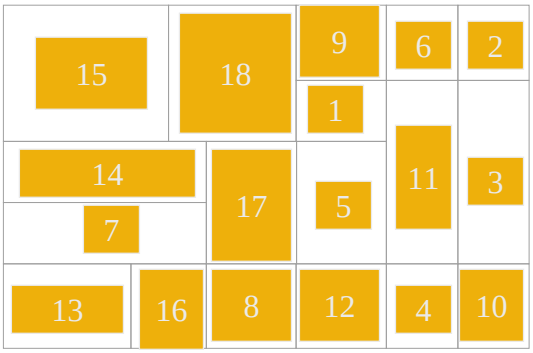


MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Mejor solución encontrada

P=(15,18,9,6,2,1,11,3,14,17,5,7,13,16,8,12,4,10)
con coste 6336.



UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CICLO DE TALLERES:
"MATEMÁTICAS EN ACCIÓN"
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación

Planificación óptima de la producción

Programación matemática y análisis económico

Programación matemática

- Tanto la programación lineal como la no lineal son herramientas habituales en la planificación de procesos productivos
- Permite obtener planes óptimos e información adicional interesante:
  - Valores óptimos
  - Precios duales
  - Costes reducidos
  - Análisis de sensibilidad

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Ejemplo ilustrativo

- ***MaxiTex*** elaborará en su nueva planta cuatro tipos de telas, que venderá a sus clientes en piezas de un ancho fijo a un precio por metro lineal de...

Tipo	*Precio*
Tipo A	7,50
Tipo B	9,25
Tipo C	9,40
Tipo D	10,70

- Ingresos obtenidos:

7.50*A+9.25*B+9.40*C+10.70*D

- Para la elaboración de las telas se utilizarán tres tipos de hilo, cuyos requerimientos por metro lineal de tela son...

Hilo	*Necesario 1m Tipo A*	*Necesario 1m Tipo B*	*Necesario 1m Tipo C*	*Necesario 1m Tipo D*
Algodón	*150m*	*160m*	*180m*	*190m*
Lino	*100m*	*80m*	*130m*	*120m*
Poliéster	*200m*	*180m*	*100m*	*50m*

- ***MaxiTex*** dispone diariamente para la producción de 250000 m de hilo de algodón, 200000 de hilo de lino y 150000 de hilo de poliéster

```
150*A + 160*B + 180*C + 190*D <= 250000
100*A + 80*B + 130*C + 120*D <= 200000
200*A + 180*B + 100*C + 50*D <= 150000
```

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

- ***MaxiTex*** dispone de una maquina tejedora capaz de producir un máximo de 2000 m de tela al día:

```
A + B + C + D <= 2000
```

- ***Programa matemático que determina el plan diario de producción que resulta óptimo:***

```
maximizar 7.50*A+9.25*B+9.40*C+10.70*D
sujeto a
      150*A + 160*B + 180*C + 190*D <= 250000
      100*A + 80*B + 130*C + 120*D <= 200000
      200*A + 180*B + 100*C + 50*D <= 150000
      A + B + C + D <= 2000
      A, B, C, D >= 0
```

- *¿Cuántos metros de cada tipo de tela se deben fabricar al día para maximizar los ingresos?*
- *¿Cuáles serían esos ingresos máximos?*
- *¿Existe algún producto no rentable?*
- *¿Cuánto se debería subir el precio de los productos no rentables?*
- *¿Se agota la materia prima?*
- *¿Cuál es el precio máximo que se podría pagar por la materia prima?*
- *¿Cómo afectarían a los ingresos el disponer de más materia prima?*
- *¿Se está utilizando a pleno rendimiento la maquinaria?*

MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación

Conclusiones

- La modelización matemática es una herramienta de enorme interés para los gerentes de cualquier tipo de empresa
- Es útil en cualquiera de las áreas funcionales de la empresa y en cualquiera de las actividades típicas de la administración
- Dentro de la matemática aplicada, el campo de la investigación de operaciones es uno de los de mayor uso en el ámbito empresarial
- La matemática está presente en la mayoría de herramientas informáticas de apoyo a la toma de decisiones con las que cuentan los directivos
- Una buena administración de empresas debe pasar de forma ineludible por la utilización de metodologías científicas en las que la matemática desempeña un papel esencial