



Simetría

Simetría en la ciencia

- **En matemáticas:**

“De la investigación de las simetrías de una estructura matemática dada han surgido siempre los resultados más poderosos” (E. Artin)

- **En física.** Mirror symmetry

- **En química.** Pasteur, Estereo-isómeros.

- **En biología.** Animales, plantas, ...

- **En geología...** Mineralogía.

- Razonamiento de Inducción, método científico experimental.

Simetría en el arte

- **Pintura, escultura, arquitectura** (geométrica).
- **Decoración** (arabescos, significado)
- **Música.**
- **Poesía.**
- Estudio de la estética, razón psicológica de la estética,

Simetría

- Universo (espacio) donde hay objetos, figuras, conceptos...
- Transformaciones (movimientos).
- Simetría: transformación que deja invariable un objeto y relaciona o cambia las partes que lo constituyen.

Simetría en geometría

- Universo: espacios geométricos.
- Objetos: figuras.
- Transformaciones: movimientos.

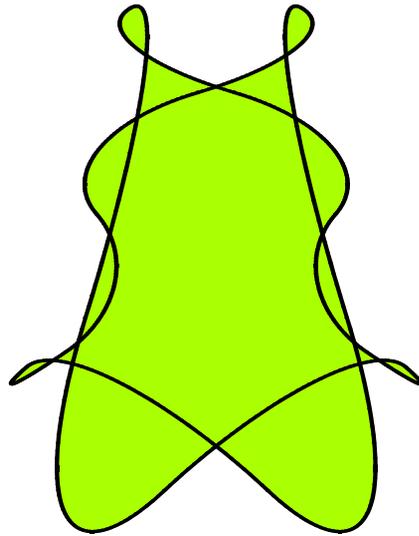
Grupos finitos de simetrías de figuras planas

- Grupos de Leonardo da Vinci:

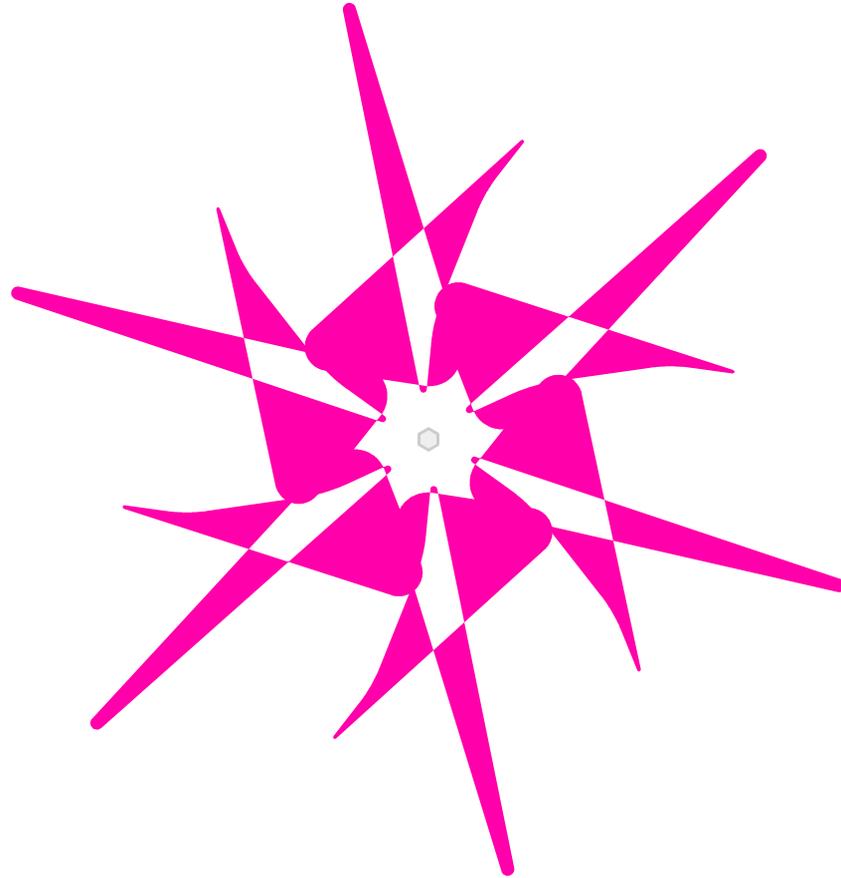
Cíclicos: C_r

Diédricos: D_r

Simetría bilateral

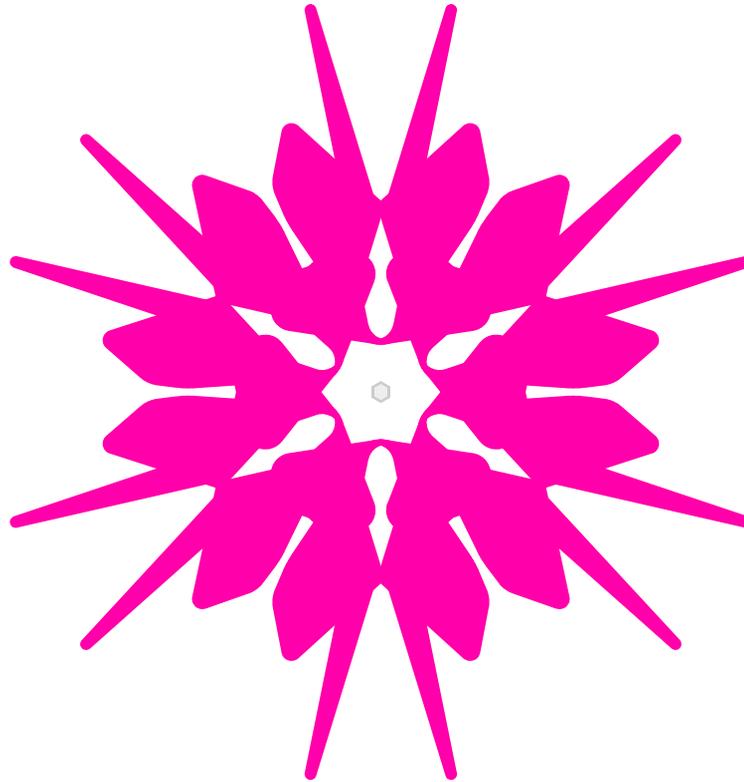


Simetría rotacional



C_6

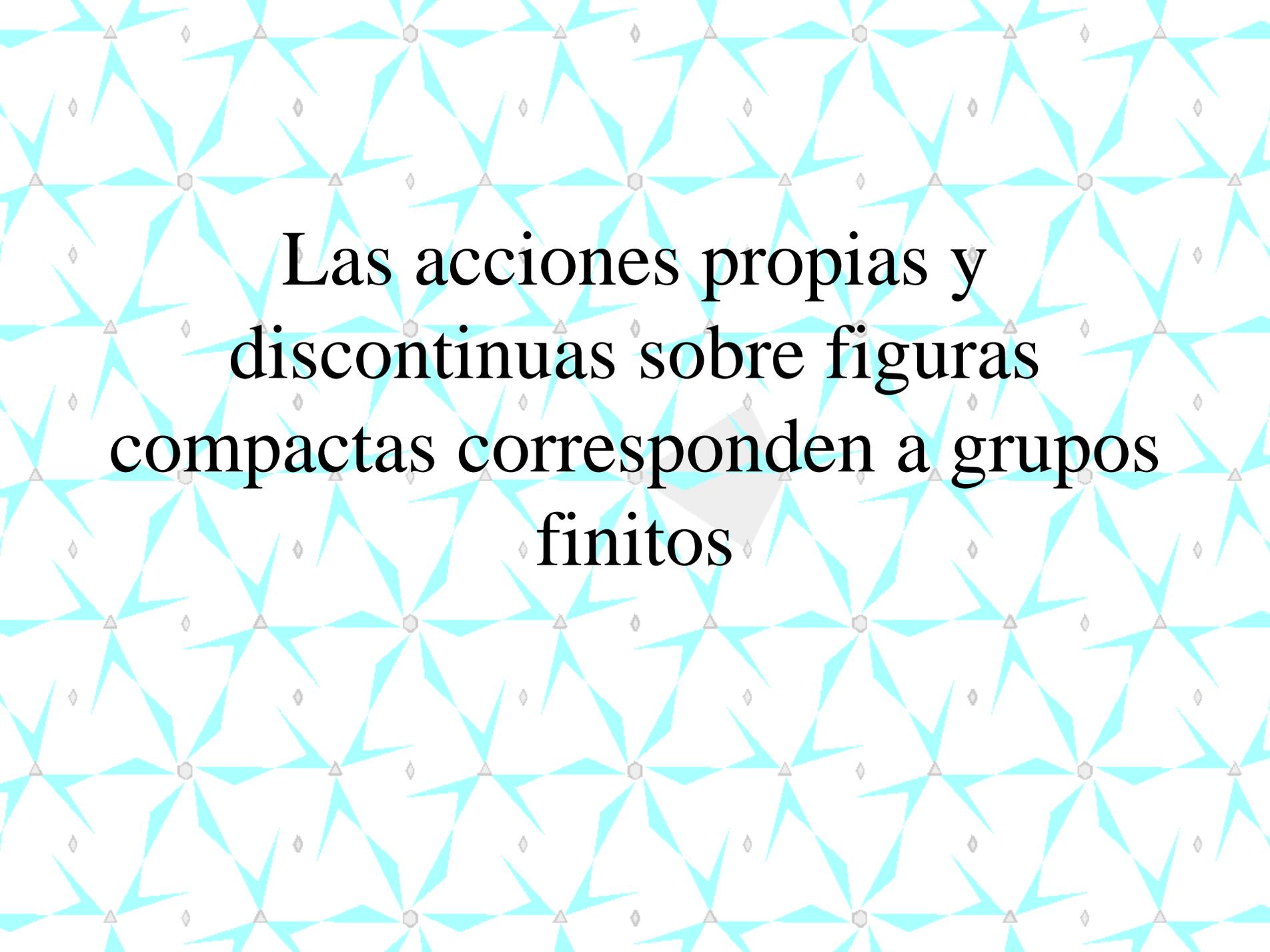
Simetría diédrica



D_6

Acciones propiamente discontinuas

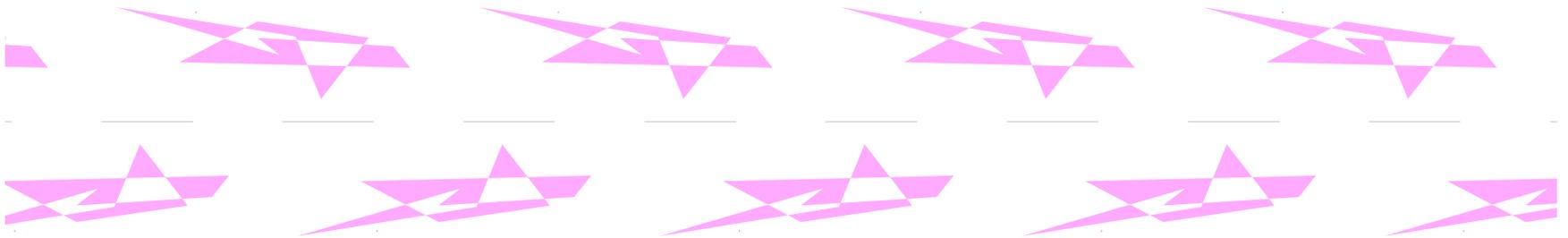
- Sea X espacio topológico y G un grupo que actúa en X .
- Para todo compacto K de X , hay solo un número finito de elementos g de G , tales que $g(K)$ corta a K .



Las acciones propias y
discontinuas sobre figuras
compactas corresponden a grupos
finitos

Grupos de frisos

- Las traslaciones de G forman un subgrupo cíclico de G .



El cociente del plano por el
subgrupo de traslaciones es un
cilindro
(Tess)

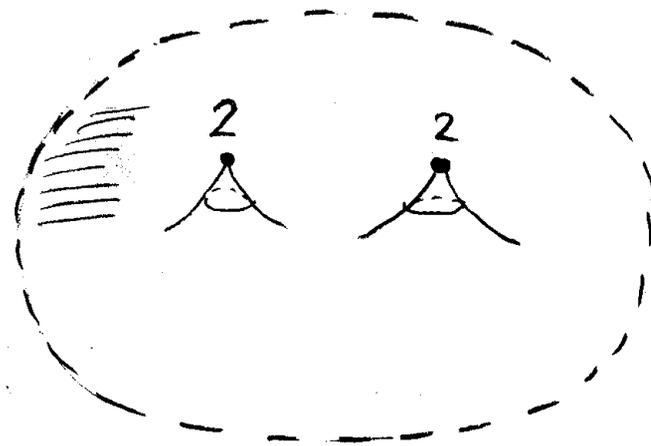
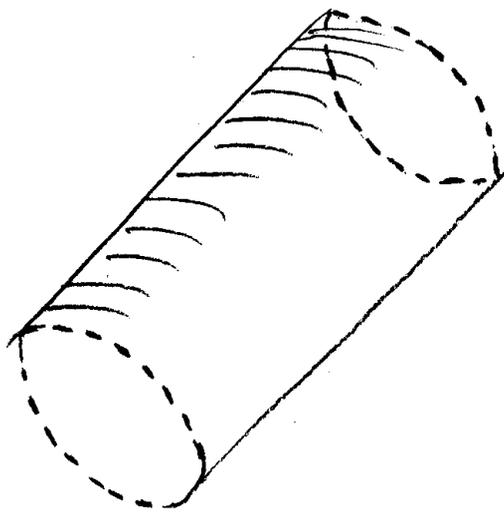
2-Orbifolds o caleidoscopios euclídeos planos

- Un espacio topológico X
- Atlas con:
 - cartas (U, f) , donde U es un abierto del plano euclídeo y las aplicaciones f son proyecciones de U sobre el cociente por un grupo finito de movimientos de U .
 - cambios de cartas que restricciones de movimientos.

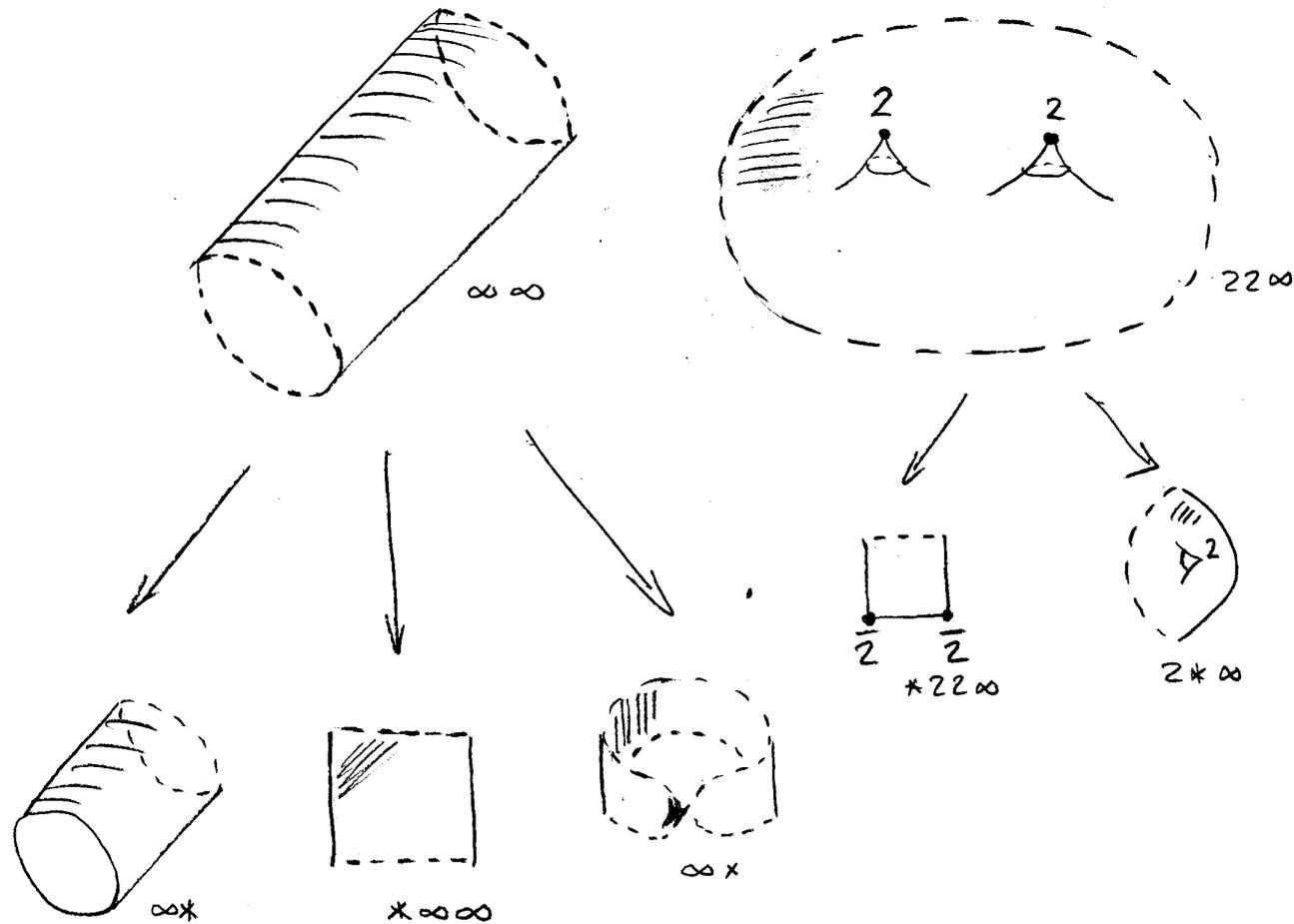
G^+

- G grupo de frisos
- G^+ subgrupo de índice dos de G formado por los elementos de G que conservan la orientación.
- E^2 / G^+ es una cubierta doble de E^2 / G , es decir, E^2 / G se obtiene de E^2 / G^+ como cociente de una involución que invierte la orientación.

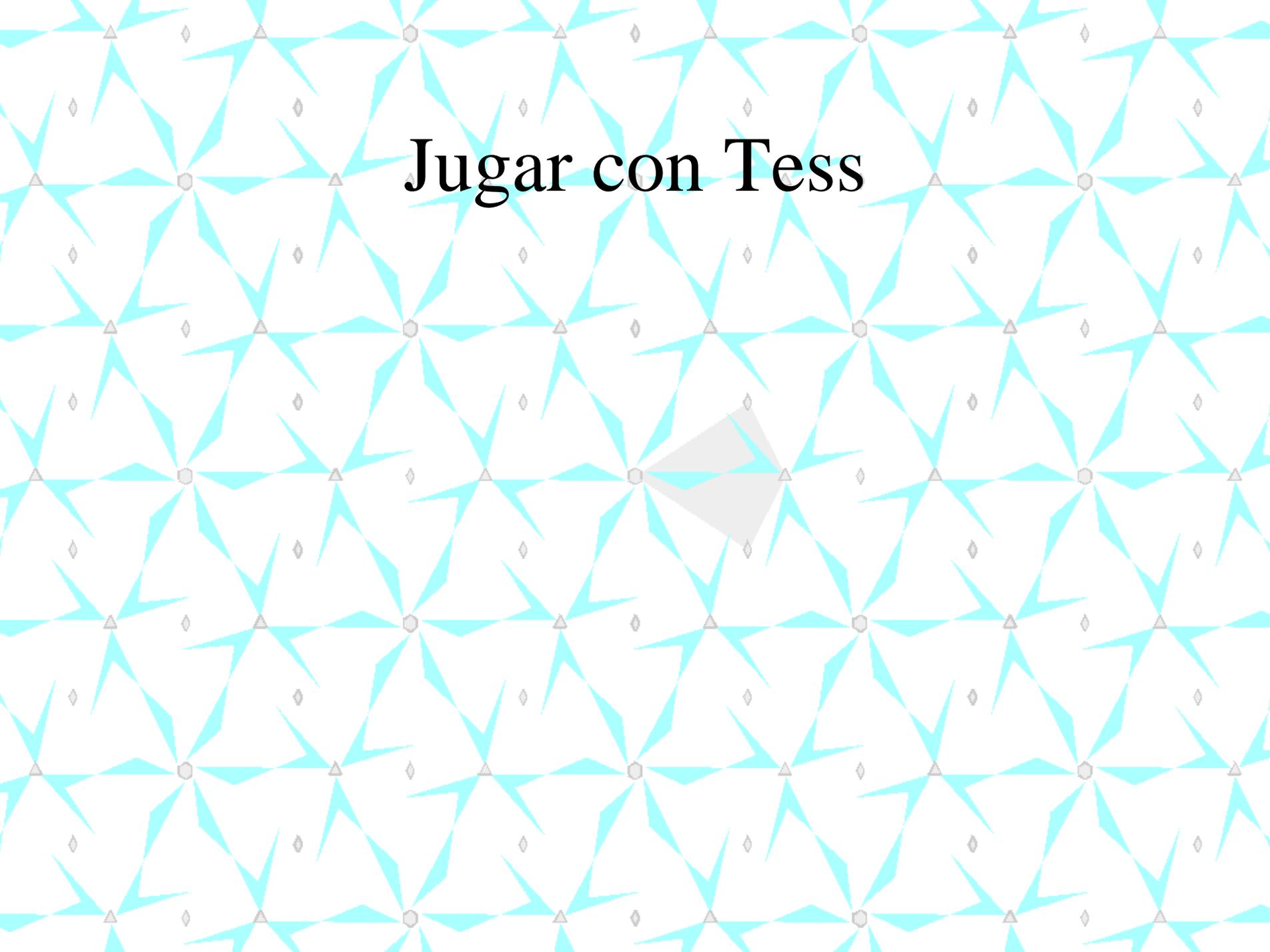
Possibles G^+



Los 7 grupos de frisos



Jugar con Tess

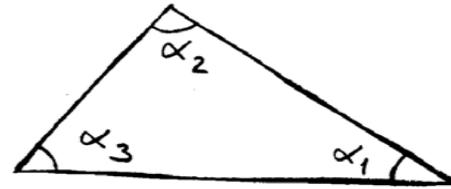


Grupo cristalográfico euclídeo plano

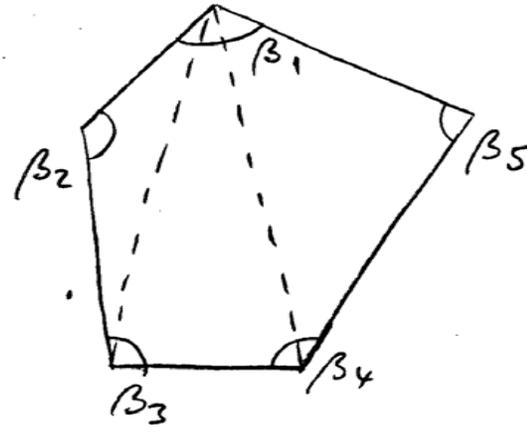
- Grupo de movimientos que actúa propia y discontinuamente en el plano y el cociente del plano es compacto.
- El subgrupo de las traslaciones tiene rango dos.

Posibles caleidoscopios

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$



$$\sum^n \beta_i = (n-2)\pi$$



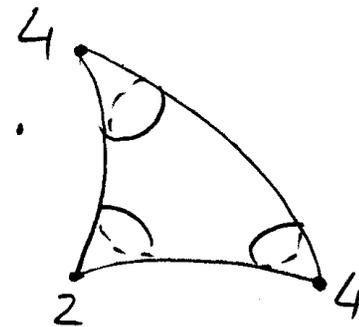
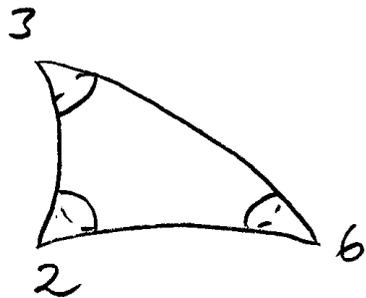
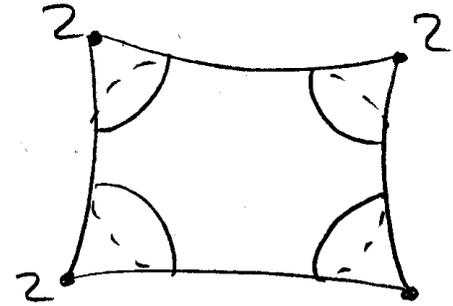
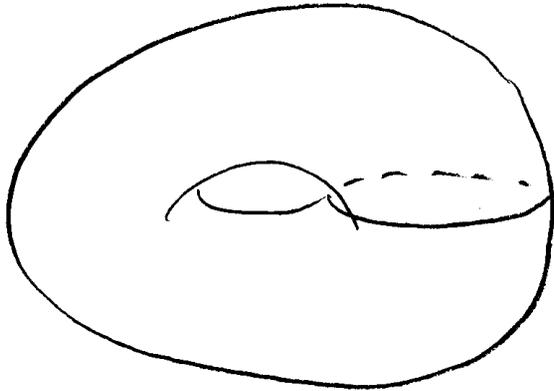
$$\sum^n \frac{\pi}{n_i} = (n-2)\pi$$

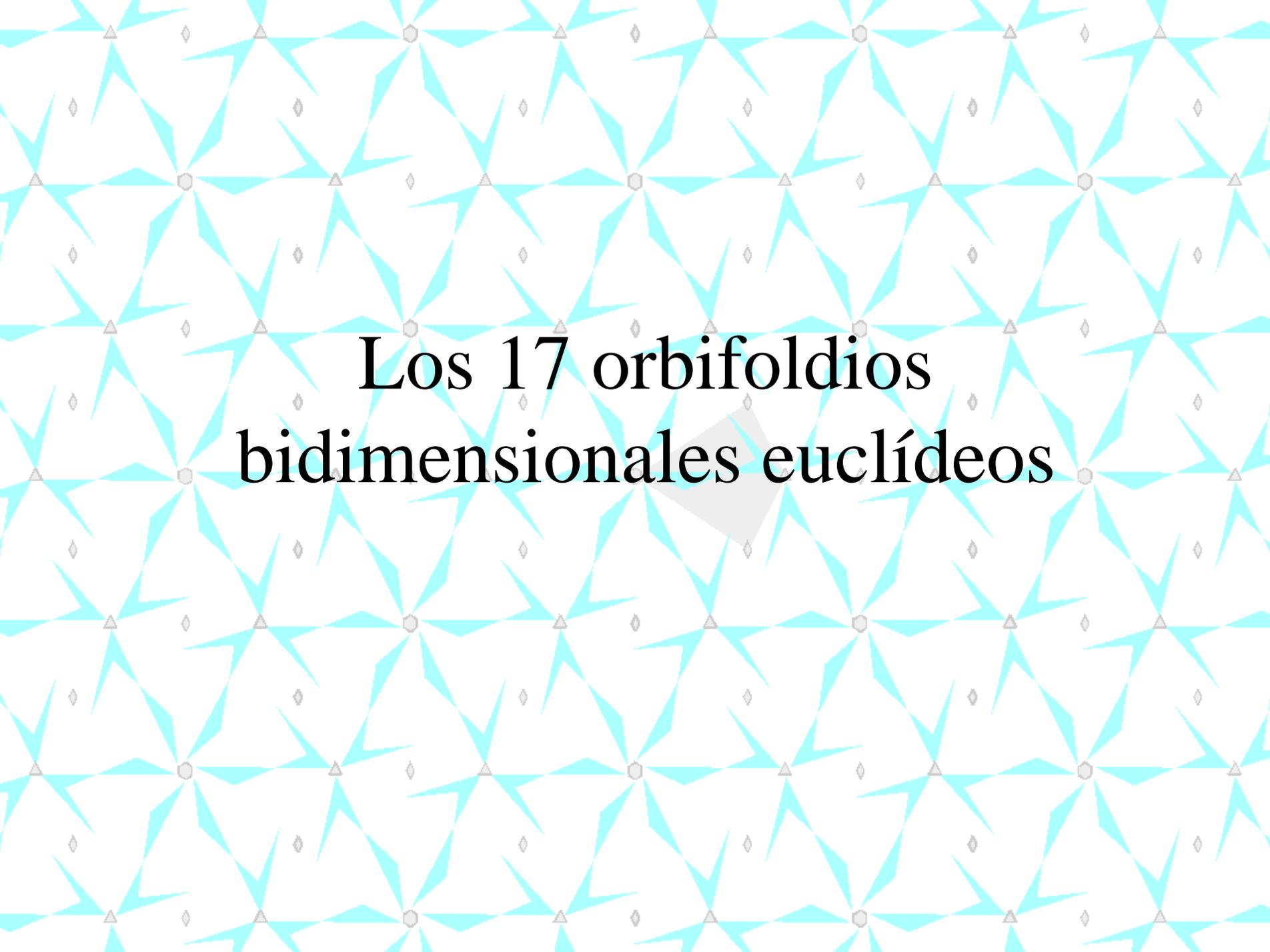
$$\sum^n \frac{1}{n_i} = (n-2)$$

Soluciones

- $1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 2$ (rectángulo)
- $1/3 + 1/3 + 1/3 = 1$ (triángulo equilátero)
- $1/4 + 1/4 + 1/2 = 1$ (escuadra)
- $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1$ (cartabón)

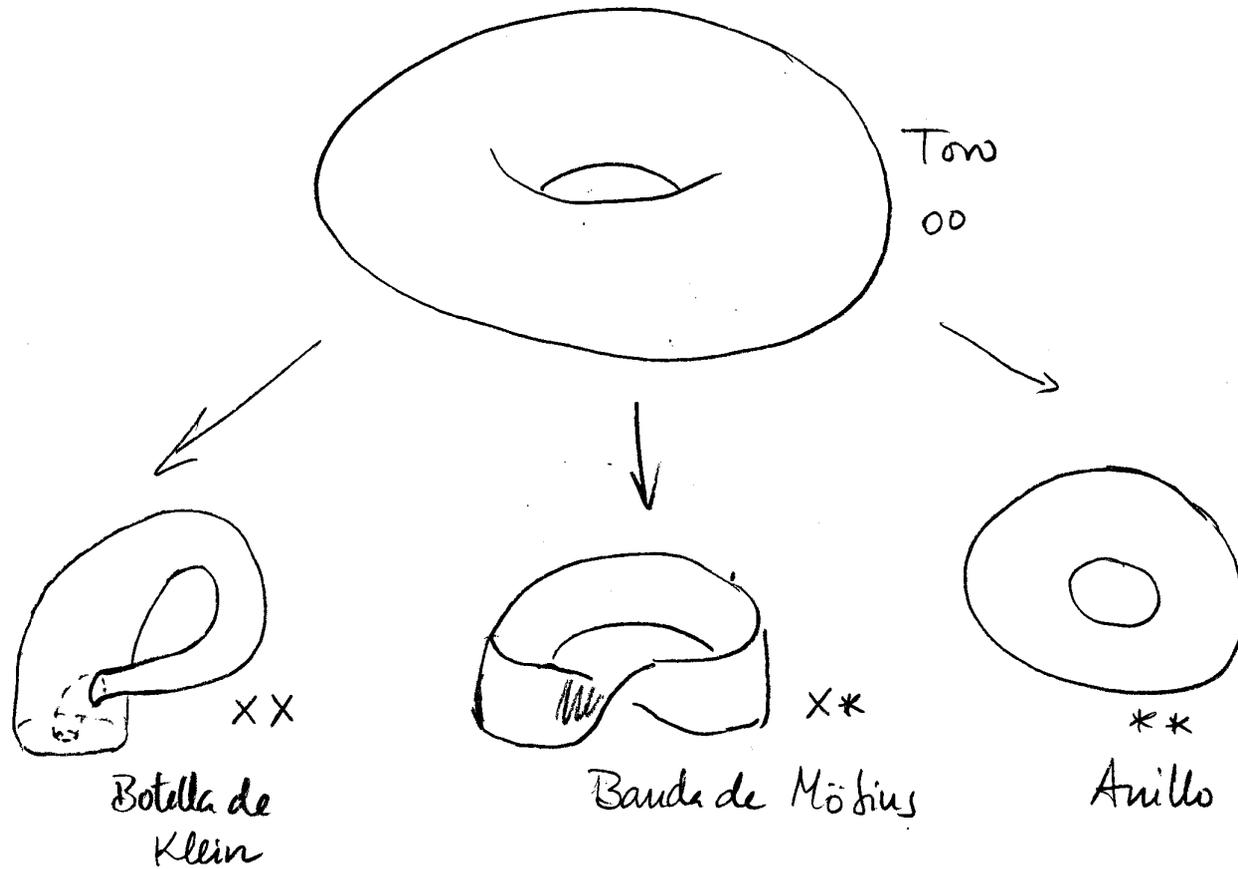
Posibles E^2/G^+



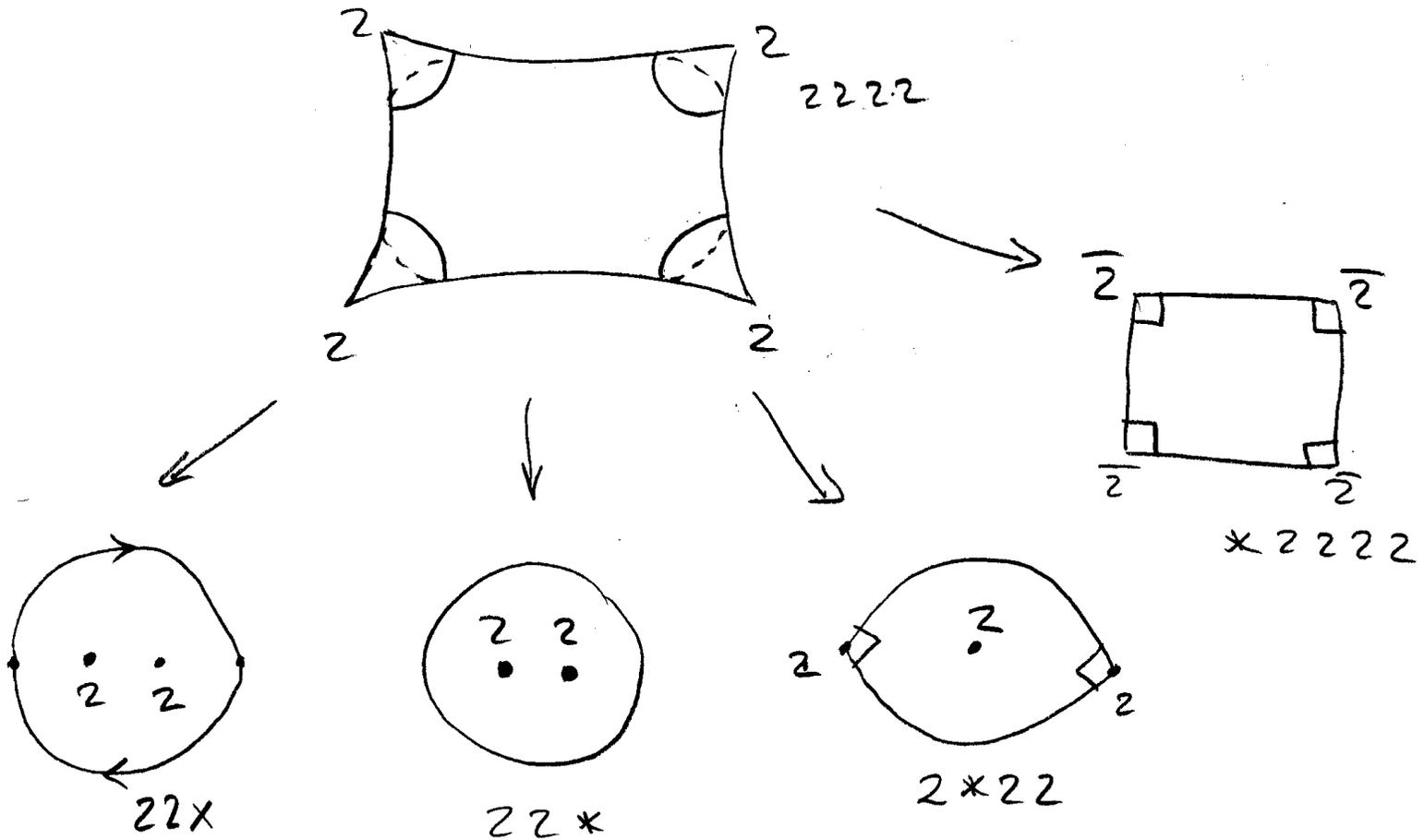


**Los 17 orbifoldios
bidimensionales euclídeos**

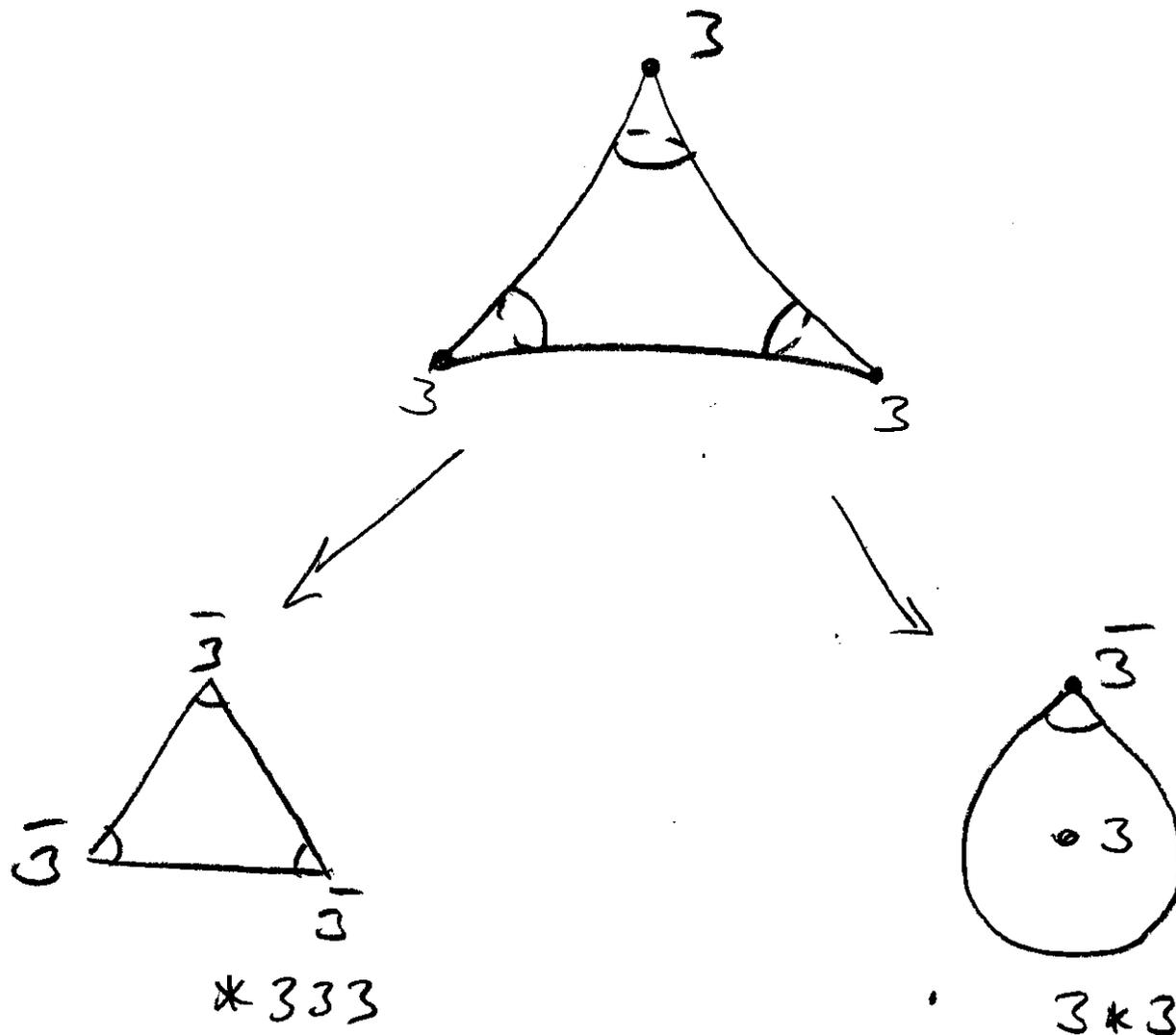
(Anti)-involuciones del toro



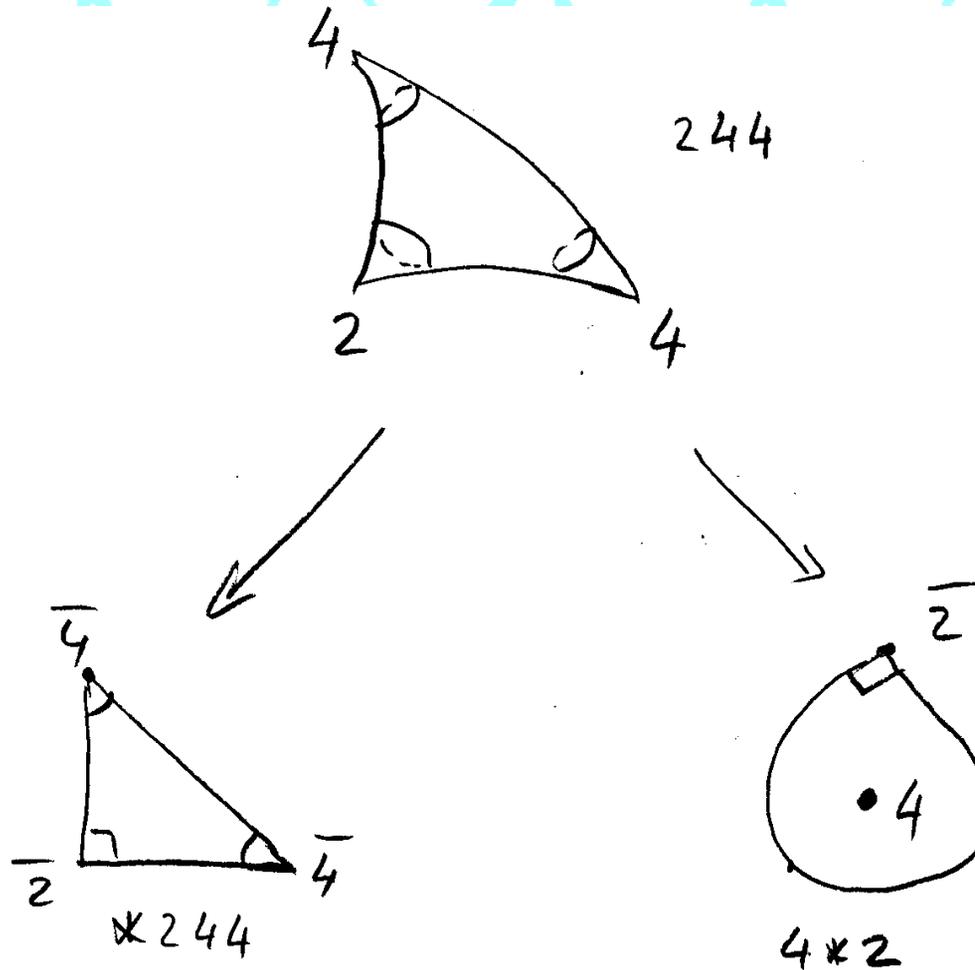
(Anti)-involuciones de 2222



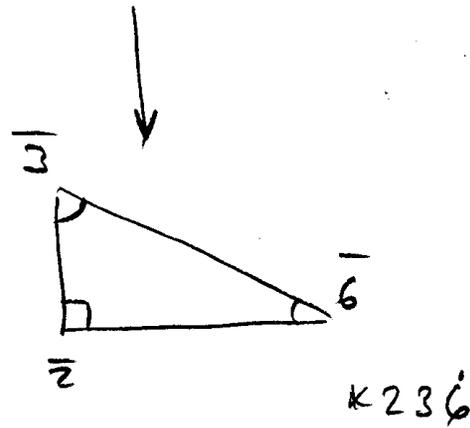
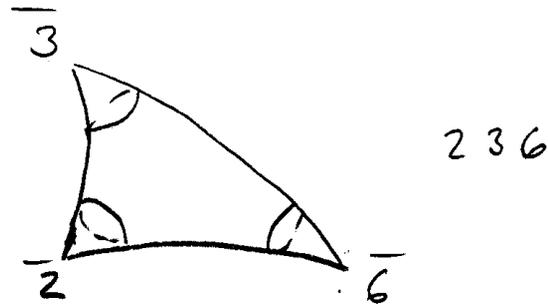
(Anti)-involuciones de 333



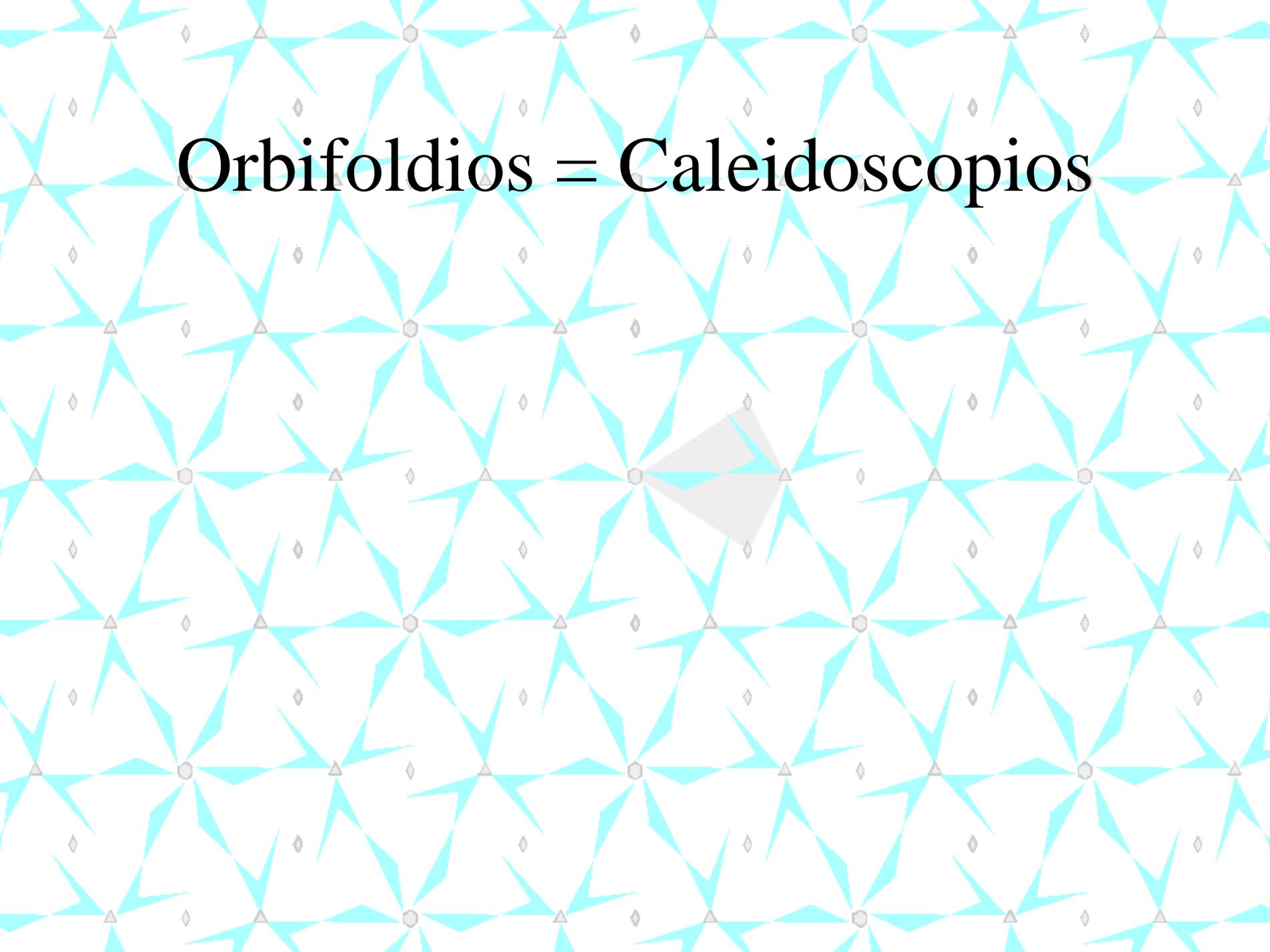
(Anti)-involuciones de 244

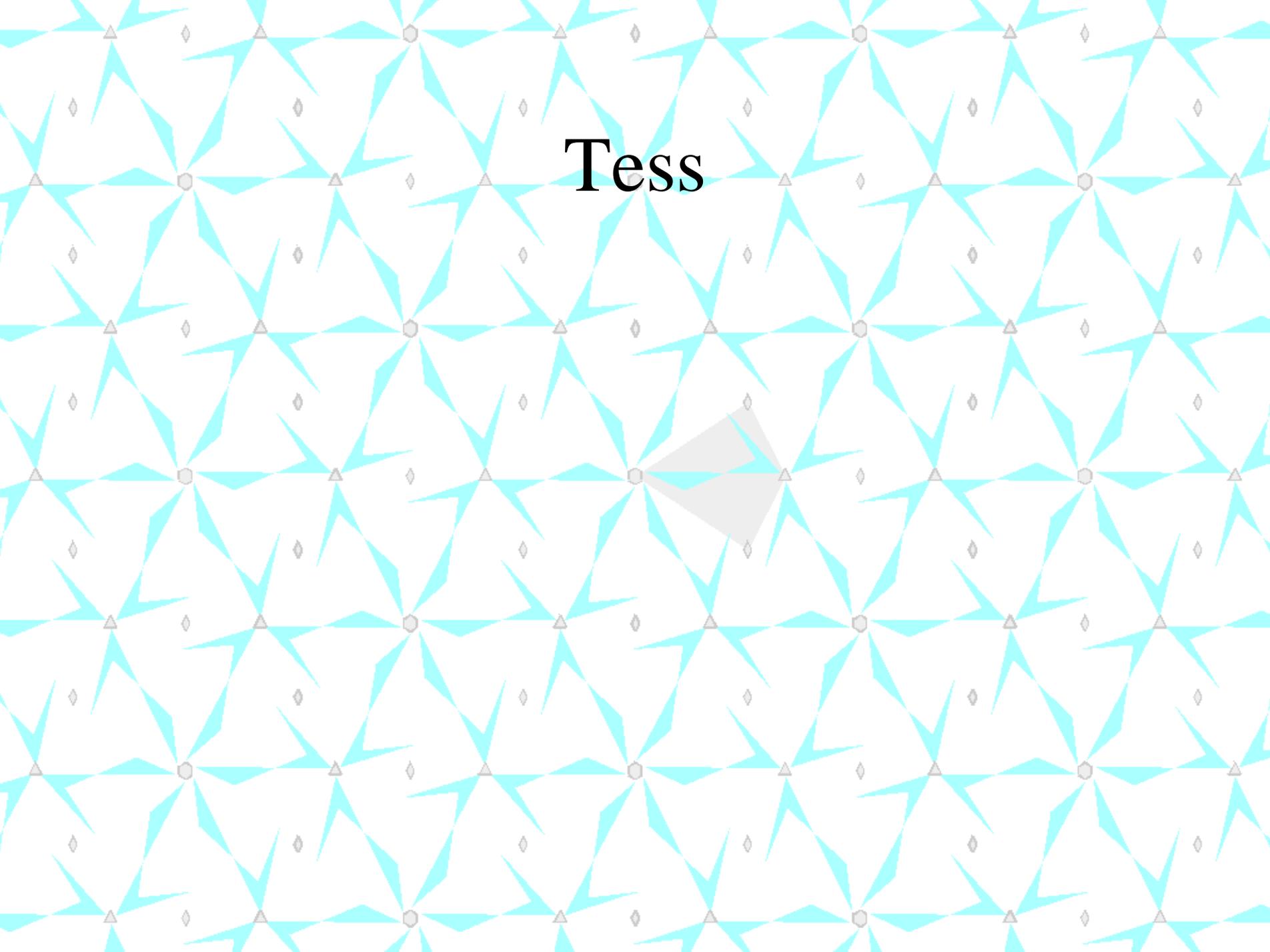


(Anti)-involuciones de 236

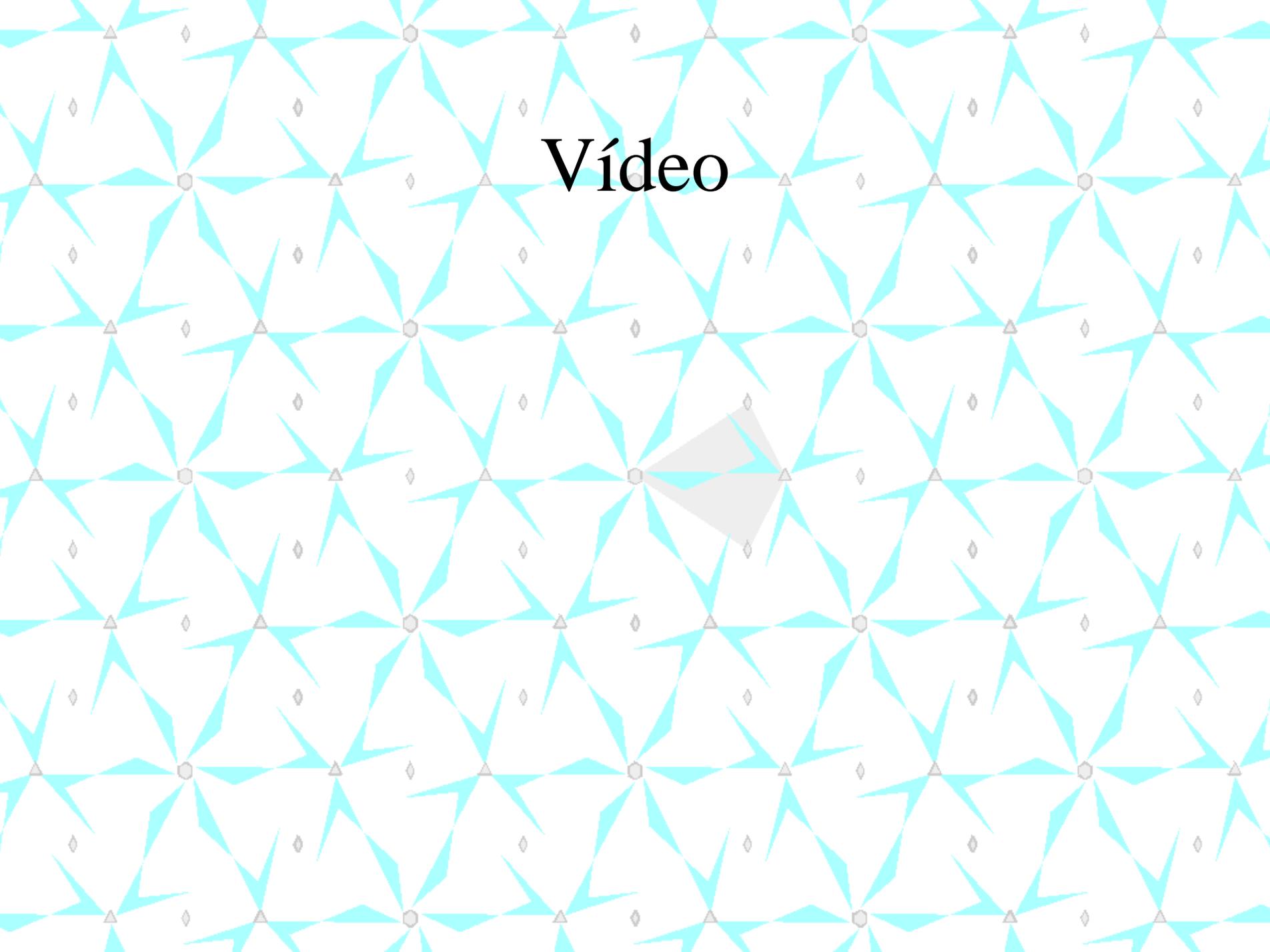


Orbifolds = Kaleidoscopes

The image features a repeating pattern of cyan, star-like or crystalline shapes arranged in a grid. Each shape is composed of several sharp, pointed triangles meeting at a central point. The background is white. In the center of the pattern, a single triangle is highlighted in a light gray color, pointing towards the right. This highlighted triangle is part of a larger, more complex shape that is also highlighted in gray, suggesting a specific geometric or topological feature within the overall pattern.

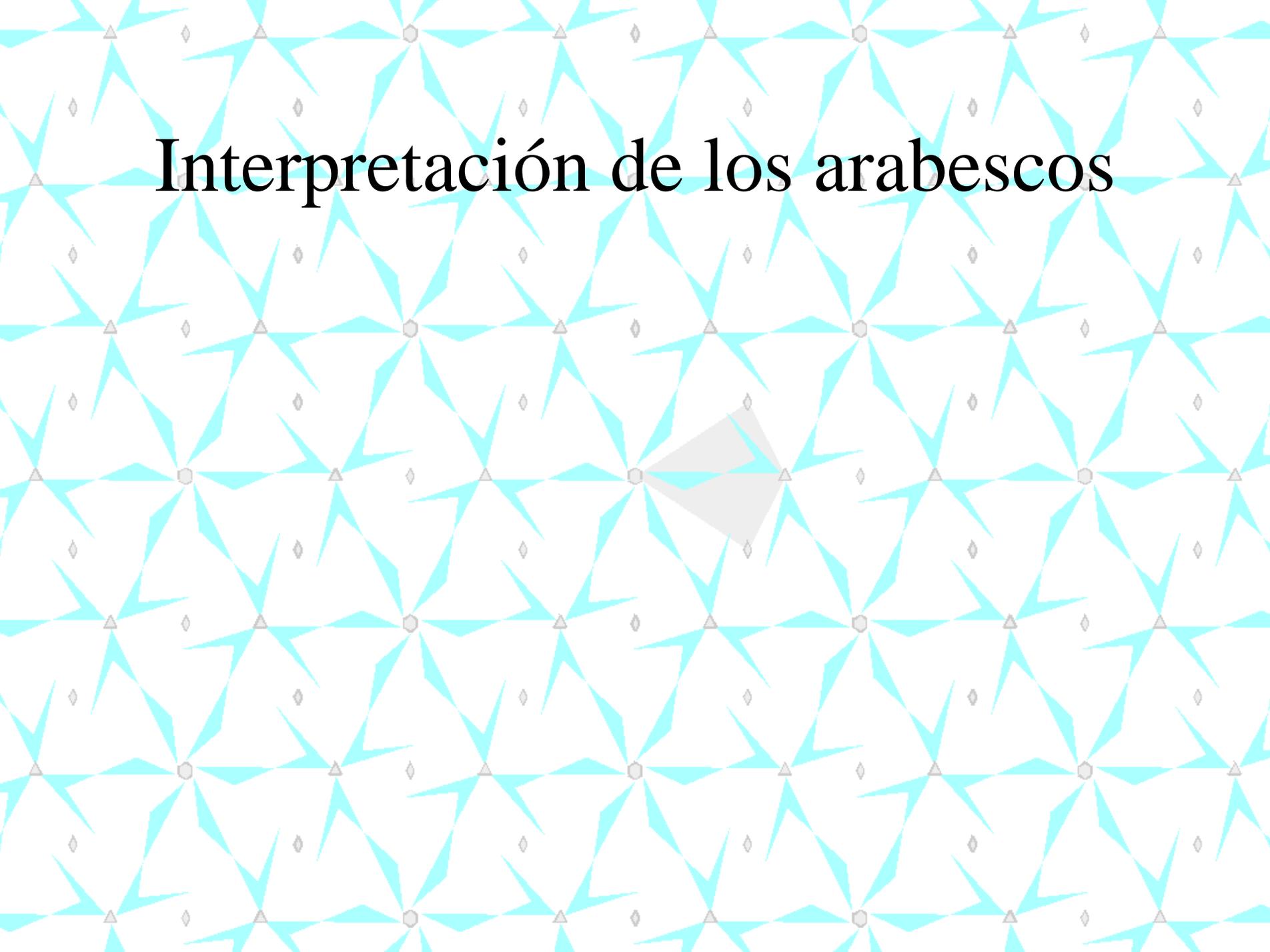


Tess



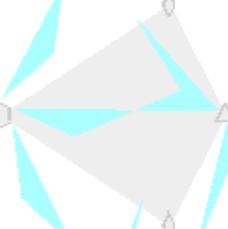
Vídeo

Interpretación de los arabescos



2 - Orbifoldios con otras geometrías

- Esféricos
- Hiperbólicos



Aplicaciones al estudio de curvas algebraicas

- Automorfismos
- Móduli
- Curvas reales

Orbifoldios tridimensionales

- Euclídeos, esféricos, hiperbólicos.
- Las 8 geometrías de Thurston.
- El teorema de orbifoldios de Boileau-Porti o Cooper-Hodgson-Kerckhoff.
- Conjetura de geometrización de Thurston:
¿Teorema de Perelman?
- La conjetura de Poincaré.