M A T E M A T I C A S

E N   A C C I O N

*   *   *   *   *   *

Estadística
(Matemáticas en la Sociedad)

Juan A. Cuesta

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación

Universidad de Cantabria

Contenido:

* Estudio de algunos problemas

Contenido:

* Estudio de algunos problemas

* Procedimientos:

  - Elementales:
    Se pueden reproducir TODAS (casi) las soluciones propuestas con una moneda

Contenido:

* Estudio de algunos problemas

* Procedimientos:

  - Elementales:
    Se pueden reproducir TODAS (casi) las soluciones propuestas con una moneda y tiempo

Contenido:

* Estudio de algunos problemas

* Procedimientos:

  - Elementales:
    Se pueden reproducir TODAS (casi) las soluciones propuestas con una moneda y tiempo

* Ideas a desarrollar:

  - Cómo se aplica la Estadística en la realidad

  - Dificultades del proceso:

    matemáticas

    otras, propias del problema

□

PROBLEMA 1.- ¿Bush o Gore?

* No cuestiono la legalidad del resultado

PROBLEMA 1.- ¿Bush o Gore?

* No cuestiono la legalidad del resultado

* Busco el vencedor "moral":

Si la gente hubiese votado a quien *quería* votar
¿Quién hubiera ganado?

□

LOS DATOS:

1.- Si Gore hubiese obtenido 155 votos más en Florida

http://www.bbc.co.uk/spanish/especiales/eeuu/news001214fotos.shtml

Gore sería hoy The President

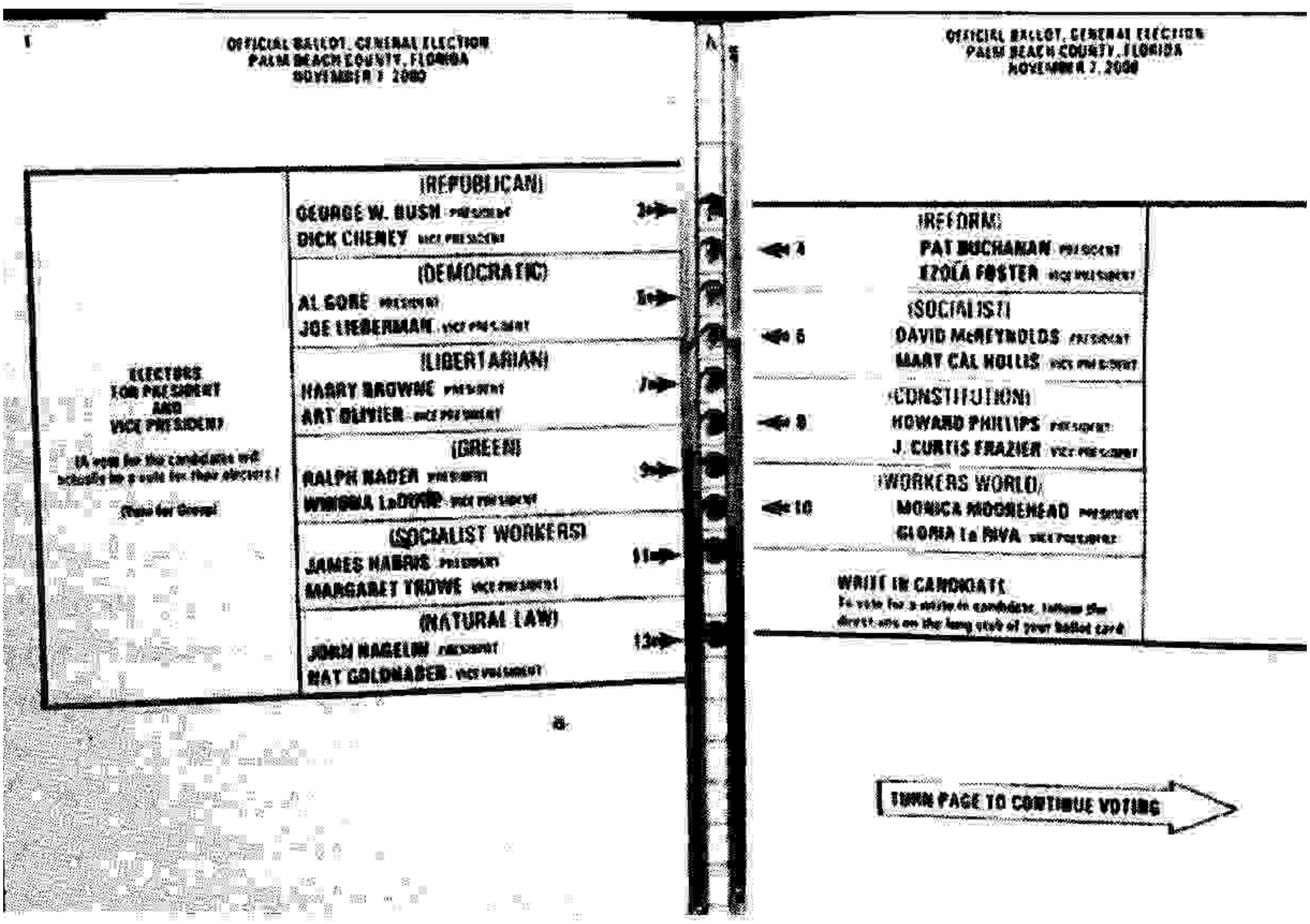
LOS DATOS:

1.- Si Gore hubiese obtenido 155 votos más en Florida

http://www.bbc.co.uk/spanish/especiales/eeuu/news001214fotos.shtml

Gore sería hoy The President

2.- Las “butterfly ballots” de Palm Beach



igure 1. The butterfly ballot of Palm Beach County, Florida.

Podemos comprobar si esta hipótesis es cierta porque

Las butterfly sólo se usaron en P.B.

Si representamos los votos de Buchanan
contra el número de votantes en cada condado

Podemos ver si hay algo raro

Podemos comprobar si esta hipótesis es cierta porque

Las butterfly sólo se usaron en P.B.

Si representamos los votos de Buchanan

contra el número de votantes en cada condado

Podemos ver si hay algo raro

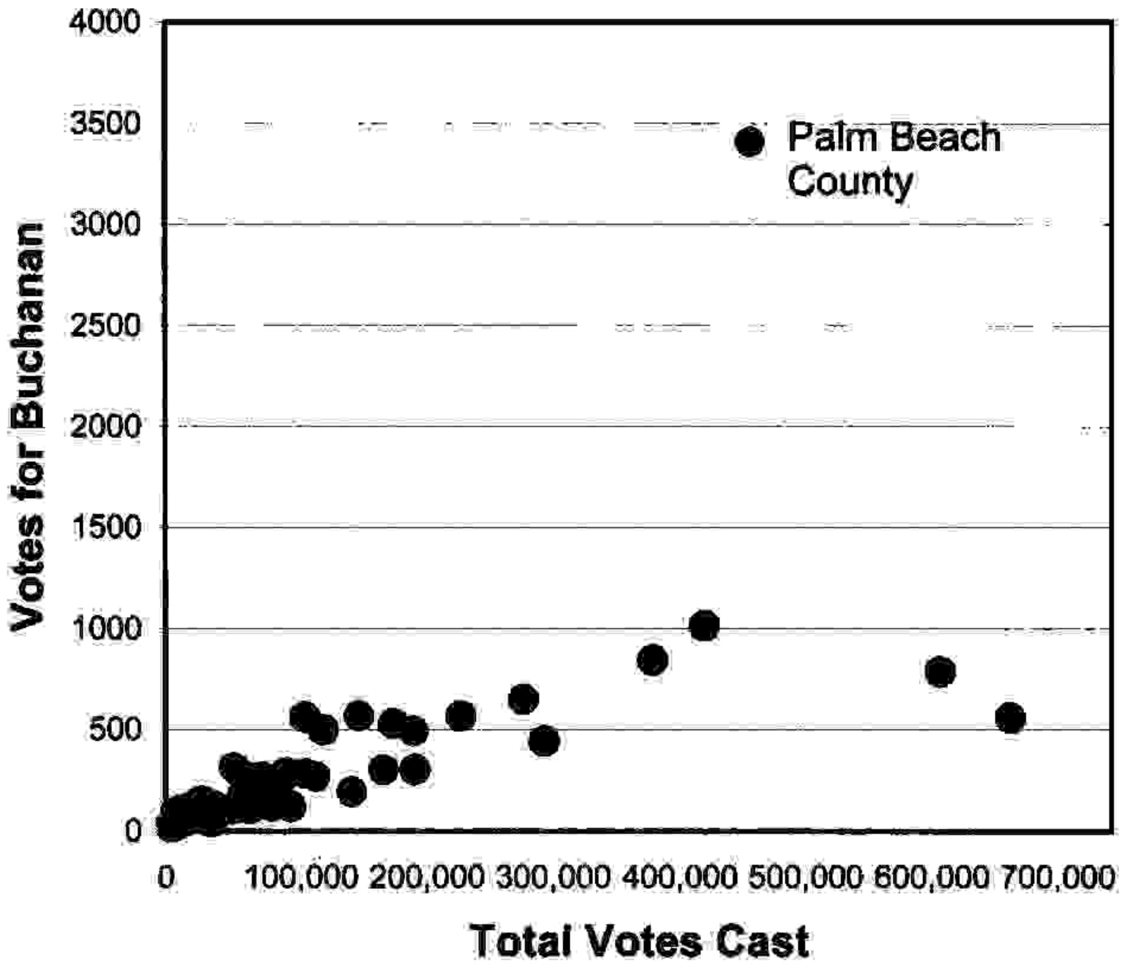


Figure 2. Presidential election results for Florida showing the votes cast for Buchanan and the total votes cast by county.

Es obvio que

Buchanan sacó 2000 votos de más en P.B., pero,

¿Por qué?

Varias posibilidades:

1. La gente se lió con las papeletas
2. El partido de Buchanan es muy popular en P.B.

Es obvio que

Buchanan sacó 2000 votos de más en P.B., pero,

¿Por qué?

Varias posibilidades:

1. La gente se lió con las papeletas
2. El partido de Buchanan es muy popular en P.B.

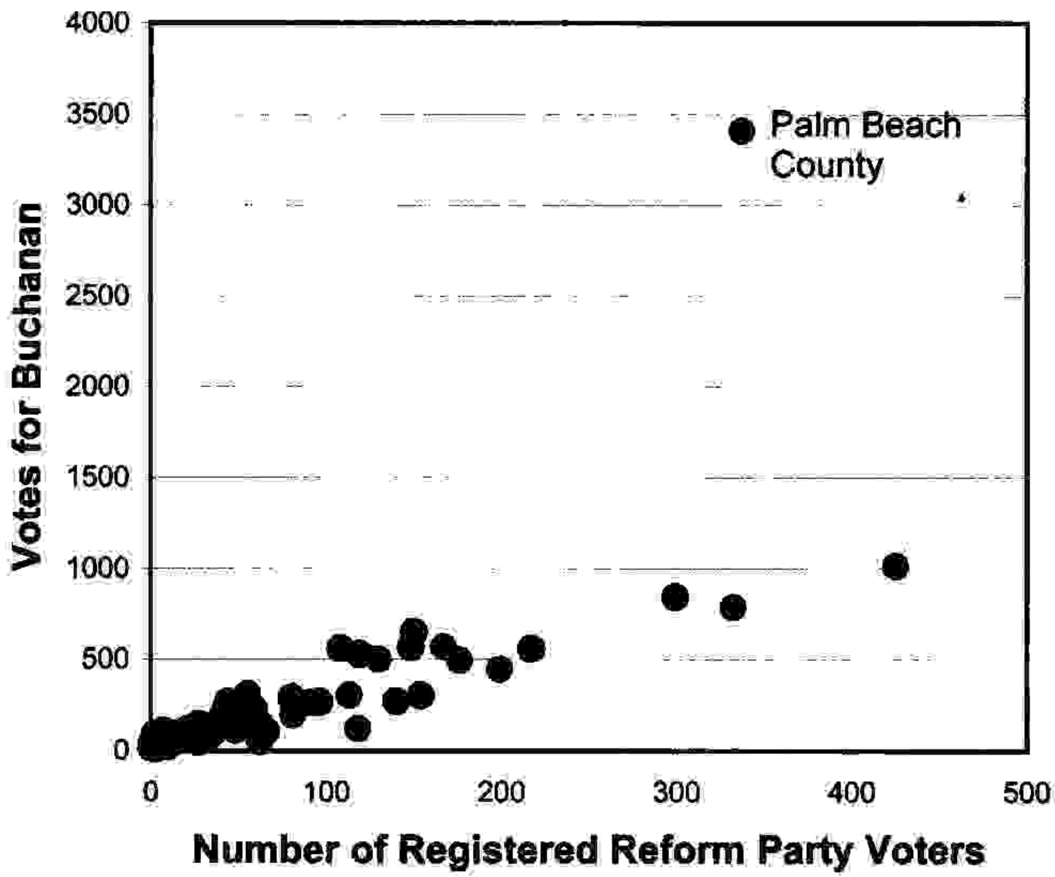


Figure 3. Presidential election results for Florida showing the votes cast for Buchanan and the number of registered Reform Party voters by county.

Es obvio que

Buchanan sacó 2000 votos de más en P.B., pero,

¿Por qué?

Varias posibilidades:

1. La gente se lió con las papeletas
3. El propio Buchanan es muy popular en P.B.

Es obvio que

Buchanan sacó 2000 votos de más en P.B., pero,

¿Por qué?

Varias posibilidades:

1. La gente se lió con las papeletas

3. El propio Buchanan es muy popular en P.B.

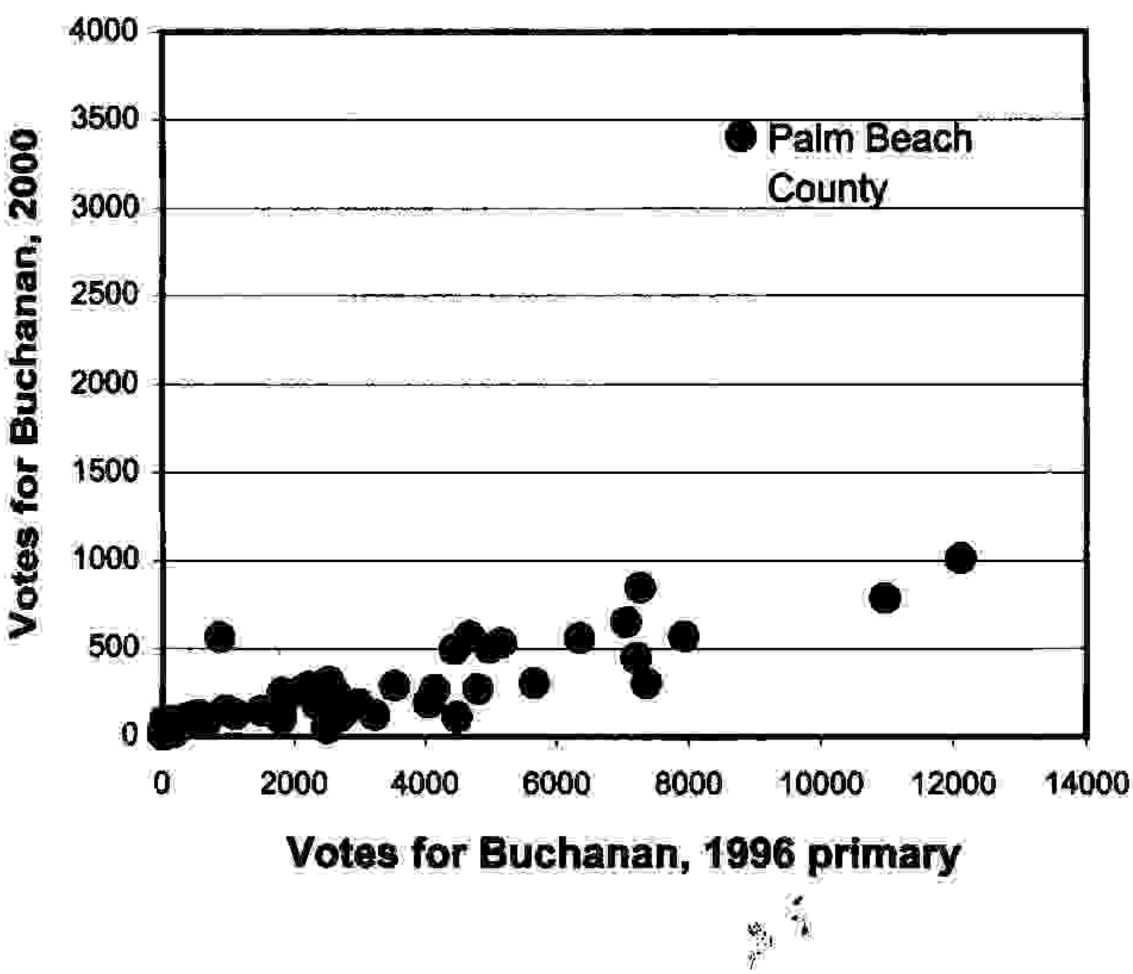


Figure 4. Buchanan votes in the 2000 election and in the 1996 Republican presidential primary for Florida counties.

Es obvio que

Buchanan sacó 2000 votos de más en P.B., pero,

¿Por qué?

Varias posibilidades:

1. La gente se lió con las papeletas

4. ¡Qué sé yo!
   Cualquier otra causa

¿Cómo podríamos excluir *cualquier* otra causa?

Es obvio que

Buchanan sacó 2000 votos de más en P.B., pero,

¿Por qué?

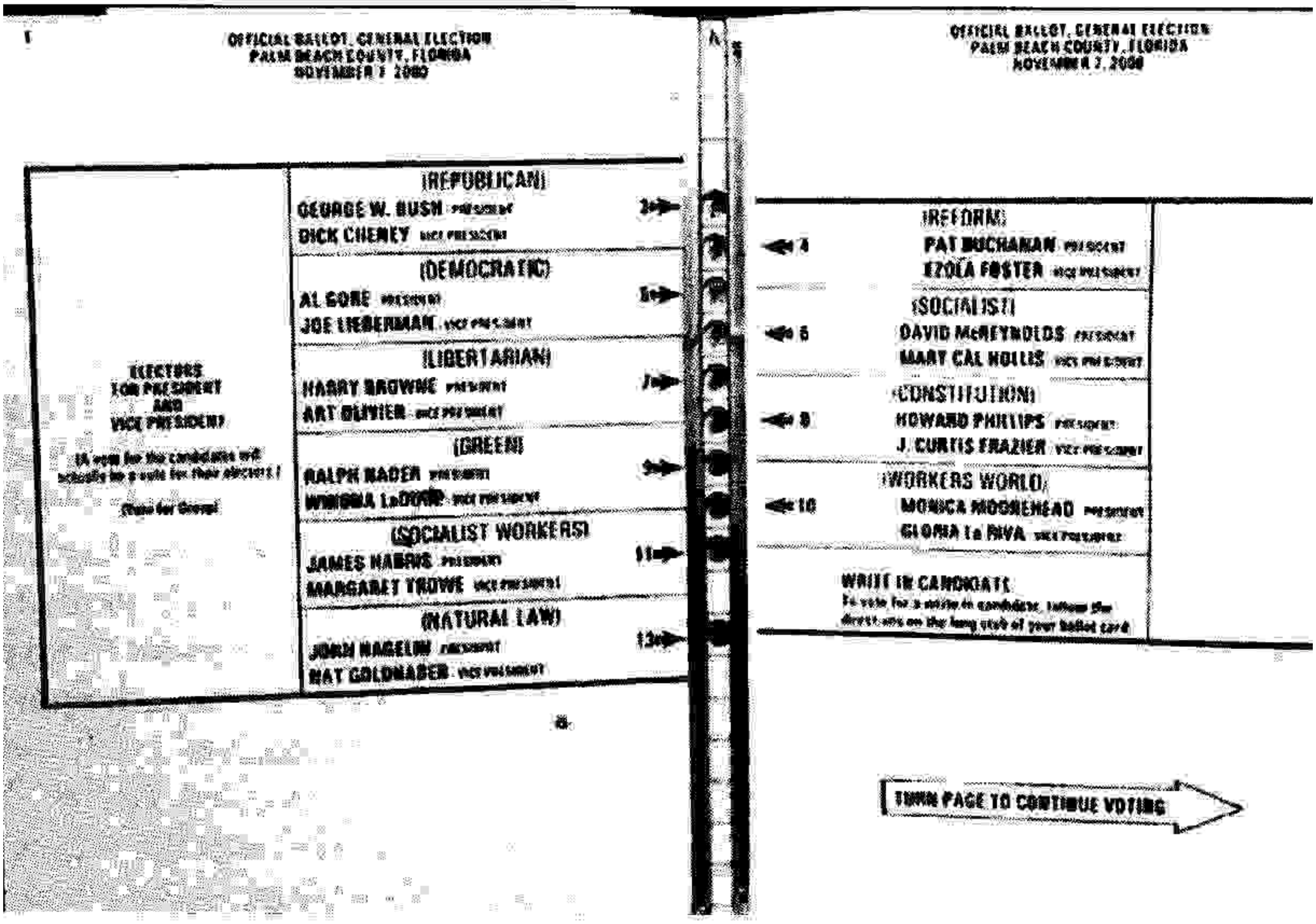
Varias posibilidades:

1. La gente se lió con las papeletas
4. ¡Qué sé yo!

   Cualquier otra causa

¿Cómo podríamos excluir *cualquier* otra causa?

Volvamos a mirar la butterfly



igure 1. The butterfly ballot of Palm Beach County, Florida.

Por tanto, si la gente se lió con las papeletas,

El Partido Socialista debería
tener votos de más en P.B
(pertenecientes a los verdes)

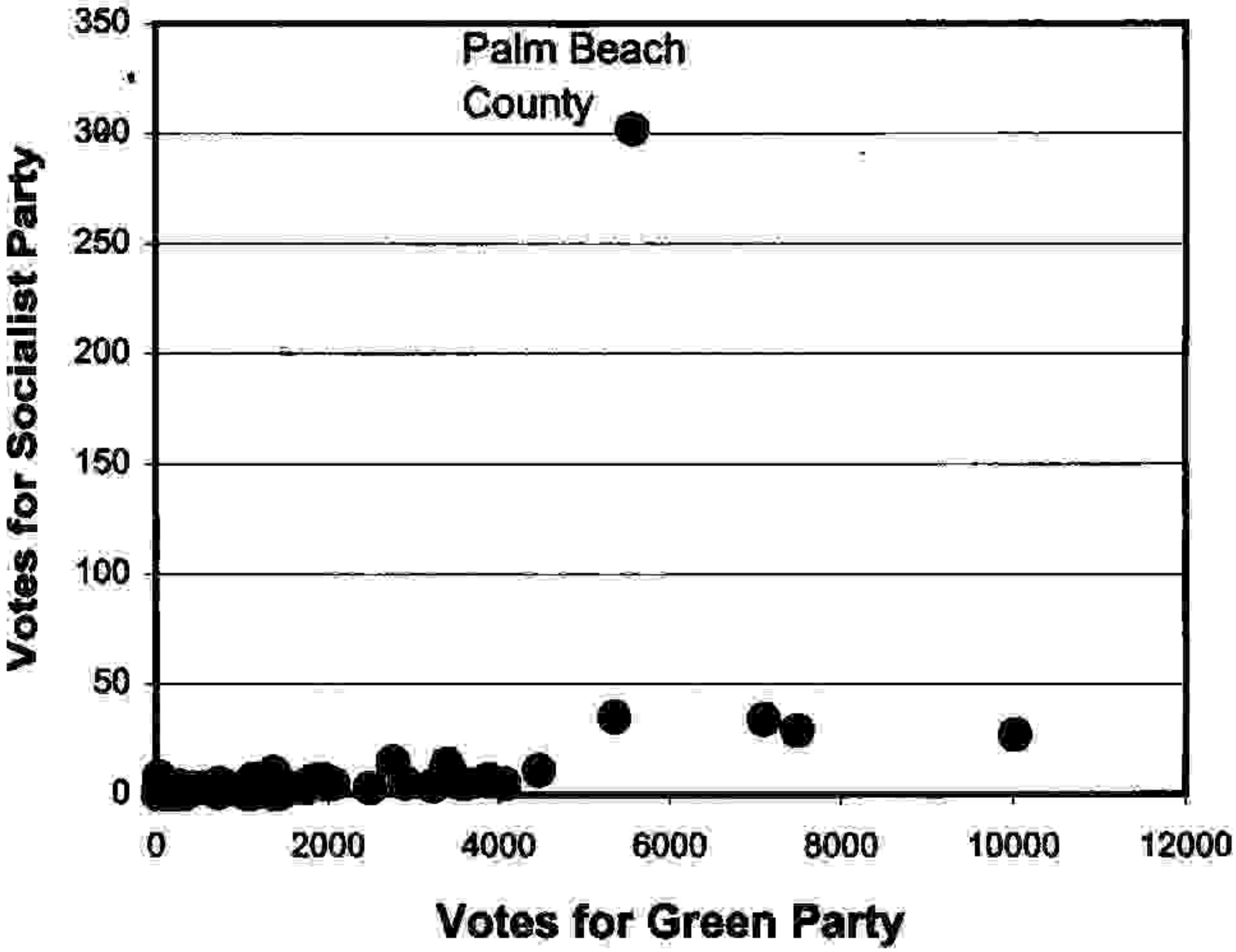


Figure 5. Presidential election results for Florida showing the votes cast for the Socialist Party candidate and the number of Green Party votes by county.

Increíble, pero cierto:

La guerra de Irak se debió al efecto mariposa

PROBLEMA 2.- El Challenger

(Presidential Comission on the Space Shuttle, 1986)

DATOS TECNICOS:

- El Challenger constaba de:
  - 2 motores de cuatro fases $\Rightarrow$ 3 juntas por motor
  - 1 anillo para sellar cada junta. En total 6

    había otros 6, menos fiables, “de seguridad”

    $\Rightarrow$ el fallo de sólo 1 de los primeros podía bastar

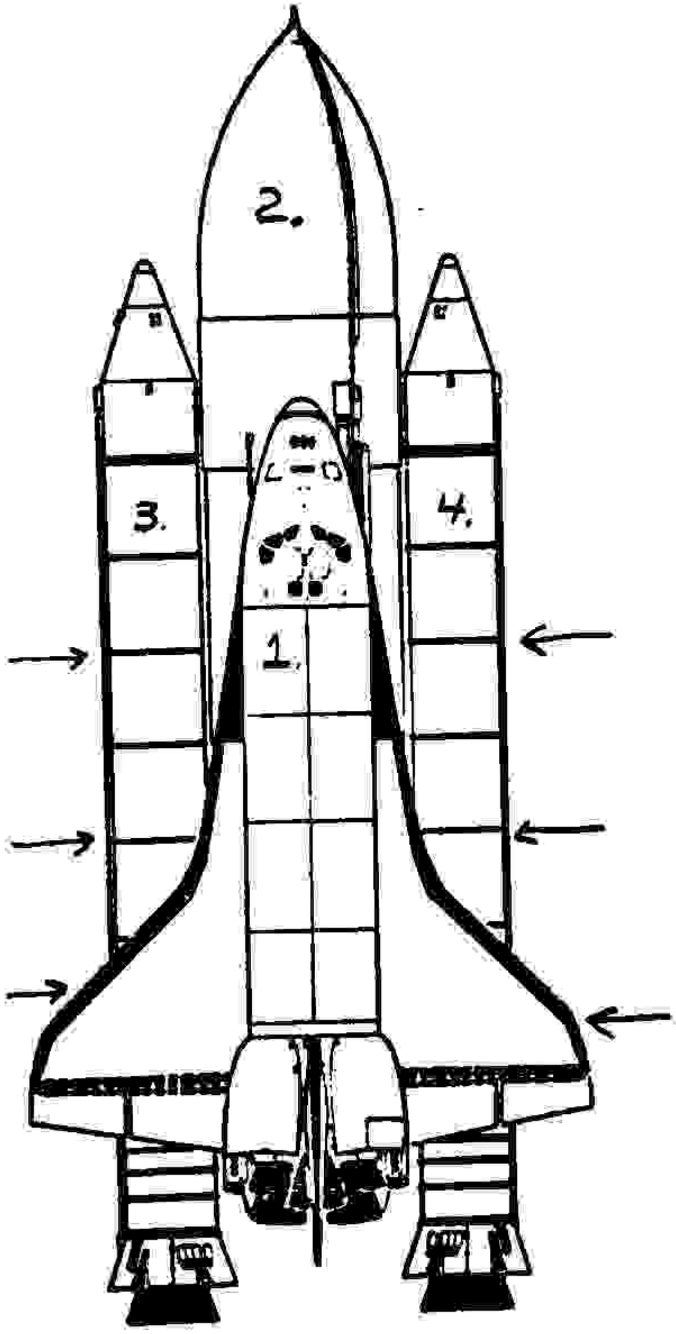


Figure 2. Space Shuttle: Orbiter, External Tank, Solid Rocket Motors, and Field Joints.

PROBLEMA 2.- El Challenger
(Presidential Comission on the Space Shuttle, 1986)

DATOS TECNICOS:

- El Challenger constaba de:
  - 2 motores de cuatro fases $\Rightarrow$ 3 juntas por motor
  - 1 anillo para sellar cada junta. En total 6

    había otros 6, menos fiables, "de seguridad"

    $\Rightarrow$ el fallo de sólo 1 de los primeros podía bastar
- Se sospechaba que el frío afectaba a los anillos
- Tª prevista para el día del lanzamiento: -1ºC
- 24 lanzamientos previos. De ellos
  - En 2 fallaron 2 anillos
  - En 5 falló 1 anillo
  - En 16 no falló ninguno
  - En 1 se perdió el cohete $\Rightarrow$ sin datos
- Mínima tª de lanzamiento anterior +12ºC

La noche anterior al lanzamiento,
hubo 3 horas de teleconferencia entre:

Morton Thiokol
(fabricante del motor)

Marshall Space Flight Center
(administración de la NASA)

Kennedy Space Center
(todo el mundo lo conoce)

para decidir si posponían el lanzamiento

Resumen de la teleconferencia:

Resumen de la teleconferencia:

La pregunta es:

¿El frío origina fallos en los anillos?

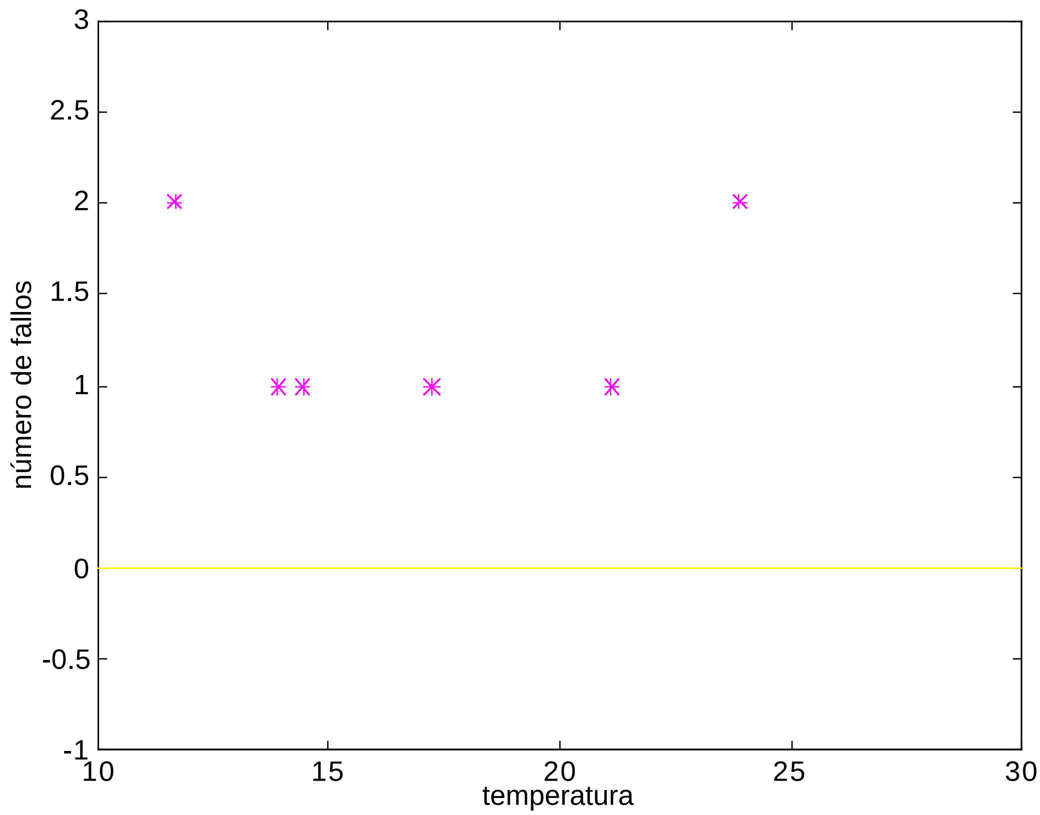
$\Rightarrow$ sólo debemos analizar lanzamientos con fallos:

Resumen de la teleconferencia:

La pregunta es:

¿El frío origina fallos en los anillos?

$\Rightarrow$ sólo debemos analizar lanzamientos con fallos:



* No se observa relación

$\Rightarrow$ ¡Podemos lanzar el cohete!

El cohete despegó

$\Rightarrow$ los anillos fallaron

$\Rightarrow$ hubo fugas de combustible

$\Rightarrow$ que al contacto con los gases de combustión...

El cohete despegó

$\Rightarrow$ los anillos fallaron

$\Rightarrow$ hubo fugas de combustible

$\Rightarrow$ que al contacto con los gases de combustión...

Pregunta: ¿Los datos eran concluyentes?

Veamos el gráfico de *todos* los lanzamientos:

El cohete despegó

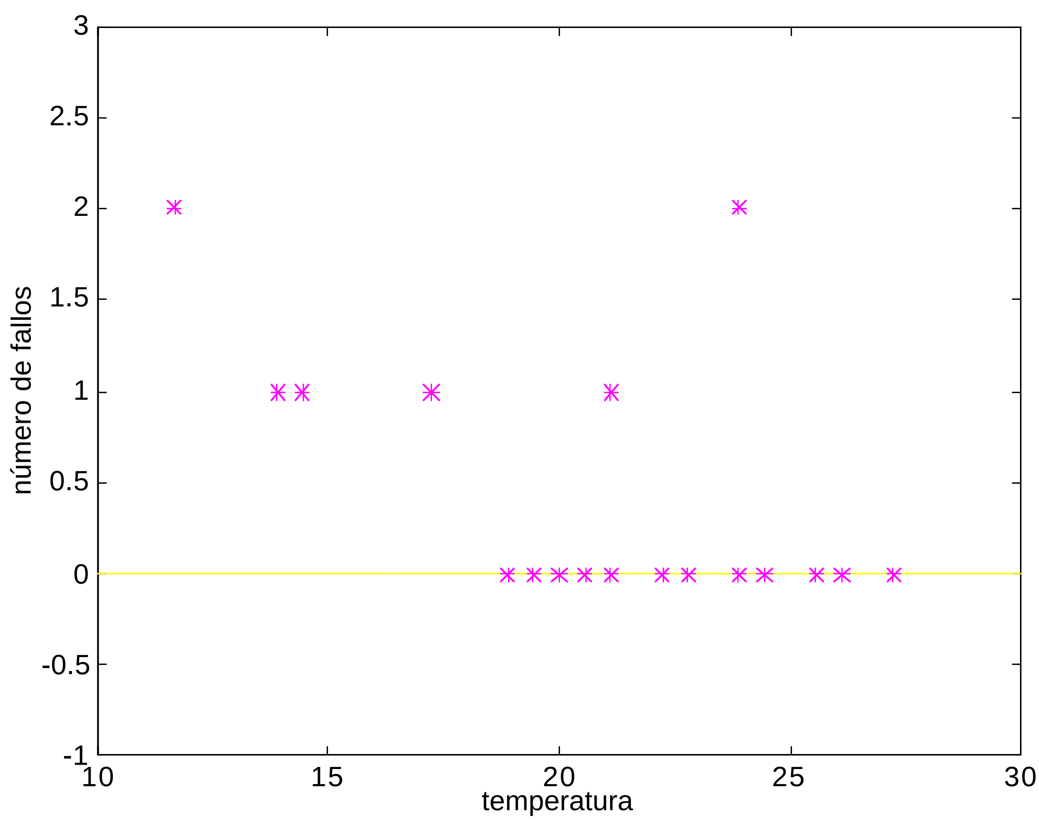
$\Rightarrow$ los anillos fallaron

$\Rightarrow$ hubo fugas de combustible

$\Rightarrow$ que al contacto con los gases de combustión...

Pregunta: ¿Los datos eran concluyentes?

Veamos el gráfico de *todos* los lanzamientos:



Lo dice todo

Pero,

¿Era posible predecir cuantos anillos iban a fallar?
(estimar)

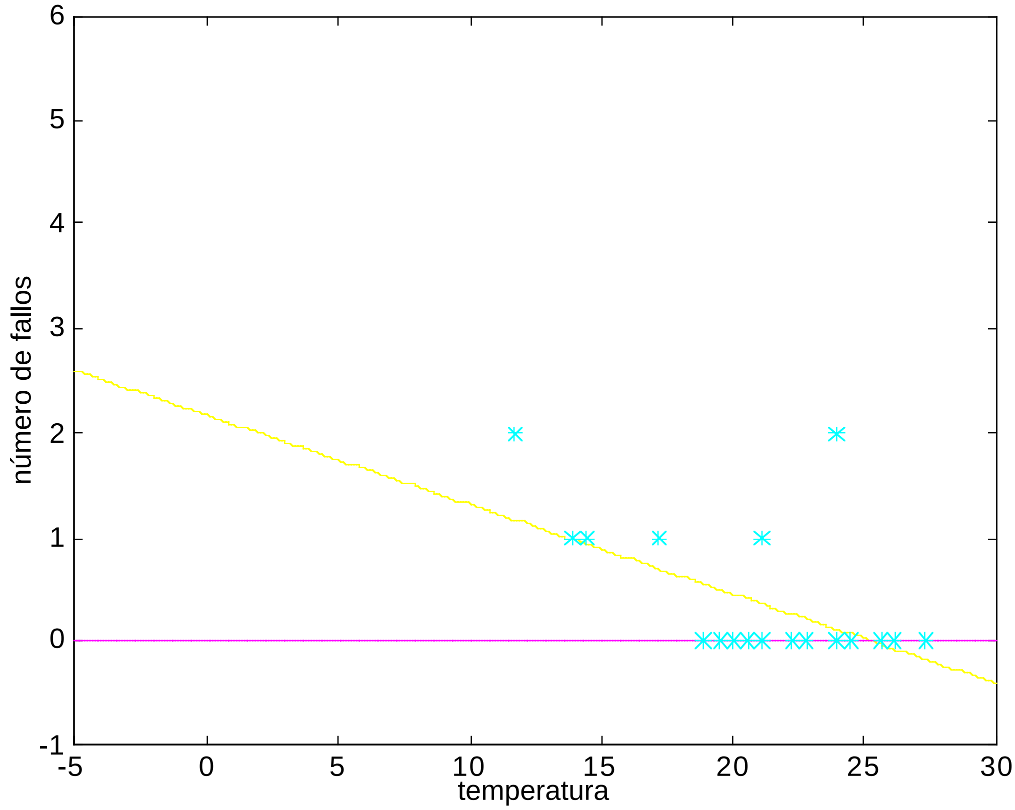
a la vista de los datos disponibles

Pero,

¿Era posible predecir cuantos anillos iban a fallar?
(estimar)

a la vista de los datos disponibles

Obviamente, la regresión lineal no sirve:



Sea $p =$ probab. de que un anillo falle

Sospechamos que, en realidad, $p = p(t)$

Buscamos una relación tipo

$$p(t) = 1 - F(t),$$

donde F es una función de distribución

Razones matemáticas hacen popular la familia

$$F_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{1 + e^{\alpha - \beta t}}, \ \alpha \in I\!R, \beta > 0$$

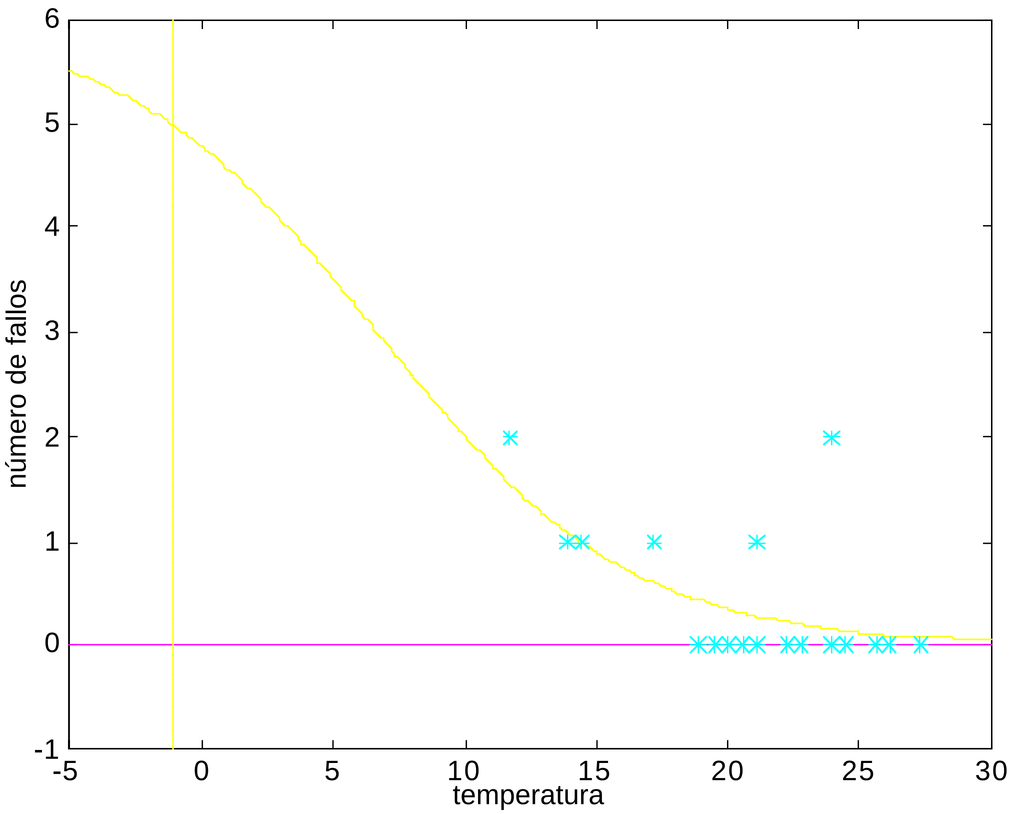
Hay que elegir α, β de modo que la función

$$t :\longrightarrow 6[1 - F_{\alpha,\beta}(t)] = 6\frac{e^{\alpha - \beta t}}{1 + e^{\alpha - \beta t}}$$

se ajuste lo mejor posible a los datos

Solución:

$$\alpha = 3,9980 \qquad \beta = 0,2081$$



$\Rightarrow$ Nº esperado de fallos a -1ºC = 4,987

La comisión que analizó el accidente recomendó:

"... a statistician be part of the ground control team for all flights"

La comisión que analizó el accidente recomendó:

"... a statistician be part of the ground control team for all flights"

Y, como consecuencia,

"... NASA *has begun* to build a staff
skilled in statistical science..."
(Dalal et al., J.A.S.A 1989, Vol. 84, pag. 946)

PROBLEMA 3.- Discriminación.

Hotel Hilton, San Francisco 1978

- El hotel fue acusado de discriminación por contratar pocos negros

PROBLEMA 3.- Discriminación.

Hotel Hilton, San Francisco 1978

- El hotel fue acusado de discriminación por contratar pocos negros

DATOS

- La proporción de negros en la zona era del 11.1%
- Contratación del hotel Hilton de San Francisco

Año	Contratados		Esperados	Diferencia acumulada
	total	negros		
1974	42	3	4,662	-1,662
1975	17	0	1,887	-3,549
1976	18	0	1,998	-5,547
1977	48	3	5,328	-7,875
1978	54	5	5,994	-8,869
1979	27	6	2,997	-5,866

EL PROBLEMA

Para condenar al Hilton debe ser *totalmente* imposible que las diferencias se deban al azar.

Entonces,

Supongamos que el Hilton es inocente

¿Cómo se mide el efecto del azar en este problema?

UNA POSIBLE SOLUCION:

Calculemos $P = \mathbb{P}\,[\text{contrat.- esper.} \leq -5,866\ ]$
(al cabo de los 6 años)

Podemos condenar si P es baja $(P \leq 0.05)$

UNA POSIBLE SOLUCION:

Calculemos $P = \mathbb{P}$ [contrat.- esper.$\leq -5,866$]
(al cabo de los 6 años)

Podemos condenar si P es baja ($P \leq 0.05$)

* Si tuviésemos una moneda con $\mathbb{P}$[cara] = 0,111

Podríamos calcular P así:

- La lanzamos 42 veces

  Nº caras ≈ Nº de negros contratados en 1974
  (si sólo influye el azar)

- La lanzamos 17 veces

  Nº caras ≈ Nº de negros contratados en 1975

- Sumamos los dos resultados

. . . .

He repetido lo anterior 10.000 veces

1.151 veces la diferencia final fue inferior a -5,866

$$\Rightarrow \quad 0{,}115 \approx \mathrm{P}\ [\text{contrat.- esper.} \leq -5,866]$$

* Esta probabilidad no se considera

suficiente baja como para condenar al Hilton

$\Rightarrow$ Hilton inocente por falta de pruebas

He repetido lo anterior 10.000 veces

1.151 veces la diferencia final fue inferior a -5,866

$$\Rightarrow \quad 0{,}115 \approx \mathrm{P}\left[\text{contrat.- esper.} \leq -5{,}866\right]$$

* Esta probabilidad no se considera

suficiente baja como para condenar al Hilton

$\Rightarrow$ Hilton inocente por falta de pruebas

PERO

¿Dónde hay una moneda con $I\!\!P[\text{cara}] = 0.111$?

FABRICACION MONEDA CON $I\!\!P$[C] =0.111

Solución cutre (válilda para jubilados)

$$0.111 \approx 0.1113281 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} = \frac{57}{2^9}$$

FABRICACION MONEDA CON $I\!\!P$[C] =0.111

Solución cutre (válilda para jubilados)

$$0.111 \approx 0.1113281 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} = \frac{57}{2^9}$$

Si lanzamos 9 veces una moneda normal

Casos posibles $= 2^9$

Si seleccionamos A con 57 puntos, $I\!\!P[A] \approx 0.111$

¡Y YA ESTA!

FABRICACION MONEDA CON $I\!\!P$[C] =0.111

Solución cutre (válilda para jubilados)

$$0.111 \approx 0.1113281 = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} = \frac{57}{2^9}$$

Si lanzamos 9 veces una moneda normal

Casos posibles $= 2^9$

Si seleccionamos A con 57 puntos, $I\!\!P[A] \approx 0.111$

¡Y YA ESTA!

RESUMEN

Lanzamos una moneda normal 9 veces

Miramos si el resultado está en A y

si está:	ha salido cara en la moneda especial
si no:	ha salido cruz en la moneda especial

FABRICACION MONEDA CON $\mathbb{P}$[C] =0.111

Solución cutre - Intermedio

(para viciosos de las matemáticas)

Ha salido cara en la moneda especial

si ocurre alguno de los siguientes resultados

Resultados lanzamientos

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	C	C	C					
C	C	C	X	C				
C	C	C	X	X	C			
C	C	C	X	X	X	C	C	X

Pasando a base 2

$$0.111 \approx \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9}$$
$$= 0.000111001 = 0.00011100\mathbf{0}1111111...$$

FABRICACION MONEDA CON $I\!\!P[\mathrm{C}] = 0.111$

¿No hay otro modo?

FABRICACION MONEDA CON $I\!\!P$[C] =0.111

Solución metrosexual

(Generadores de números aleatorios)

Los ordenadores traen mecanismos:

- para elegir números entre 0 y 1
- con la misma probabilidad cada uno de ellos

Lo anterior se hace pidiendo números al PC y

1º número: $0,347 \geq 0,111 \Rightarrow$ contratamos blanco
2º número: $0,567 \geq 0,111 \Rightarrow$ contratamos blanco
3º número: $0,826 \geq 0,111 \Rightarrow$ contratamos blanco
4º número: $0,061 < 0,111 \Rightarrow$ contratamos negro

$$\cdots\cdots$$

FABRICACION MONEDA CON $I\!\!P[\mathrm{C}]$ =0.111

Solución metrosexual

(Generadores de números aleatorios)

Los ordenadores traen mecanismos:

- para elegir números entre 0 y 1
- con la misma probabilidad cada uno de ellos

Lo anterior se hace pidiendo números al PC y

1º número: $0,347 \geq 0,111 \Rightarrow$ contratamos blanco
2º número: $0,567 \geq 0,111 \Rightarrow$ contratamos blanco
3º número: $0,826 \geq 0,111 \Rightarrow$ contratamos blanco
4º número: $0,061 < 0,111 \Rightarrow$ contratamos negro

. . . . .

Y, se acabó

(el Hilton)

P E R O :

La denuncia se presentó en 1.978

¿Pudo haber cambio de tendencia a partir de 1.978?

Año	Contratados total	Contratados negros	Esperados	Diferencia acumulada
1974	42	3	4,662	-1,662
1975	17	0	1,887	-3,549
1976	18	0	1,998	-5,547
1977	48	3	5,328	-7,875
1978	54	5	5,994	-8,869
1979	27	6	2,997	-5,866

¿Cómo detectar si lo hubo?

P E R O :

La denuncia se presentó en 1.978

¿Pudo haber cambio de tendencia a partir de 1.978?

Año	Contratados total	Contratados negros	Esperados	Diferencia acumulada
1974	42	3	4,662	-1,662
1975	17	0	1,887	-3,549
1976	18	0	1,998	-5,547
1977	48	3	5,328	-7,875
1978	54	5	5,994	-8,869
1979	27	6	2,997	-5,866

¿Cómo detectar si lo hubo?

Hasta ahora: Sólo hemos mirado el final

Debemos fijarnos en *todo* el proceso

Para ello (una posibilidad):

- Vemos que la *máxima* diferencia es de -8,869

$\Rightarrow$ Podemos calcular

$$\mathbb{P}[\text{máx. diferencia } \leq -8,869]$$

- En las 10.000 series:

sólo en 232 se rebasa esa cantidad

$$\Rightarrow \; P[\text{máx. diferencia } \leq -8,869] \approx 0,023$$

¡E L H I L T O N

P U E D E S E R

C O N D E N A D O!

Programa para el Hilton (MatLab)
(no es óptimo, pero funciona)

```
repet = 10000;
C = [0 42 17 18 48 54 27]; E = 0.111*C;
prob1=0; prob2=0;
for i=1:repet
    MIN = 10000; O = zeros(1,7);
    for j=2:7
        for k=1:C(j)
            Z = rand;
            if Z<= 0.11100001; O(j) = O(j)+1; end
        end
        O(j) = O(j-1) + O(j); val = O(j) - E(j);
        if val <= MIN; MIN = val; end
    end
    final = O(7) - E(7) ;
    if final <= -5.8659; prob1 = prob1 + 1; end
    if MIN <= -8.8689; prob2 = prob2 + 1; end
end
prob1 = prob1/repet; prob2 = prob2/repet;
disp([' Proporción de veces que la diferencia final ha sido inferior a -5,866 '])
disp(prob1)
disp([' '])
disp([' Prop. veces que en algún momento la difer. fue menor que -8,869 '])
disp(prob2)
```

Este problema se puede resolver con la fórmula:

- de aproximación de la binomial por una normal para el punto final: P = 0,117 (antes 0,115)

- de la distribución del máximo de una trayectoria al azar P = 0,024 (antes 0,023)

PROBLEMA 4.- Experimentos de biología

Cierto investigador enunció una teoría

Para comprobarla tomó una muestra de 600

Según la reoría deberían ser	En el experimento se obtuvieron
200 del tipo A	199 del tipo A
400 del tipo B	401 del tipo B

¡Curiosa similitud!

¿Es verosímil esta similitud por azar?

PROBLEMA 4.- Experimentos de biología

Cierto investigador enunció una teoría

Para comprobarla tomó una muestra de 600

Según la reoría deberían ser	En el experimento se obtuvieron
200 del tipo A	199 del tipo A
400 del tipo B	401 del tipo B

¡Curiosa similitud!

¿Es verosímil esta similitud por azar?

Podemos averiguarlo:

Repetimos 10.000 veces

Repartimos 600 individuos entre

A (con prob. 1/3) y B (con prob. 2/3)

Contamos cuantas veces $|\#(\text{ en } A) - 200| \leq 1$

PROBLEMA 4.- Experimentos de biología

Cierto investigador enunció una teoría

Para comprobarla tomó una muestra de 600

Según la reoría deberían ser	En el experimento se obtuvieron
200 del tipo A	199 del tipo A
400 del tipo B	401 del tipo B

¡Curiosa similitud!

¿Es verosímil esta similitud por azar?

Podemos averiguarlo:

Repetimos 10.000 veces

Repartimos 600 individuos entre

A (con prob. 1/3) y B (con prob. 2/3)

Contamos cuantas veces $|\#(\text{ en } A) - 200| \leq 1$

Resultado: 0.1010
(cálculo con la aproximación normal = 0.1034)

Programa para la biología (MatLab) (no es óptimo, pero funciona)

```
repet=10000;
veces=0;
for i=1:repet
    numA=0; numB=0;
    for j=1:600
        Z=rand;
        if Z <= 2/3
            numA = numA+1;
            else numB=numB+1;
        end
    end
    if abs(numA-400)<=1
        veces=veces+1;
    end
end
prob= veces/repet;
disp([' Proporción de veces que |(individuos en A) - 400|  <= 1 '])
disp(prob)
```

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

$\Rightarrow$ el experimento no *se considera* sospechoso

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

$\Rightarrow$ el experimento no *se considera* sospechoso

Pero

- El biólogo hizo otros 6 experimentos sobre este tema.
- En todos hubo similitudes parecidas

¿Cual es la probabilidad de tanta similtud?

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

$\Rightarrow$ el experimento no *se considera* sospechoso

Pero

- El biólogo hizo otros 6 experimentos sobre este tema.
- En todos hubo similitudes parecidas

¿Cual es la probabilidad de tanta similtud?

$$P[\text{tanta similitud}] = 0,00007$$

$\approx$ prob. toque el gordo de Navidad con 4 números

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

$\Rightarrow$ el experimento no *se considera* sospechoso

Pero

- El biólogo hizo otros 6 experimentos sobre este tema.
- En todos hubo similitudes parecidas

¿Cual es la probabilidad de tanta similtud?

$$P[\text{tanta similitud}] = 0,00007$$

$\approx$ prob. toque el gordo de Navidad con 4 números

Pero:

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

$\Rightarrow$ el experimento no *se considera* sospechoso

Pero

- El biólogo hizo otros 6 experimentos sobre este tema.
- En todos hubo similitudes parecidas

¿Cual es la probabilidad de tanta similtud?

$$P[\text{tanta similitud}] = 0,00007$$

$\approx$ prob. toque el gordo de Navidad con 4 números

Pero:

El biólogo es Mendel
(y los experimentos los de los guisantes)

El hecho S *se considera* sospechoso si $P[S] < 0,05$

$\Rightarrow$ el experimento no *se considera* sospechoso

Pero

- El biólogo hizo otros 6 experimentos sobre este tema.
- En todos hubo similitudes parecidas

¿Cual es la probabilidad de tanta similtud?

$$P[\text{tanta similitud}] = 0,00007$$

$\approx$ prob. toque el gordo de Navidad con 4 números

Pero:

El biólogo es Mendel
(y los experimentos los de los guisantes)

Referencia: R. A. Fisher, 1936

PROBLEMA 5.- Más discriminación

Universidad de Berkeley

(Bickel, Hammel y O'Connel, 1975)

LOS DATOS: Admisiones en Berkeley en 1973

Solicitantes	Resultados		Totales	Porc. admitidos
	Admitidos	Excluidos		
Hombres	3.738	4.704	8.442	44,28%
Mujeres	1.493	2.827	4.320	34,56%
Totales	5.231	7.531	12.762	40,99%

EL PROBLEMA:

¿Es posible que las diferencias se deban sólo al azar?

o bien:

¿Podemos decir que se deben a algo más profundo?

PROBLEMA 5.- Más discriminación

Universidad de Berkeley

(Bickel, Hammel y O'Connel, 1975)

LOS DATOS: Admisiones en Berkeley en 1973

Solicitantes	Resultados		Totales	Porc. admitidos
	Admitidos	Excluidos		
Hombres	3.738	4.704	8.442	44,28%
Mujeres	1.493	2.827	4.320	34,56%
Totales	5.231	7.531	12.762	40,99%

EL PROBLEMA:

¿Es posible que las diferencias se deban sólo al azar?

o bien:

¿Podemos decir que se deben a algo más profundo?

LA SOLUCION:

- Aplicar el test de la χ^2
- Tomar un generador de números aleatorios

Nos fijamos en los totales de la tabla:

Hay 12.762 solicitantes y 5.231 plazas

vamos a repartirlas con la “pajita más corta”:

- elegimos 12.762 números al azar (las pajitas)
- adjudicamos uno a cada solicitante
- las plazas son para los 5.231 números más bajos

Si no hay discriminación
como no hay diferencias de capacidad por sexos
lo anterior equivale a la adjudicación de Berkeley

Nos fijamos en los totales de la tabla:

Hay 12.762 solicitantes y 5.231 plazas

vamos a repartirlas con la “pajita más corta”:

- elegimos 12.762 números al azar (las pajitas)
- adjudicamos uno a cada solicitante
- las plazas son para los 5.231 números más bajos

Si no hay discriminación
como no hay diferencias de capacidad por sexos
lo anterior equivale a la adjudicación de Berkeley

Ahora: * repetimos el proceso 10.000 veces
* contamos las veces que el número de mujeres aceptadas es $\leq$ 1.493

Nos fijamos en los totales de la tabla:

Hay 12.762 solicitantes y 5.231 plazas

vamos a repartirlas con la "pajita más corta":

- elegimos 12.762 números al azar (las pajitas)
- adjudicamos uno a cada solicitante
- las plazas son para los 5.231 números más bajos

Si no hay discriminación
como no hay diferencias de capacidad por sexos
lo anterior equivale a la adjudicación de Berkeley

Ahora: * repetimos el proceso 10.000 veces
* contamos las veces que el número de mujeres aceptadas es ≤ 1.493

Resultado: $0 \Rightarrow$ la verosimilitud de que el azar sea el responsable es muy baja

Conclusión:

**¡B E R K E L E Y
D I S C R I M I N A
L A S M U J E R E S!**

Programa para Berkeley (MatLab)
(no es óptimo, pero funciona)

```
N = 10000; numeros = zeros(1,12762); veces = 0;
for i=1:N
    for j=1:12762
        numeros(j) = rand;
    end
    [Y,I] = sort(numeros); elegidas = 0;
    for j=1:5231
        if I(j) <= 4320; elegidas = elegidas +1;end
    end
    if elegidas <= 1493; veces = veces +1; end
end
disp(['Proporcion de veces que se han aceptado 1493 mujeres o menos: '])
prop = veces/N;
disp([prop])
```

Hemos quedado en que

¡BERKELEY DISCRIMINA LAS MUJERES!

¿Estás seguro?

Hemos quedado en que

¡B E R K E L E Y
D I S C R I M I N A
L A S M U J E R E S!

¿Estás seguro?

En Estadística hay que

1.- Elegir la técnica adecuada
2.- Controlar *todas* las circunstancias que influyen en el problema

Lo que SI es seguro es que

hay *alguna* causa que hace que la proporción de mujeres sea baja

Pero,... ¿Cual es esa causa?

- Las proporciones de aceptados varían entre carreras
- Por alguna razón, las mujeres optaron a las de aceptación baja

¿Cómo manejar este problema?

- Las proporciones de aceptados varían entre carreras
- Por alguna razón, las mujeres optaron a las de aceptación baja

¿Cómo manejar este problema?

Para cada carrera:

1.- miramos la proporción total de aceptados

2.- la multiplicamos por el número de mujeres solicitantes ⇒ tenemos las mujeres que *deberían* haber entrado en esa carrera

Sumando por carreras, tenemos las mujeres que *deberían* haber entrado en Berkeley

- Las proporciones de aceptados varían entre carreras
- Por alguna razón, las mujeres optaron a las de aceptación baja

¿Cómo manejar este problema?

Para cada carrera:

1.- miramos la proporción total de aceptados

2.- la multiplicamos por el número de mujeres solicitantes $\Rightarrow$ tenemos las mujeres que *deberían* haber entrado en esa carrera

Sumando por carreras, tenemos las mujeres que *deberían* haber entrado en Berkeley

Resultado:

Deberían haber entrado	1.432,9
Entraron en realidad	1.493
SUPERAVIT	60,1

Este fenómeno no es raro.

Es el Efecto Sympson

Este fenómeno no es raro.

Es el Efecto Sympson

En Jauja's University admiten

375 estudiantes en la Licenciatura en Ocio
125 estudiantes en Ingeniería de Fiestas

Pero fíjate en los solicitantes:

Admisiones en Jauja's University

		admitidos	excluidos	admitidos - esperados
Facultad de Ocio	Hombres	300	100	0
	Mujeres	75	25	0
E.T.S.I. de Fiestas	Hombres	25	75	0
	Mujeres	100	300	0
Total Universidad	Hombres	325	175	+75
	Mujeres	175	325	-75

Volviendo a Berkeley:

¿Prob. que el azar genere superavit de 60 mujeres?

Volviendo a Berkeley:

¿Prob. que el azar genere superavit de 60 mujeres?

No podemos simular:

hay que hacerlo carrera por carrera
y nos faltan los datos

La fórmula correspondiente (Mantel-Haenszel) da:
la prob. de tener ese superavit o mayor es 0,0032

Por tanto:

¡BERKELEY DISCRIMINA LOS HOMBRES!

Volviendo a Berkeley:

¿Prob. que el azar genere superavit de 60 mujeres?

No podemos simular:

hay que hacerlo carrera por carrera
y nos faltan los datos

La fórmula correspondiente (Mantel-Haenszel) da:
la prob. de tener ese superavit o mayor es 0,0032

Por tanto:

¡BERKELEY
DISCRIMINA
LOS HOMBRES!

¿Seguro?

En realidad sucede que:

el año 1.973 fue elegido “a posta”
de entre los años 1.969 a 1.973, porque
es el año en que las mujeres salen más favorecidas

Admisiones en Berkeley

Años	1.969	1.970	1.971	1.972	1.973
Exceso mujeres	+14	-4	+15	+7	+60

$\Rightarrow$ debemos evaluar la probabilidad, p, de que
por efecto del azar, en al menos un año,
se produzca una desviación como la de 1.973:

En realidad sucede que:

el año 1.973 fue elegido "a posta"
de entre los años 1.969 a 1.973, porque
es el año en que las mujeres salen más favorecidas

Admisiones en Berkeley

Años	1.969	1.970	1.971	1.972	1.973
Exceso mujeres	+14	-4	+15	+7	+60

$\Rightarrow$ debemos evaluar la probabilidad, p, de que por efecto del azar, en al menos un año, se produzca una desviación como la de 1.973:

$$\begin{aligned} p &= 1 - P[\text{no se produzca ninguna}] \\ &= 1 - (1 - 0,0032)^5 = 0,0159 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ lo que yo decía:

¡BERKELEY
DISCRIMINA
LOS HOMBRES!

¿Seguro?

¿Seguro?

Hay que ser cuidadoso con las acusaciones

(Creo que)
Está fuera de duda que hay déficit de hombres

Pero ¿por qué?

¿Seguro?

Hay que ser cuidadoso con las acusaciones

(Creo que)
Está fuera de duda que hay déficit de hombres

Pero ¿por qué?

EXPERTO: Todo lo anterior se basa en que hombres y mujeres están igualmente cualificados

¡y ésto no ha sido analizado!

CONCLUSION.-
El estadístico, sin el experto, no va a ningún lado

PROBLEMA 6.- Hablemos sobre el SIDA

En junio de 1987 la administración USA parecía decidida a realizar pruebas masivas de detección

De repente no se habló más del tema

¿Qué sucedió?

PROBLEMA 6.- Hablemos sobre el SIDA

En junio de 1987 la administración USA parecía decidida a realizar pruebas masivas de detección

De repente no se habló más del tema

¿Qué sucedió?

El procedimiento empleado para detectar el SIDA no era infalible:

Proporción de falsos positivos: 0,074
Proporción de falsos negativos: 0,023

¿Cual crees que es la probabilidad de que un Sr. que da positivo sea realmente portador?

	1
	0,9
	0,75
Aproximadamente	0,5
	0,25
	0,1
	0

Respuesta exacta (T. de Bayes): 0,0738
(en 1987 el 0,6% de los americanos era portador)

Conclusión (de una persona razonable):

El Teorema de Bayes está equivocado

Respuesta exacta (T. de Bayes): 0,0738
(en 1987 el 0,6% de los americanos era portador)

Conclusión (de una persona razonable):

El Teorema de Bayes está equivocado

Analicemos a 10.000 americanos ideales:

Individuos		Se declara portadores a	
Sanos	9.940	735,56	(fallos)
Portadores	60	58,82	(aciertos)
Totales	10.000	794,18	

$\Rightarrow$ la proporción de aciertos (en positivos)

$$\frac{58,82}{794,18} = 0,0738$$

Respuesta exacta (T. de Bayes): 0,0738
(en 1987 el 0,6% de los americanos era portador)

Conclusión (de una persona razonable):

El Teorema de Bayes está equivocado

Analicemos a 10.000 americanos ideales:

Individuos		Se declara portadores a	
Sanos	9.940	735,56	(fallos)
Portadores	60	58,82	(aciertos)
Totales	10.000	794,18	

$\Rightarrow$ la proporción de aciertos (en positivos)

$$\frac{58,82}{794,18} = 0,0738$$

Una consecuencia:

Esto (con más cosas) hizo olvidar las pruebas

Respuesta exacta (T. de Bayes): 0,0738
(en 1987 el 0,6% de los americanos era portador)

Conclusión (de una persona razonable):

El Teorema de Bayes está equivocado

Analicemos a 10.000 americanos ideales:

Individuos		Se declara portadores a	
Sanos	9.940	735,56	(fallos)
Portadores	60	58,82	(aciertos)
Totales	10.000	794,18	

⇒ la proporción de aciertos (en positivos)

$$\frac{58,82}{794,18} = 0,0738$$

Una consecuencia:

Esto (con más cosas) hizo olvidar las pruebas

Una pregunta:

¿Qué repercusiones <u>estadísticas</u> tiene esto?

¿Por qué repercusiones ESTADISTICAS?

¿Por qué repercusiones ESTADISTICAS?

porque ciertos procedimientos estadísticos son análogos al de detección del SIDA:

Hay una hipótesis

Estadística:	cierto biólogo hizo trampas
SIDA:	el paisano es portador

¿Por qué repercusiones ESTADISTICAS?

porque ciertos procedimientos estadísticos son análogos al de detección del SIDA:

Hay una hipótesis

Estadística:	cierto biólogo hizo trampas
SIDA:	el paisano es portador

Hay un dato:

Estadística:	resultados de los experimentos
SIDA:	el paisano ha dado positivo

¿Por qué repercusiones ESTADISTICAS?

porque ciertos procedimientos estadísticos son análogos al de detección del SIDA:

Hay una hipótesis

Estadística:	cierto biólogo hizo trampas
SIDA:	el paisano es portador

Hay un dato:

Estadística:	resultados de los experimentos
SIDA:	el paisano ha dado positivo

Hay una conclusión de sentido común (en ambos):

si la hipótesis es falsa, el dato es muy inverosímil
$\Rightarrow$ la hipótesis es cierta

¿Por qué repercusiones ESTADISTICAS?

porque ciertos procedimientos estadísticos son análogos al de detección del SIDA:

Hay una hipótesis

Estadística:	cierto biólogo hizo trampas
SIDA:	el paisano es portador

Hay un dato:

Estadística:	resultados de los experimentos
SIDA:	el paisano ha dado positivo

Hay una conclusión de sentido común (en ambos):

si la hipótesis es falsa, el dato es muy inverosímil
$\Rightarrow$ la hipótesis es cierta

Hay un error (con el SIDA):

A pesar de lo anterior,
es muy difícil que el paisano sea portador

¿Cómo estar seguros de las cosas en Estadística?

Analicemos la situación:

- Caso SIDA:

conocemos la proporción de portadores

$\Rightarrow$ podemos calcular

$$P[\text{port./res.+}] = \frac{P[\text{port.}] \times P[\text{res.} + /\text{port.}]}{P[\text{res.+}]}$$

Analicemos la situación:

- Caso SIDA:
  conocemos la proporción de portadores
  $\Rightarrow$ podemos calcular

$$P[\text{port./res.+}] = \frac{P[\text{port.}] \times P[\text{res.} + /\text{port.}]}{P[\text{res.+}]}$$

- Caso biólogo:
  sea p la proporción de científicos tramposos
  desconocemos p, pero
  podemos "hacer las cuentas" en función de p

Analicemos la situación:

- Caso SIDA:
  conocemos la proporción de portadores
  $\Rightarrow$ podemos calcular

$$P[\text{port./res.+}] = \frac{P[\text{port.}] \times P[\text{res.} + /\text{port.}]}{P[\text{res.+}]}$$

- Caso biólogo:
  sea p la proporción de científicos tramposos
  desconocemos p, pero
  podemos "hacer las cuentas" en función de p

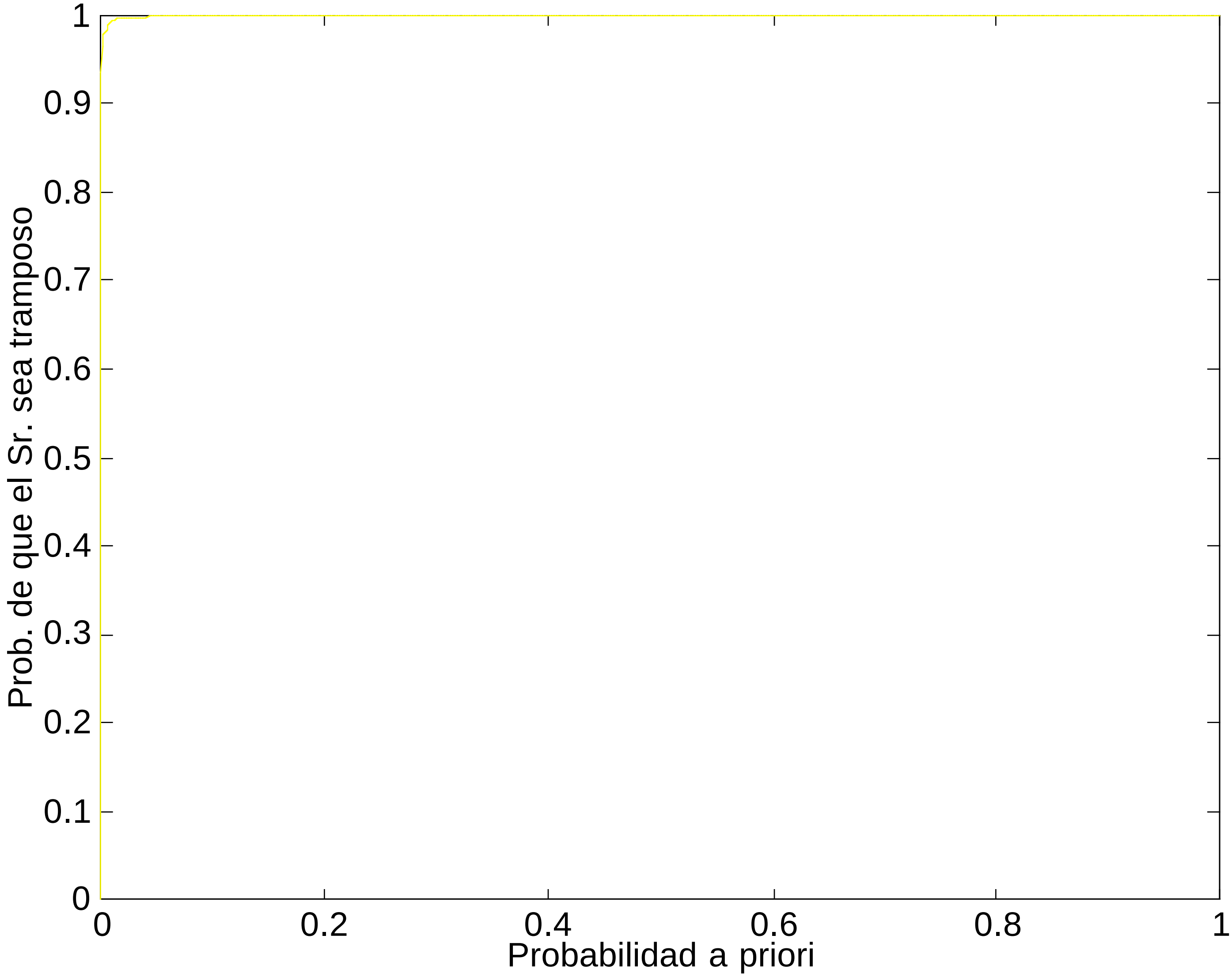
Sabemos que
  0,00007 = prob. hechos, si el biólogo es honesto

Supondremos que
  1 = prob. hechos, si el el biólogo es tramposo

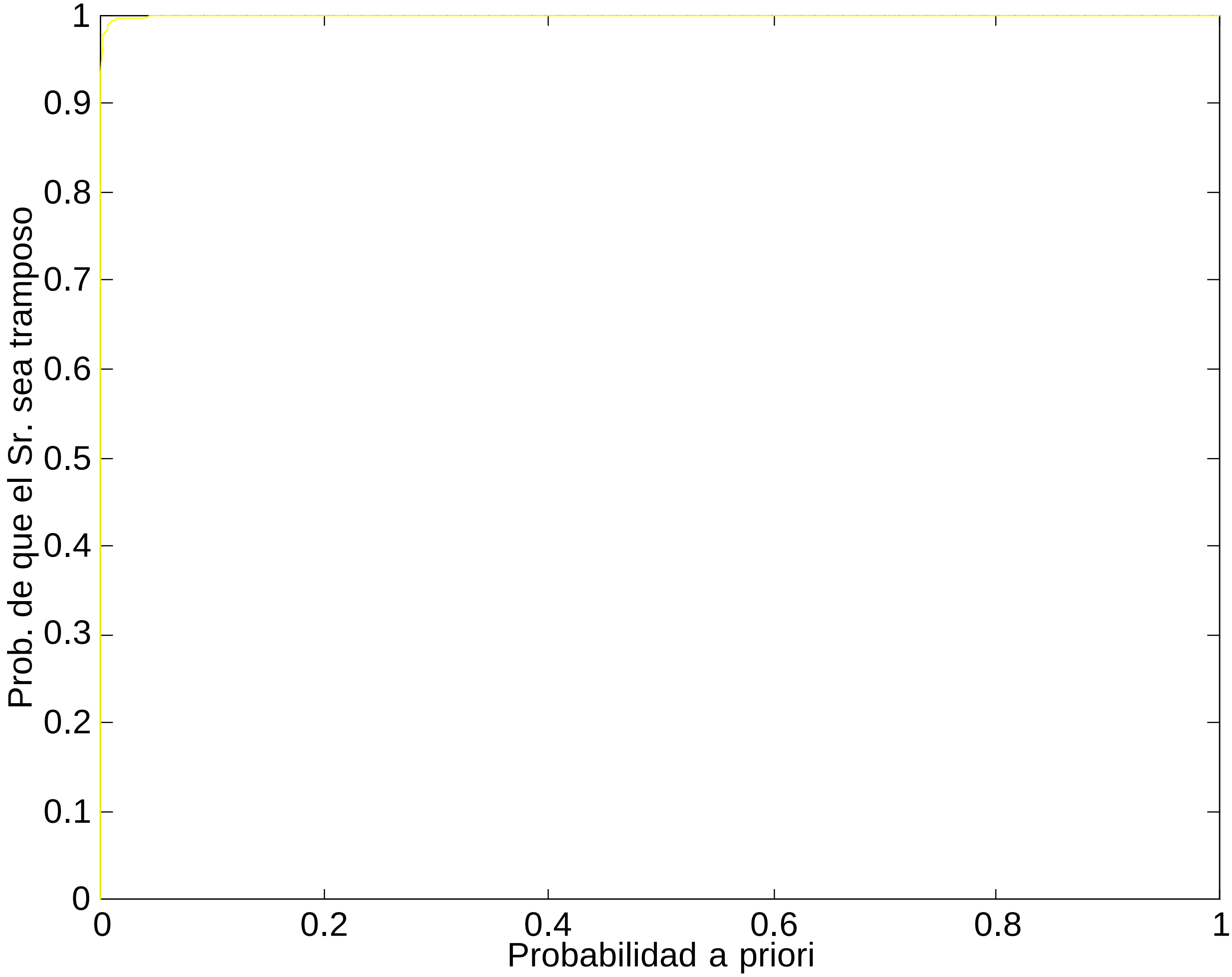
Ahora, podemos aplicar Bayes para calcular

$$P[\text{Biól. tramposo/a la vista de los hechos}]$$

$$= f(p) = \frac{p \times 1}{p \times 1 + (1 - p) \times 0,00007}$$



Probabilidad de que el biólogo sea tramposo, en función de la proporción de científicos tramposos

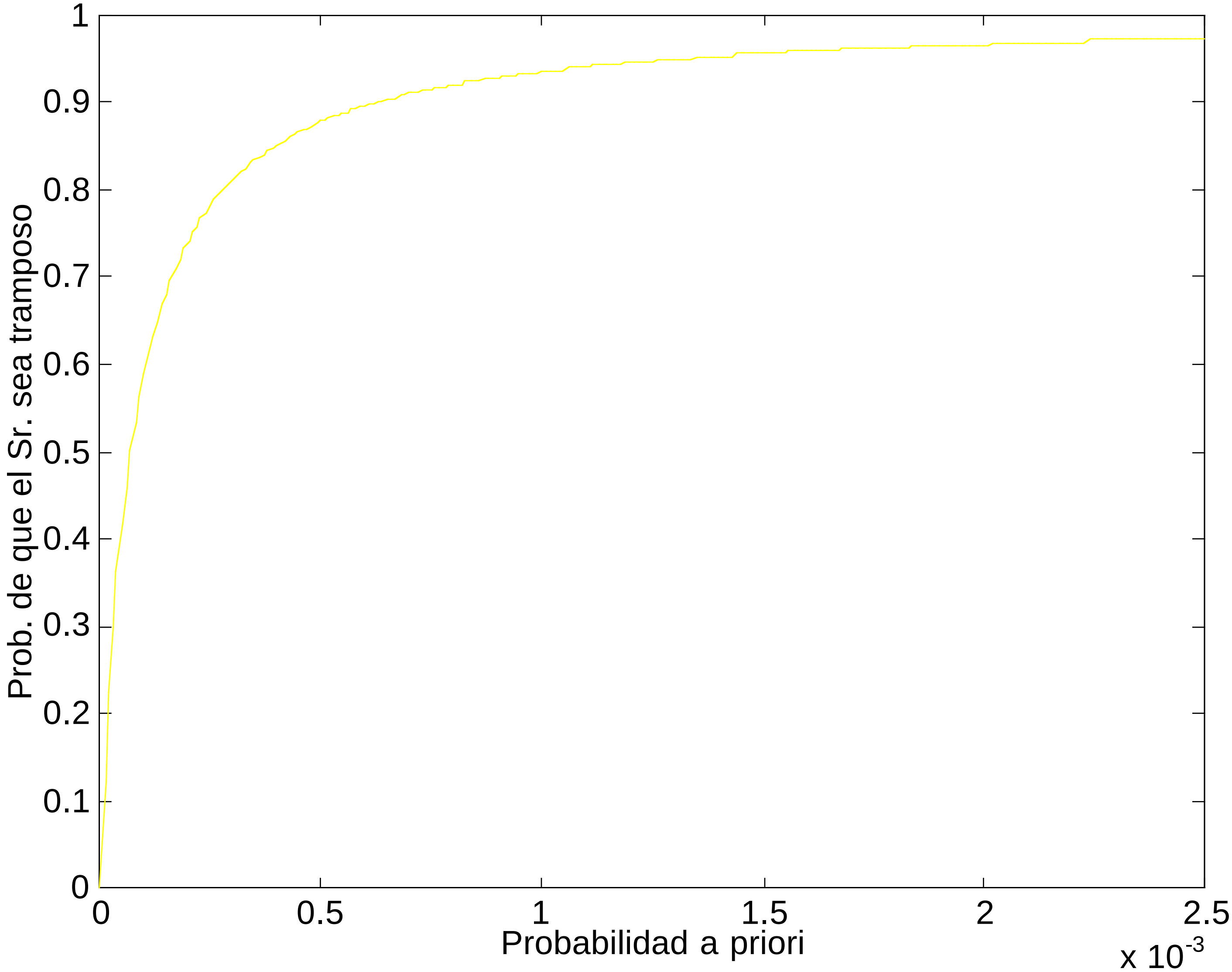


Probabilidad de que el biólogo sea tramposo, en función de la proporción de científicos tramposos

Pero, a lo mejor

los científicos nos merecen MUCHA credibilidad.

Supongamos que, en nuestra opinión, $p \leq 0,0025$



Probabilidad de que el biólogo sea tramposo, en función de la proporción de científicos tramposos

¡Esto puede ser otra cosa!

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo
- Ptolomeo "fusiló" las observaciones astronómicas a un colega en la Biblioteca de Alejandría

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo
- Ptolomeo “fusiló” las observaciones astronómicas a un colega en la Biblioteca de Alejandría
- Los colegas de Galileo tenían dificultad para reproducir sus experimentos

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo
- Ptolomeo “fusiló” las observaciones astronómicas a un colega en la Biblioteca de Alejandría
- Los colegas de Galileo tenían dificultad para reproducir sus experimentos
- Los experimentos de Dalton (leyes de la combinación química,...) no se han podido repetir

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo
- Ptolomeo "fusiló" las observaciones astronómicas a un colega en la Biblioteca de Alejandría
- Los colegas de Galileo tenían dificultad para reproducir sus experimentos
- Los experimentos de Dalton (leyes de la combinación química,...) no se han podido repetir
- Millikan (premio Nobel) se equivocó al representar sus resultados. Pero así eran más convicentes

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo

- Ptolomeo "fusiló" las observaciones astronómicas a un colega en la Biblioteca de Alejandría

- Los colegas de Galileo tenían dificultad para reproducir sus experimentos

- Los experimentos de Dalton (leyes de la combinación química,...) no se han podido repetir

- Millikan (premio Nobel) se equivocó al representar sus resultados. Pero así eran más convicentes

- Lazzarini estimó π experimentalmente
  Repitió su experimento 4.000 veces. Su comunicación incluía el resultado a las 3.408 repeticiones:

$$\hat{\pi} = \frac{2 \times 2,5 \times 3.408}{3 \times 1808} = \frac{355}{113} = 3,1415929...,$$

casualmente, es una buena aproximación racional de π (la siguiente mejora se obtiene con $\frac{52163}{16604}$)

Pero (Rao, Statistics and Truth, 1989)

- Newton realizó medidas de precisión inaudita para su tiempo

- Ptolomeo "fusiló" las observaciones astronómicas a un colega en la Biblioteca de Alejandría

- Los colegas de Galileo tenían dificultad para reproducir sus experimentos

- Los experimentos de Dalton (leyes de la combinación química,...) no se han podido repetir

- Millikan (premio Nobel) se equivocó al representar sus resultados. Pero así eran más convicentes

- Lazzarini estimó π experimentalmente

  Repitió su experimento 4.000 veces. Su comunicación incluía el resultado a las 3.408 repeticiones:

$$\hat{\pi} = \frac{2 \times 2,5 \times 3.408}{3 \times 1808} = \frac{355}{113} = 3,1415929...,$$

casualmente, es una buena aproximación racional de π (la siguiente mejora se obtiene con $\frac{52163}{16604}$)

¿Seguro que $p \leq 0,0025$?

CONCLUSIONES:

1.- La Estadística es útil

CONCLUSIONES:

1.- La Estadística es útil

2.- El método estadístico descansa en 4 ideas sencillas

CONCLUSIONES:

1.- La Estadística es útil

2.- El método estadístico descansa en
4 ideas sencillas

3.- La aplicación de la Estadística
NO es automática
y requiere especialistas
en el problema

CONCLUSIONES:

1.- La Estadística es útil

2.- El método estadístico descansa en
4 ideas sencillas

3.- La aplicación de la Estadística
NO es automática

y requiere especialistas
en el problema

y en Estadística