

Día de la Ciencia 2004

Talleres de Matemáticas

VENTAJAS

DEL

COMPORTAMIENTO

CAÓTICO

DETERMINISTA



J. Güemez

Dpto. Física Aplicada

10 DE NOVIEMBRE 2004

La base de la actividad científica es la reproductibilidad de los experimentos.

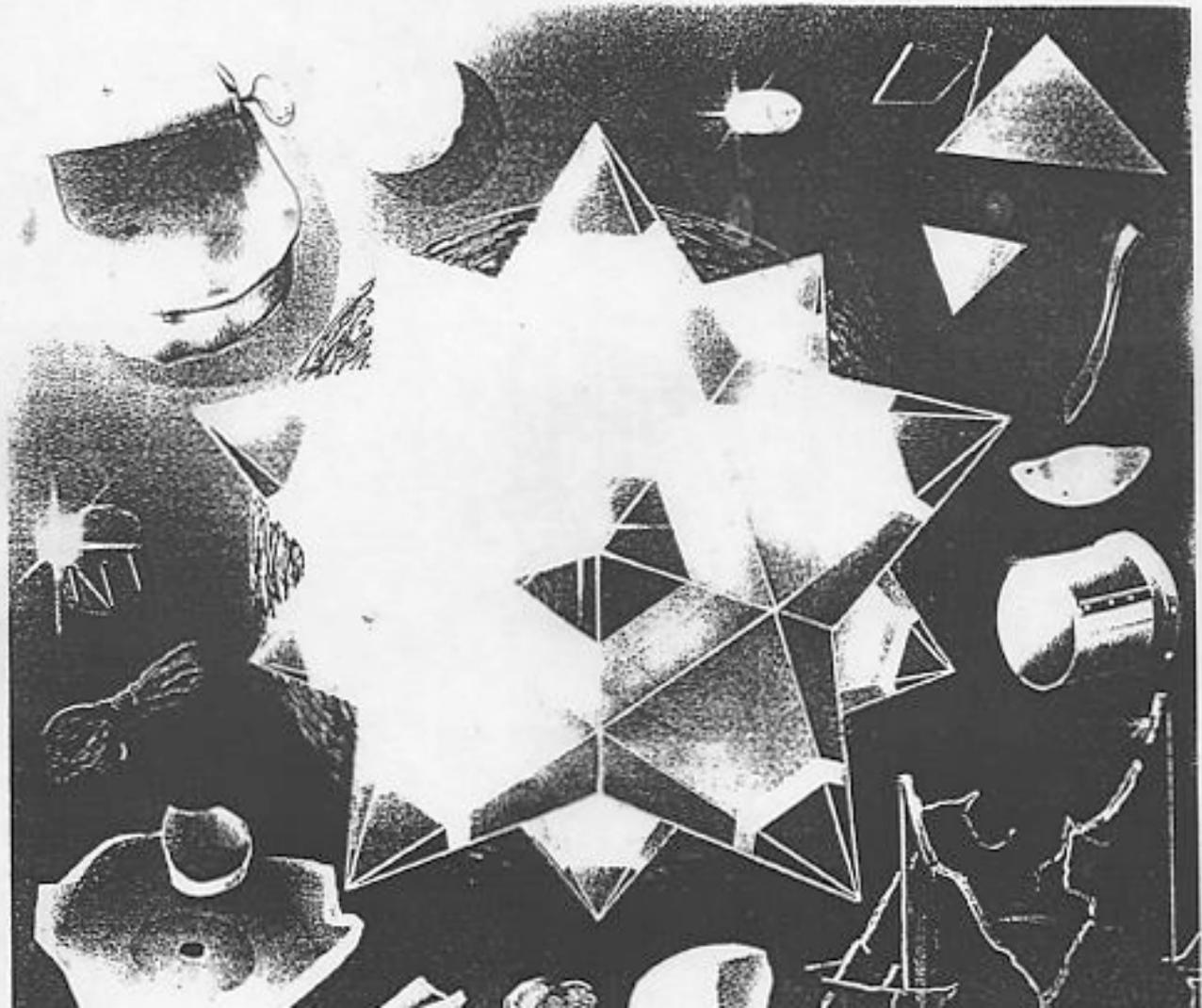
Pero no sólo se exige que experimentos realizados en las mismas condiciones produzcan el mismo resultado (reproductibilidad débil) sino que experimentos realizados en aproximadamente las mismas condiciones produzcan aproximadamente el mismo resultado (reproductibilidad fuerte).

El caos determinista

por Hermann Haken y Arne Wunderlin

El caos determinista es un término paradójico porque asocia dos palabras aparentemente contradictorias. La palabra caos evoca una situación errática en la cual toda previsión es imposible, lo cual parece excluir el determinismo. Hay situaciones, sin embargo, que son estrictamente deterministas y que exhiben propiedades de caos determinista. El autor demuestra que el caos puede aparecer tanto en sistemas mecánicos simples como en otros más complejos. Explica además sus propiedades e indica cómo caracterizarlo en diversas situaciones experimentales.

Sistemas basados en ecuaciones deterministas, sin aleatoriedad, se supone que cumplen la condición de reproductibilidad fuerte.



Movimiento caótico

Antonio F. Rañada

Marzo de 1986

Los sistemas dinámicos deterministas, cuyo ámbito de aplicación cubre todas las ramas de la ciencia, tienen movimientos de tal complejidad que resulta imposible toda predicción, por cuya razón reciben el nombre de caóticos

Uno de los resultados más sorprendentes de la física de los últimos años es la comprobación y el entendimiento de que, en contra de la idea que se tiene de la ciencia como descripción de la regularidad de la naturaleza, la mayoría de los sistemas dinámicos deterministas tienen movimientos tan complejos, con sus trayectorias entrecruzándose de forma tan errática y turbulenta, que resulta imposible toda predicción detallada para tiempos grandes y extremadamente difícil su estudio. En esos casos se habla de caos, de comportamiento caótico, turbulento o estocástico.

Constituye su característica más importante la extrema sensibilidad de los movimientos a pequeñas variaciones en las posiciones iniciales, que son imposibles de eliminar, bien como resultado de inevitables imprecisiones en las medidas, bien debidas a necesarias aproximaciones en los métodos de cálculo. Significa esto que dos trayectorias posibles que en el instante inicial están muy próximas pueden separarse de forma brusca y violenta al cabo de un tiempo, sin ninguna intervención exte-

Pero resulta notable y nueva la constatación de que eso ocurre con una enorme generalidad, insospechada hasta hace poco, incluso en sistemas de aspecto muy simple con sólo dos o pocos más grados. Aunque Henri Poincaré y Albert Einstein lanzaron llamadas de atención sobre el problema, su preocupación no llegó a calar hasta los últimos años. Se tiene ahora la conciencia de que sus importantes consecuencias no sólo afectan a la física, la astronomía, la biología y otras ciencias afines, sino que incluso obligan a replantear aspectos básicos de la teoría de la ciencia. El descubrimiento de la ubicuidad del caos es, sin duda, la tercera gran revolución de la física del siglo xx, junto con las de la relatividad y la teoría cuántica, y sus consecuencias son, en opinión de muchos, de trascendencia comparable a las de éstas.

Todo esto puede causar sorpresa en una sociedad construida sobre la capacidad de la ciencia de predecir acertadamente el comportamiento del mundo material, pues el hombre hace constantemente predicciones que re-

char mano de los momentos, que son funciones de las velocidades. En el caso de una partícula que tengamos que determinar mediante coordenadas cartesianas, los momentos equivalen al producto de la masa por las componentes de la velocidad.

Ya aludido, utilizaremos bastante el concepto de número de grados de libertad. Trátase del número de coordenadas independientes, o también de momentos. La partícula que imaginemos ubicada en el plano, que sabemos posee dos dimensiones, tendrá dos grados de libertad; tres en el espacio tridimensional; n partículas en el espacio tendrán $3n$ grados. De acuerdo con ello, el estado de un sistema es la especificación del conjunto de los valores de las n coordenadas y los n momentos en un cierto tiempo. Y con el estado de un sistema se relaciona el espacio de las fases, que se define por el espacio de $2n$ coordenadas, cuyos puntos corresponden a los estados de un sistema. El punto representativo de un sistema describe una órbita o trayectoria al variar el tiempo (avanzar o retroceder).

James P. Crutchfield, J. Doyne Farmer, Norman H. Packard y Robert S. Shaw

Febrero de 1987

Hay orden en el caos: el azar tiene una forma geométrica subyacente.

El caos impone límites fundamentales a la predicción, pero también sugiere relaciones causales donde nadie las había sospechado

El gran poder de la ciencia descansa en la capacidad de relacionar causa y efecto. Basándose en las leyes de la gravitación, por ejemplo, los eclipses se pueden predecir con miles de años de antelación. Hay otros fenómenos naturales cuya predicción no es tan sencilla. Aunque los movimientos de la atmósfera obedecen las leyes de la física en la misma medida que los movimientos de los planetas, las predicciones meteorológicas se realizan todavía en términos de probabilidades. El clima, el flujo de un torrente y el rodar de los dados tienen, todos ellos, aspectos impredecibles. Al no aparecer una relación clara entre causa y efecto, se dice que esos fenómenos poseen elementos aleatorios. Y sin embargo, hasta hace poco tiempo, pocas razones hacían dudar de que la predecibilidad exacta se alcanzara, en principio. Se suponía que bastaría con recoger y procesar una cantidad suficiente de información.

establece nuevos límites fundamentales en la capacidad de avanzar predicciones. Pero, por otra, el determinismo inherente en el caos muestra que muchos fenómenos aleatorios son más predecibles que lo que se había pensado. Mucha información de aspecto aleatorio recogida en el pasado –y archivada porque se suponía demasiado compleja– puede explicarse ahora a través de leyes simples. El caos permite encontrar orden en sistemas tan diversos como la atmósfera, los grifos que gotean y el corazón. El resultado es una revolución que está incidiendo en muchas ramas de la ciencia.

¿Cuál es el origen del comportamiento estocástico? El movimiento browniano ofrece un ejemplo clásico de azar. Si se observa una partícula de polvo a través del microscopio, se ve que sigue un zigzag continuo y errático. Ello se debe al bombardeo que sufre la partícula por las moléculas

dadas o de influencias no visibles. La existencia de comportamiento aleatorio en sistemas muy simples nos obliga a reconsiderar las fuentes del azar, incluso en macrosistemas del tenor del clima.

¿Por qué motivo es mucho más difícil predecir el movimiento de la atmósfera que el del sistema solar? Ambos están constituidos por gran cantidad de partes y, ambos también, están gobernados por la segunda ley de Newton, $F=ma$, que puede considerarse un procedimiento sencillo para predecir el futuro. Si las fuerzas F que actúan sobre cierta masa m son conocidas, lo mismo ocurre con la aceleración a . Se sigue de las reglas del cálculo que, si la posición y la velocidad de un objeto pueden determinarse en un instante dado, quedan determinadas para siempre. Es esta una idea tan potente que el matemático francés del siglo XVIII Pierre Simon de Laplace se jactó en cierta ocasión de que, dadas la posición y la

CÓMO ENTENDER EL CAOS DETERMINISTA

LA MAYORÍA DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS DETERMINISTAS, DEPENDIENDO DE PARÁMETROS O SOMETIDOS A UNA EXCITACIÓN PERIÓDICA, MUESTRAN DE FORMA CASI INEVITABLE COMPORTAMIENTOS IMPREDICTIBLES. ESTOS APARECEN PARA VALORES ADECUADOS DE LOS PARÁMETROS O DE LA AMPLITUD Y FRECUENCIA DE LA EXCITACIÓN. SE OBSERVA, APARENTEMENTE, UN COMPORTAMIENTO CAÓTICO. CIERTOS SISTEMAS EVOLUCIONAN HACIA UN ATRACTOR EXTRAÑO QUE MUESTRA UNA ESTRUCTURA FRACTAL. PODEMOS PREGUNTARNOS SI ESTE APARENTE DESORDEN ES TAL O BIEN ES EL REFLEJO DE UN ORDEN CON UNA ESTRUCTURA COMPLICADA. EN ESTE ARTÍCULO SE EXPLICA CUÁL ES EL ORIGEN DE ESTE ORDEN NUEVO, QUE CONVIVE CON LA IMPREDICTIBILIDAD Y QUE, ADEMÁS, TIENE UNA GRAN BELLEZA ESTÉTICA. NO PODEMOS HACER UNA PREDICCIÓN PRECISA DEL SISTEMA PERO SÍ PARCIAL. LAS HERRAMIENTAS BÁSICAS QUE SE VAN A UTILIZAR SE REMONTAN A LOS TRABAJOS PIONEROS DE POINCARÉ.⁽¹⁾

CARLES SIMÓ

Enfrentados a un fenómeno de la naturaleza (incluyendo al ser humano y su comportamiento), a un ensayo de laboratorio o a una experiencia tecnológica, intentamos, en primer lugar, comprenderlo. Posteriormente intentaremos efectuar predicciones y, si está en nuestra mano y está permitido, trataremos de actuar sobre el mismo. La manera sumaria de proceder es ya bien conocida:⁽²⁾ 1) Identificar variables que describan el fenómeno de la manera más completa posible, de forma que el conocimiento de las mismas en un cierto instante de tiempo nos defina, de forma suficientemente fiel, el estado del fenómeno observado. Posiblemente en muchos fenómenos seamos ya incapaces de llegar a este estadio. 2) Efec-

tes exteriores que suponemos conocida. Si tenemos éxito en los tres apartados anteriores, habremos elaborado un modelo matemático (determinista y continuo) del fenómeno estudiado. A un modelo matemático también se le llama ley física o ley de la naturaleza. Tales son, por ejemplo, la ley de la gravitación de Newton, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, las leyes de la cinética química o de la desintegración nuclear. Ninguna de ellas es más que una aproximación más o menos útil, dependiendo del contexto espaciotemporal del fenómeno. Ningún derecho nos asiste para extrapolarlas a situaciones que no hayan sido convenientemente contrastadas con los apartados 1) a 3) de antes.

la lista) los experimentos realizados concuerdan satisfactoriamente con las conclusiones obtenidas usando razonamientos matemáticos (con el eventual uso de la simulación numérica). Ello se debe a tres cosas: a) el gran número de investigadores que aportan ideas nuevas para comprender modelos matemáticos cada vez más complejos (y más cercanos a la realidad); b) el recurso a la simulación numérica de los modelos complejos con la disponibilidad de ordenadores rápidos y asequibles; c) El avance tecnológico que permite experiencias de laboratorio finas, de forma que se satisfacen aceptablemente las hipótesis de que parte el matemático.

Aplicación Logística

$$X_{n+1} = 4\lambda X_n (1 - X_n)$$

Mapa iterativo

$$0 \leq X_i \leq 1$$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

Puntos fijos

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1 - x_n); 0 \leq x_n \leq 1.$$

1. Semilla

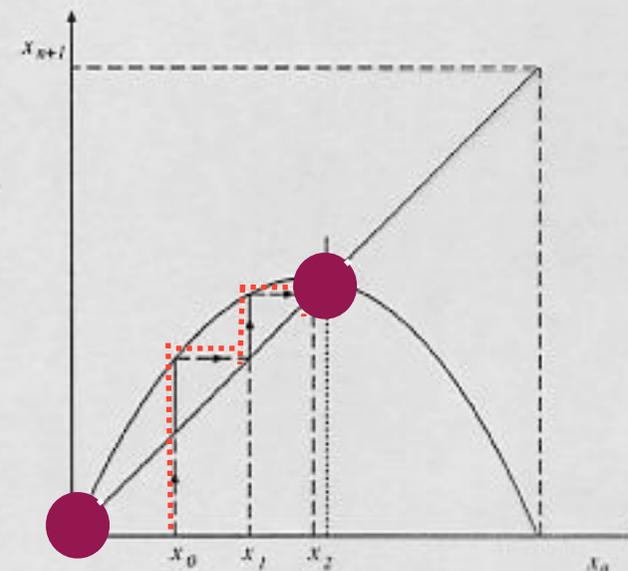
$$x_0$$

2. Primera iteración

$$x_1 = 4\lambda x_0 (1 - x_0).$$

3. n -ésima iteración

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n (1 - x_n).$$



Interpretación geométrica de las diversas iteraciones de la aplicación logística para $\lambda = 0,5$. Con la semilla inicial, x_0 , se obtiene el resultado x_1 que, llevado sobre la diagonal, sirve de nueva semilla, y así sucesivamente. El proceso termina, cualquiera que sea la semilla, en el punto fijo marcado con la flecha.

Aplicación Logística

Puntos Fijos: $X_{n+1} = X_n = X^*$

$$\lambda > 0,25, \quad X^* = 0;$$

Estabilidad: $X = X^* + \delta X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta X$

$$\begin{aligned} \delta X_{n+1} &\approx 4\lambda(1 - 2X^*)\delta X_n \\ &= [4\lambda(1 - 2X^*)]^n \delta X \end{aligned}$$

$4\lambda(1 - 2X^*) < 1$ Estable

$4\lambda(1 - 2X^*) > 1$ Inestable

Estabilidad de puntos fijos

$$X^* = 0, \lambda < 0,25, \delta X_{n+1} = |0,9\dots|^n \delta X, \lim_{n \rightarrow \infty} \delta X = 0$$

Estable

$$X^* = 0, \lambda > 0,25, \delta X_{n+1} = |1,0\dots|^n \delta X, \lim_{n \rightarrow \infty} \delta X = \infty$$

Inestable

$$\left| \frac{df(X)}{dX} \right|_{X=0} = 4\lambda (1 - 2X^*) = 1$$

Estabilidad de puntos fijos

$$X^* = 1 - 1/4\lambda, \quad \lambda > 0,25,$$

$$\delta X_{n+1} = |2(1 - 2\lambda)|^n \delta X$$

$$2(1 - 2\lambda) = -1 \rightarrow \lambda = 3/4$$

$$X^* = 1 - 1/4\lambda, \quad 0,25 < \lambda < 0,75$$

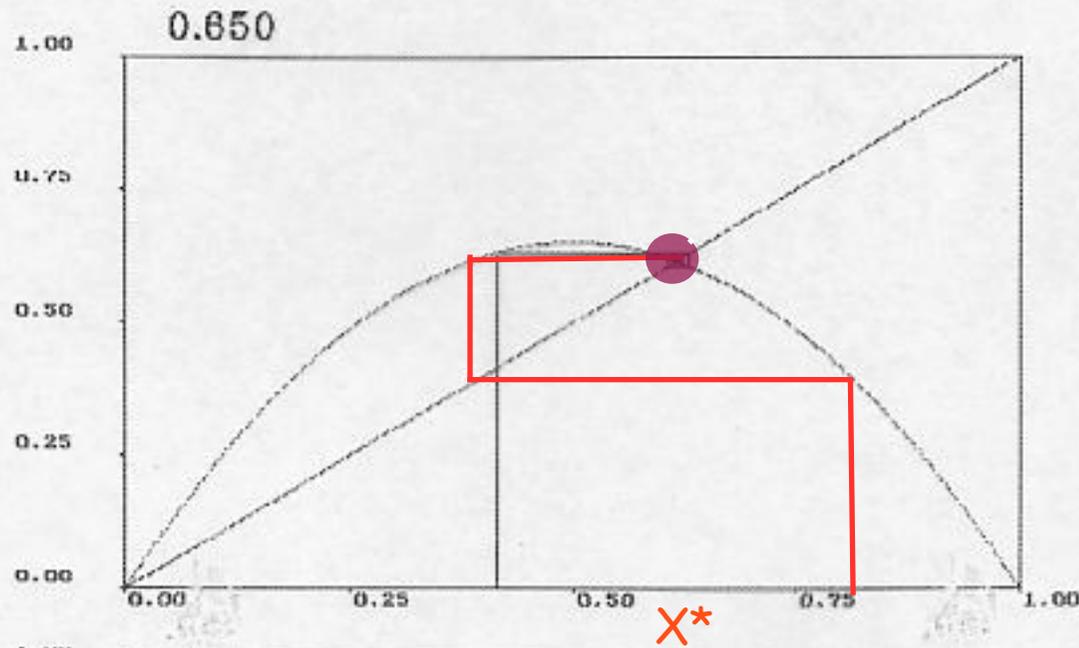
Estable

$$\left| \frac{df(X)}{dX} \right|_{X=X^*} = 4\lambda(1 - 2X^*) = -1$$

$$X^* = 0, X^* = 1 - 1/4\lambda, \lambda > 3/4$$

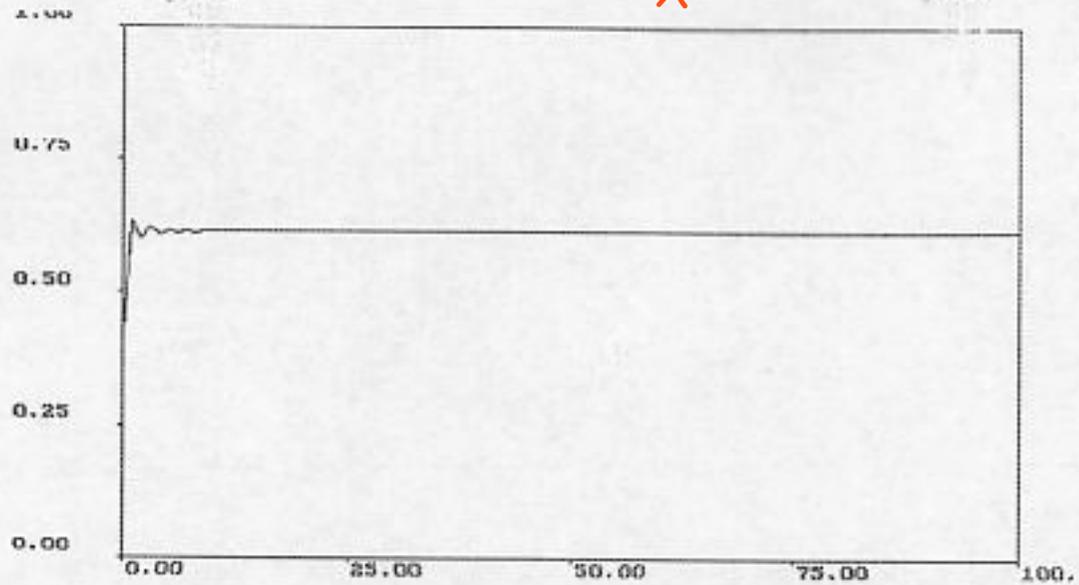
Todos los puntos fijos son inestables

$X(n+1)$



$X(n)$

$X(n+1)$



n

0, punto fijo inestable

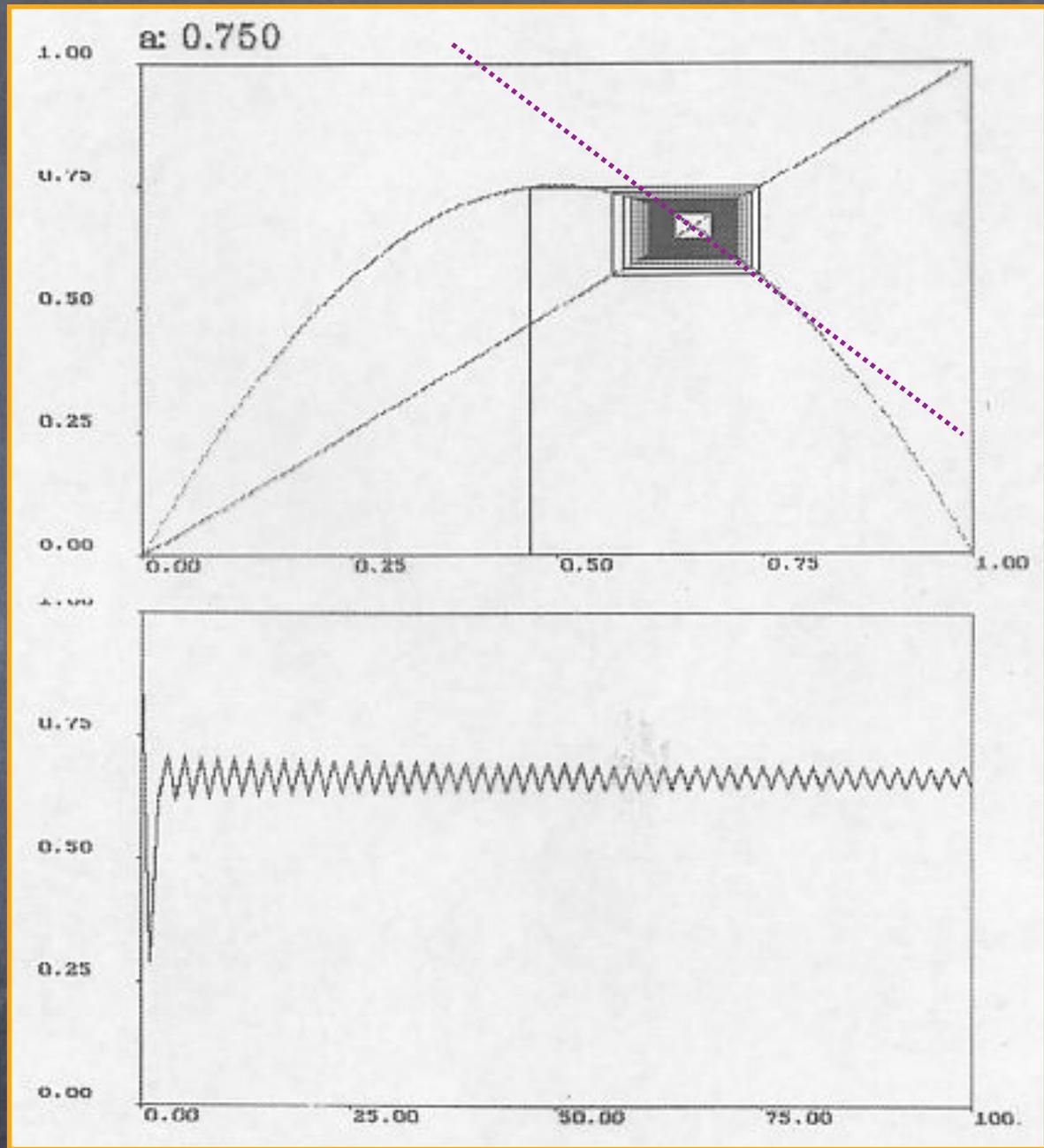
X^* , punto fijo estable

$X(n+1)$

$$X^* = 1 - \frac{1}{4\lambda}$$

$X(n+1)$

$$4\lambda - 8\lambda X^* = -1$$

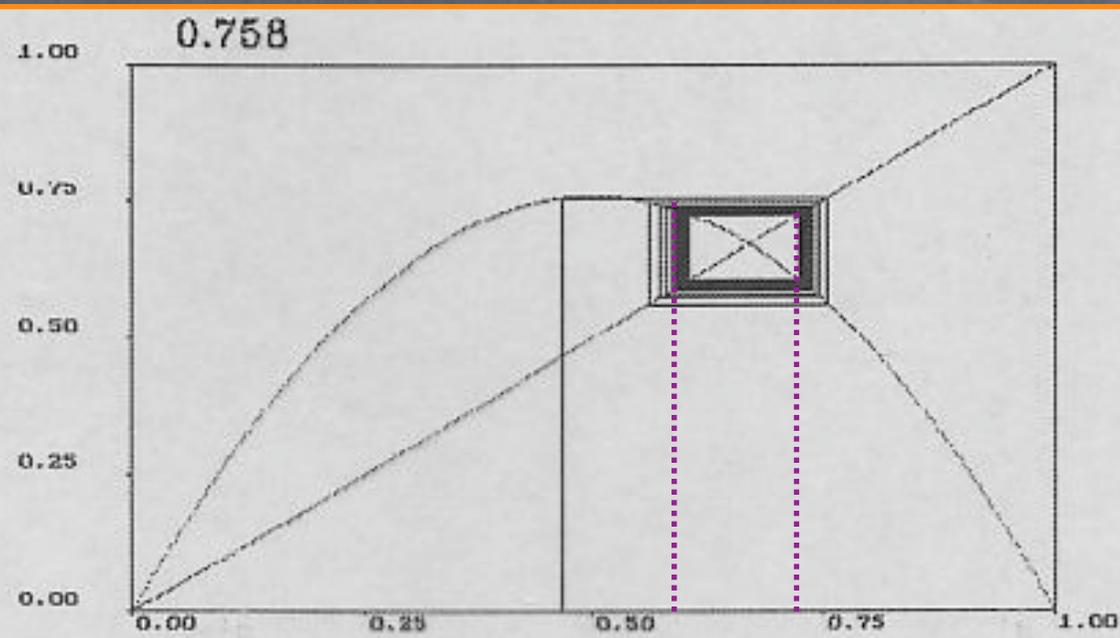


$X(n)$

n

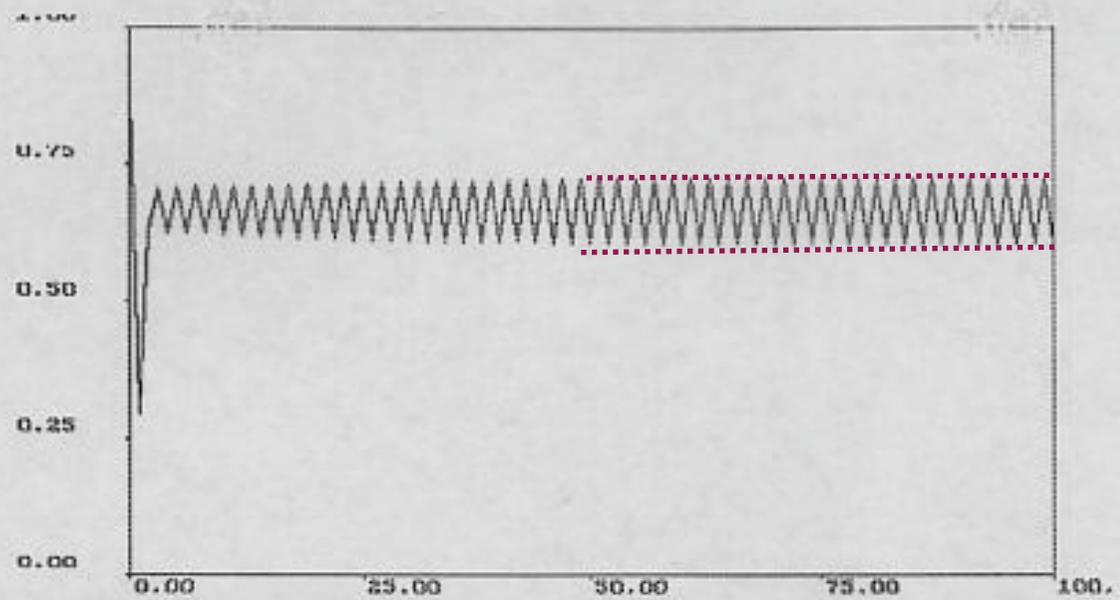
0, punto fijo inestable
 X^* , punto fijo estable límite

$X(n+1)$



$X(n)$

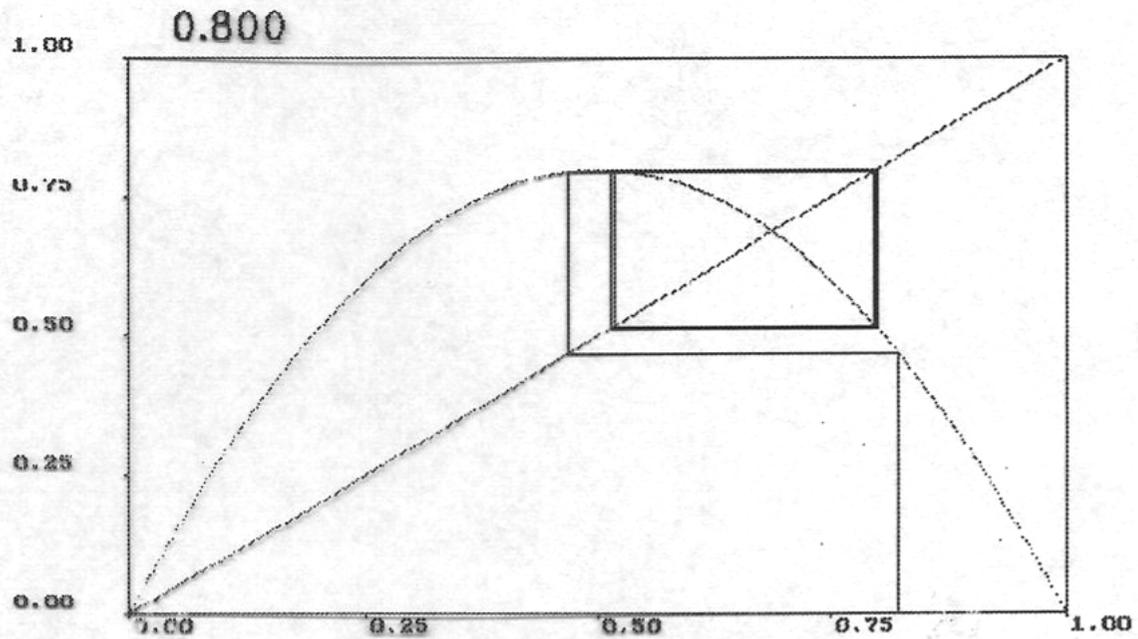
$X(n+1)$



n

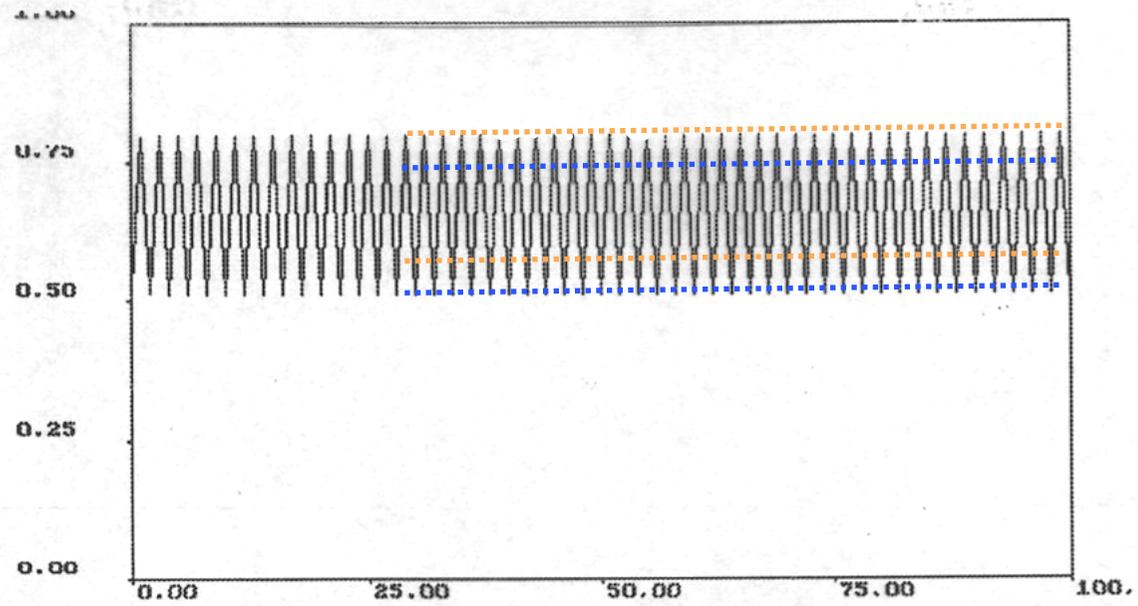
X^* , punto fijo inestable
2-ciclo estable

$X(n+1)$



$X(n)$

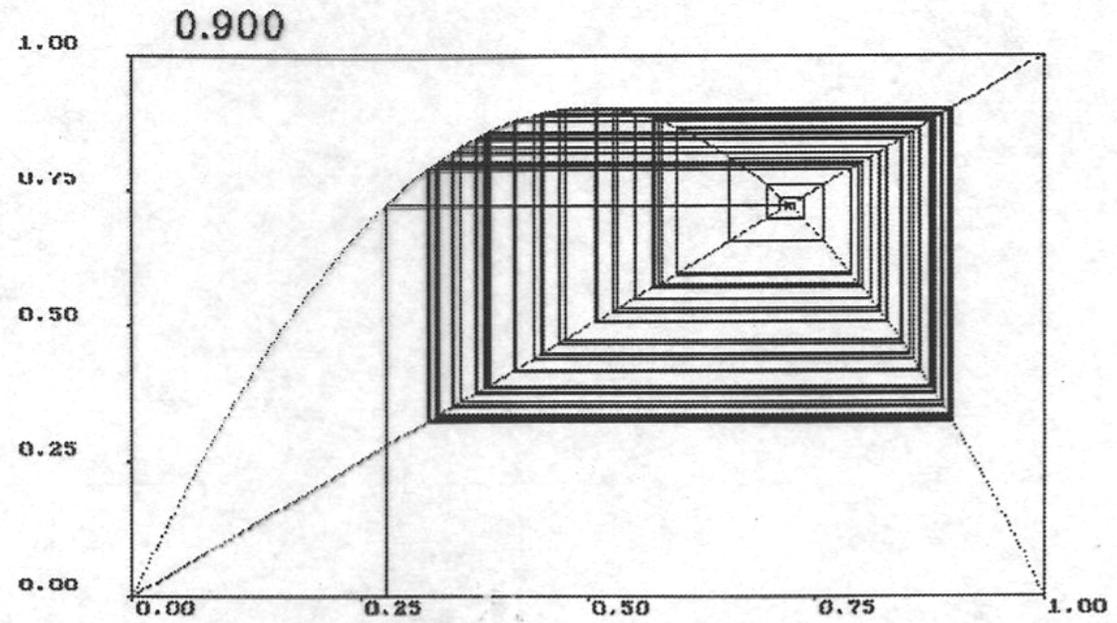
$X(n+1)$



n

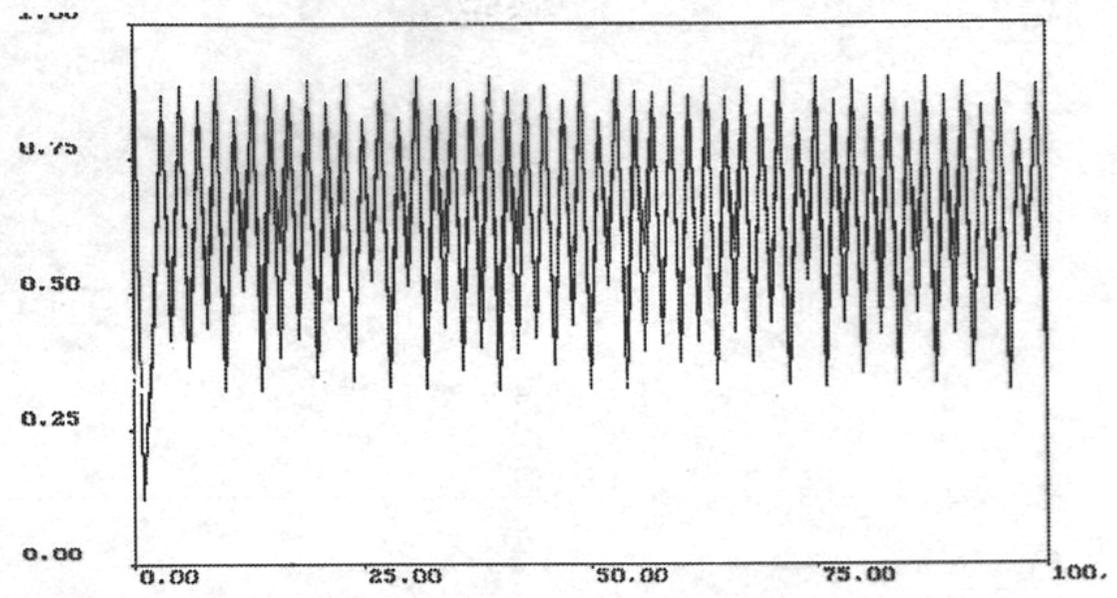
2-ciclo inestable
4-ciclo estable

$X(n+1)$



$X(n)$

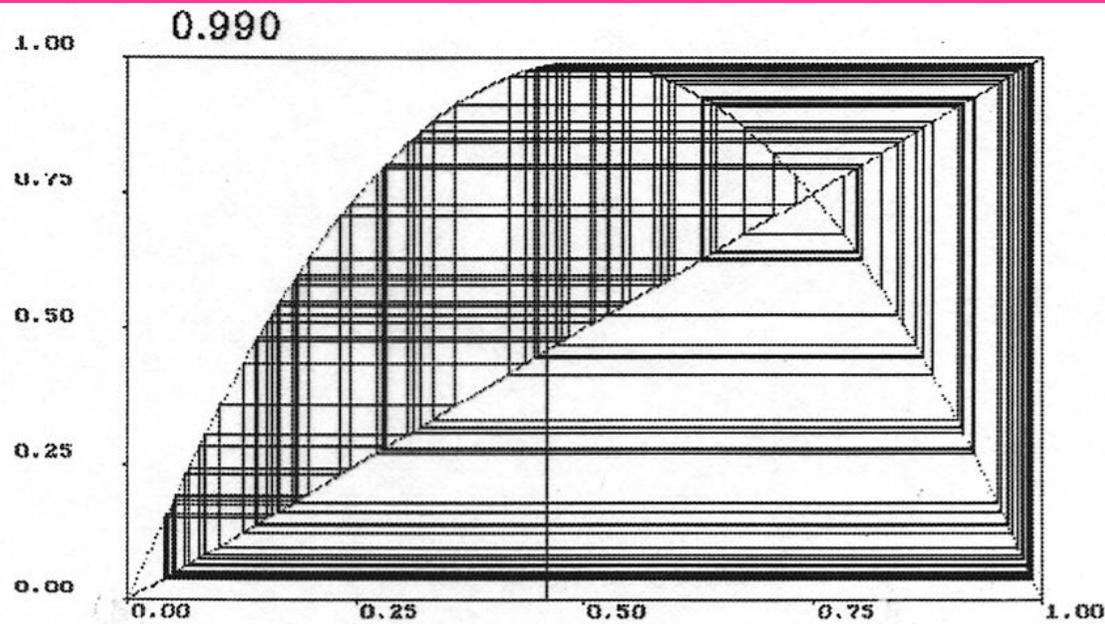
$X(n+1)$



n

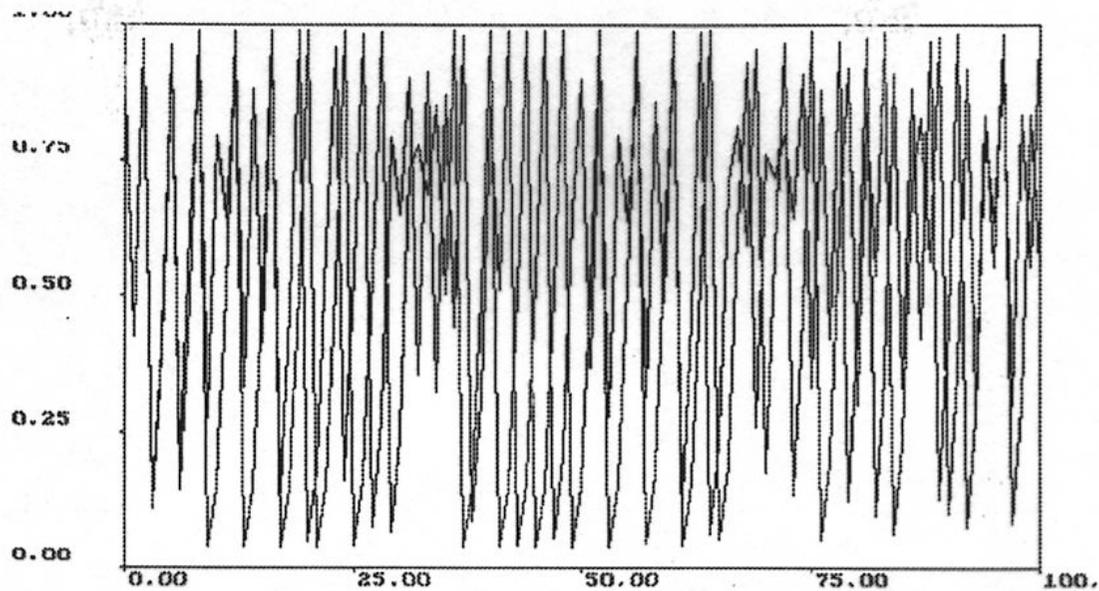
Puntos fijos inestables
2-ciclo inestable, 4-ciclo inestable,

$X(n+1)$



$X(n)$

$X(n+1)$



n

Caos estocástico

Diagrama de bifurcaciones

Ruta de doblamiento
de períodos

Borde del caos:
infinitas órbitas

Ventanas de periodicidad

Autosemejanza: fractal

Caos estocástico,
sin estructura

Sensibilidad a las
condiciones iniciales.
(Exponente de Liapunov
positivo).

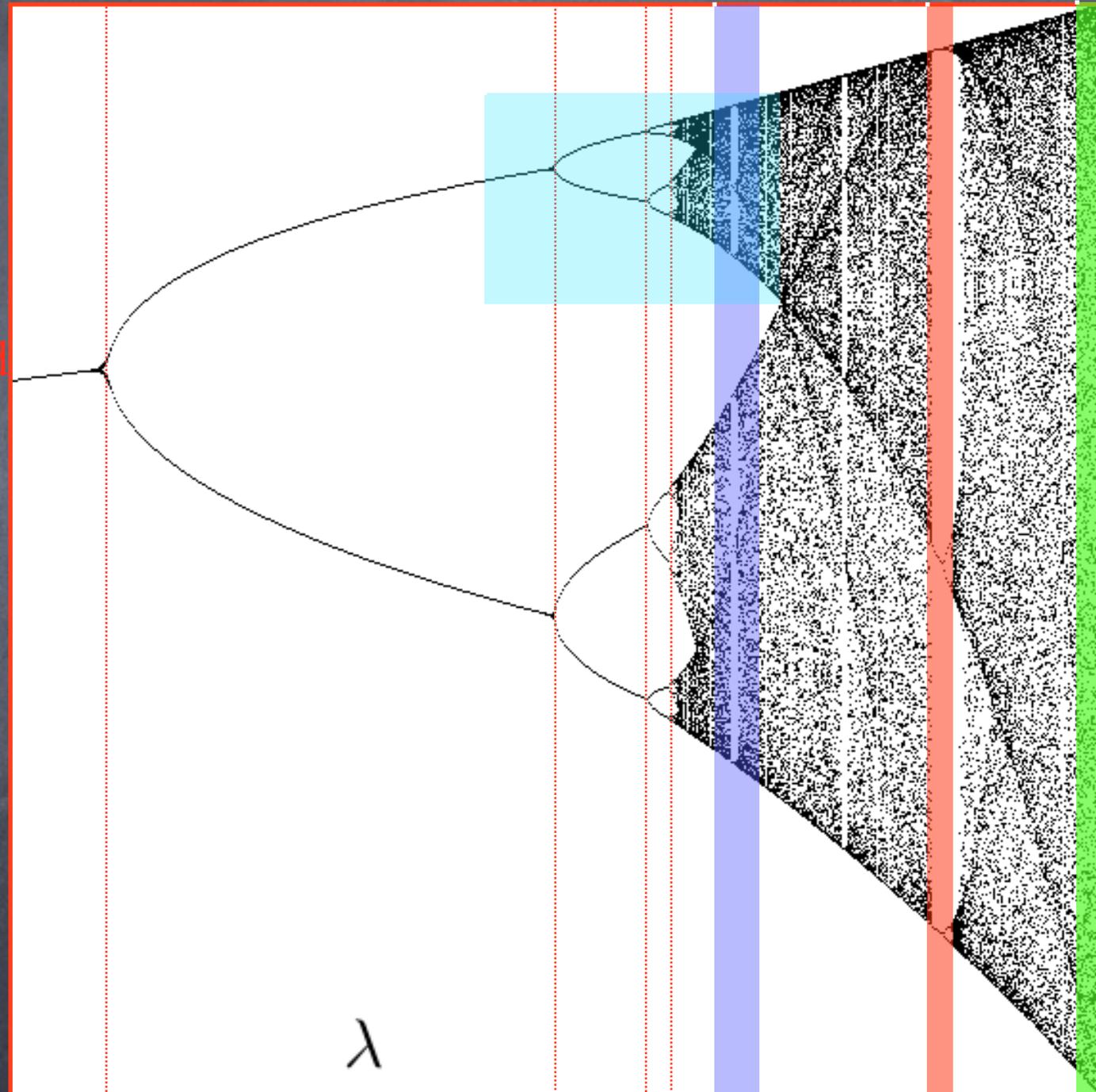
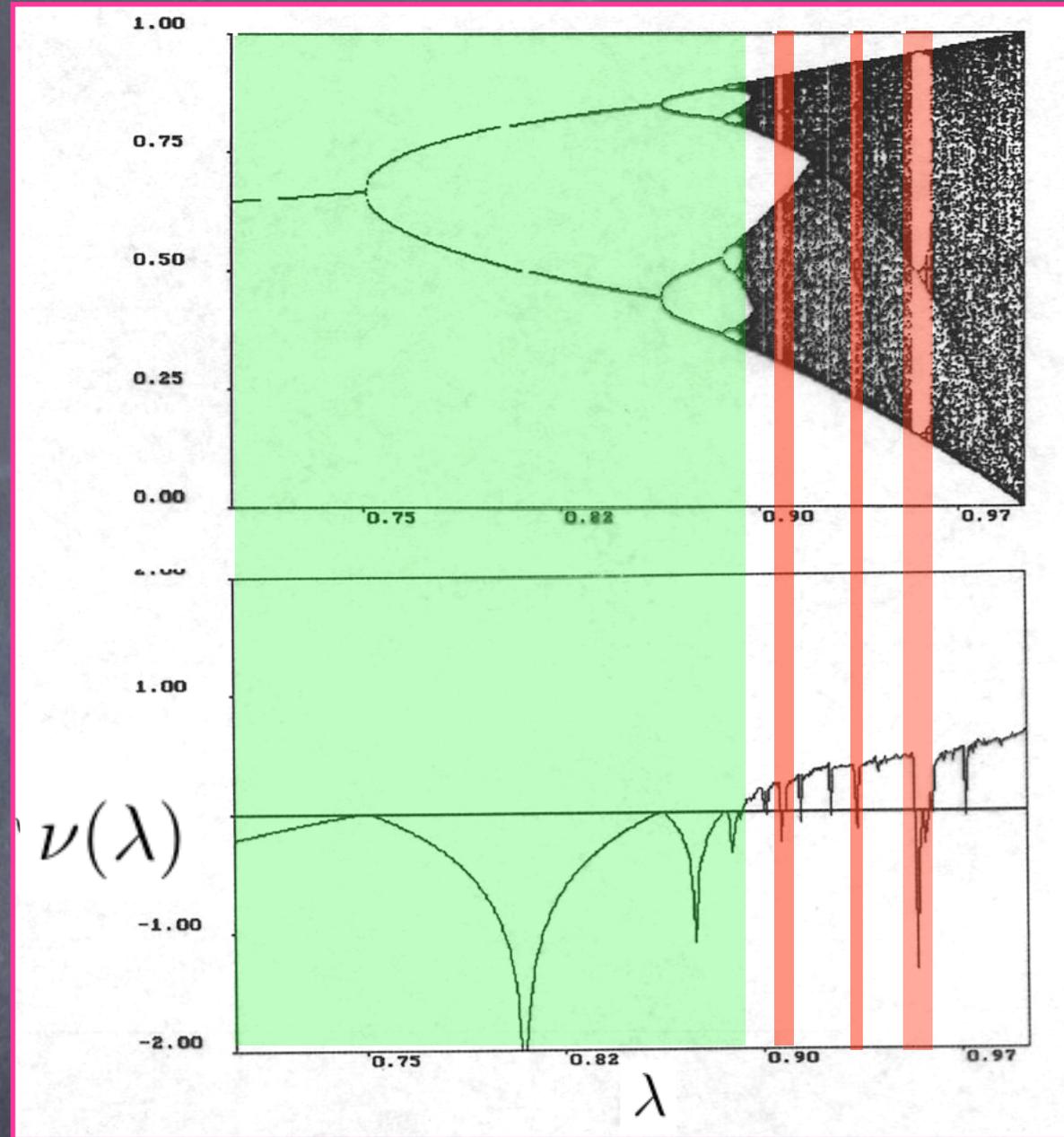


Diagrama de bifurcaciones

Sensibilidad a las condiciones iniciales. (Exponente de Liapunov positivo).

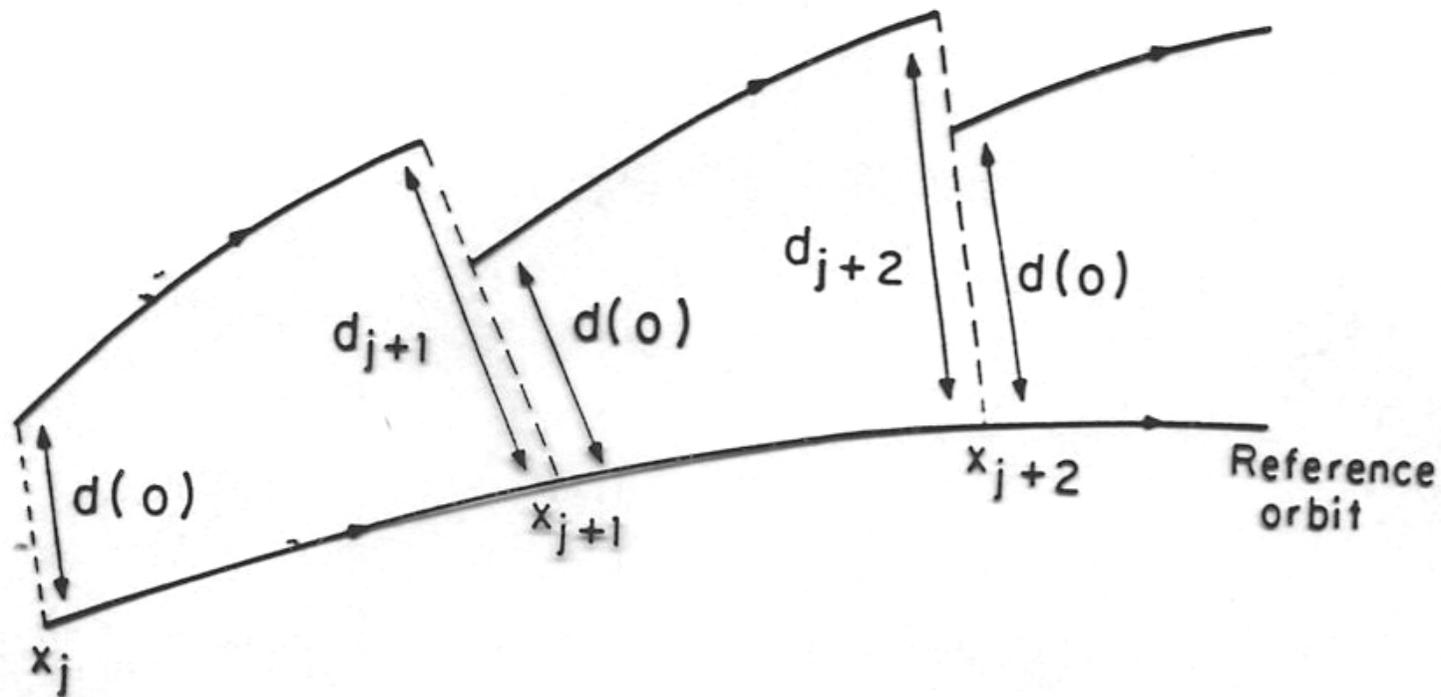
Exponentes de Liapunov

$$|\delta x(t)| \approx e^{\nu t} \delta x(0)$$



$$\nu(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left\| \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \right\|$$

Exponentes de Liapunov



$$|\delta x(t)| \approx e^{\nu t} |\delta x(0)|$$

$$\nu(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left\| \frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \right\|$$

Sensibilidad a las condiciones iniciales

Las semillas
difieren en la
décima cifra decimal.

Después de 20
iteraciones, las salidas
difieren en la sexta
cifra decimal.

```
(* Aplicacion logística. *)  
logisticuno[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);  
logisticdos[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);  
logistictre[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);
```

$$\lambda = 11/12 = 0,9166$$

```
xuno=0.5641235412;  
xdos=0.5641235411;  
xtre=0.5641235410;  
For[ i=0, i<20, i++,  
  suno=logisticuno[lambda,xuno]; xuno=suno;  
  sdos=logisticdos[lambda,xdos]; xdos=sdos;  
  stre=logistictre[lambda,xtre]; xtre=stre;  
];  
Print[N[xuno,30]];  
Print[N[xdos,30]];  
Print[N[xtre,30]];
```

```
0.4279502515304490208  
0.4279503360140011507  
0.4279504204975581278
```

Las semillas
difieren en la
décima cifra decimal.

Después de 50
iteraciones, las salidas
difieren en la tercera
cifra decimal.

```
(* Aplicacion logística. *)  
logisticuno[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);  
logisticdos[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);  
logistictre[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);
```

$$\lambda = 11/12 = 0,9166^{*)}$$

```
xuno=0.5641235412;  
xdos=0.5641235411;  
xtre=0.5641235410;  
For[ i=0, i<50, i++,  
  suno=logisticuno[lambda,xuno]; xuno=suno;  
  sdos=logisticdos[lambda,xdos]; xdos=sdos;  
  stre=logistictre[lambda,xtre]; xtre=stre;  
];  
Print[N[xuno,30]];  
Print[N[xdos,30]];  
Print[N[xtre,30]];
```

```
0.5250232533871775258  
0.5249421387019790706  
0.5248607322593563358
```

Las semillas
difieren en la
décima cifra decimal.

Después de 100
iteraciones, las salidas
difieren en la primera
cifra decimal.

```
(* Aplicacion logística. *)  
logisticuno[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);  
logisticdos[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);  
logistictre[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);
```

$$\lambda = 11/12 = 0,9166$$

```
xuno=0.5641235412;  
xdos=0.5641235411;  
xtre=0.5641235410;  
For[ i=0, i<100, i++,  
  suno=logisticuno[lambda,xuno]; xuno=suno;  
  sdos=logisticdos[lambda,xdos]; xdos=sdos;  
  stre=logistictre[lambda,xtre]; xtre=stre;  
];  
Print[N[xuno,30]];  
Print[N[xdos,30]];  
Print[N[xtre,30]];
```

```
0.596104896099049778  
0.5484799239528777561  
0.4523877424574471041
```

Las semillas
difieren en la
décima cifra decimal.

Después de 130
iteraciones, las salidas
difieren completamente.

```
(* Aplicacion logística.*)
```

```
logisticuno[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);
```

```
logisticdos[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);
```

```
logistictre[lambda_,x_]:= lambda x (1-x);
```

$$\lambda = 11/12 = 0,9166$$

```
xuno=0.5641235412;
```

```
xdos=0.5641235411;
```

```
xtre=0.5641235410;
```

```
For[ i=0, i<130, i++,
```

```
 suno=logisticuno[lambda,xuno]; xuno=suno;
```

```
 sdos=logisticdos[lambda,xdos]; xdos=sdos;
```

```
 stre=logistictre[lambda,xtre]; xtre=stre;
```

```
];
```

```
Print[N[xuno,30]];
```

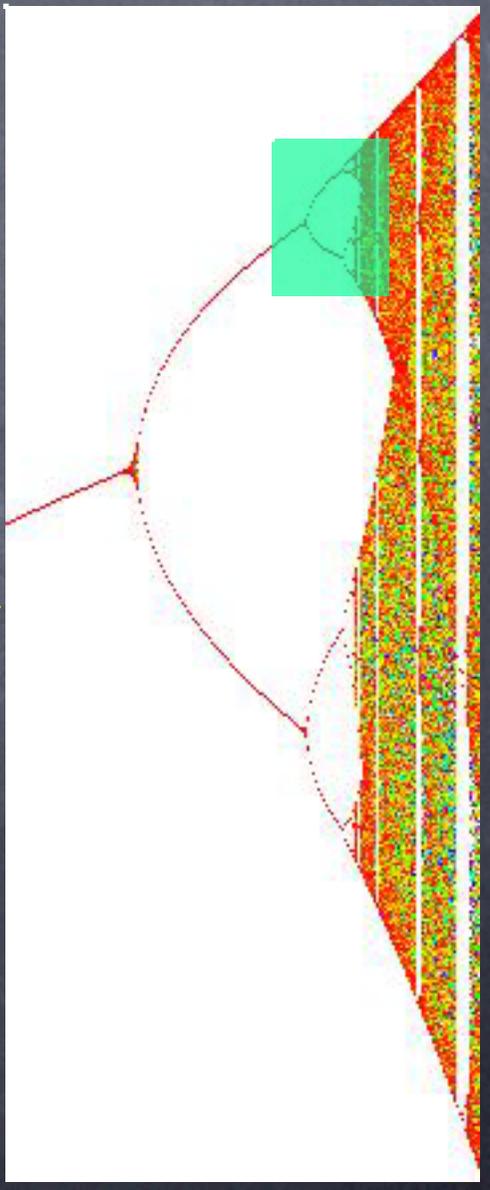
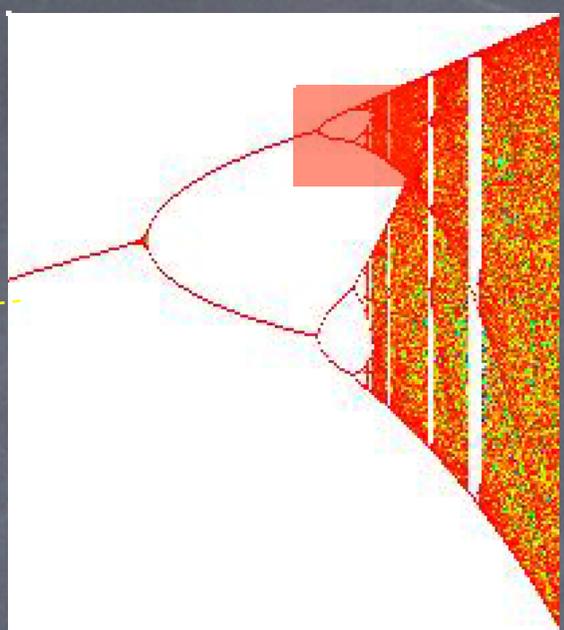
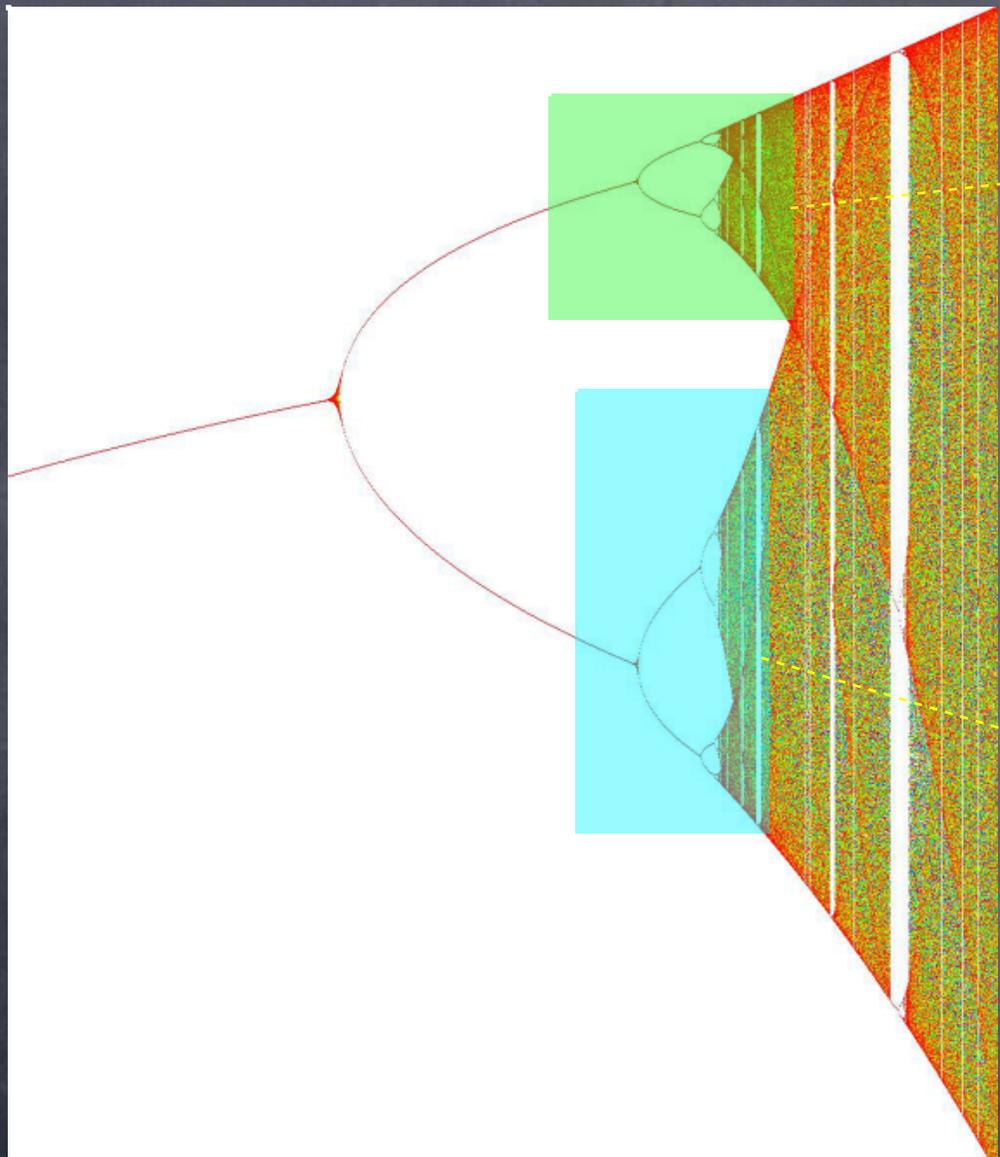
```
Print[N[xdos,30]];
```

```
Print[N[xtre,30]];
```

```
0.53545555954664435
```

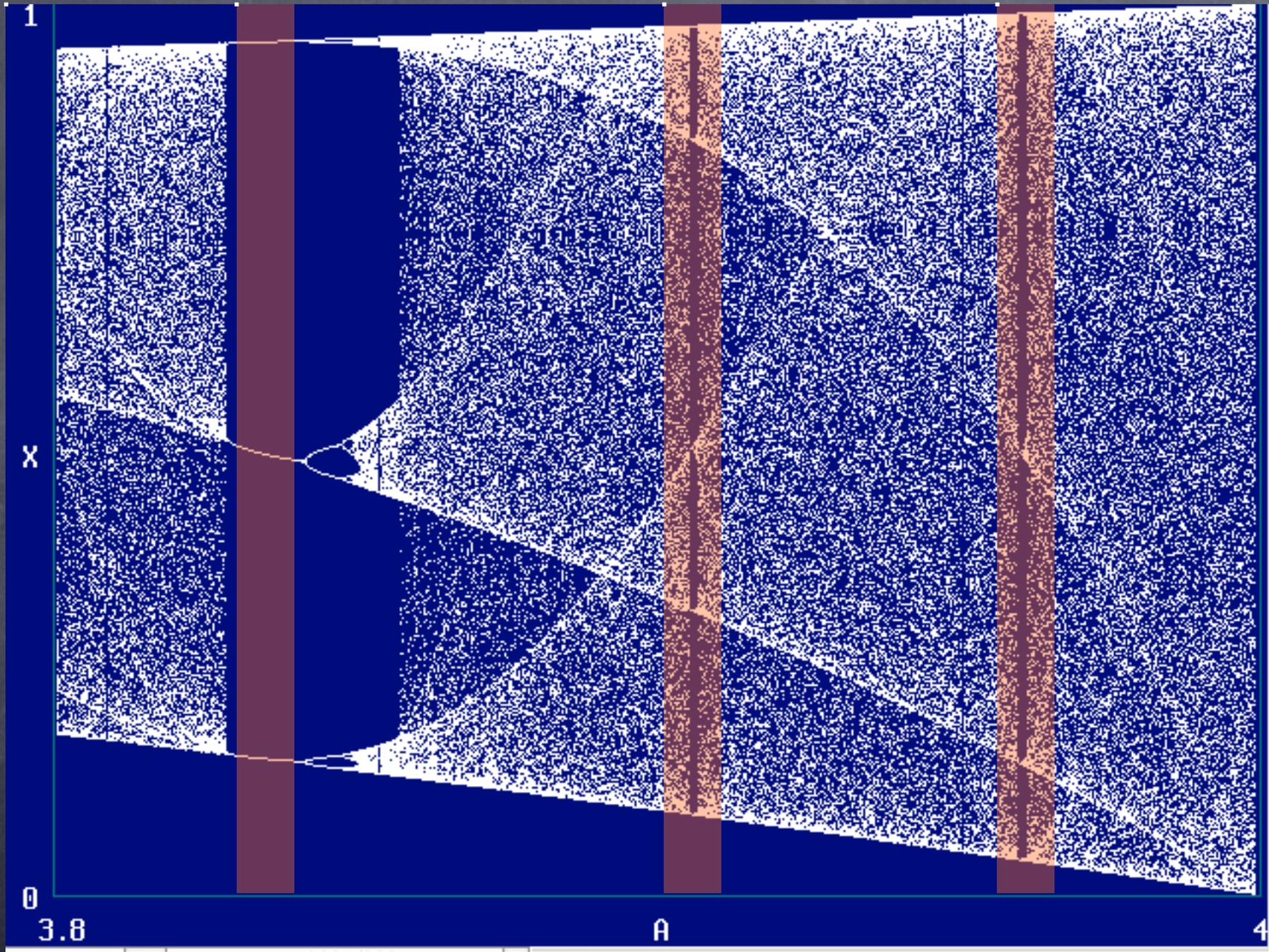
```
0.3167648890963544123
```

```
0.7064167739952610309
```

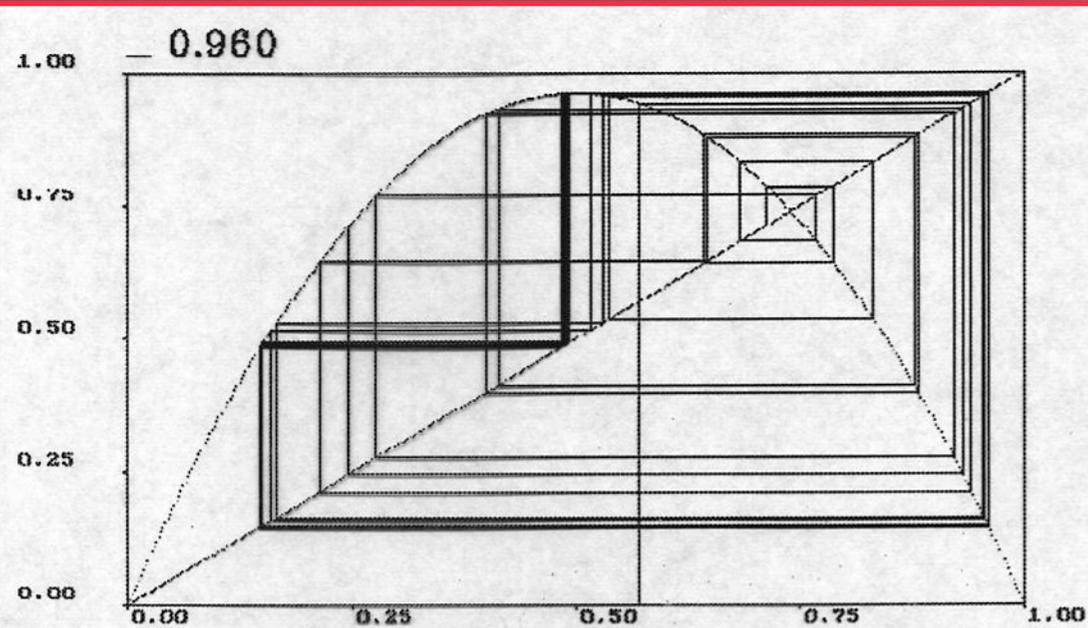


Estructura fractal del diagrama de bifurcaciones

Ventanas de periodicidad

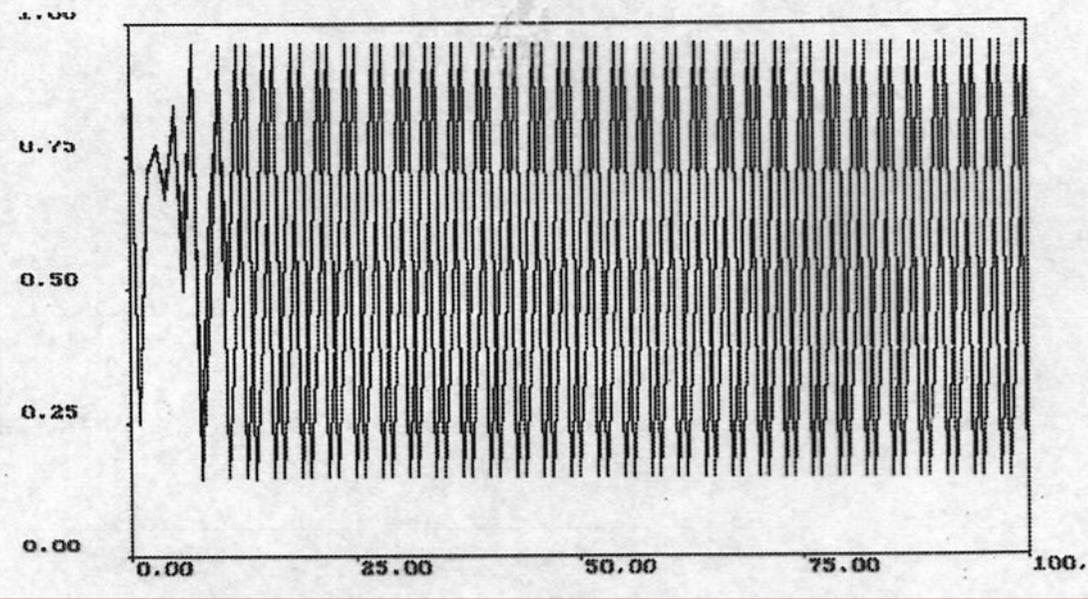


$X(n+1)$



$X(n)$

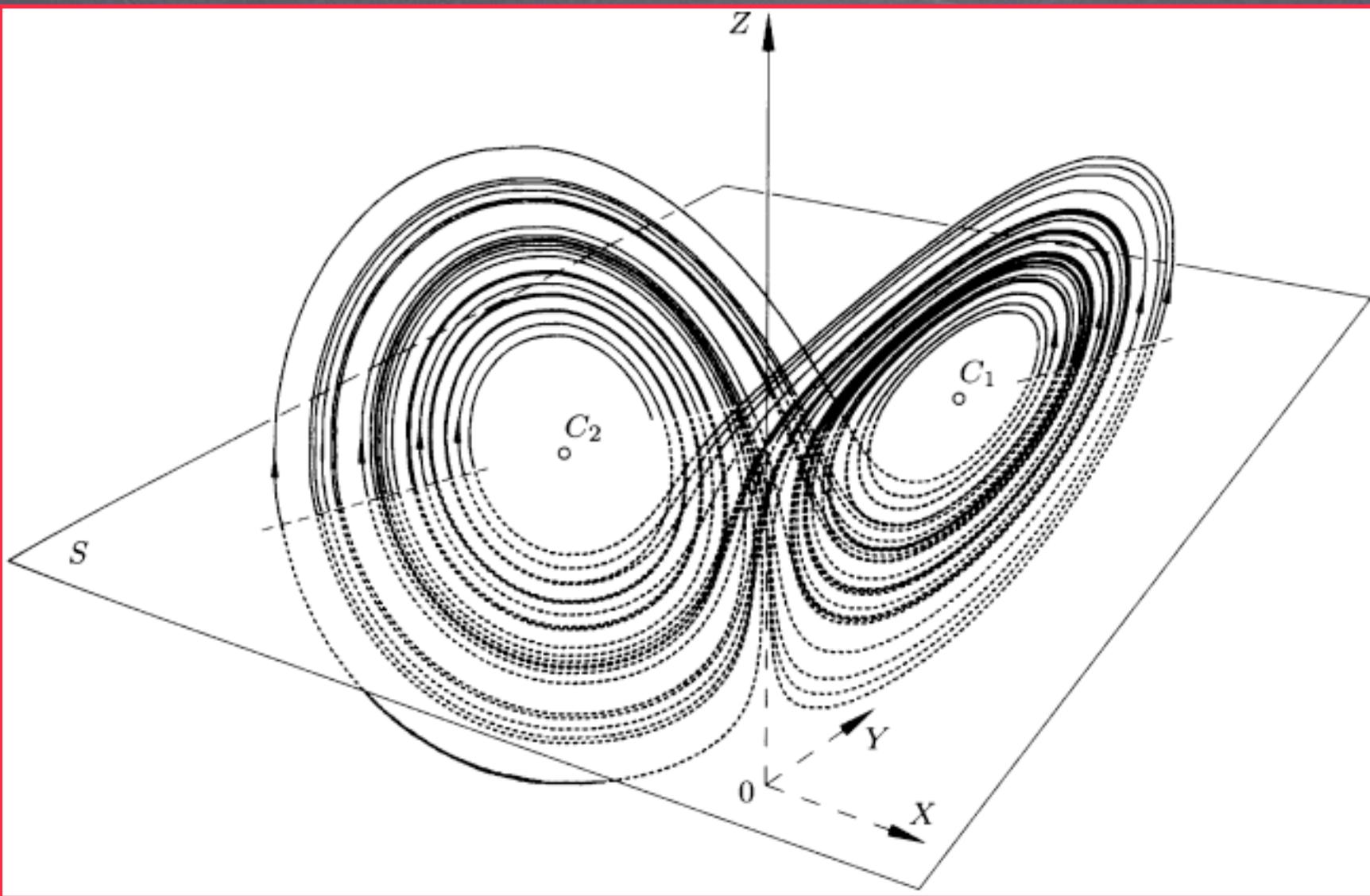
$X(n+1)$



n

Ventana de periodicidad

Caos en s
descri
medi
ecuaci
diferen



Modelo

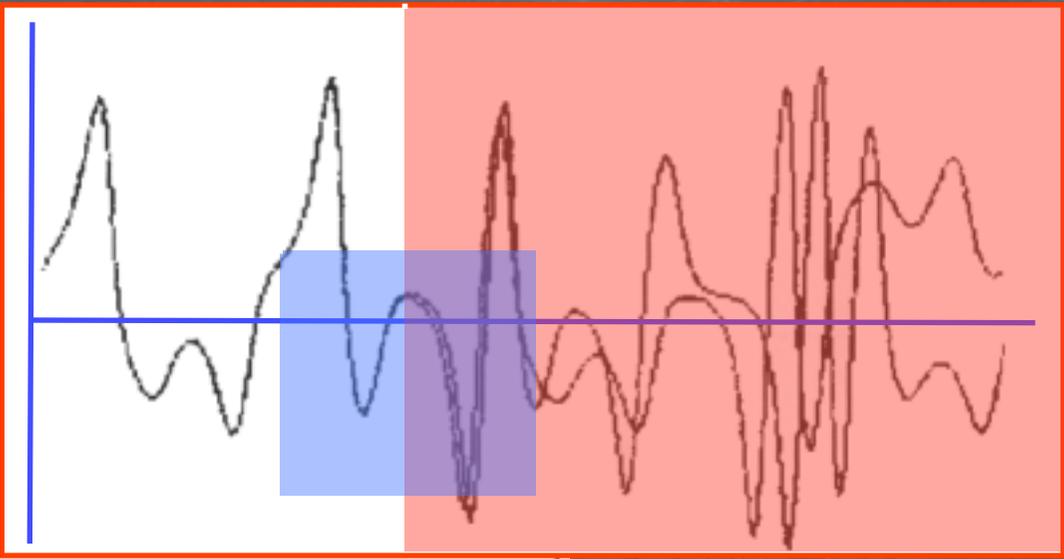
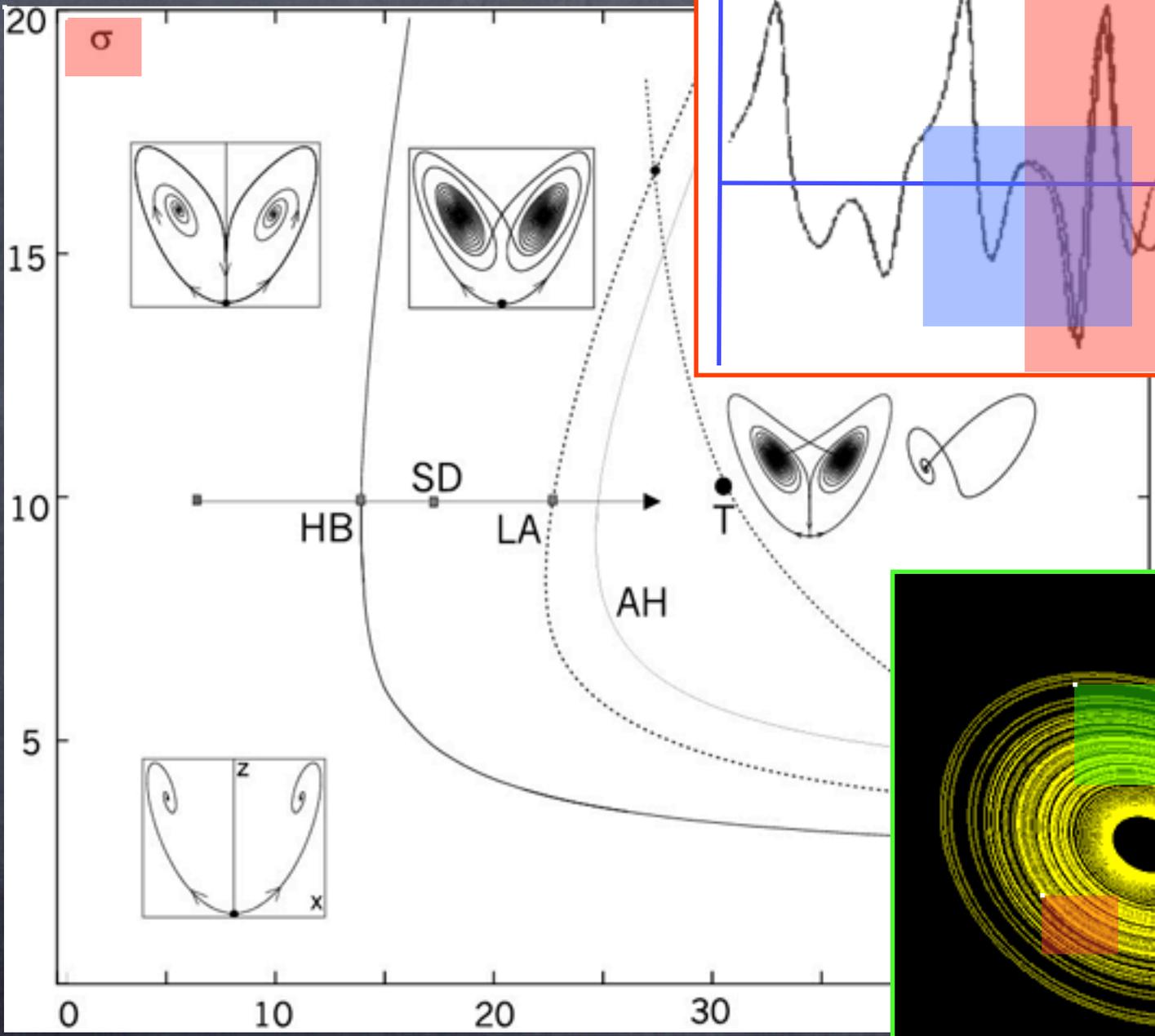
$$\dot{x} =$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$

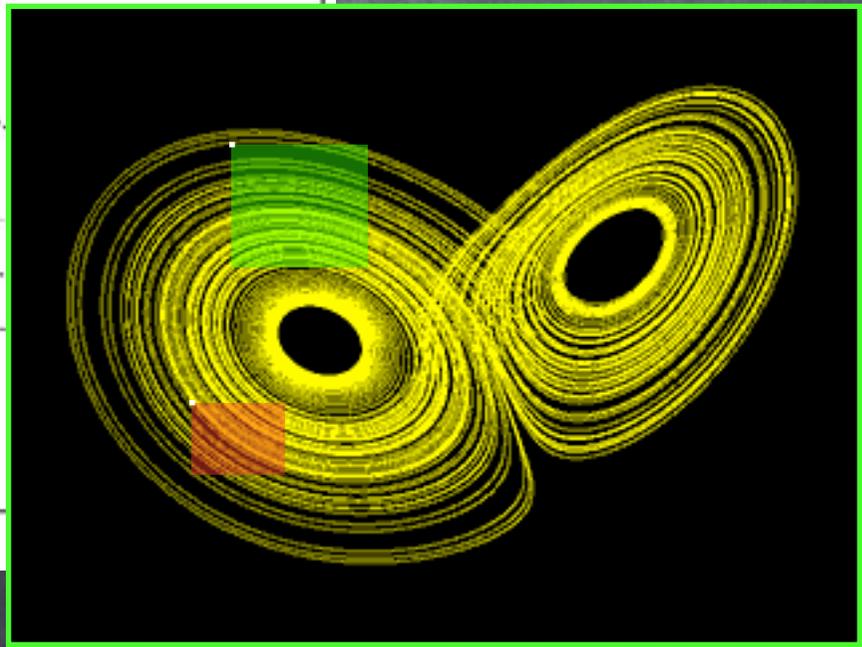
$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Dos términos
no lineales

Modelo de Lorenz, espa



Evolución temporal



Fases

Exponentes de Liapunov

Evolución de diferencias en condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \\ \dot{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (r - z) & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

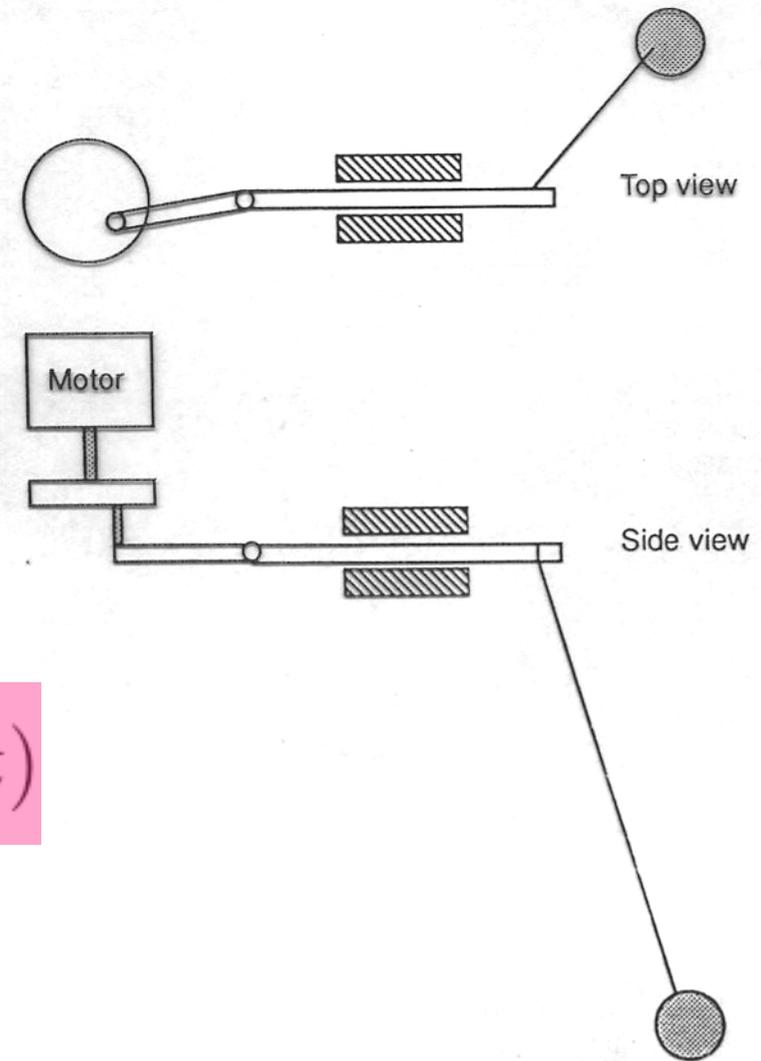
Valores propios

$$\begin{pmatrix} -\sigma - \nu & \sigma & 0 \\ (r - z) & -1 - \nu & -x \\ y & x & -b - \nu \end{pmatrix} = 0$$

Condición de sensibilidad a condiciones iniciales:

un exponente de Liapunov positivo

Oscilador de Duffing



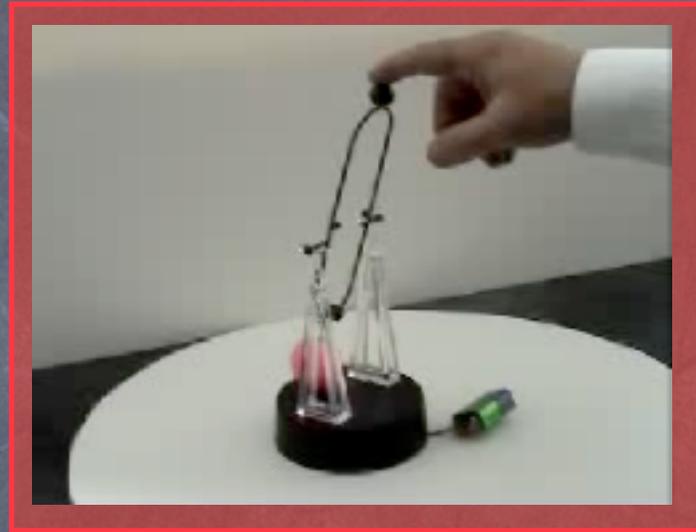
$$\ddot{x} - x(1 - x^2) + \beta\dot{x} = A_0\cos(\omega t)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = -\beta v + x(1 - x^2) + A_0\cos(z)$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \omega$$

Péndulo no lineal forzado y amortiguado



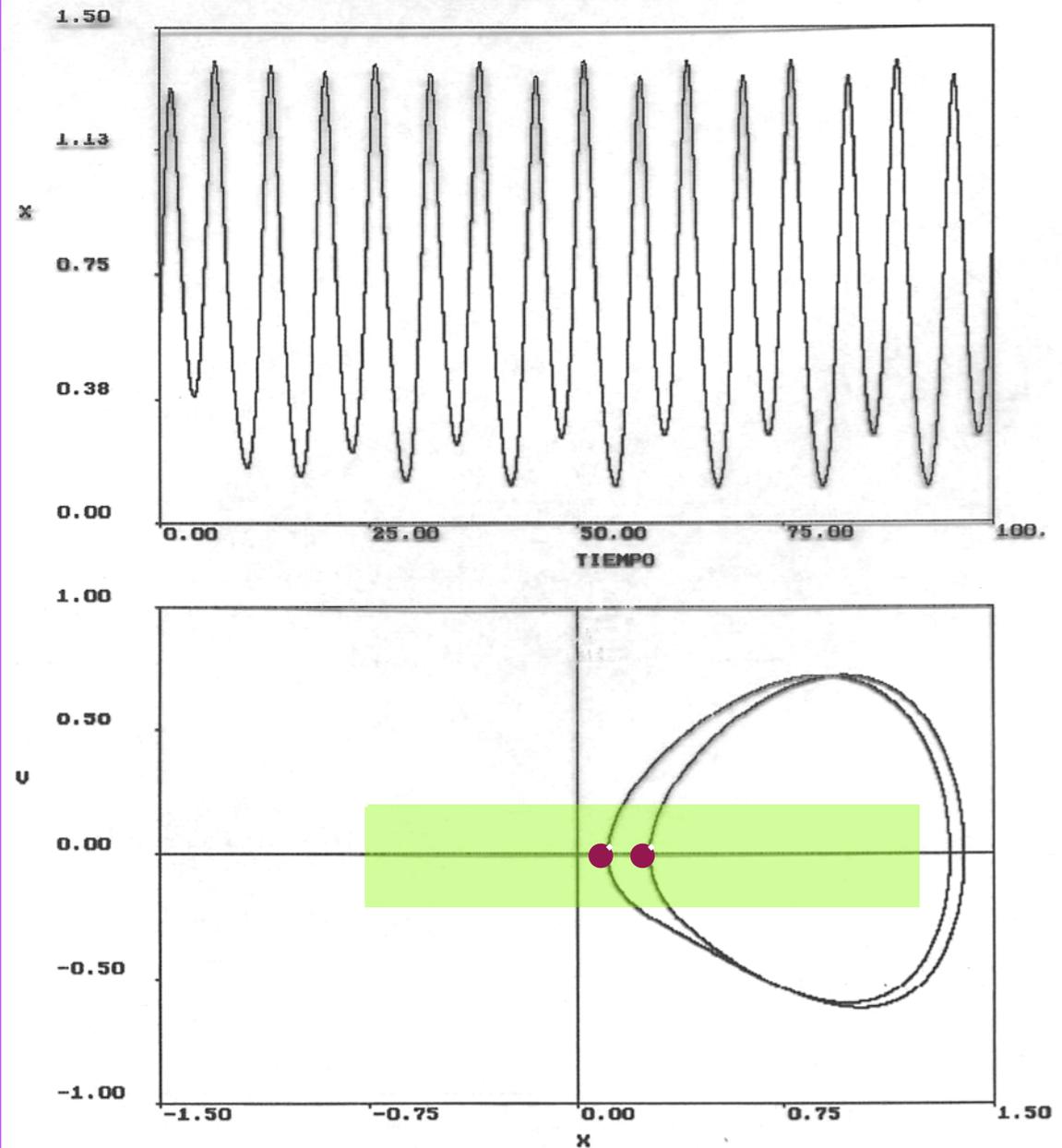
$$\ddot{x} - x(1 - x^2) + \beta\dot{x} = A_0\cos(\omega t)$$

Oscilador de Duffing

Oscilaciones
Período 2

Diagrama de fases

Sección de Poincaré

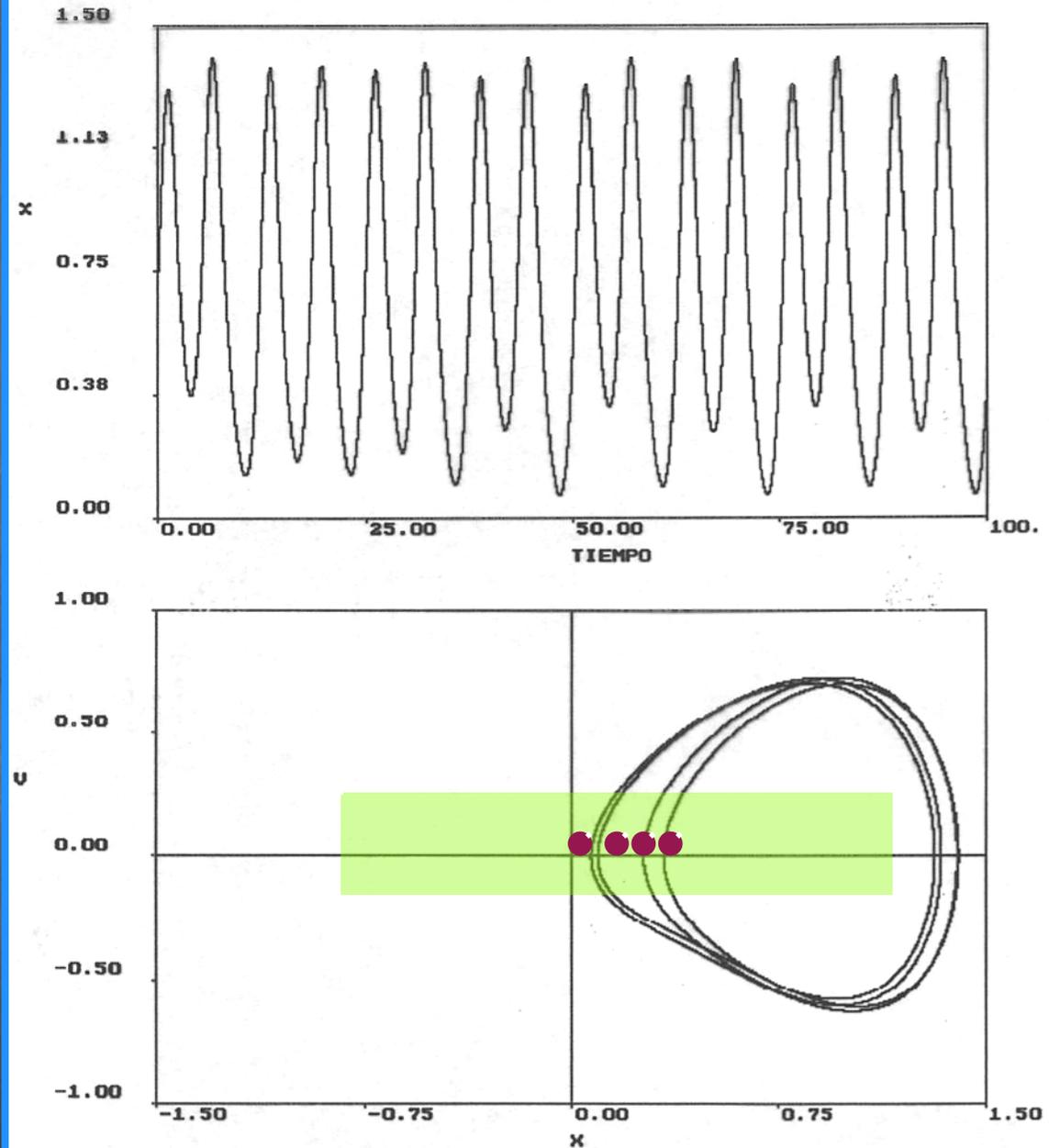


Oscilador de Duffing $\ddot{x} - x(1 - x^2) + \beta\dot{x} = A_0\cos(\omega t)$. (a) $\beta : 0.5, \omega : 1, A_0 : 0.349$ Evolución temporal $x(t)$ versus t . Período 2. (c) Diagrama de fases $v(t)$ versus $x(t)$.

Oscilaciones Período 4

Diagrama de fases

Sección de Poincaré

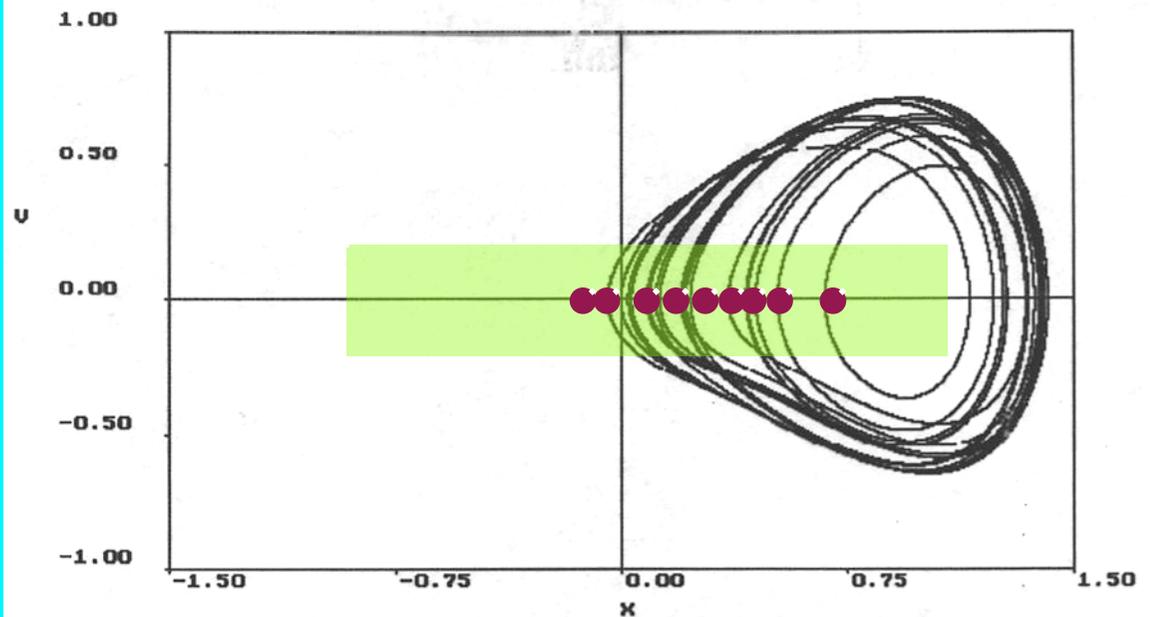
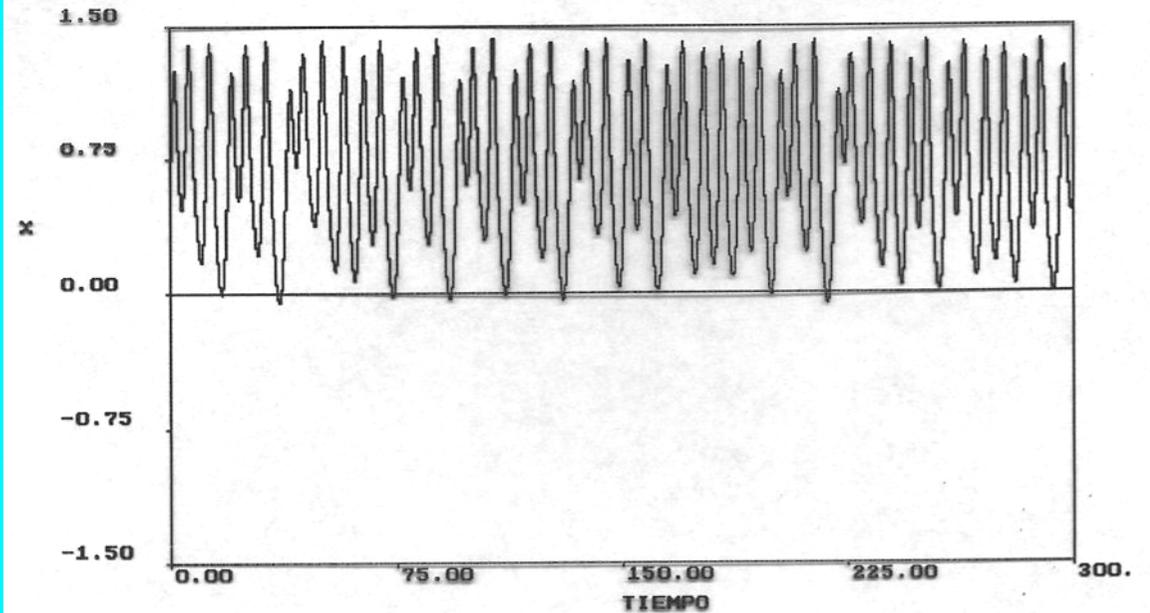


Oscilador de Duffing. (a) $\beta : 0.5, \omega : 1, A_0 : 0.356$
Evolución temporal $x(t)$ versus t . Período 4. (b) Diagrama de fases
 $v(t)$ versus $x(t)$.

Oscilaciones Caos

Diagrama de fases

Sección de Poincaré

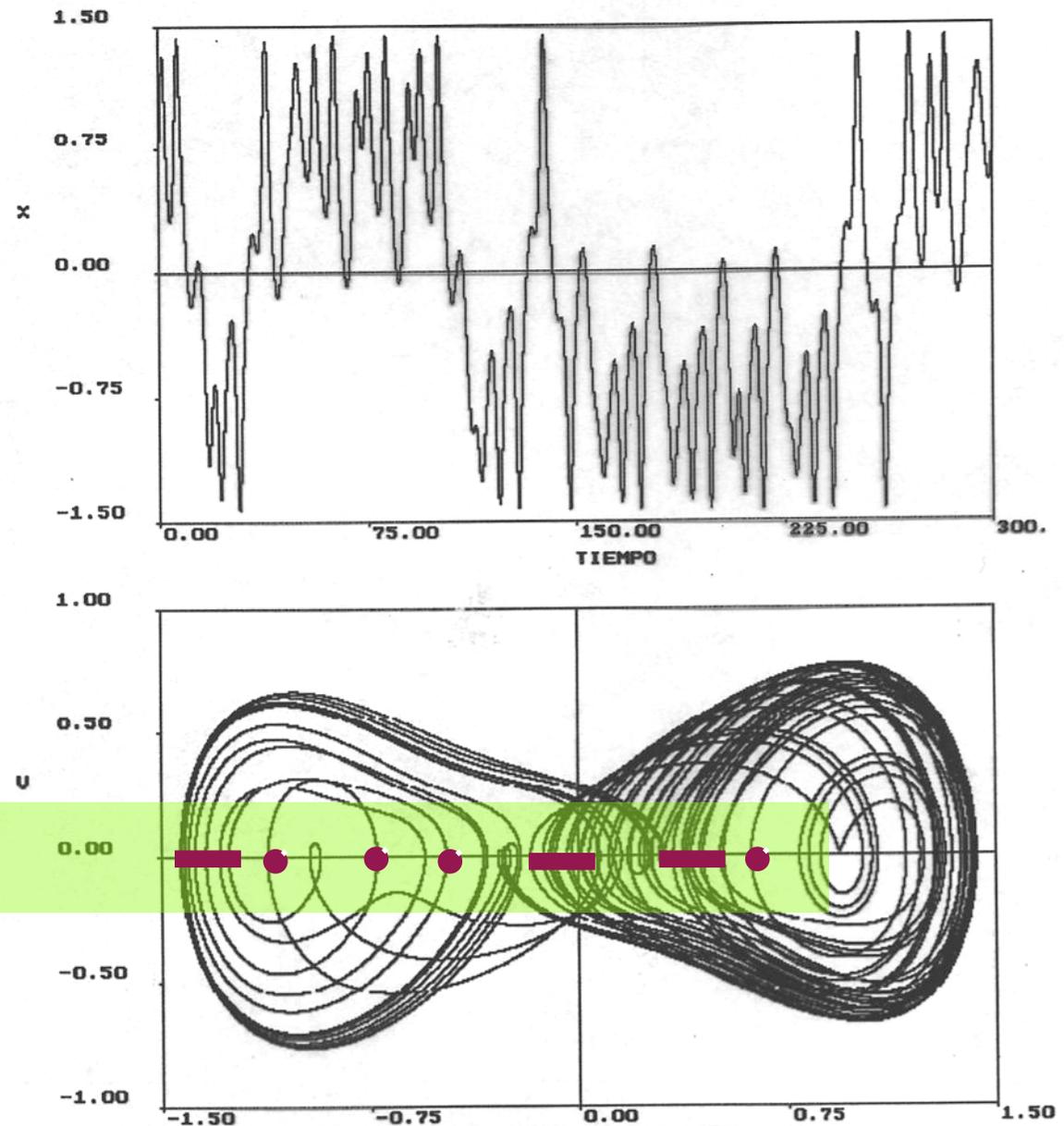


Oscilador de Duffing. (a) $\beta : 0.5, \omega : 1, A_0 : 0.37$
Evolución temporal $x(t)$ versus t . Caos en uno de los pozos del potencial. (b) Diagrama de fases $v(t)$ versus $x(t)$.

Oscilaciones Caos desarrollado

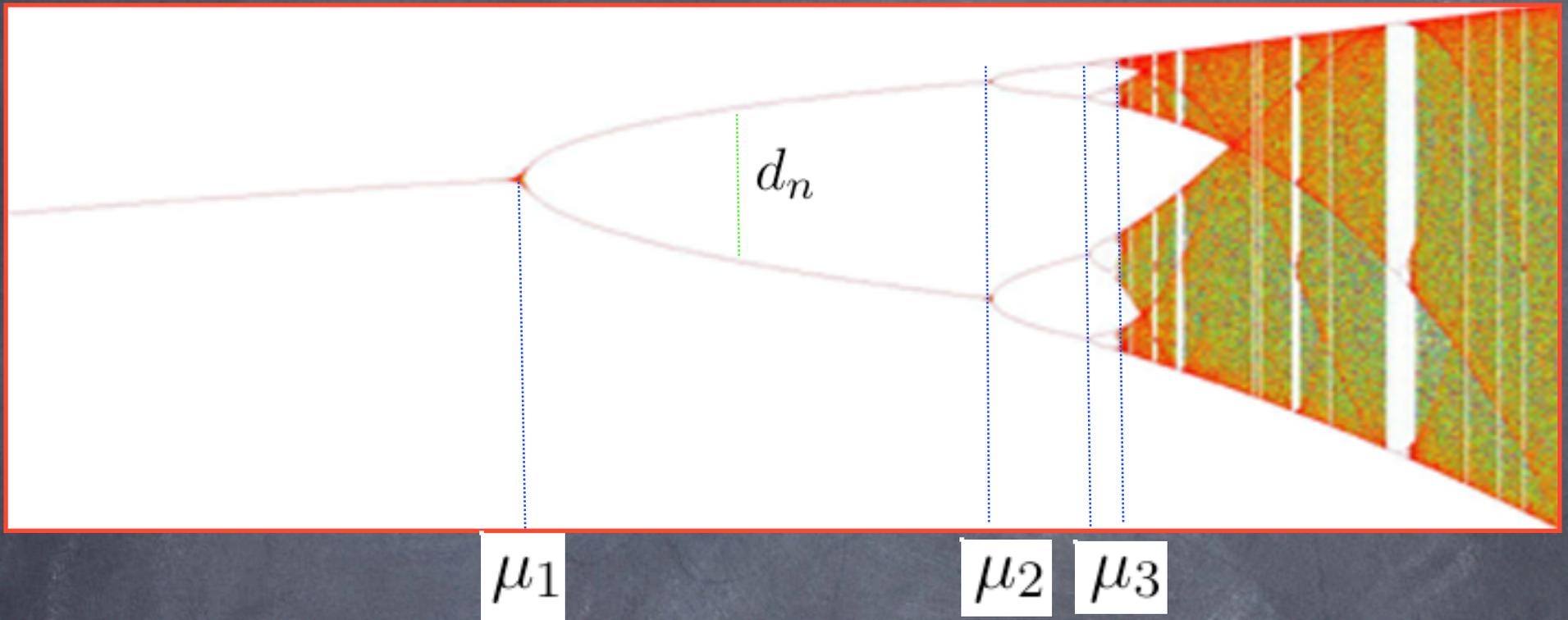
Diagrama de fases

Sección de Poincaré



Oscilador de Duffing. (a) $\beta : 0.5, \omega : 1,$
 $A_0 : 0.39$ Evolución temporal $x(t)$ versus t . Caos en ambos pozos
del potencial. (b) Diagrama de fases $v(t)$ versus $x(t)$.

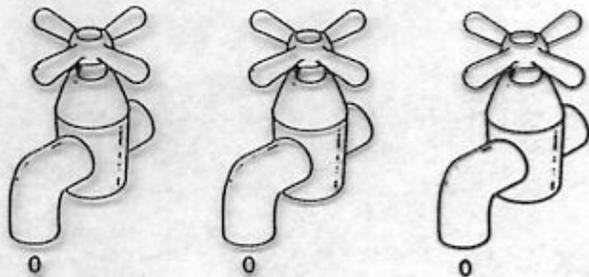
Números de Feigenbaum



$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4,669$$

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} \rightarrow \alpha = 2,5029$$

Caos en Física



0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

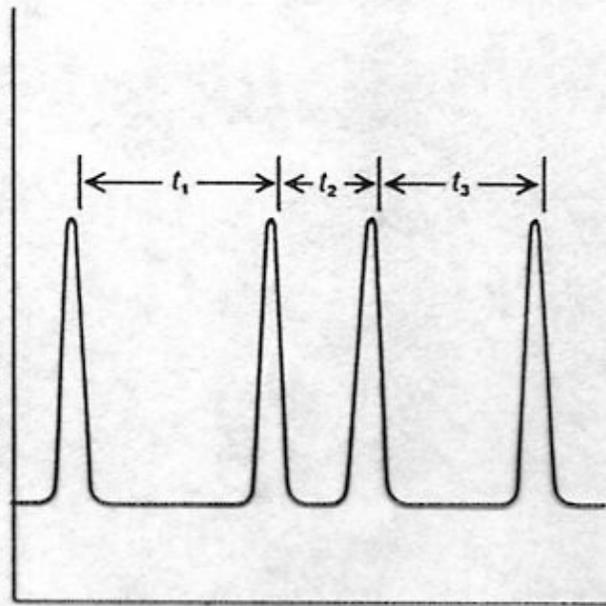
0

0

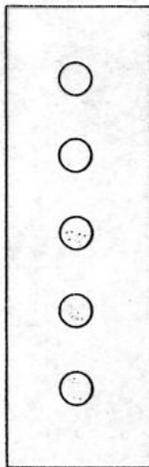


MICROFONO

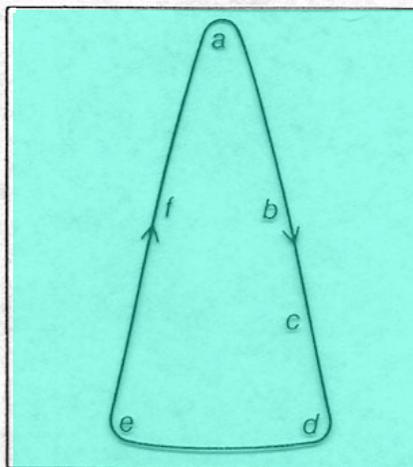
SALIDA DEL MICROFONO



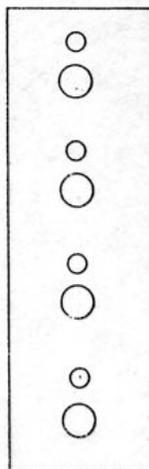
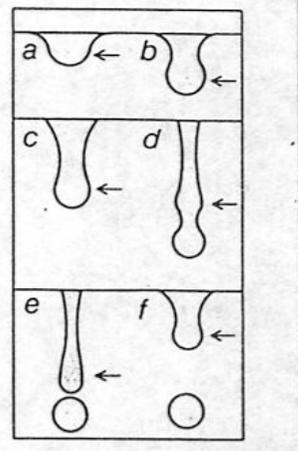
TIEMPO



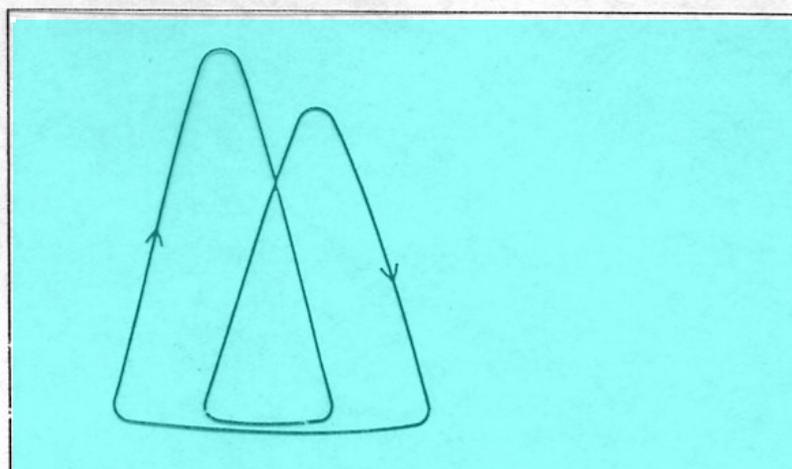
← POSICION



MASA →



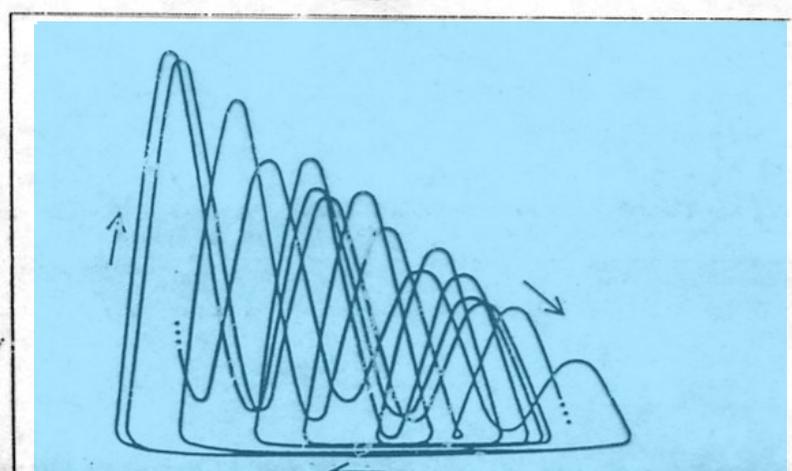
← POSICION



MASA →

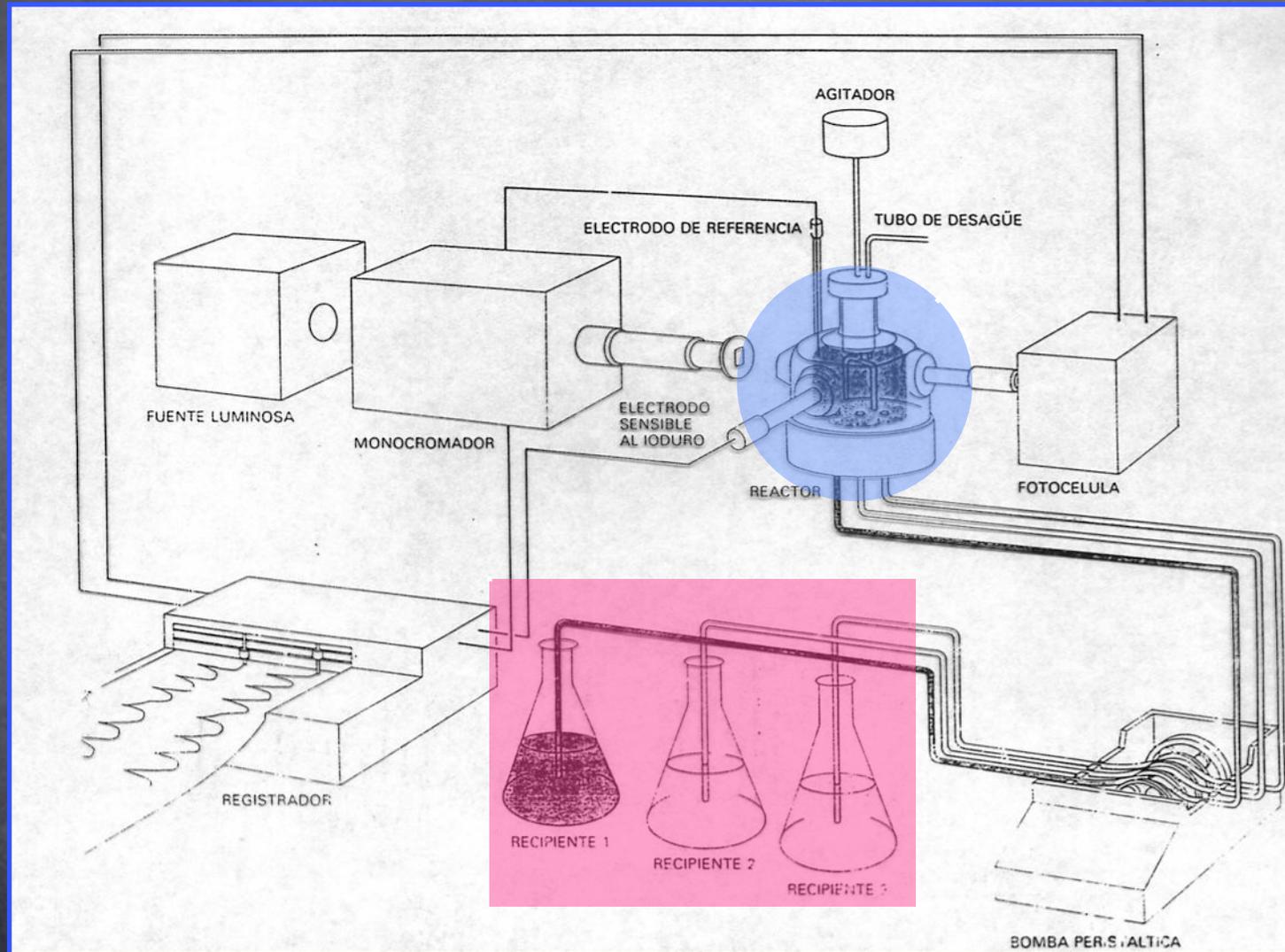


← POSICION



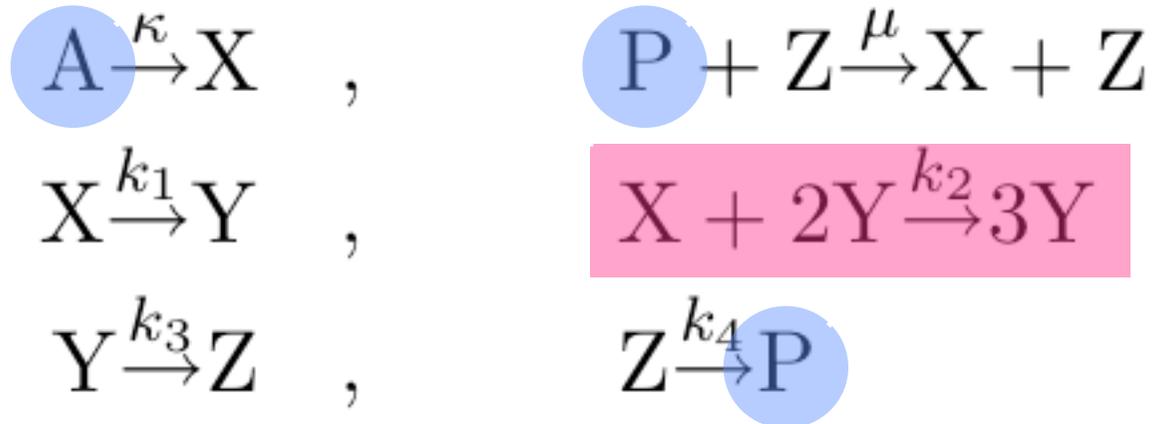
MASA →

Caos en Química



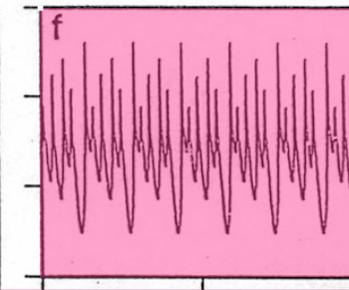
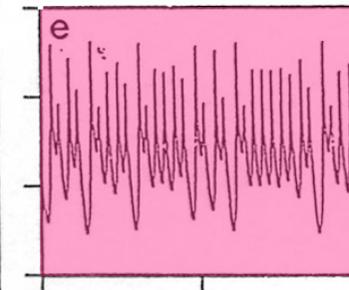
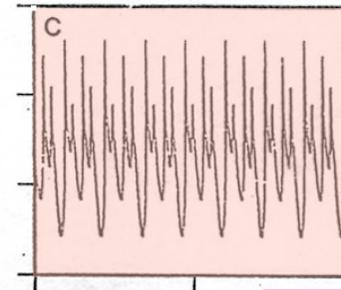
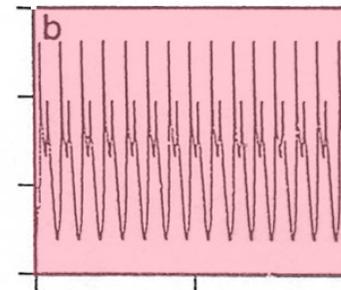
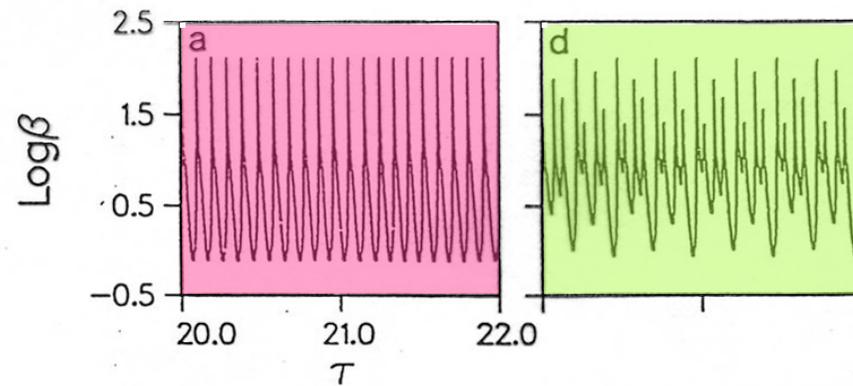
Sistemas abiertos

Reacción química, modelo Autocatalator

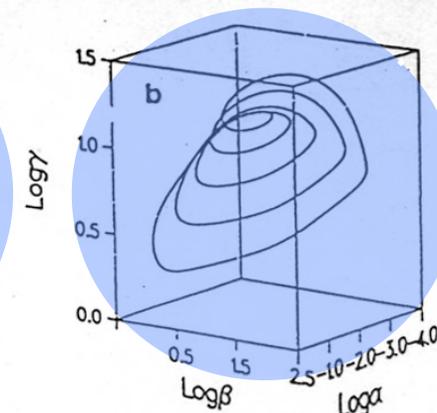
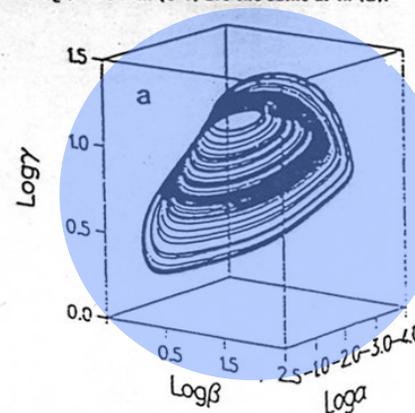


$$\begin{array}{l} \dot{x} = \kappa + \mu z - xy^2 - x \\ \sigma \dot{y} = xy^2 + x - y \\ \delta \dot{z} = y - z \end{array}$$

Reacción química modelo Autocatalator



Period 1 (a), period 2 (b), period 4 (c), period 8 (d), chaos (e), and period 5 (f) oscillations in β for $\mu = 0.100, 0.140, 0.150, 0.151, 0.153,$ and 0.155 . Ranges for $\log \beta$ and τ in (b-f) are the same as in (a).



(a) Phase portrait of strange attractor in $\alpha\text{-}\beta\text{-}\gamma$ phase space for $\mu = 0.153$. (b) Phase portrait of period-5 limit cycle for $\mu = 0.155$.

EL CAOS EN BIOLOGÍA

A MEDIADOS DE LOS AÑOS
SETENTA, LOS ECÓLOGOS
INTERESADOS POR LA DINÁMICA
DE LAS POBLACIONES
VEGETALES Y ANIMALES
JUGARON UN IMPORTANTE
PAPEL EN LA TEORÍA



Una población de peces que vive en un estanque, unos virus o unas bacterias que se propagan en el seno de un grupo humano, unos influjos nerviosos que viajan por el cerebro, un corazón

dinámicos biológicos tenían un solo modo de evolución posible a largo plazo: tendían todos a un estado de equilibrio. La palabra clave era la estabilidad. Y cuando constataban la

con una fuerte inclinación hacia las matemáticas empezaron a decir que el desorden observado en las oscilaciones del tamaño de las poblaciones animales y vegetales era tal vez inherente a di

Caos y fractales en la fisiología humana

En las funciones corporales, el caos es señal de buena salud. Un comportamiento periódico puede ser, por contra, presagio de enfermedad

Ary L. Goldberger, David R. Rigney y Bruce J. West

Un estudiante de medicina que supervisa los ritmos de un corazón observa que, a veces, el ritmo cambia llamativamente de minuto en minuto o de hora en hora. Un médico clínico que manipula un broncoscopio para introducirlo en un pulmón observa que la tráquea se ramifica en conductos más y más pequeños. El estudiante tiene la impresión de que el intervalo entre latido y latido varía caóticamente. Quizás el clínico se percate de que la red de conductos pulmonares se asemeja a una fractal. Tan sólo recientemente han comenzado fisiólogos y médicos a cuantificar tales posibilidades de dinámica caótica y de arquitecturas fractales. Sus investigaciones están poniendo en entredicho principios médicos sostenidos desde hace largo tiempo y están revelando posibles indicios admonitorios de enfermedad.

El saber médico tradicional sostiene que la enfermedad y el envejecimiento son secuelas del estrés, consecuencias que padece un sistema por

1. Los conductos del pulmón (izquierda), conformados por la evolución y el desarrollo embrionario, se parecen a fractales generados por ordenador (abajo). Los bronquios y bronquiolos del pulmón (en este caso, un vaciado en látex) forman un "árbol" compuesto por múltiples generaciones de ramificaciones. La ramificación a pequeña escala de los conductos se asemeja a la ramificación a escalas mayores. Cuando los fisiólogos cuantificaron sus observaciones de las pautas de ramificación, descubrieron que el árbol pulmonar posee geometría fractal.

Vida en el filo del caos

Numerosos sistemas biológicos y físicos se sitúan en el punto crítico donde orden y desorden conviven

RICARD V. SOLÉ, Barcelona
En 1986 el cometa *Halley* volvió al centro del sistema solar, acudiendo puntualmente a su cita. En otro tiempo, la llegada del cometa era vista como la de un jinete del apocalipsis, un símbolo del azar. La mecánica de Newton derrumbó esta imagen maldita y puso la casa en orden. Desde entonces, el cometa se habría de convertir en la imagen de una naturaleza regular y de una ciencia capaz no sólo de construir modelos comprensibles del mundo, sino de predecir su futuro.

En 1967, el físico Edward Lorenz dio con un resultado tan asombroso como inesperado. Estudiando el comportamiento de un sistema de tres ecuaciones completamente determinista, que simulaban los avatares de una atmósfera simple, descubrió que aquellas ecuaciones generaban un comportamiento de extraordinaria complejidad. Su clima simulado variaba de forma barroca, sin repetirse jamás.

Un observador externo habría interpretado aquel comportamiento como el resultante de un modelo muy complejo e incluso tal vez del azar. Pero esa vez el azar no estaba presente. Y más asombroso aún: el modelo, pese a ser totalmente determinista, era intrínsecamente impredecible. Había entrado en escena el hoy llamado caos determinista o, simplemente, caos.

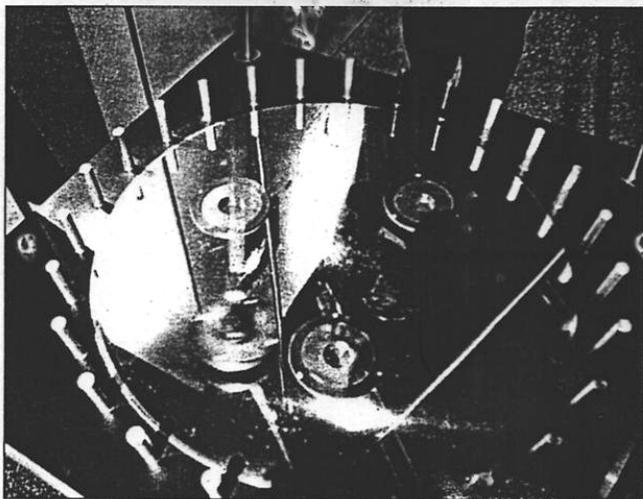
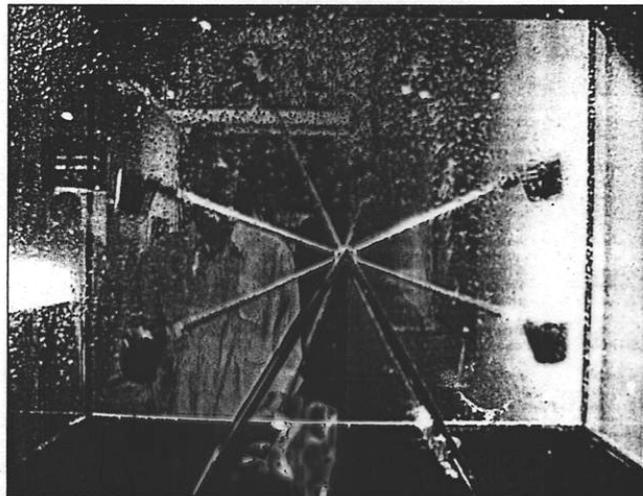
Después de más de veinte años de intenso desarrollo, hoy se sabe que el caos está presente en multitud de fenómenos que creíamos muy complicados o bien aleatorios, como clima, las epidemias, la actividad del cerebro o las fluctuaciones de la economía. Detrás del desorden que a menudo se percibe en estos sistemas se ocultan leyes simples. Estas leyes son tan exactas como las de Newton. Y, sin embargo, el mundo del caos es impredecible.

La complejidad

Pero el caos determinista no es la única novedad en la exploración de lo complejo. En los últimos años, nuevos conceptos como fractales, redes neuronales, algoritmos genéticos, vida artificial o autoorganización han tejido una nueva visión de la complejidad. Lo complejo es lo más interesante del mundo que nos rodea, desde los virus hasta el cerebro que lee estas líneas. Y, sin embargo, los sistemas complejos han sido aquel dominio embarazoso donde las ciencias duras parecían incapaces de penetrar.

Hoy esta situación está cambiando con rapidez, y en todo el mundo aparecen departamentos e institutos dedicados al estudio de la complejidad, entre los que destaca el de Santa Fe, en Estados Unidos. Allí se reúne un grupo de científicos procedentes de la física, la biología o la matemática, pero también de la economía o de la lingüística. Entre sus miembros figuran dos premios Nobel de Física (Murray Gell-Mann y Phil Anderson) y otro de Economía (Kenneth Arrow).

Los ordenadores y el descubrimiento de esos nuevos con-



Dos instrumentos expuestos en el Museo de la Ciencia de Barcelona que permiten comprender cómo leyes simples generan comportamientos complejos: una noria de Lorenz (arriba) y un péndulo caótico.

ceptos, así como el desarrollo de nuevos métodos matemáticos, han abierto posibilidades imprevistas hace tan sólo 15 años. Esto permite intentar atacar la definición, el origen y evolución de la complejidad. En esta dirección, varios científicos, entre los que destacan Chris Langton, Jim Crutchfield y Stuart Kauffman, propusieron hace apenas cuatro años una conjetura acerca del origen de la complejidad que, de ser probada, podría constituir una ley básica de la naturaleza. El planteamiento se basa en un fenómeno físico bien conocido: las transiciones de fase. Es bien sabido que la materia puede aparecer en distintas fases, como

el hielo y el agua. El hielo representa la forma ordenada, regular y rígida, y a fase líquida es la fase desordenada. A cero grados se da la transición entre ambos estados de la materia. Pero ¿qué ocurre en el punto crítico, donde la transición tiene lugar? Suceden fenómenos de enorme interés: allí coexisten orden y desorden en una forma no trivial. Aparecen estructuras fractales, y todas las escalas de longitud están representadas y se hacen inseparables. En este punto cualquier perturbación se propaga de forma óptima a todas las escalas. Otro resultado de enorme importancia es que, en este punto, un conocimiento detallado de los

elementos que componen el sistema es innecesario. Basta con el esqueleto básico de las interacciones y, en consecuencia, un modelo simple es suficiente para comprender el fenómeno. Una vez más, son leyes simples las que se ocultan tras la complejidad.

Empleando distintos modelos, se ha propuesto que el origen de la complejidad y sus propiedades están asociados a puntos críticos. Así, la evolución biológica a gran escala (y las extinciones asociadas a ésta) o la evolución de la economía (y sus *crash*) o la organización de las sociedades de insectos son el resultado de una dinámica que, inevitablemente, conduce a un punto crítico.

co. En todos estos casos orden y desorden deben coexistir para organizar el sistema, a la vez que le permiten la mayor flexibilidad. En este punto, que ha sido bautizado como el filo del caos, la diversidad de especies de un ecosistema o de las interacciones de un sistema social alcanza su máximo esplendor. Los fractales se originarían en la naturaleza por medio de este fenómeno, y su detección sirve de hecho para probar la conjetura.

El grupo de Sistemas Complejos de la Universidad Politécnica de Cataluña, del que el autor forma parte, ha demostrado, por ejemplo, que los insectos sociales (como las hormigas) emplean la frontera del caos para calcular, de forma que explotan la óptima transferencia de información para generar un orden de escala superior a la del individuo; de este orden emerge un superorganismo: la sociedad.

El mismo grupo ha probado que las selvas tropicales muestran propiedades fractales que pueden ser reproducidas mediante un modelo simple donde el ecosistema evoluciona hacia el punto crítico. La diversidad de la selva sería el resultado de una evolución hacia el filo del caos.

Otro ejemplo muy distinto sería el de las poblaciones de retrovirus (como el virus del sida), que presentan tasas de mutación elevadas. Si los virus mutaran poco, su población sería muy homogénea y no soportaría el ataque del sistema inmunitario. Si lo hiciera en exceso, perdería su identidad biológica, desapareciendo como tal. Los resultados experimentales muestran que los retrovirus se encuentran justo en el límite, en el punto crítico que predicen los modelos teóricos.

El cerebro

El caso del cerebro es particularmente excitante. Al analizar su actividad se aprecia que coexisten estructuras ordenadas con patrones de actividad irregulares. Al estudiar la propagación de las ondas por el córtex cerebral sano puede observarse cómo la actividad de cientos de millones de neuronas se sincroniza a la vez que el registro del electroencefalograma muestra una notable irregularidad a medio plazo. En cambio, en algunas patologías se aprecia cómo el cerebro aparece fuertemente ordenado, casi como un reloj, y en otras muy desordenado, casi aleatorio.

¿Qué sugiere esta observación? Que el cerebro opera en el filo del caos, en la frontera en que la imaginación, la razón y la consciencia se mezclan entre sí. En el filo coexisten sin dificultad (aunque tal vez no sin conflicto). Al alejarse, un orden o un desorden excesivos pueden llevar la mente al desastre. Tal vez la conjetura del filo del caos acerque al hombre al más complejo de los sistemas conocidos. A un sistema lo bastante complejo como para reflexionar acerca de su complejidad.

Ricard V. Solé. Grupo de Sistemas Complejos. Universidad Politécnica de Cataluña.

Nonlinear wave dynamics can help to explain what happens to the heart during an irregularity of the heartbeat known as a cardiac arrhythmia. Computer models of the process are helping to improve methods for treating this potentially lethal medical condition

Nonlinearity in the heart

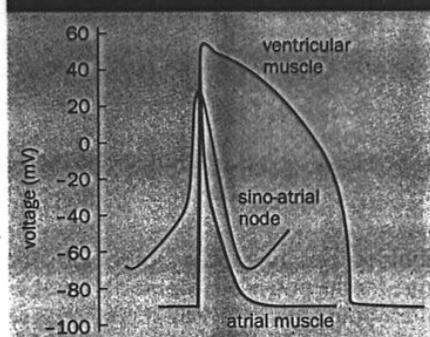
Arun Holden

YOUR HEART beats about once a second throughout your life. These regular contractions pump blood to all parts of the body and are driven by electrical impulses from a natural pacemaker inside the heart. This pacemaker, known as the sino-atrial node, responds to signals from the brain that change the heart rate according to the body's needs, making it slower when resting and faster during exercise.

The heart essentially functions as a electromechanical pump. Each beat consists of two main actions: a synchronous contraction of the two upper chambers of the heart (the atria) drives blood into the lower chambers (the ventricles); and a synchronous contraction of the ventricles then ejects the blood into the circulatory system. As with all mechanical pumps, this two-stage contraction increases the pressure and ensures that blood can reach all of the capillaries in the body. Blood at a lower pressure is pumped from the right ventricle to the lungs to allow oxygen and carbon dioxide to enter and exit the blood stream.

The rhythmic contractions of the heart are triggered by waves of electrical activity that spread from the sino-atrial node throughout the heart muscle. This rhythm can be so regular that Galileo used his pulse to time the swings of a pendulum in the cathedral at Pisa. However, even the resting heart rate is not strictly periodic. There are small fluctuations in the time intervals between beats that are fractal in nature, and a loss in this variability is a sign of cardiac ill health. This variability is not essential for the heart to function as a pump: if the natural pacemaker of the heart fails, as is common in old age, its function can be replaced by an

1 Electrical activity in single cells



An electrical perturbation generated by the sino-atrial node (green) generates an electrical response in the atrial (blue) and ventricular (red) muscles, known as the action potential. The perturbation alters the permeability of the cell membrane to different ions. Sodium ions are first allowed to flow into the cell, rapidly increasing the membrane potential by more than 100 mV. The membrane then allows potassium ions to flow out of the cell, reducing the membrane potential to its normal value and restoring the cell to its resting state.

explained in terms of nonlinear wave dynamics. This has made it possible to simulate what happens to the heart during an arrhythmia, and could help in the development of new strategies to treat the condition.

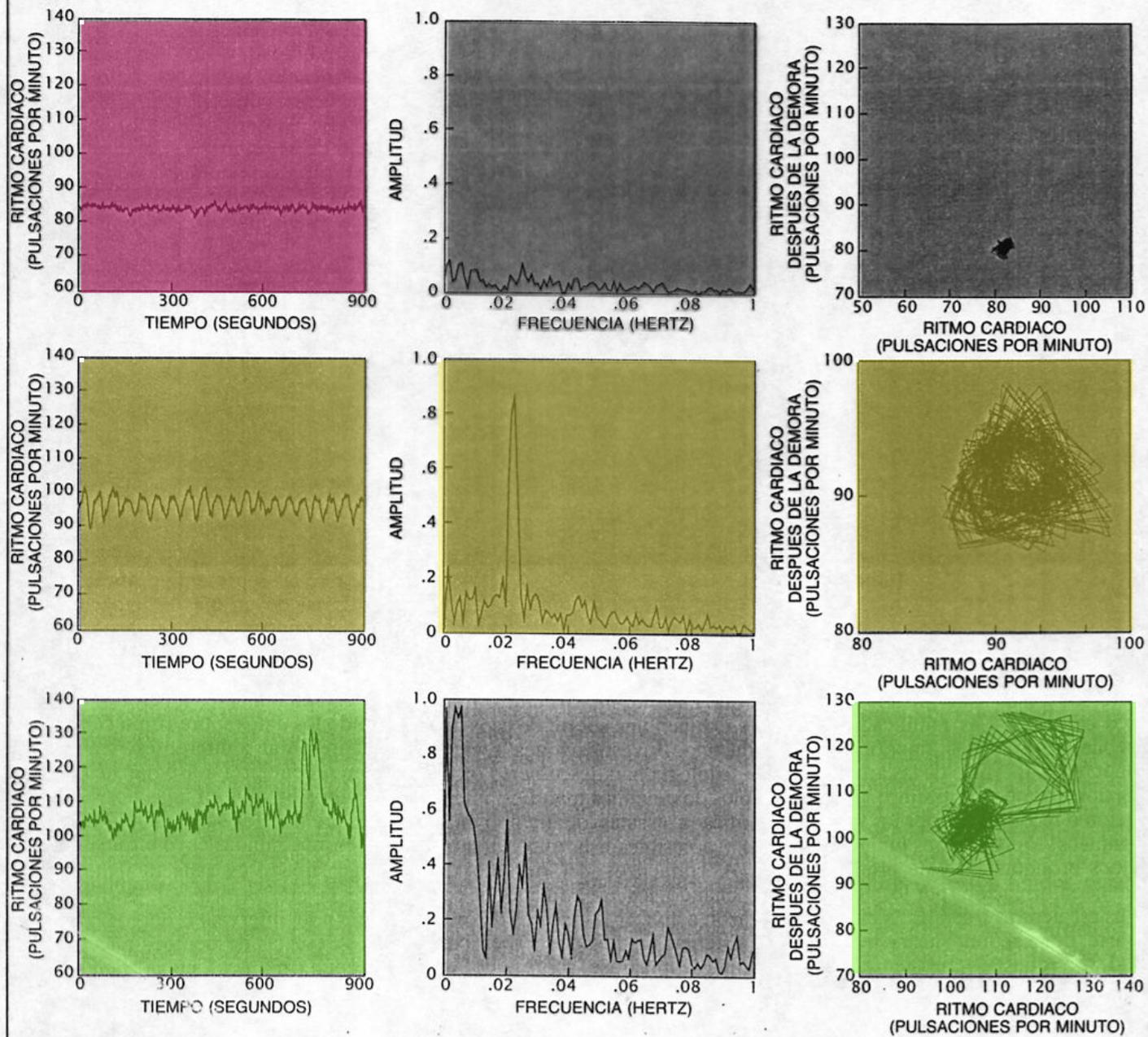
Loss of rhythm

Cardiac arrhythmias are detected from the electrical signals generated by the heart – either by recording an electrocardiogram from outside the body, or by measuring the electrical activity inside the surface of the heart using catheter electrodes.

One cause of arrhythmias is damaged tissue in the heart muscle, which can act as an abnormal pacemaker and cause the contractions of the heart to be driven by two different pacemakers operating at different rates. Another cause is a change in the pattern of electrical wave propagation. Electrical activity generated by the sino-atrial pacemaker usually spreads rapidly through the atria, generating an electrical “excitation” in the muscle that triggers the synchronous atrial contraction. This excitation is conducted from the atria to the ventricles through the atrio-ventricular node, but is transmitted so slowly that this node can be considered as a delay line between the excitations in the two parts of the heart. After passing through the atrio-ventricular node, the excitation is rapidly conducted to the ventricular muscle, where it triggers the other synchronous contraction.

An arrhythmia can occur if some of the atrial excitations do not propagate to the ventricles. This means that the atrial contractions outnumber those in the ventricles, resulting in an irregular and uneven pulse.

The electrical excitations that induce the contractions of



4. RITMO CARDIACO, ofrecido en representaciones gráficas de series temporales (izquierda), espectros obtenidos por análisis armónico (centro) y trayectorias en el espacio de fases (derecha). Trece horas antes de un paro cardíaco, el ritmo era casi constante (arriba), como indican el espectro plano y la trayectoria en el espacio de fases, que

sugiere un atractor puntual. Un ritmo cardíaco estudiado ocho días antes de una muerte cardíaca súbita (centro) muestra variación periódica; la trayectoria sugiere un ciclo límite ruidoso. Un ritmo cardíaco sano (abajo) ofrece un aspecto errático, posee un amplio espectro y una trayectoria que nos hace pensar en un atractor extraño.

How brains make chaos in order to make sense of the world

Christine A. Skarda

CREA, Ecole Polytechnique, 75005 Paris, France

Walter J. Freeman

Department of Physiology-Anatomy, University of California, Berkeley, Ca. 94720

Abstract: Recent "connectionist" models provide a new explanatory alternative to the digital computer as a model for brain function. Evidence from our EEG research on the olfactory bulb suggests that the brain may indeed use computational mechanisms like those found in connectionist models. In the present paper we discuss our data and develop a model to describe the neural dynamics responsible for odor recognition and discrimination. The results indicate the existence of sensory- and motor-specific information in the spatial dimension of EEG activity and call for new physiological metaphors and techniques of analysis. Special emphasis is placed in our model on chaotic neural activity. We hypothesize that chaotic behavior serves as the essential ground state for the neural perceptual apparatus, and we propose a mechanism for acquiring new forms of patterned activity corresponding to new learned odors. Finally, some of the implications of our neural model for behavioral theories are briefly discussed. Our research, in concert with the connectionist work, encourages a reevaluation of explanatory models that are based only on the digital computer metaphor.

Keywords: brain theory; chaos; cognitivism; connectionism; EEG; nonlinear dynamics; olfaction; perception; sensation

1. Introduction

To understand brain function we need to know how the sensory systems process their information. Recent connectionist models provide an interesting explanatory alternative to earlier information-processing models based on the digital computer that viewed neurons as two-state logical decision elements organized into networks to compute simple Boolean functions. In the present article we outline the results of experiments in our laboratory that demonstrate the existence of sensory- and motor-specific information in the spatial dimension of EEG activity in the central nervous system. On the basis of our data we develop an explanatory model of the neural states responsible for sensory encoding; this model departs

continual access to previously learned sensory pattern and as the means for learning new sensory patterns.

2. Methodological considerations

How does a sensory system process information? Models based on the digital computer define computation as physical operation governed by the substates of the part of the system as defined by rules operating on symbol tokens in virtue of their formal syntactic structure corresponding to real physical differences in the system. The formal elements or symbols are required to be discrete that is, context independent; each distinct semantic property must be associated with a distinct physical property (Pylyshyn 1984, pp. 50, 74).

EVIDENCE OF CHAOTIC DYNAMICS OF BRAIN ACTIVITY DURING THE SLEEP CYCLE

A. BABLOYANTZ, J.M. SALAZAR

*Faculté des Sciences de l'Université Libre de Bruxelles,
Campus Plaine, Boulevard du Triomphe, 1050 Brussels, Belgium*

and

C. NICOLIS

*Institut d'Aéronomie Spatiale de Belgique,
Avenue Circulaire 3, 1180 Brussels, Belgium*

Received 2 May 1985; accepted in revised form 17 June 1985

Recent progress in nonlinear dynamics provides the means for the characterisation of the behavior of natural systems from time series. The analysis of electroencephalogram data from the human brain during the sleep cycle reveals the existence of chaotic attractors for sleep stages two and four. The onset of sleep is followed by increasing "coherence" towards deterministic dynamics involving a limited set of variables.

Recent progress in nonlinear dynamics have provided new methods for the study of multi-variable, complex systems [1,2]. These methods are specially valuable for the analysis of experimental data obtained from a single variable (one-dimensional) time series. Their chief merit is to discriminate between the random or deterministic nature of the dynamical system. For instance, they allow one to determine the minimum number of variables necessary for the description of the dynamical system. Furthermore, they give criteria for the existence of attractors, which characterize deterministic dynamics, as well as information about such quantitative properties as dimensionality.

Such an approach has been applied to laboratory experiments on hydrodynamic and chemical instabilities and to complex natural systems such as climatic variability [3] or the activity of the human brain [4].

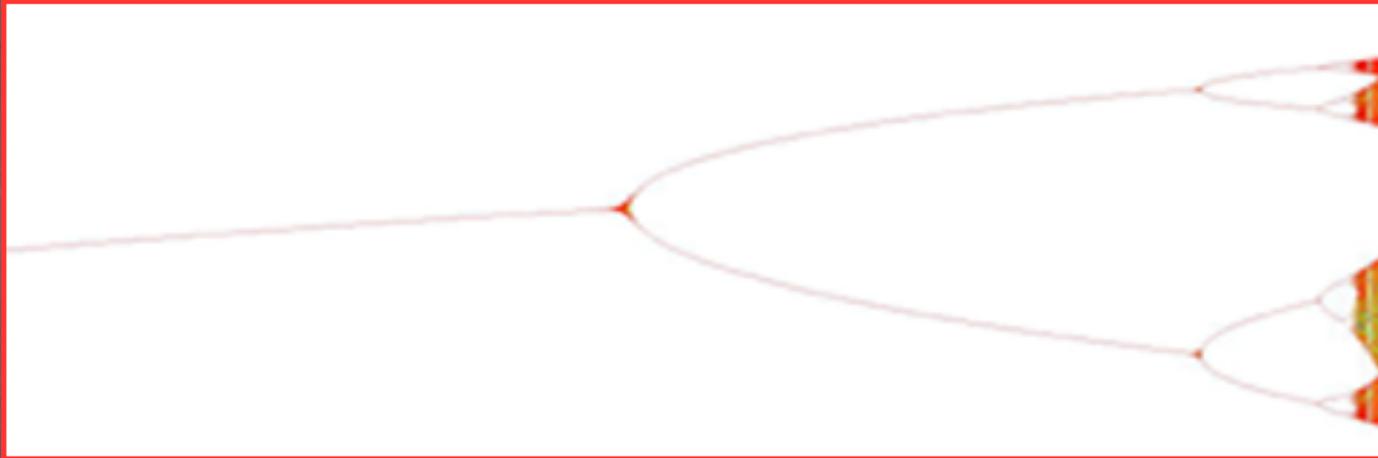
The mammalian brain is certainly one of the most

and is called the electroencephalogram (EEG) [5]. The EEG reflects the sum of elemental self-sustained neuronal activities of a relatively long period (of the order of 0.5–40 Hz). Recordings from the human brain show that to various stages of brain activity the correspond characteristic electrical wave forms.

For example a resting and alert brain shows activity with an average frequency of about 10 c/s and amplitudes of the order of 10 μ V (α waves). During a normal night's sleep α waves give way to other repeated cycles of activity, each marked by several stages [6].

In stage one, the individual drifts in and out of sleep. In stage two, the sleeper is disturbed by the slightest noise. In stage three a loud noise would be needed to arouse the sleeper. Finally, the deep sleep of stage four sets in. Afterwards the cycle is reversed back through stages three and two. After this stage the sleeper enters the phase of rapid eye movement sleep (REM) in which

¿Qué ventajas puede reportar
el comportamiento
caótico a algunos sistemas
biológicos?



Los sistemas caóticos, al borde del caos, tienen estructura,
con infinitas órbitas periódicas inestables.

Control de sistemas caóticos
Sincronización de sistemas caóticos

Un sistema caótico al borde del caos no es un sistema desordenado sino que es un sistema dotado de estructura, dotado de infinitas órbitas inestables entre las que va evolucionando.

Dominar el caos

Podemos controlar ciertos sistemas de comportamiento caótico.

En ingeniería se empieza ya a utilizar el caos para estabilizar láseres, circuitos electrónicos e incluso corazones de animales

William L. Ditto y Louis M. Pecora

¿De qué sirve el caos? No faltará quien diga que el caos es por definición inestable e incontrolable y, por tanto, inutilizable. Es imposible, en efecto, predecir exactamente cuál será el comportamiento de un sistema caótico durante períodos largos. Por esa razón, los ingenieros han venido haciendo con el caos una sola cosa: sencillamente, evitarlo. Nos parece que tal proceder es un tanto corto de miras. En el plazo de estos últimos años nosotros y nuestros colegas hemos demostrado que el caos es manejable, que cabe sacarle provecho, que, incluso, es de valor incalculable.

El caos se ha aplicado ya para aumentar la potencia de los láseres, para sincronizar la salida de circuitos electrónicos, para controlar las oscilaciones de reacciones químicas, para estabilizar el errático latir del corazón, de animales enfermos y para codificar mensajes electrónicos y garantizar el secreto de las comunicaciones. Estamos convencidos de que en un futuro cercano los ingenieros ya no rehuirán el caos, sino que lo adoptarán.

Dos son, cuando menos, las razones de que el caos sea tan útil. En primer lugar, la conducta de un sistema caótico es la agregación de muchas conductas ordenadas, ninguna de las cuales prevalece en circunstancias ordinarias. Los investigadores han demostrado en estos últimos años que, al perturbar adecuadamen-

te un sistema caótico, cabe estimularlo para que siga uno de los muchos comportamientos regulares de que consta. Los sistemas caóticos son de una flexibilidad poco corriente, porque pueden conmutar rápidamente entre numerosos comportamientos distintos.

En segundo lugar, aunque el caos es impredecible, es determinista. Si dos sistemas caóticos casi idénticos son impelidos o excitados por la misma señal, la señal de salida que produzcan será idéntica, aunque nadie pueda asegurar de antemano en qué consistirá. [Véase *Taller y laboratorio*, en este mismo número.] Este fenómeno ha posibilitado ya una variedad de tecnologías de interés para las comunicaciones.

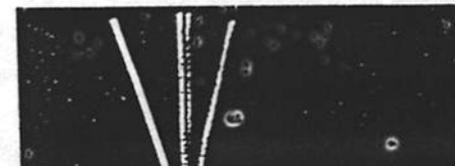
Durante más de un siglo, el estudio del caos ha sido competencia casi exclusiva de un puñado de teóricos, a los cuales debe atribuirse el mérito de haber desarrollado algunos de los conceptos en que se fundamentan las aplicaciones. La mayoría de los sistemas naturales son no lineales; el cambio de su respuesta no es función sencilla de los cambios en los datos o condiciones. El caos es uno de los tipos de comportamiento no lineal. El rasgo distintivo de los sistemas caóticos es que exhiben gran sensibilidad a las condiciones iniciales. En particular, si dos sistemas caóticos casi idénticos se encuentran en estados ligeramente distintos, evolucionarán pronto hacia estados muy discrepantes.

Al observador superficial le parecerá que los sistemas caóticos se comportan de forma aleatoria. Mas un examen atento revela que poseen un orden subyacente. Con el fin de

prensión de la dinámica no lineal. Esa noción fundamental es la de espacio de estados.

En todo sistema dinámico que admita descripción mediante ecuaciones matemáticas intervienen dos clases de variables: variables dinámicas y variables estáticas. Las variables dinámicas son las magnitudes esenciales que están cambiando sin cesar. En el caso de un mecanismo caótico, las variables dinámicas podrían ser la posición de una pieza móvil y su velocidad. Las variables estáticas, a las que también podríamos llamar parámetros, se ajustan

1. ESTA TIRA METÁLICA se cimbraba caóticamente en un campo magnético cuya intensidad fluctúa de forma periódica. Progresos recientes han permitido controlar movimientos caóticos como éstos. El material de la tira modifica su rigidez según la intensidad del campo magnético. El campo magnético varía periódicamente, a razón de un ciclo por segundo. Una lámpara estroboscópica lanza sus destellos con la misma frecuencia, con lo que la fotografía, tomada con larga exposición, capta las irregularidades del movimiento de la tira. Un sistema computarizado analiza el movimiento de esta según un esquema desarrollado por teóricos de la Universidad de Maryland. El ordenador introduce ligeras modificaciones en el campo con las que transforma los movimientos caóticos (arriba) en oscilaciones periódicas cuya frecuencia puede ser casi la que se quiera (abajo).



WILLIAM L. DITTO y LOUIS M. PECORA han abierto el camino para el estudio del control del comportamiento caótico de sistemas mecánicos, eléctricos

Seleccionar una
de las infinitas
órbitas inestables
es el objetivo del
control del caos.

Un sistema con caos
estocástico no se puede
controlar.

CONTROLLING CHAOS

The extreme sensitivity and complex behavior that characterize chaotic systems prohibit long-range prediction of their behavior but paradoxically allow one to control them with tiny perturbations.

Edward Ott and Mark Spano

*A violent order is disorder; and
A great disorder is an order. These
Two things are one.*

—Wallace Stevens, *Connoisseur of Chaos* (1942)

Scientists in many fields are recognizing that the systems they study often exhibit a type of time evolution known as chaos. Its hallmark is wild, unpredictable behavior, a state often perplexing and unwelcome to those who encounter it. Indeed this highly structured and deterministic phenomenon was in the past frequently mistaken for noise and viewed as something to be avoided in most applications. Recently researchers have realized that chaos can actually be advantageous in many situations and that when it is unavoidably present, it can often be controlled to obtain desired results. In this article, we present some of the basic ideas behind the feedback control of chaos, review a few illustrative experimental results and assess the status and future promise of the field.¹

Dynamical systems

A dynamical system is one whose evolution is deterministic in the sense that its future motion is determined by its current state and past history. The system may be as simple as a swinging pendulum or as complicated as a turbulent fluid.

Figure 1 shows a simple mechanical system set up at the Naval Surface Warfare Center by William Ditto, now at the Georgia Institute of Technology, and his coworkers. The system consists of a magnetoelastic metal ribbon clamped at its lower end. The Young's modulus of the ribbon can be decreased by more than an order of magnitude by applying a magnetic field parallel to the ribbon, thereby causing it to buckle.² This highly nonlinear system is placed in a vertical magnetic field of the form $H(t) = H_{dc} + H_{ac} \cos(2\pi ft)$, where f is on the order of 1 hertz. The position of one point on the ribbon is monitored by an optical sensor located at a spot near the ribbon's base. With appropriate choices of the dc and ac field amplitudes,

the temporal motion of this simple system is observed to be chaotic. Here time is a continuous variable t . In other dynamical systems time can be a discrete integer-valued variable n . A continuous-time dynamical system like the ribbon can be represented by ordinary differential equations.

An example of a discrete-time dynamical system is a d -dimensional map,

$$y_{n+1} = G(y_n) \quad (1)$$

where y is d -dimensional. Given an initial condition y_0 at time $n = 0$, the system state at time $n = 1$ is $y_1 = G(y_0)$; at time $n = 2$, it is $y_2 = G(y_1)$; and so on.

Physicists are used to dealing with continuous-time systems. Newton's equations of motion, Maxwell's equations and Schrödinger's equation are all formulated in continuous time. However, continuous-time dynamical systems can often profitably be reduced to discrete-time systems.

For example, assume that we sample the state of the periodically driven magnetoelastic ribbon (figure 1) once every drive period—at the times $t = T, 2T, 3T, \dots, nT$, where $T = 1/f$. Then y_n denotes the system state at time nT . Because the system is deterministic, the state at time $(n + 1)T$ is uniquely determined by the state at time nT . That is, an equation of the form of equation 1 holds. It turns out to be quite easy to do this sampling for driven experimental systems by strobing the experimental data acquisition at the drive frequency.

In experiments it is sometimes difficult to measure the full state vector of the system. As an extreme example, assume that one can measure only a single scalar function of the system state. In this case, it has been shown that a delay coordinate embedding provides a useful representation of the system state.³ For example, for a discrete-time system, if the observed scalar is w_n , then the delay coordinate vector W_n replaces the vector y_n from equation 1, where

$$W_n = [w_n, w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_{n-(q-1)}] \quad (2)$$

The number of delays q should be large enough to reproduce the dynamics of the system. Essentially the information contained in a measurement of all of a system's variables at a single time is reconstructed from measurements of a single variable at q different times.

A common feature of (non-Hamiltonian) dynamical systems is the presence of "attractors." If typical initial

EDWARD OTT is a professor of physics and of electrical engineering and a member of the Institute for Plasma Research and the Institute for Systems Research at the University of Maryland, College Park. MARK SPANO is a senior research physicist at the Naval Surface Warfare Center, in Silver Spring, Maryland, and a visiting scholar at the Applied Chaos Laboratory of the Georgia Institute of Technology in Atlanta.

Método OGY (Ott, Grebogi, Yorke) de control del caos.

Controlling Chaos

Edward Ott,^{(a),(b)} Celso Grebogi,^(a) and James A. Yorke^(c)

University of Maryland, College Park, Maryland 20742

(Received 22 December 1989)

It is shown that one can convert a chaotic attractor to any one of a large number of possible attracting time-periodic motions by making only *small* time-dependent perturbations of an available system parameter. The method utilizes delay coordinate embedding, and so is applicable to experimental situations in which *a priori* analytical knowledge of the system dynamics is not available. Important issues include the length of the chaotic transient preceding the periodic motion, and the effect of noise. These are illustrated with a numerical example.

PACS numbers: 05.45.+b

The presence of chaos in physical systems has been extensively demonstrated and is very common. In practice, however, it is often desired that chaos be avoided and/or that the system performance be improved or changed in some way. Given a chaotic attractor, one approach might be to make some large and possibly costly alteration in the system which completely changes its dynamics in such a way as to achieve the desired behavior. Here we assume that this avenue is not available. Thus, we address the following question: Given a chaotic attractor, how can one obtain improved performance and a desired attracting time-periodic motion by making only *small* time-dependent perturbations in an *accessible* system parameter?

The key observation is that a chaotic attractor typically has embedded within it an infinite number of unstable periodic orbits.¹ Since we wish to make only small perturbations to the system, we do not envision creating new orbits with very different properties from the existing ones. Thus, we seek to exploit the already existing unstable periodic orbits. Our approach is as follows: We first determine some of the unstable low-period periodic orbits that are embedded in the chaotic attractor. We then examine these orbits and choose one which yields improved system performance. Finally, we tailor our small time-dependent parameter perturbations so as to stabilize this already existing orbit. In this Letter we describe how this can be done, and we illustrate the method with a numerical example. The method is very general and should be capable of yielding greatly improved performance in a wide variety of situations.

It is interesting to note that if the situation is such that the suggested method is practical, then the presence of chaos can be a great advantage. The point is that any one of a number of different orbits can be stabilized, and the choice can be made to achieve the best system performance.

making large alterations in the system.

Furthermore, one may want a system to be used for different purposes or under different conditions at different times. Thus, depending on the use, different requirements are made of the system. If the system is chaotic, this type of multiple-use situation might be accommodated without alteration of the gross system configuration. In particular, depending on the use desired, the system behavior could be changed by switching the temporal programming of the small parameter perturbations to stabilize different orbits. In contrast, in the absence of chaos, completely separate systems might be required for each use. Thus, when designing a system intended for multiple uses, purposely building chaotic dynamics into the system may allow for the desired flexibility. Such multipurpose flexibility is essential to higher life forms, and we, therefore, speculate that chaos may be a necessary ingredient in their regulation by the brain.

To simplify the analysis we consider continuous-time dynamical systems which are *three dimensional* and depend on one system parameter which we denote p [for example, $dx/dt = F(x, p)$, where x is three dimensional]. We assume that the parameter p is available for external adjustment, and we wish to temporally program our adjustments of p so as to achieve improved performance. We emphasize that our restriction to a three-dimensional system is mainly for ease of presentation, and that the case of higher-dimensional (including infinite-dimensional) systems can be treated by similar methods.²

We imagine that the dynamical equations describing the system are not known, but that experimental time series of some scalar-dependent variable $z(t)$ can be measured. Using delay coordinates^{3,4} with delay T one can form a delay-coordinate vector,

$$\mathbf{X}(t) = [z(t), z(t-T), z(t-2T), \dots, z(t-MT)].$$

Using small perturbations to control chaos

Troy Shinbrot, Celso Grebogi, Edward Ott & James A. Yorke

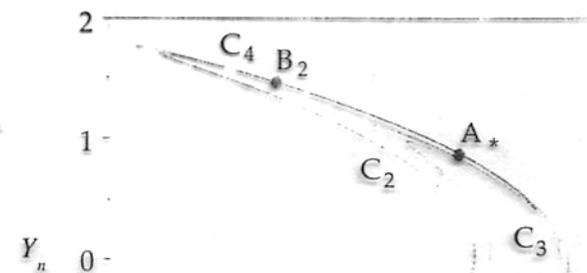
The extreme sensitivity of chaotic systems to tiny perturbations (the 'butterfly effect') can be used both to stabilize regular dynamic behaviours and to direct chaotic trajectories rapidly to a desired state. Incorporating chaos deliberately into practical systems therefore offers the possibility of achieving greater flexibility in their performance.

CHAOTIC systems are characterized by extreme sensitivity to tiny perturbations. This characteristic, known as the 'butterfly effect', is often regarded as a troublesome property, and for many years it has been generally believed that chaotic motions are neither predictable nor controllable. The first reference we find to a differing view is due to John von Neumann, who is reported¹ to have stated around 1950 that small, carefully chosen, pre-planned atmospheric disturbances could lead after some time to desired large-scale changes in the weather. Although this specific application might be problematic, the basic idea of using chaotic sensitivity seems to have been clearly appreciated by von Neumann. Here we review recent work which demonstrates that the butterfly effect permits the use of tiny feedback perturbations to control trajectories in chaotic systems—a capability without a counterpart in nonchaotic systems. These considerations apply to cases in which the chaotic dynamics can in principle be defined by only a few variables, so systems where there are many active degrees of freedom (for example, the weather, and high-Reynolds-number flows) may not be tractable. However, we emphasize that cases of high (or infinite) dimensional systems for which the 'attractor' (and hence the dynamics) is low dimensional are common.

The research that we will review fits broadly into two categories. First we will discuss how, as proposed in ref. 2, one can select a desired behaviour from among the infinite variety of behaviours naturally present in chaotic systems, and then stabilize this behaviour by applying only tiny changes to an accessible system parameter (related work appears in refs 3–32, 77, 78). Moreover, we will show how one can switch between behaviours as circumstances change, again using only tiny perturbations. This means that chaotic systems can achieve great flexibility in their ultimate performance. Second, we will show how one can use the sensitivity of chaotic systems to direct trajectories rapidly to a desired state^{33–38}. For example, a few years ago, NASA scientists used only small amounts of residual hydrazine fuel to send the spacecraft ISEE-3/ICE more than 50 million miles across the Solar System, thereby achieving the first scientific cometary encounter^{39–43}. This feat was made possible by the sensitivity of the three-body problem of celestial mechanics to small perturbations, and would not have been possible in a nonchaotic system, in which a large effect typically requires a large control^{44–46}.

around in an erratic, seemingly random fashion. Very rarely, the chaotic trajectory may, by chance, closely approach a particular unstable periodic orbit, in which case the chaotic trajectory would approximately follow the periodic cycle for a few periods, but it would then rapidly move away because of the instability of the periodic orbit. In addition to periodic orbits, it is common for continuous time dynamical systems to have unstable steady states embedded in chaotic motion (see our subsequent discussion of the Lorenz attractor). A ball placed exactly at the top of a hill is an example of an unstable steady state.

Although the existence of steady states and an infinity of different unstable periodic orbits embedded in chaotic motion is not usually obvious in free-running chaotic evolution, these orbits offer a great potential advantage if one wants to control a chaotic system. To demonstrate this, we adopt the following strategy⁷. First we examine the unstable steady states and low-period unstable periodic orbits embedded in the chaotic motion. For each of those unstable orbits, we ask whether the system performance would be improved if that orbit were actually followed. We then select one of the unstable orbits that yields improved performance. Assuming the motion of the free-running chaotic orbit to be ergodic, eventually the chaotic wandering of an orbit trajectory will bring it close to the chosen unstable periodic orbit or steady state. When this occurs, we can apply our small controlling perturbations to direct the orbit to the desired periodic motion or steady state. Moreover, if a small amount of noise is present, we can repeatedly apply the perturba-



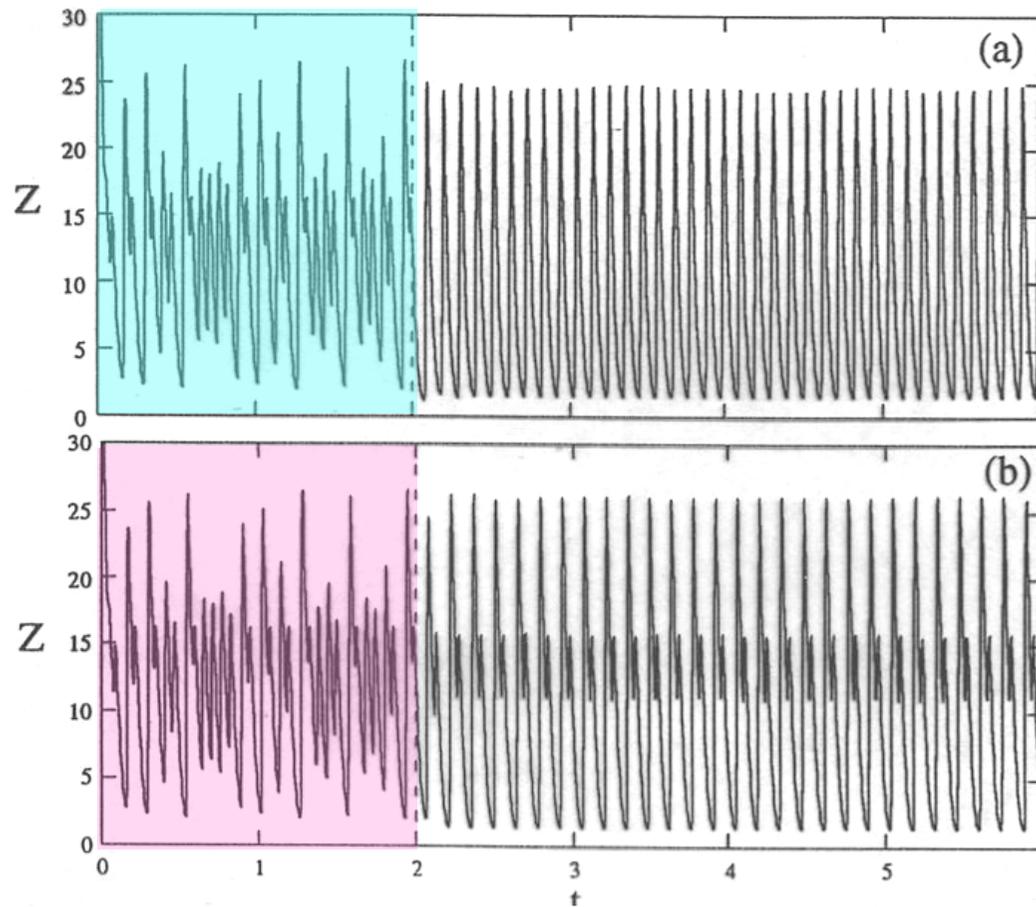
Método de control del caos de pulsos sobre las variables

- Sistemas de ecuaciones diferenciales.

A intervalos fijos de tiempo Δt , las poblaciones se modifican a

$$X_i = X_i(1 + \gamma)$$

Una elección adecuada de Δt y γ puede estabilizar un sistema químico caótico, llevándolo a oscilar de forma cuasi-regular.



Período 1

Período 2

Sistema Autocatalator. Evolución temporal de las especies x , y y z con constantes $\kappa = 10$, $\delta = 0.02$, $\sigma = 0.005$, $\mu = 0.154$ and $\Delta t = 0.00005$: (a) $\lambda = -0.02$, $\tau = 100\Delta t$; (b) $\lambda = -0.01$, $\tau = 100\Delta t$.

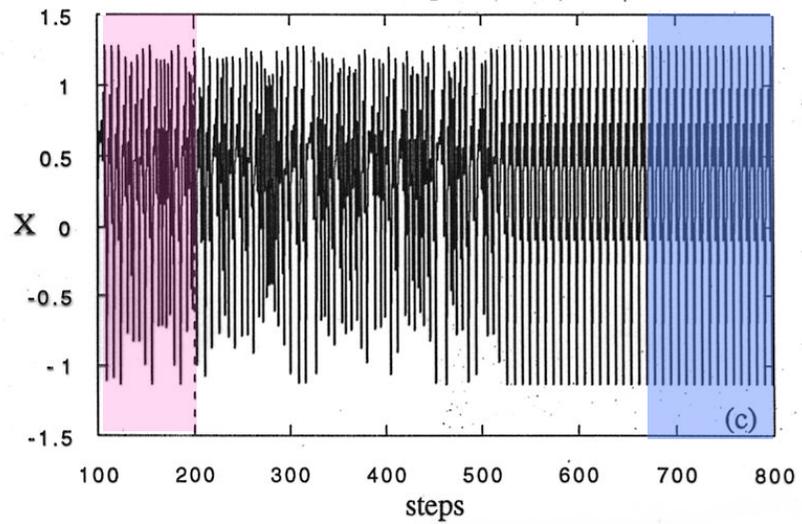
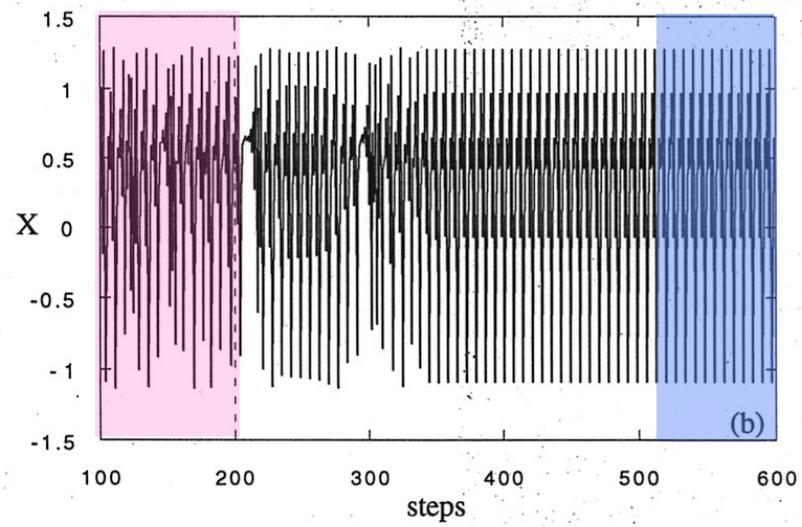
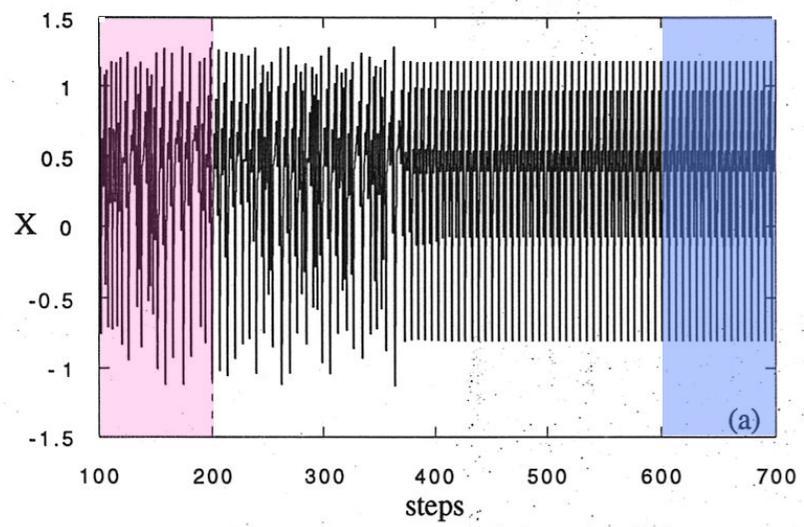
Control de caos mediante pulsos en las variables

Método de control del caos de pulsos sobre las variables

- Aplicación Logística y otras aplicaciones.

Cada cierto número de generaciones n , la siguiente se modifica como

$$X(n) = X(n)[1 \pm \gamma]$$

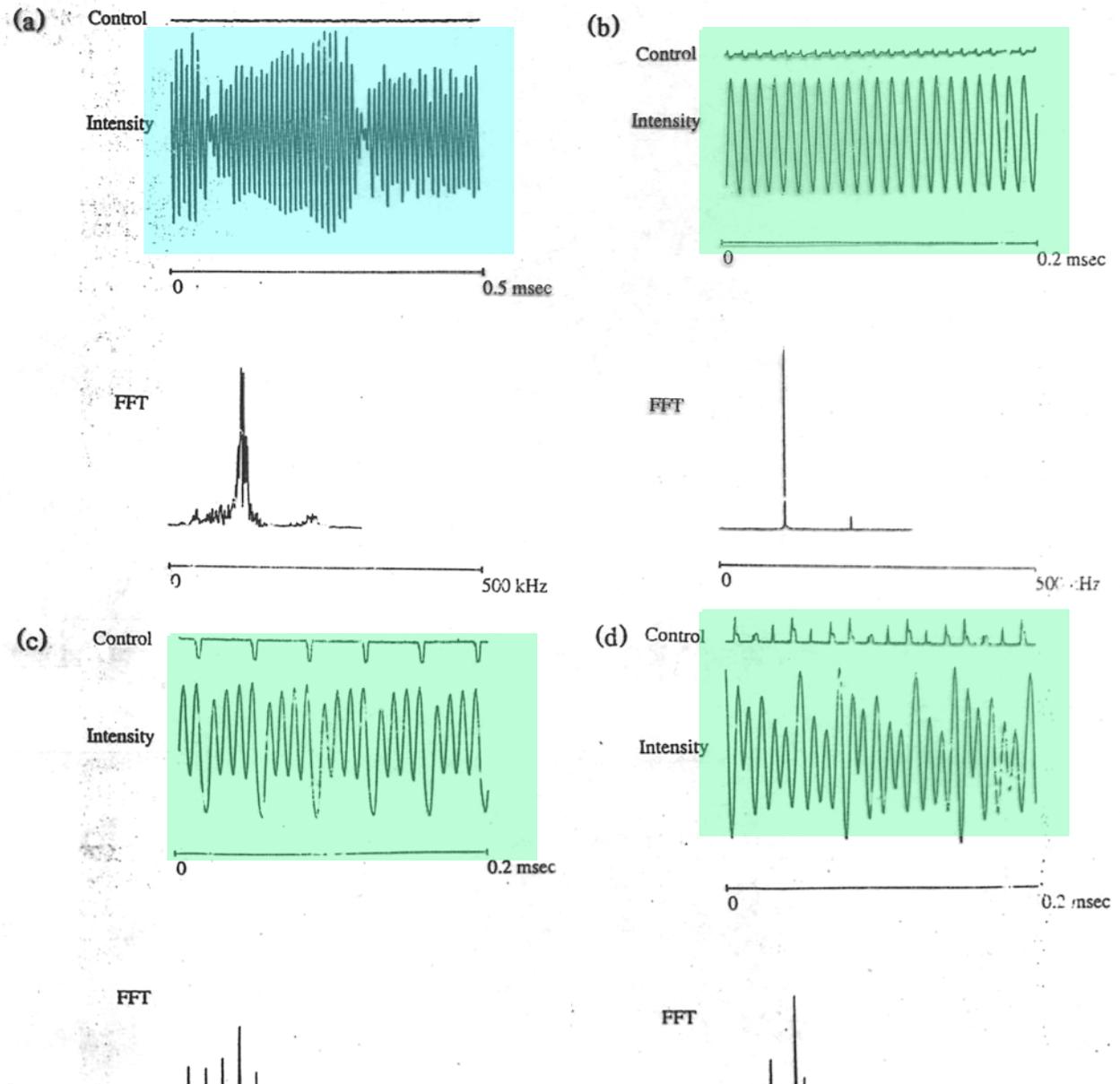


Rajarshi Roy, T. W. Murphy, Jr., T. D. Maier, and Z. Gills
School of Physics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332

E. R. Hunt

Department of Physics and Astronomy, Ohio University, Athens, Ohio 45701-2979
(Received 25 November 1991)

Un láser en
regimen
caótico es más
versátil que un
láser en
régimen
regular.

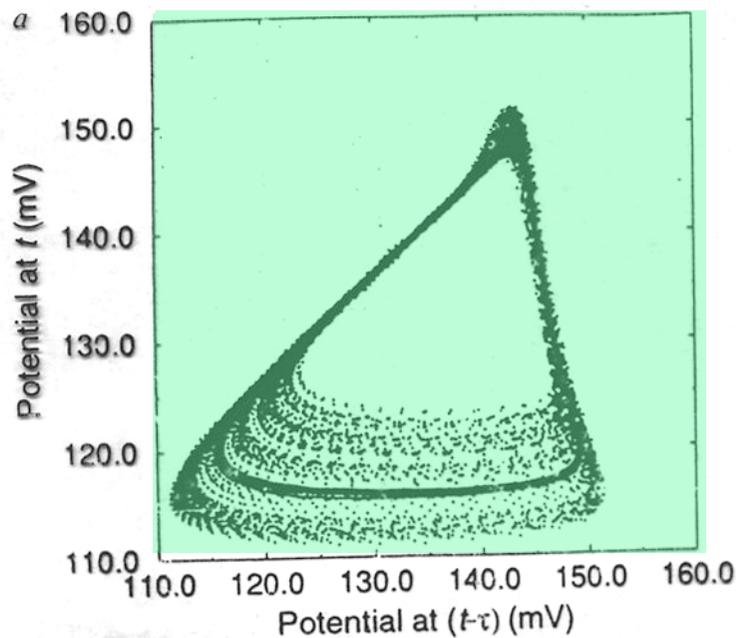


Control de caos en química

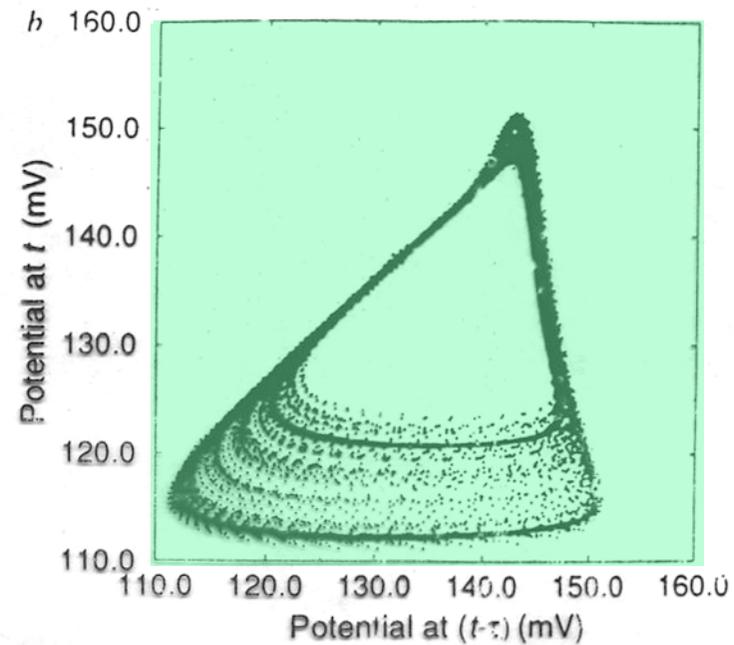
Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction

Valery Petrov, Vilmos Gáspár*, Jonathan Masere & Kenneth Showalter*

Department of Chemistry, West Virginia University, Morgantown, West Virginia 26506-6045, USA



Período 1



Período 2

Control de caos en biología

Controlling Cardiac Chaos

Alan Garfinkel, Mark L. Spano, William L. Ditto, James N. Weiss

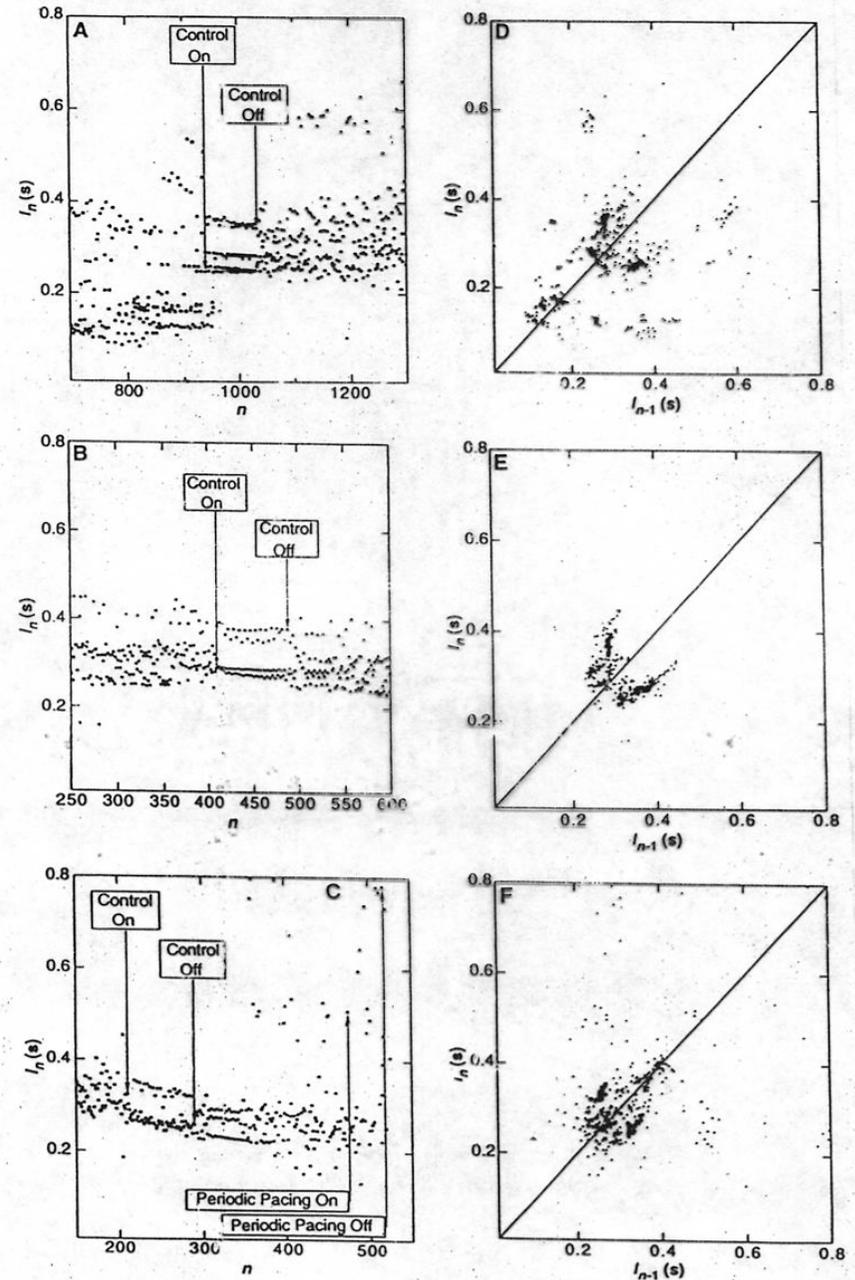


Fig. 3. (A, B, and C) Interbeat interval I_n versus beat number n during the chaotic phase of the ouabain-epinephrine-induced arrhythmia in three typical hearts. The region of chaos control is indicated. In (C) a region during which periodic pacing was applied is also indicated. Note that periodic pacing failed to control the arrhythmia. (D, E, and F) The corresponding Poincaré maps for

Synchronization in Chaotic Systems

Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll

Code 6341, Naval Research Laboratory, Washington, D.C. 20375

(Received 20 December 1989)

Certain subsystems of nonlinear, chaotic systems can be made to synchronize by linking them with common signals. The criterion for this is the sign of the sub-Lyapunov exponents. We apply these ideas to a real set of synchronizing chaotic circuits.

PACS numbers: 05.45.+b

Chaotic systems would seem to be dynamical systems that defy synchronization.¹ Two identical autonomous chaotic systems started at nearly the same initial points in phase space have trajectories which quickly become uncorrelated, even though each maps out the same attractor in phase space. It is thus a practical impossibility to construct identical, chaotic, synchronized systems in the laboratory.

In this paper we describe the linking of two chaotic systems with a common signal or signals. We show that when the signs of the Lyapunov exponents for the subsystems are all negative the systems will synchronize. By synchronize we mean that the trajectories of one of the systems will converge to the same values as the other and they will remain in step with each other. The synchronization appears to be structurally stable.

We apply these ideas to several well-known systems² (e.g., Lorenz and Rössler) as well as the construction of a real set of chaotic synchronizing circuits.

The capability of synchronization is not obvious in nonlinear systems. We derive the results for flows (differential equations), but only a slight variation is needed to use them for iterated maps. Consider an autonomous n -dimensional dynamical system,

$$\dot{u} = f(u). \quad (1)$$

Divide the system, arbitrarily, into two subsystems [$u = (v, w)$],

$$\dot{v} = g(v, w), \quad \dot{w} = h(v, w), \quad (2)$$

where $v = (u_1, \dots, u_m)$, $g = (f_1(u), \dots, f_m(u))$, $w = (u_{m+1}, \dots, u_n)$, $h = (f_{m+1}(u), \dots, f_n(u))$.

where $D_w h$ is the Jacobian of the w subsystem vector field with respect to w only. The behavior of Eq. (4) or its matrix version⁹ depends on the Lyapunov exponents of the w subsystem. We refer to these as sub-Lyapunov exponents. We now have the following theorem: The subsystems w and w' will synchronize only if the sub-Lyapunov exponents are all negative.

The above theorem is a necessary, but not sufficient, condition for synchronization. It says nothing about the set of "initial conditions" in w' which will synchronize with w . We do not mention here any results regarding these sets of points. They are under investigation and will be reported elsewhere.

Taking a broader view, one can think of the $v = (v_1, \dots, v_m)$ components as being driving variables and the $w' = (w'_{m+1}, \dots, w'_n)$ as being responding variables. We take just such a view in our application to a chaotic electronic circuit, below.

It is natural to ask how the synchronization is affected by differences in parameters between the w and w' systems which would be found in real applications. Let μ be a vector of the parameters of the y subsystem and μ' of the w' subsystem, so that $h = h(v, w, \mu)$, for example. If the w subsystem were one dimensional, then for small Δw and small $\Delta \mu = \mu' - \mu$,

$$\Delta \dot{w} \approx h_w \Delta w + h_\mu \Delta \mu, \quad (5)$$

where h_w and h_μ are the derivatives of h . Roughly, if h_w and h_μ are nearly constant in time, the solution of this will follow the form

$$\Delta w(t) = \left[\Delta w(0) - \frac{h_\mu}{h_w} \right] e^{h_w t} + \frac{h_\mu}{h_w} \quad (6)$$

Sincronización Pecora-Carroll

Director 1

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \sigma (y_1 - x_1)$$

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} = rx_1 - y_1 - x_1z_1$$

$$\dot{z}_1 = \frac{dz_1}{dt} = x_1y_1 - bz_1$$

Seguidor 2

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \sigma (y_1 - x_2)$$

$$\dot{z}_2 = \frac{dz_2}{dt} = x_2y_1 - bz_2$$

Sincronización por conexiones parciales

Director 1

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \sigma (y_1 - x_1)$$

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} = rx_1 - y_1 - x_1z_1$$

$$\dot{z}_1 = \frac{dz_1}{dt} = x_1y_1 - bz_1$$

Seguidor 2

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \sigma (y_2 - x_2)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{dy_2}{dt} = rx_2 - y_1 - x_2z_2$$

$$\dot{z}_2 = \frac{dz_2}{dt} = x_2y_2 - bz_2$$

Evolución de las diferencias

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta y} \\ \dot{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ (r - z) & 0 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

Exponentes de Liapunov transversos

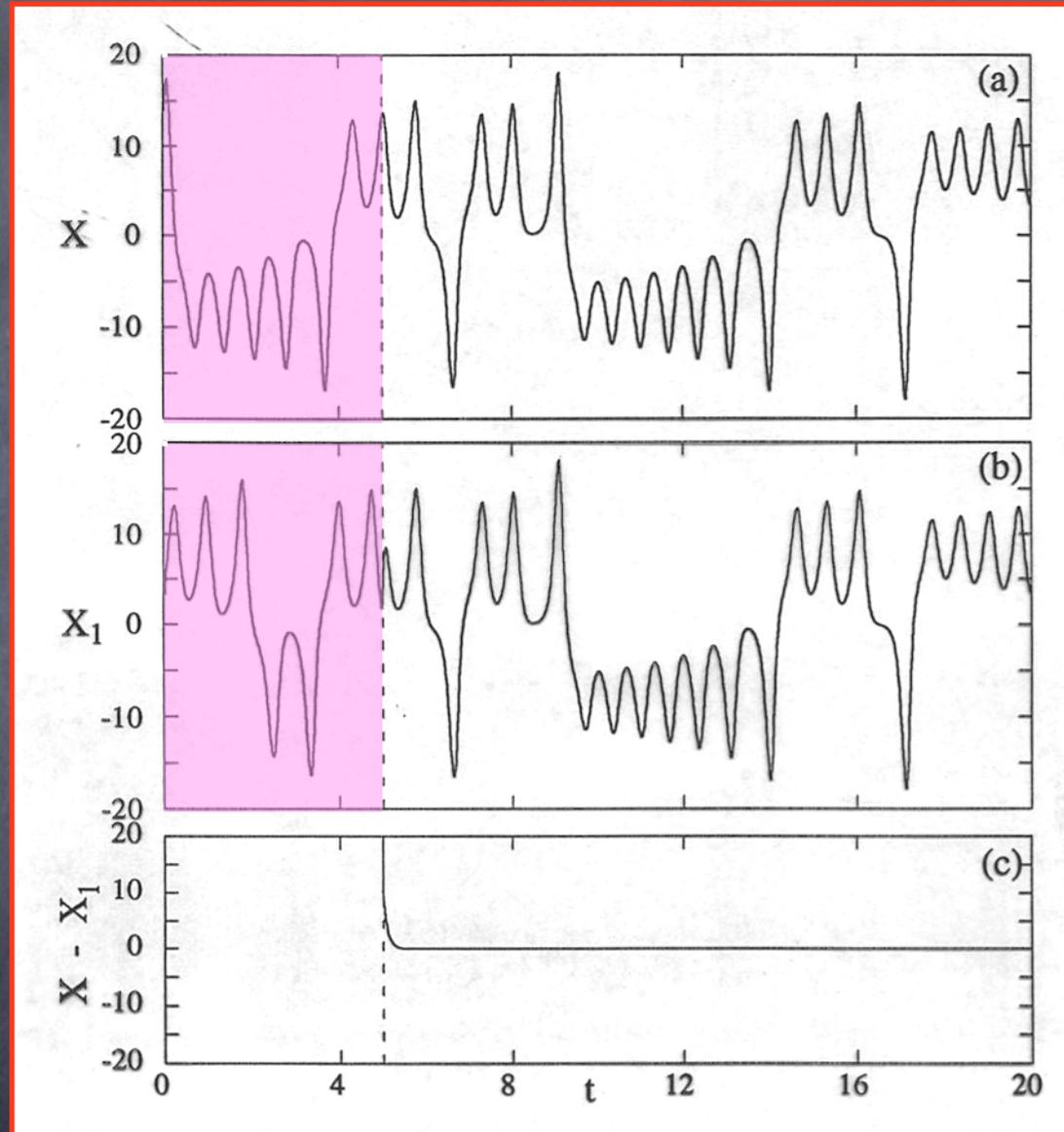
Valores propios

$$\begin{pmatrix} -\sigma - \nu & \sigma & 0 \\ (r - z) & 0 - \nu & -x \\ y & x & -b - \nu \end{pmatrix} = 0$$

Condición de sincronización:

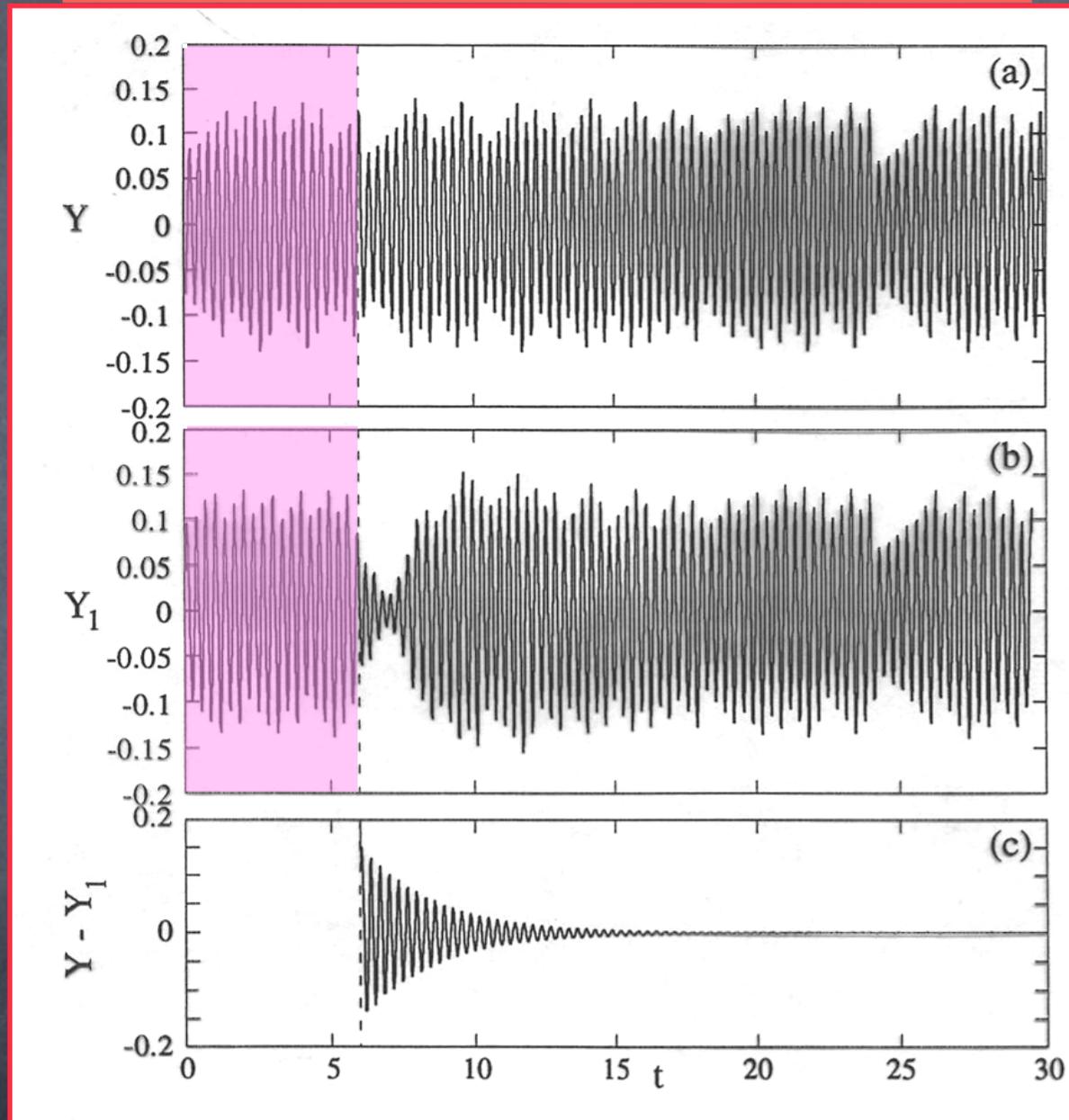
todos los exponentes de Liapunov transversos negativos

Sincronización monótona



Exp. Liapunov transversos reales y negativos

Sincronización oscilante



Exp. Liapunov transversos complejos.
Parte real negativa

Sincronización de sistemas caóticos en física

American
Journal
of Physics

A simple circuit for demonstrating regular and synchronized chaos

Thomas L. Carroll

Naval Research Laboratory, Washington, D.C. 20375

(Received 29 June 1994; accepted 27 September 1994)

Searching for applications of chaos is a popular topic in current physics research.¹⁻¹⁷ In searching for these applications, methods of synchronizing chaotic systems have been studied. One of these methods involves reproducing a part of a chaotic system and driving it with a signal from the full chaotic system.^{14,15} Under the right conditions (described below), the reproduced part (the response system) will synchronize with the full system (the drive system). This type of synchronization, which may be useful for communications, has been done in simple electronic circuits.^{1,2,4,6,7,18} I describe here an easy to build electronic circuit which may be used to demonstrate chaos and the synchronization of chaos.

I will first describe the physics behind the synchronization of chaos. A chaotic system may be described by a set of differential equations, such as

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z). \quad (1)$$

A subsystem may be created by taking only some of the equations: for example, using the y and z equations to create a response system with the variables y' and z' . The x variable in this response system is replaced by the x variable from the full system, so that the response equations are

$$\frac{dy'}{dt} = v(x, y', z'), \quad \frac{dz'}{dt} = w(x, y', z'). \quad (2)$$

The response variables y' and z' will converge to the drive variables y and z if the response system of Eqs. (2) is stable. Mathematically, this is measured by the Lyapunov exponents of Eqs. (2). Lyapunov exponents, which may be calculated from known equations, describe how a small difference between two identical systems will change over time; a positive Lyapunov exponent means that the difference will grow, a negative exponent means that the difference will shrink, and a zero exponent means that the difference will stay the same size. There is one Lyapunov exponent for each variable, with the overall behavior being dominated by the least negative. A chaotic system, for example, has at least one positive Lyapunov exponent. For the response system of Eqs. (2) to synchronize with the drive system, all of its Lyapunov exponents must be less than zero.

The synchronizing subsystems may be cascaded. Suppose that the x and z equations from Eqs. (1) form another stable response system. Since the y' variable in Eqs. (2) has con-

verged to the y variable in Eqs. (1), it may also be used as a driving signal for the x, z subsystem. The full cascaded response system may be described by

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dt} &= v(x, y', z'), & \frac{dz'}{dt} &= w(x, y', z'), \\ \frac{dx''}{dt} &= v(x'', y', z''), & \frac{dz''}{dt} &= w(x'', y', z''). \end{aligned} \quad (3)$$

In this cascaded response system, the x'' signal will converge to the x signal, which was the original driving signal. If the response system is driven by any other signal, the x'' signal will not converge to the drive signal. Therefore, the response circuit may be used to determine whether a signal is the chaotic signal generated by the system of Eqs. (1) or some other signal. If Eqs. (1) are changed slightly, by changing some parameter, synchronization will also be lost. It is possible to send information this way, by varying a parameter in Eqs. (1) and detecting this parameter by observing if x and x'' in Eqs. (3) are synchronized or not.

I have built a particularly simple circuit to use as a demonstration of synchronized chaos. The circuit, shown in Fig. 1, is based on an analog computer version of the well-known Rossler equations.¹⁹ In this circuit, there is no multiplication. The one nonlinearity in the circuit is a piecewise linear function made from op amp A4, 3 resistors, and a diode. The diode acts as a switch (almost any diode will do), so that amplifier A4 only turns on when x exceeds 3 V. The circuit is described by the equations

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha(\Gamma x + \beta y + \lambda z), \quad (4)$$

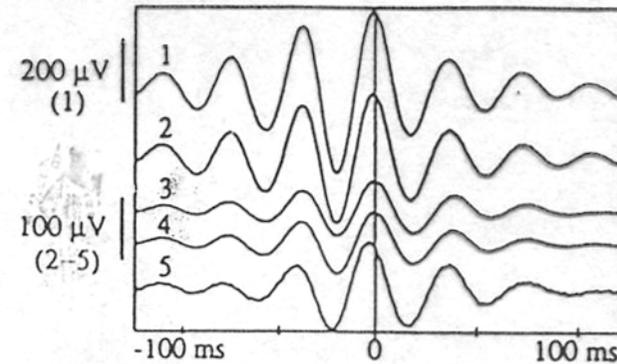
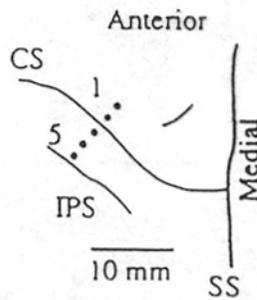
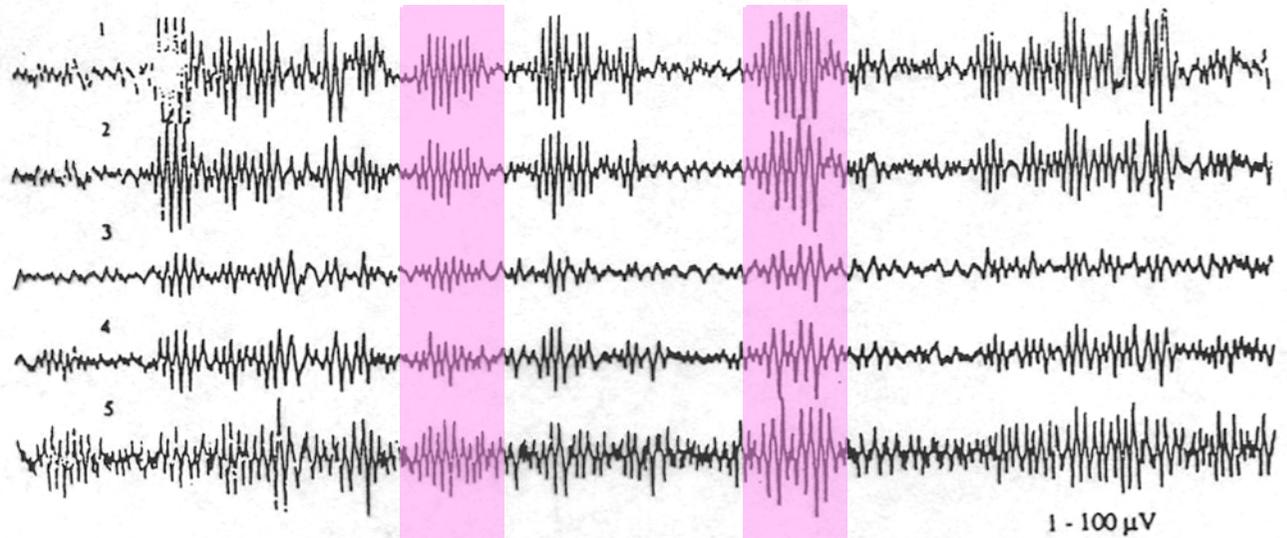
$$\frac{dy}{dt} = -\alpha(-x - \gamma y + 0.02y), \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha[-g(x) + z], \quad (6)$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \mu(x-3), & x > 3 \end{cases}, \quad (7)$$

where the time factor α is 10^4 s^{-1} , Γ is 0.05, β is 0.5, λ is 1.0, γ is 0.133 and μ is 15. A cascaded response system with the y signal used as the driving signal may be built for this

Sincronización de neuronas cerebrales.



1 - 100 μ V
2 - 50 μ V
3 - 50 μ V
4 - 25 μ V
5 - 100 μ V

200 ms

Local field potentials recorded simultaneously in five anterior-posterior tracks separated by 2 mm each. Electrode sites, marked on the sketch of the cortical surface (lower left), straddled the central sulcus. Averages of the local field potentials aligned on triggers from oscillatory cycles in trace 1. The monkey was reaching for a raisin offered to the side of its head by the experimenter. (See Figure 4 of Murthy and Fetz,¹⁴⁴ "Coherent 25–35 Hz Oscillations in the Sensorimotor Cortex of the Awake Behaving Monkey," *Proc. Natl. Acad. Sci.* 89 (1992): 5670–5674.) Reprinted by permission.

Synchronization in small assemblies of chaotic systems

J. Güémez

Departamento de Física Aplicada, Universidad de Cantabria, E-39005 Santander, Spain

M. A. Matías*

Departamento de Química Física, Universidad de Salamanca, E-37008 Salamanca, Spain

(Received 10 October 1995)

In this paper we investigate the behavior of small networks of van der Pol–Duffing chaotic oscillators that are connected through local, although not weak, coupling through a recently introduced [Phys. Rev. E **52**, R2145 (1995)] extension of the Pecora–Carroll synchronization method. The method allows us to design a variety of settings with different ways of connecting a number of low-dimensional circuits. It is shown that a variety of different behaviors can be obtained, depending, among other factors, on the symmetry of the connections and on whether the oscillators are identical or different. One may cite the emergence of coherent behavior (a single cluster), either chaotic or periodic, as stemming just from interaction among the different chaotic units, although several coexisting clusters are found for other settings.

PACS number(s): 05.45.+b

I. INTRODUCTION

At first sight a chaotic system should be one defying any attempt of synchronization, due to its strong dependence on the initial conditions that would amplify any small disturbance. However, it has been suggested [1], and later proved [2], that this is not the case, and that chaotic systems may synchronize in some circumstances. One of the possibilities is one-way coupling, in which one has a drive-response couple, such that a signal coming from the drive makes the response synchronize without influencing the drive. This has been shown in a seminal contribution by Pecora and Carroll (PC) [2], including the application to electric circuits. The PC method is specially suited for the case of analog circuits, as one-way connections can be easily implemented through operational amplifiers. A problem is that drive and response must have a part in common, implying from this fact that the response has, in practice, a reduced dimensionality compared to the drive.

An interesting extension of these ideas is to the case of a cascade [3], in which the response of some drive system acts, in turn, as the drive of a second response system. At variance with what happens with a single connection, in one such cascade the input signal is regenerated by the second response circuit. By taking advantage of the degree of stochasticity that a chaotic signal exhibits to a casual observer, it has been suggested that these cascades could act as chaotic filters, potentially useful in the field of secure communications [4,5]. The idea is to mask the information to be transmitted with the chaotic signal, the main advantage being that one could *bury* the information to be transmitted in the chaotic signal by 30–40 dB, something that would not be possible with classical masking techniques based on the use of purely

titated than the simple technique just sketched.

If a cascade is able to regenerate a given input signal, then a network formed by many low-dimensional chaotic systems could be useful as an information processing system. In this sense, this would be a generalization of the so-called cellular neural networks [7], devices able to perform useful computations based just on bistable circuits. Chaotic networks could operate by performing transitions among different kinds of coherent states. In addition, physiologists have found such coherent waves as evoked responses in the brains of some mammals [8], and have speculated [9] on their role in perception and other mental capabilities.

The aim of the present contribution is to suggest a way of setting up complex networks composed of many low-dimensional chaotic circuits. The PC method, in the form introduced in the original contribution [2], presents some limitations to the achievement of this goal, due to the fact that the drive and response systems share the driving signal. Although other versions of the method that overcome these limitations have already appeared (see, e.g., Ref. [10]), here we shall resort to an extension [11] of the PC method in which the input signal enters at a precise location of the dynamical equations of the response system. The result is that one is able to regenerate the input signal within a single connection, while the possibility of using the same connection twice without alternating with the other one is allowed. The result is that a given system may receive input from a number of systems, and that a number of different networks with different connectivities can be set up, thus resembling the situation found in biological neural networks.

All the results presented in the present contribution have been obtained for the case of four van der Pol–Duffing systems [12] in the chaotic state. Although this is a fairly small

Conexiones
en pequeños
conjuntos de
sistemas
caóticos.

Conexiones en bucle en cuatro modelos de Lorenz.

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = \sigma (y_1 - x_1)$$

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} = rx_4 - y_1 - x_1z_1$$

$$\dot{z}_1 = \frac{dz_1}{dt} = x_1y_1 - bz_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = \sigma (y_2 - x_2)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{dy_2}{dt} = rx_2 - y_1 - x_2z_2$$

$$\dot{z}_2 = \frac{dz_2}{dt} = x_2y_2 - bz_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt} = \sigma (y_3 - x_3)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{dy_3}{dt} = rx_2 - y_3 - x_3z_3$$

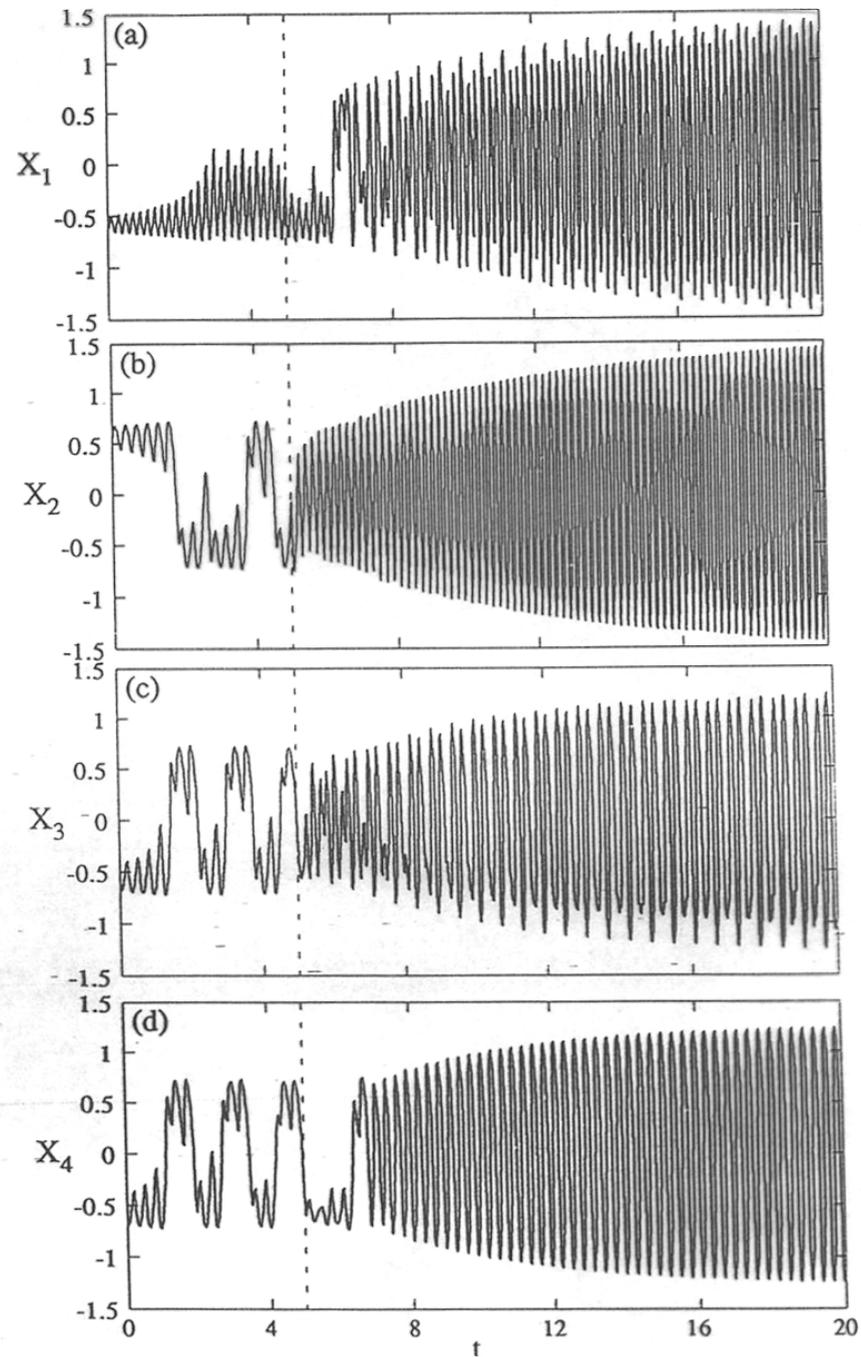
$$\dot{z}_3 = \frac{dz_3}{dt} = x_3y_3 - bz_3$$

$$\dot{x}_4 = \frac{dx_4}{dt} = \sigma (y_3 - x_4)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{dy_4}{dt} = rx_4 - y_4 - x_4z_4$$

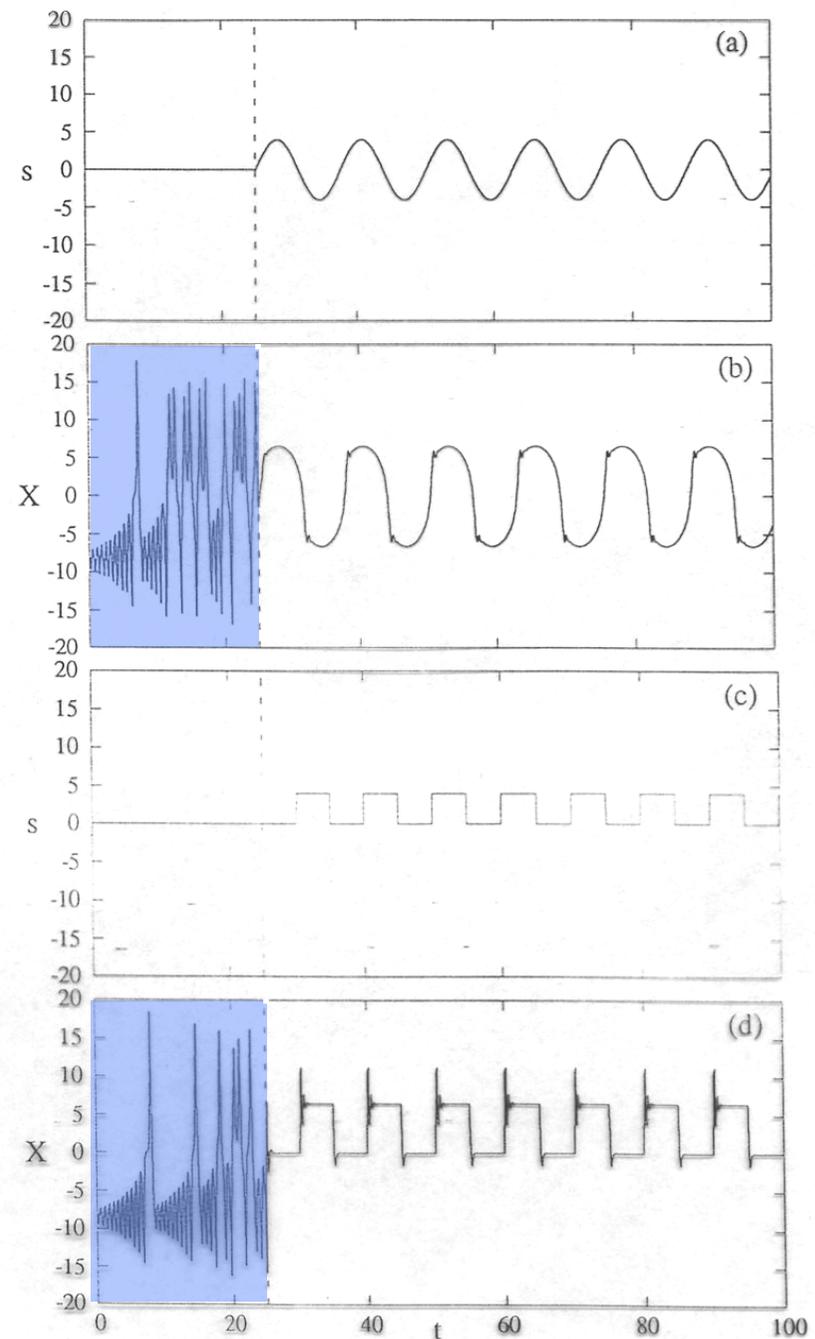
$$\dot{z}_4 = \frac{dz_4}{dt} = x_4y_4 - bz_4$$

Propiedades emergentes:
el conjunto exhibe comportamientos que no presentan los elementos individuales.



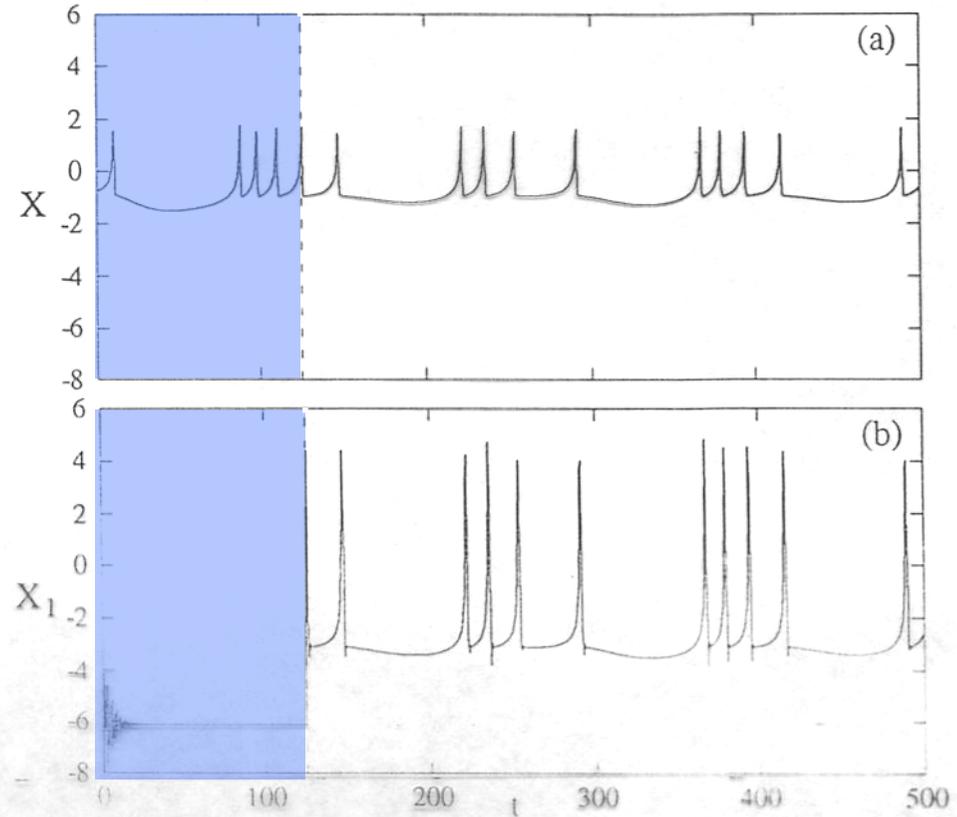
Cuatro sistemas van der Pol-Duffing conectados en ciclo cerrado de acuerdo con Ec.(4.10), tal que las conexiones (4.2) y (4.6) se van alternando. El primer oscilador tiene ahora como parámetros $\nu = 100$, $\alpha = 0.35$, and $\beta = 1000$. Los parámetros de los restantes son iguales que en la Fig.1.

Versatilidad de sistemas caóticos: el sistema caótico responde a una **señal regular** introducida en una de sus conexiones sincronizantes.



Supresión de caos en un modelo de Lorenz de parámetros $\sigma = 10$, $b = 8/3$, and $R = 28$ conducido por varias señales: (a) señal armónica $A \sin(\omega t)$, con $A = 4$ y $\omega = 0.5$ y (b) comportamiento inducido en el modelo de Lorenz; (c) función pulso de altura $A = 4$ y duración $t = 5$ seguida por altura cero durante $t = 5$; (d) comportamiento inducido en el modelo de Lorenz.

Versatilidad de sistemas caóticos: un sistema caótico responde a una señal de un sistema caótico diferente cuando es introducida en una conexión sincronizante.



Anticontrol de caos en un sistema de Lorenz conducido por una señal caótica producida por un modelo de neurona de hindmarsh-Rose. Los parámetros para el modelo de Lorenz son $\sigma = 10$, $b = 8/3$, y $R = 15$, mientras que para el modelo de Hindmarsh-Rose son $a = 1.0$, $b = 3.0$, $c = 1.0$, $d = 5.0$, $s = 4.0$, $r = 0.006$, $X_0 = -1.6$, and $I = 3.1$.

Propiedades de
sistemas
caóticos:
propagación
rápida de la
sincronización
en cadenas.

Transient Periodic Rotating Waves and Fast Propagation of Synchronization in Linear Arrays of Chaotic Systems

M. A. Matías*

Física Teórica, Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, E-37008 Salamanca, Spain

J. Güémez

Departamento de Física Aplicada, Universidad de Cantabria, E-39005 Santander, Spain

(Received 20 October 1997)

We study the behavior of arrays of unidirectionally coupled Lorenz systems in the chaotic regime. In the case of rings an instability in the uniform synchronized state leads to the appearance of a periodic rotating wave through a symmetric Hopf bifurcation. From theoretical grounds it is argued that this behavior must also manifest in the behavior of linear arrays. Numerically it is shown that this happens in a transient way, leading to unexpected consequences in the velocity of synchronization, that becomes larger. [S0031-9007(98)07541-3]

PACS numbers: 05.45.+b, 89.70.+c

Recently it has been shown that chaotic synchronization [1,2] occurs in linear arrays of unidirectionally coupled chaotic systems in the form of a synchronization wave that spreads through the system [3,4]. In Ref. [3] we showed that this synchronization wave can be characterized to have a constant velocity that depends linearly on the slowest time scale in the system, quantitatively characterized by the largest conditioned Lyapunov exponent [2] (corresponding to a single drive-response couple).

The aim of the present Letter is to show that, although the scenario presented above is expected to be the *normal* one in this kind of systems, it is possible that interesting dynamical phenomena may occur in some circumstances. In the situation discussed here coherent transient waves appear in the system influencing the way in which the system approaches the synchronized state. This behavior is closely related [5] to the behavior of arrays made up with the same basic cells, but with periodic boundary conditions, i.e., in a ring geometry, although in unidirectionally coupled linear arrays one no longer has a mechanism by which a given oscillator can be affected by those that are down the chain.

The ground for this unexpected relationship between linear and circular arrangements of discretely coupled cells comes from recent studies showing the presence of *hidden* symmetries, i.e., symmetries that appear in systems in which the underlying differential equations have more symmetry than the boundary conditions. In particular, Armbruster and Dangelmayr [6] observed that reaction-diffusion systems satisfying Neumann (free-end) boundary conditions on an interval can be extended to intervals with twice the length that satisfy periodic boundary conditions, i.e., a circle. This extension introduces

On the other hand, in recent work [12] it has been shown that rings of chaotic oscillators may exhibit an instability in the uniform synchronized state through a symmetric Hopf bifurcation. Interestingly, this bifurcation leads in some cases, such as in the case of rings of Lorenz systems, to the appearance of a periodic rotating wave with a frequency that is larger than the frequency corresponding to the average distance between peaks in the chaotic state that corresponds to an uncoupled Lorenz system. More recently this behavior has been found experimentally in a ring of Lorenz analog circuits [13]. The goal of the present Letter is precisely to discuss the consequences that have for linear arrays the occurrence of this bifurcation in the corresponding circular arrays. Other authors had considered previously bifurcations of equilibria and periodic solutions in circular arrays of periodic [14–16] and chaotic [17] cells.

The connections in the arrays of Lorenz oscillators [18] to be discussed in the present work are based on a generalization [19(a)] of a previously introduced connection method [19(b)]. Within this scheme one may write the following evolution equations for the array:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \sigma(y_j - x_j) \\ \dot{y}_j = R \frac{x_j}{y_j} - y_j - x_j z_j \\ \dot{z}_j = x_j y_j - b z_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

where $x_j = \alpha \bar{x}_j + (1 - \alpha)x_j$, with $\bar{x}_j = x_{j-1}$ for $j \neq 1$, introduces the coupling and $0 \leq \alpha \leq 1$. The boundary conditions enter through \bar{x}_1 that takes the value $\bar{x}_1 = x_N$ for circular arrays, while for linear arrays it is $\bar{x}_1 = x_1$. The main usefulness of the introduction of the parameter α in this context is that it allows one to control the

Una cadena de sistemas caóticos conectados que se sincroniza a mayor velocidad que los elementos individuales.

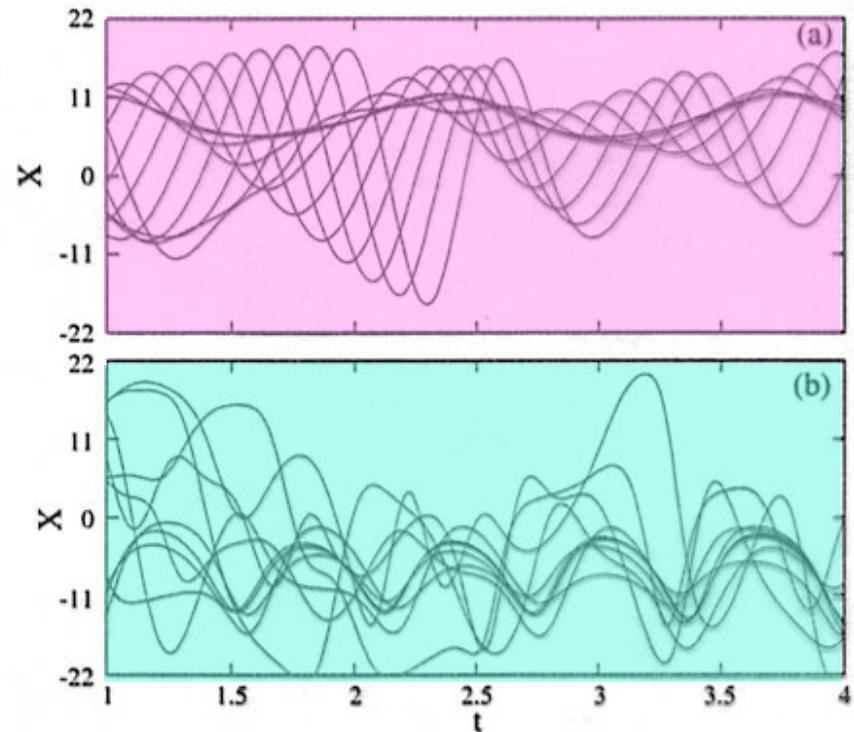


FIG. 1. (a) Representation of variable x vs time in a linear array of 11 Lorenz oscillators (a) when they are connected according to (1), showing the coherent (periodic) in their approach to chaotic synchronization; (b) when they are connected according to Eq. (3) in Ref. [19(b)], showing a *normal* approach to synchronization. The parameters are $\sigma = 18$, $R = 28$, $b = 8/3$, and $\alpha = 1$.

Ventajas evolutivas de sistemas caóticos: posibilidad de evolucionar.

The evolutionary advantage of controlled chaos

MICHAEL DOEBELI

Zoologisches Institut der Universität, Rheinsprung 9, CH-4051 Basel, Switzerland

SUMMARY

In a chaotic system, many different patterns of motion are simultaneously present. Very small changes in the initial conditions can greatly alter the system's trajectory. Here a one-dimensional difference equation is used to explain how these properties can be exploited to control the chaotic dynamics of a population. Applying small perturbations according to a simple rule drives the density of the population to a stable state. Moreover, the population can inflict these perturbations on itself: it can exert self control. Under some circumstances, such a mechanism confers an evolutionary advantage. A mutant exerting self control can invade an uncontrolled but otherwise equal resident population. Invasion of the mutant stabilizes the previously fluctuating population density. The system considered here is a subject to a form of K selection. Even if the mutant's K value is less than that of the resident, self control can still make invasion possible, but in that case invasion does not stabilize the system. It may instead lead to intermittent chaos.

1. INTRODUCTION

Simple ecological models can exhibit very complex dynamical behaviour. This was discovered by May (1974, 1976), and initiated a debate about the possibility of chaos in real ecosystems. Probably the most influential study in this respect was done by Hassell *et al.* 1976. They estimated the parameters of a one-dimensional difference equation for 24 insect populations and found that all but two of these populations had a stable equilibrium. This led to the more or less widespread belief that chaos is scarce in natural populations.

One of the prominent features of chaos is a very sensitive dependence of the dynamical behaviour on initial conditions, leading in practice to unpredictability. But even if natural systems do behave unpredictably, it was argued by Berryman & Millstein (1989) that this is due to stochasticity in the environment rather than to determine chaos. There have been attempts to explain the apparent scarcity of chaos by group selection arguments (Thomas *et al.* 1980; Berryman & Millstein 1989). These authors suggest that chaotic fluctuations cause population crashes after which the population is threatened by extinction in a stochastic environment. Some authors have studied what sort of dynamic behaviour is favoured by individual selection on demographic parameters (cf. Muller & Ayala 1981; Hansen 1992; Ferrière &

1990; Scaffer & Kot 1986*b*) seems particularly convincing. Nevertheless, chaos continues to have a negative image among ecologists because of its apparent untestability and randomness.

In this article I focus on a particularly interesting property of chaotic systems, and show how it can be put to use in an ecological and evolutionary context. In an excellent review article, Shinbrot *et al.* (1993) showed how chaotic systems can be controlled by slight perturbations to elicit almost any kind of regular behaviour one might wish. Two basic features of chaos make this procedure possible. One is the sensitive dependence on initial conditions, already mentioned, the other is the fact that many different dynamical behaviours are simultaneously present in a chaotic system, although most or all of them are unstable. For example, in a one-dimensional discrete system (such as the logistic equation) that exhibits chaotic motion, an infinite number of initial conditions lead to (unstable) periodic motion (see Schuster 1984, chapter 3). Moreover, cycles of any desired length usually occur. One can now exploit sensitivity to initial conditions to steer the system's trajectory close to one of these periodic orbits (whichever seems desirable). By slight perturbations, the system is then kept close to this cycle and in effect behaves as if the cycle were stable. The same procedure can subsequently be used to jump to another kind of behaviour, e.g. to another cycle. This is in striking contrast to the situation where a system

La importancia de ser imperfecto

Los artículos siguientes examinan las imperfecciones en física, en matemática, en ciencias naturales, en lingüística y en metalurgia.

Las imperfecciones, con frecuencia útiles, son en ocasiones necesarias

Las catenarias de fabricación francesa instaladas en los ferrocarriles japoneses se desgastaban muy rápidamente, mucho antes que en el país exportador... Los expertos estaban perplejos... hasta el día en que uno de ellos observó la colocación de los postes del tendido que sostenían el cable a lo largo de la vía. El misterio quedó explicado por la perfección del trabajo de los obreros japoneses. Los postes, en Francia, habían sido colocados con cierta tolerancia, más o menos a unos 100 metros unos de otros; en Japón, esta distancia estaba medida con precisa exactitud. A consecuencia de esta regularidad se instauraba en la línea un sistema de ondas estacionarias de gran amplitud, y el rozamiento provocado por los desplazamientos del cable conductor desgastaba mucho las catenarias. El defecto del dispositivo residía en su misma perfección, y la solución del problema, en una pequeña imperfección del espaciado entre los postes.

La sincronización temporal puede resultar tan nefasta como la regularidad espacial. Es sabido que las tropas no deben desfilar marcando el paso al atravesar un puente —la perfección de la marcha militar— pues las vibraciones inducidas en el tablero por los impactos periódicos entrañan el riesgo de provocar su hundimiento.

En el campo científico, ciertas imperfecciones pertenecen "a la naturaleza de las cosas". Determinadas imposibilidades de carácter cuántico son inherentes al principio de incertidumbre de Heisenberg: hagamos lo que hagamos, será imposible medir simultáneamente la velocidad y la posición de una partícula con precisión infinita. La realidad es como es.

el resultado del lanzamiento. Ello, sin embargo, no constituye ninguna desgracia irreparable, y puede incluso ser beneficioso, pues de esta incertidumbre inicial se deducen ciertas leyes estadísticas.

Hasta en matemáticas, la más pura de las ciencias, las imperfecciones de naturaleza calculatoria o lógica imponen, o revelan, determinadas limitaciones o prohibiciones. El análisis que las propias matemáticas hacen de sí mismas nos enseña que ciertos cálculos no podrán concluir jamás y que, para los llamados enunciados indecidibles, no se podrá jamás encontrar demostración.

Por otra parte, las imperfecciones abren con prodigalidad nuevas posibilidades. La evolución hubiera sido imposible sin los errores de replicación del ADN, errores que permiten una adaptación mejor a un entorno en transformación. De no haber sido por la granulación del universo justo después de la gran explosión, ninguna heterogeneidad hubiera permitido la posterior formación de galaxias, estrellas y planetas. La causa de estas heterogeneidades iniciales no está completamente elucidada, pero sin ellas nosotros no existiríamos.

Las técnicas se valen de las imperfecciones para asociar a los materiales diversas propiedades. Los semiconductores no existirían de no ser por la adición de imperfecciones, ni tampoco los superconductores de segundo tipo, ni otros materiales especiales en los que es necesaria la adición de impurezas para que posean las propiedades deseadas.

Ocurre con frecuencia que la solución de un problema de física es resultado de una imper-



Imperfección y evolución

La imperfección constituye la clave de los sistemas evolutivos. Salva a veces de la enfermedad y favorece la adaptación

La propiedad fundamental de la materia viva es la reproducción. La etimología de la palabra ya lo deja adivinar: cada ser, cada célula, cada molécula proceden de individuos, de células o de moléculas muy parecidos a los que les han precedido, y darán, a su vez, nacimiento a materia viva semejante a ellos. Esta posibilidad de reproducción de estructuras extremadamente complejas no tiene equivalencia en el mundo mineral: la reproducción idéntica de un mismo cristal de estructura simple en una disolución saturada no se le puede comparar. Esta tendencia que empuja a los seres vivos a reproducirse, este "proyecto" inherente a la vida, por retomar la expresión de Jacques Monod, descansa sobre las propiedades de los genes, y de los cromosomas que agrupan a estos genes.

El programa genético está encargado de reproducir sin la menor variación al ser que lo contiene, a la vez que se reproduce a sí mismo. Esta reproducción invariante y perpetua, que Monod calificaba de teleonómica, debe asegurar la supervivencia y la perpetuación de la especie. La materia viva sería una máquina perfecta, programada para reproducirse hasta el

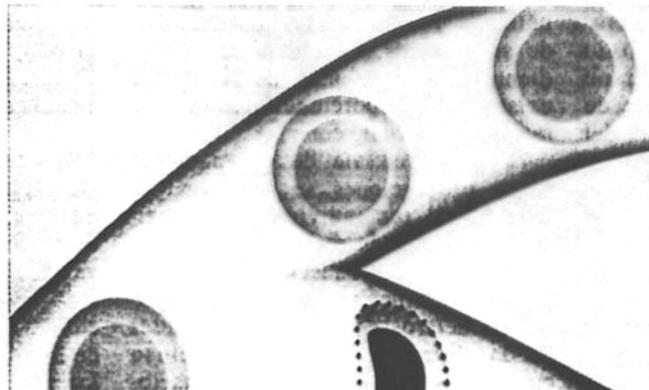
fin. Desde que apareció en la Tierra, hace por lo menos 3500 millones de años, la vida no ha cesado de evolucionar, los seres vivos se han ido transformado continuamente, desafiando esta finalidad o esta teleonomía que les dejaría invariables. De hecho, la causa de esta contradicción reside en las imperfecciones del sistema reproductor. Por muy puesta a punto que esté la máquina, es susceptible de sufrir averías. En el caso de una división, en el momento de la formación de las células sexuales, o durante la fusión de dos gametos para formar un huevo, el sistema puede atascarse, un gen alterarse, un cromosoma reorganizarse después de haberse escindido. Cada uno de estos fenómenos corresponde a una mutación, a la aparición de una estructura

nueva. Si las mutaciones son benéficas para la especie y son primadas por la selección natural, se extenderán por la población, quedando perpetuado el error inicial que se convertirá así en la nueva norma. La selección natural actúa sobre caracteres surgidos por azar tras mutaciones fortuitas. Los errores de la duplicación genética constituyen los procesos básicos de la evolución. Todas las realizaciones de la materia viva que observamos hoy y todas las que han existido en el pasado, del vegetal al animal, de la bacteria a la inteligencia humana, pasando por las flores más llamativas o los dinosaurios más espectaculares, han sido fruto de imperfecciones en el funcionamiento genético. Sin ellas, la vida no hubiera podido evolucionar y hubiera permanecido en un mismo estadio primitivo, en el que unas mismas moléculas se reproducirían idéntica y perpetuamente.

Taras benéficas

Normalmente, toda mutación que fuera desfavorable debería eliminarse de la población, o en todo caso, ser muy rara, por los posibles efectos letales sobre los individuos portadores o porque pone en desventaja a esos individuos con respecto a los demás, reduciendo así su probabilidad característica de reproducirse. Este razonamiento no tiene en cuenta los cambios ambientales: las circunstancias de la vida en la Tierra no son inmutables y la aparición de una mutación puede suponer una adaptación mejor a un medio cambiante.

Lo que es más, una mutación desfavorable puede ocultar una ventaja adaptativa; una imperfección puede ocultar en sí a otra. La drepanocitosis, o anemia falciforme, es una enfermedad genética muy grave. Se debe a una mutación gé-



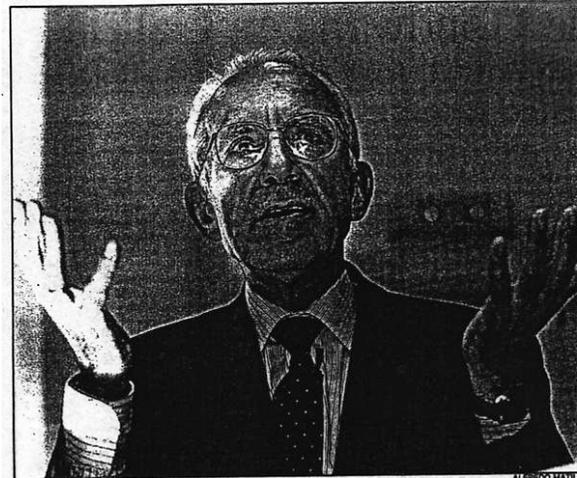
VENTAJAS DEL COMPORTAMIENTO CAÓTICO

Los sistemas caóticos presentan ventajas evolutivas al ser sistemas versátiles, con capacidad de sincronización y de control.

Patrones de actividad variables frente a acciones externas de un entorno cambiante representan importantes ventajas desde un punto de vista evolutivo

Sus interesantes propiedades hace de los sistemas caóticos buenos candidatos para entender comportamientos complejos en los seres vivos, tales como las propiedades emergentes.

FUTURO



George Contopoulos, durante su conferencia pronunciada en Madrid.

GEORGE CONTOPOULOS ► ASTROFÍSICO

“El caos se necesita tanto como el orden”

MÓNICA SALOMONE, Madrid

Si una estrella de órbita conocida deambulara por las inmediaciones de dos agujeros negros, ¿sería posible predecir por cuál de ellos sería engullida? No. Unas veces la estrella caería en uno, otras en el otro y tal vez hasta se librara de ese destino fatal siguiendo de largo; no se puede saber qué pasaría porque la trayectoria de un astro en esas condiciones se vuelve caótica. El astrofísico griego de 69 años George Contopoulos utiliza este problema —al que se enfrentó en su día animado por el Nobel de Física Chandrasekhar— para ilustrar el papel del caos en el universo: “Se necesita tanto como el orden. Es clave para que las galaxias adquieran su forma, para la vida y hasta para el funcionamiento del cuerpo humano”, dijo en la conferencia *Orden y caos* que pronunció recientemente en Madrid, organizada por la Fundación BBV.

Contopoulos, ex director del Observatorio Nacional de Grecia y miembro de la Academia de Atenas, ha sido profesor en numerosas universidades estadounidenses, y ahora, ya retirado, sigue siendo en la Universidad de Atenas. Cuando empezó su carrera no se había lanzado aún ningún satélite artificial, pero para él estaba claro desde entonces que un instrumento como el telescopio espacial *Hubble* acabaría existiendo antes o después: “Era el paso lógico, como ahora debería serlo el instalar un telescopio en el lugar ideal para la observación, que es la Luna”.

Este astrofísico ha estudiado a lo largo de su carrera, y ha escrito al respecto varios libros, cómo se forman las galaxias, por qué acaban siendo esféricas o espirales y cómo se mueve la

materia que las forma, pero en los últimos años su interés se ha vuelto hacia la cosmología y el análisis de los fenómenos caóticos.

La teoría del caos, afirma, “está hoy bien consolidada y es muy útil para la astrofísica. Sus inicios son de hace un siglo, pero las grandes computadoras actuales son las que han permitido que progrese”. Lo primero que explica Contopoulos es que el caos no es, ni mucho menos, puro desorden: “No tiene nada que ver con la aleatoriedad. Aparece en sistemas regidos por leyes naturales estrictas cuando tales sistemas son inestables”.

Inestables quiere decir que sólo una variación minúscula en las condiciones iniciales de esos sistemas acabaría provocando alteraciones tan grandes que sería imposible predecirlas.

Así ocurre, por ejemplo, con la órbita “ligeramente caótica” del planeta Mercurio, el más cercano al Sol: “Ahora se sabe que ese comportamiento caótico lo llevará probablemente a caer sobre el Sol o a escaparse del sistema solar dentro de unos 3.500 millones de años”, explica Contopoulos. Y en el caso de un objeto girando alrededor de dos agujeros negros fijos, afirma este astrofísico, pasa algo similar: una desviación pequeñísima basta para cambiar la órbita, con lo que es imposible predecir el destino del objeto.

— El cuerpo humano también está lleno de ejemplos con los

que explicar la utilidad del caos. Si el corazón latiera con la exactitud de un cronómetro suizo, dice Contopoulos, no podría afrontar sustos, ni físicos ni emocionales; “un corazón con un ritmo muy regular sería incapaz de ajustarse a los cambios. Sería muy peligroso para la persona”.

— O los pulmones: gracias a que su forma interior es un fractal —figuras matemáticas construidas a partir de una misma estructura original que se repite—, “su superficie interna es mil veces mayor que la del pecho, y permite que mucha más sangre entre en contacto con el oxígeno”.

Y Contopoulos aplica el caos además a la cosmología. El, convencido de que “la teoría de la gran explosión, como marco general, está bien consolidada por las observaciones”, trabaja en un “modelo especial del universo” llamado “universo caótico”. “En la mayoría de los modelos de universo existe una expansión uniforme en todas direcciones. Cualquier desviación de esta ley es pequeña. Pero al comienzo del universo puede que las desviaciones fueran relativamente importantes”.

Según esta hipótesis, “no aceptada de forma general”, reconoce, en las primeras fracciones del primer segundo de vida del universo, antes de que iniciara el proceso de expansión que hoy se constata, pudo haber expansión y contracción de modo simultáneo.

“Ahora sería lógico instalar un telescopio en el lugar ideal para la observación, que es la Luna”

Raffin
boshaj
[El Señor]



t, aber
lévolo]

El sentido común no es más
que un depósito de prejuicios es-
tablecidos en la mente antes de
cumplir los dieciocho años.

A. Einstein

La naturaleza no es complaciente.

C. Sagan

CAOS DETERMINISTA

FIN