Curvas con historia:

de las cónicas a las ecuaciones de las flores

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí
http://platea.cnice.mecd.es/~aperez4

Esta no va a ser una conferencia al uso. Más bien pretendo realizar una excursión audiovisual a un mundo un poco olvidado en las clases de matemáticas de todos los niveles: el mundo de las curvas.

Quiero empezar esta excursión por la historia de estos objetos matemáticos, esta especie de viaje guiado, trayendo unas palabras de nuestro querido Miguel de Guzmán, dirigidas sobre todo a los profesores que hoy nos acompañan:

> **"Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante.**
>
> *Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano"*

Matemáticas y Naturaleza

La historia de las curvas es uno de esos hechos matemáticos que dan material para más de una novela, aunque hoy sólo construiremos un relato breve. Y para empezar quiero invocar la autoridad que sobre estos objetos matemáticos nos aportan dos grandes genios:

"El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos solo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto"

Galileo Galilei

"La mente humana, previa y libremente, tiene que construir formas antes de encontrarlas en las cosas"

Albert Einstein

Aunque a un nivel más doméstico pero también más poético quizás sea más conveniente esta cita de un profesor asturiano:

"Las curvas son los paréntesis de las ideas"

José Manuel Álvarez Pérez

A pesar de estar el universo físico que nos rodea lleno de curvas, sin embrago en nuestras aulas sucede algo muy extraño:

- El mundo casi siempre es un PLANO, cartesiano… además
- El espacio tridimensional sólo llegará en 2° de bachillerato y únicamente para los alumnos de ciencias…
- Las líneas siempre son rectas, las figuras polígonos (regulares a ser posible) y los cuerpos prismas, cilindros, pirámides o conos… los más improbables

Coged un coche y salid de la ciudad y parad en una zona no habitada... buscad allí una recta, una superficie plana, un polígono regular o uno de los sólidos citados... realmente os va a resultar difícil encontrarlos. Porque en el mundo real...

¿Existen las rectas?, ¿de verdad hay superficies totalmente planas?, ¿el Universo es plano?, ¿tiene ecuación esta flor?

La Naturaleza es poco pródiga a la hora de mostrar rectas, planos y cuerpos regulares, sin embrago nos ofrece un amplio muestrario de toda clase de curvas: círculos, espirales, elipses, parábolas, hipérbolas, catenarias, braquistócrona. cardiodes, cicloides, concoides...

De todas ellas, con mayor o menor detalle nos ocuparemos un poco más adelante.

Pero como en toda buena novela, hay que empezar por el principio.

Y en el principio fueron *los puntos, las rectas, los ángulos y los círculos…*La Geometría de los Elementos de Euclides.

Es curioso que en los Elementos no aparezca ni una sola curva distinta de los círculos.

Pero también en el principio, incluso antes de Euclides, había dos problemas clásicos, que sorprendentemente tiene mucho que ver con esta historia de curvas:

- La duplicación del cubo; el mandato del oráculo de Delos, para acabar con la peste en Atenas: Construir en el templo de Apolo un altar semejante al existente pero que fuese el doble de grande…El altar tenía forma cúbica
- La trisección de un ángulo cualquiera utilizando sólo regla y compás.

Platón. Las sombras en la caverna

Aunque Platón es un heredero de las matemáticas pitagóricas su concepción filosófica global afecta al papel reservado a las matemáticas en su relación con la naturaleza:

- Las matemáticas constituyen un universo de ideas independientes del mundo de los fenómenos.
- Forman un lenguaje intermedio que permite a partir de lo sensible apuntar al mundo de las ideas.

Platón considera a las matemáticas como «*ciencia liberal y desinteresada*», independiza las matemáticas del pragmatismo empírico y de la utilidad inmediata, liberándola intelectualmente de instrumentos materiales, *porque «tienen la misión pedagógica de formar mentes bien hechas, cumpliendo con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía*» (Platón).

“La esfera y el círculo, las formas geométricas perfectas, la armonía de la lira, las matemáticas y la música de la mano en la primera victoria del orden sobre el caos.
Platón el famoso filósofo griego fue más allá, llegando a afirmar que Dios, el creador del Universo, utiliza siempre procedimientos geométricos.
Convencido de la actuación de Dios como un geómetra, Platón en su diálogo Timeo, asocia cada principio elemental con uno de los poliedros regulares, los sólidos platónicos:
El fuego, el elemento más ligero, es el tetraedro, formado por cuatro triángulos equiláteros, el sólido regular más sencillo.
El aire, el segundo elemento se compone de ocho triángulos unidos entre sí: el octaedro.
El agua nacería de la unión de veinte triángulos equiláteros. Sería el icosaedro.
La Tierra el elemento más pesado lo formaría la reunión de seis cuadrados, un cubo.
Y termina Platón diciendo:
"puesto que todavía había una quinta composición, el dios la utilizó para el universo cuando lo pintó"

Esa quinta composición es el dodecaedro, un sólido regular formado por 12 pentágonos. ¿Cómo poder sustraerse a la increíble belleza de un modelo geométrico tan armonioso como suprema expresión del orden en el Universo?"

Vídeo: **Orden y Caos: la búsqueda de un sueño.**
Serie: Universo Matemático. TV2. 2000
Autor: Antonio Pérez Sanz

Platón, en efecto es el autor de una de las primeras tentativas de buscar un modelo geométrico para explicar la estructura del Universo. Y si los pitagóricos habían colocado en el principio de todo el número como principio de todo lo tangible, Platón va a colocar al triángulo y los cinco sólidos platónicos en el modelo cosmológico más poético de la historia de la ciencia.

Aristóteles. El reino de las esferas y los círculos

Para Aristóteles, un poco más realista, el objeto de las matemáticas son las formas extraídas de la naturaleza, es la modelización de las regularidades empíricas que se producen en la realidad. Esta visión va a dominar la historia de las matemáticas hasta bien entrado el siglo XX.

Desde entonces, y tras la aparición de los Elementos de Euclides, los puntos, las rectas, los ángulos, los círculos y las esferas... las formas perfectas, los poliedros regulares van a constituirse en las armas casi exclusivas para interpretar la Naturaleza. Las formas imperfectas, las curvas extrañas, los polígonos no regulares, los sólidos distintos de los conos, los cilindros y las esferas...quedan expulsados del universo matemático. Sólo Arquímedes y algún otro contestatario se preocupará de mirar con ojos matemáticos esas otras formas que se rebelan contra Platón y Aristóteles.

"Desde Platón la historia de la Ciencia será la búsqueda de ese modelo geométrico, de esas leyes que controlan el funcionamiento del Cosmos, la búsqueda de ese orden inmutable capaz de explicar todos los fenómenos naturales. La comprensión y el dominio de la Naturaleza al alcance del ser humano. Aristóteles situará la Tierra en el centro del Universo y el frente de batalla entre el orden y el caos en la esfera de la órbita lunar. Por encima de ella el mundo celeste, perfecto inmutable y perpetuo, el reino del orden.
Por debajo el mundo terrestre, constituido por los cuatro elementos Tierra, Agua, Aire y Fuego intercambiándose entre sí; un mundo imperfecto, cambiante e impredecible. El reino del caos.
Pero algo viene a romper esa armonía perfecta del mundo ideal por encima de la Luna. Los planetas conocidos describen órbitas erráticas sobre el fondo de estrellas fijas. De hecho el término planeta significa "errático" o viajero. A veces, incluso parecen retroceder en sus órbitas.
¿Cómo encajar estos hechos con un modelo geométrico ideal? Aristóteles recurre a un modelo físico basado en esferas de éter en las que se mueven los planetas. Estas esferas se van acelerando y frenando unas con otras. El complejo mecanismo necesitaría de 56 esferas distintas para poder explicar los movimientos aparentes de los planetas."

Vídeo: Orden y Caos: la búsqueda de un sueño.
Serie: Universo Matemático. TV2. 2000
Autor: Antonio Pérez Sanz

Ptolomeo. Círculos y más círculos

Por desgracia para la Ciencia este modelo, basado en la esfera y el círculo, permanecerá intocable durante dos mil años.
Los matemáticos y astrónomos tendrán que crear auténticas filigranas matemáticas para hacer encajar las observaciones del movimiento de los astros con el modelo aristotélico.

Y al frente de esta tarea monumental se coloca Claudio Ptolomeo en el siglo II d. de C. Su obra "Síntesis Matemática" pasará a la historia con el nombre de la traducción árabe: EL Almagesto, que significa "el muy grande".

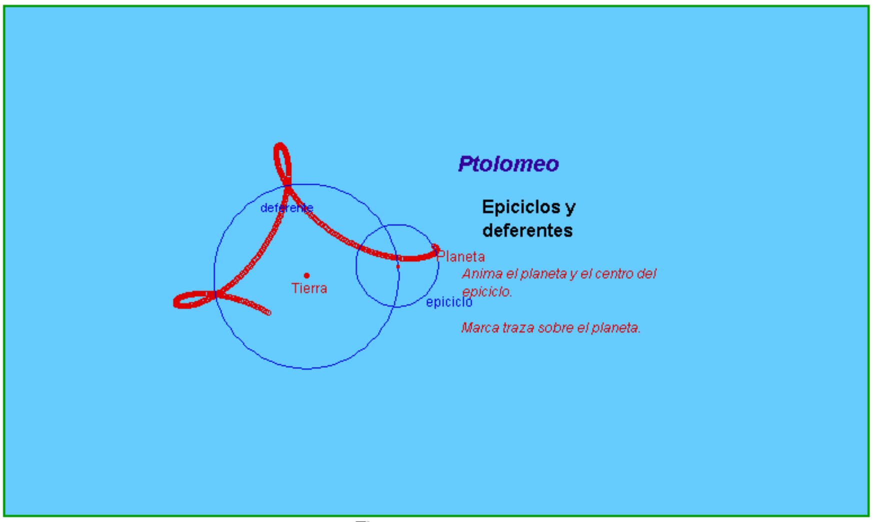
Para explicar el movimiento de los planetas respetando la idea de que sólo se pueden mover en órbitas circulares Ptolomeo va a inventar un ingenioso modelo geométrico: loe epiciclos y los deferentes.

A cada planeta, incluidos el Sol y la Luna, les asigna un círculo imaginario llamado deferente. La Tierra está en interior de este círculo, aunque no necesariamente en el centro. El planeta girará en un nuevo círculo llamado epiciclo cuyo centro será un punto del círculo deferente. A moverse el centro del epiciclo a lo largo de la deferente, al planeta se acerca o se aleja de la Tierra lo que explicaba a la perfección los cambios de brillo de un mismo planeta observados en distintos momentos del año. Ptolomeo pensaba que en realidad los planetas no se movían así, pero su modelo geométrico explicaba a la perfección lo que cualquier astrónomo veía en el cielo.

Los astrónomos que vinieron tras él tomaron su modelo como un dogma y aplicaron penosos cálculos matemáticos para realizar tablas que predijesen la posición de todos los planetas conocidos. Uno de las más completas fueron las del rey castellano Alfonso X el sabio. Las famosas tablas alfonsíes. Su elaboración era tan compleja que le hicieron exclamar al sensato rey Alfonso: *"Si el Señor Todopoderoso me hubiera consultado antes de embarcarse en la Creación, le habría recomendado algo más simple".*

Aunque hoy nos parezca ingenuo el modelo geométrico de Ptolomeo, desde un punto de vista exclusivamente matemático resulta de una riqueza increíble. La idea de hacer rodar círculos sobre círculos, nos abre las puertas a un sugerente mundo de curvas mecánicas generadas mediante el movimiento uniforme y que nos introduce en un paraíso de curvas. Astroides, cardiodes... y hasta elipses. Sí, aunque parezca increíble los epiciclos y deferentes de Ptolomeo pueden generar órbitas elípticas.

La herencia aristotélico-ptolemaica ha llegado aunque con ciertas modificaciones impuestas por la tenacidad de los hechos en la historia, hasta nuestras aulas actuales de matemáticas, sobre todo en secundaria, donde un estudiante puede acabar el bachillerato sin conocer más curvas que los círculos y las cónicas.



Astroide. Animación generada con Cabriweb

El Renacimiento

El modelo matemático de Ptolomeo es demasiado complejo y poco útil a la hora de hacer predicciones a largo plazo. Copérnico pone en marcha un nuevo modelo matemático que mejora las predicciones y sobre todo que es más sencillo a la hora de calcular. Coloca al sol en el centro del sistema y hace girar a todos los planetas a su alrededor. No abandona las órbitas circulares ni los epiciclos, pero siembra el germen de un cambio de paradigma científico que llegará a la cumbre con Galileo: la experimentación y la observación de la realidad como criterio de validación de la teoría científica.

A finales del siglo XVI, un joven toscano va a hacer temblar los principios de la interpretación del universo físico, tanto por debajo como por encima de la frontera de la esfera lunar: Galileo Galilei.

En el mundo terrestre, intentando descubrir las leyes que rigen el movimiento de los cuerpos. En una época en que las disputas políticas se arreglaban con excesiva frecuencia a cañonazos, nadie se había parado a investigar cuál era la trayectoria real de un proyectil. Galileo descubrirá que cualquier bala de cañón describe un arco de parábola antes de impactar en el blanco. Pero también descubrirá que todos los cuerpos caen al suelo con la misma aceleración.

Galileo será el fundador de una nueva ciencia, la cinemática e intentará explicar todos los movimientos mediante leyes matemáticas. Los ejércitos del orden matemático sitúan el frente de batalla contra el caos en la misma superficie terrestre.

Pero un extraño instrumento inventado por los holandeses va a hacer tambalear toda la doctrina oficial de la Iglesia basada en las ideas aristotélicas: el telescopio. Gracias a él, Galileo va a destrozar una visión del universo que había prevalecido más de dos mil años: el mundo más allá de la Luna no es tan perfecto como decía Aristóteles, la Luna no es una esfera perfecta sino que presenta cráteres como la misma Tierra, Júpiter tiene satélites que orbitan a su alrededor... y hasta el Sol tiene manchas.

Le costaría la vista y casi la vida pero había desterrado la vieja idea de que la Tierra era el centro del universo. Y había conseguido algo mucho más importante: convertir la experimentación en el motor fundamental de la ciencia. La Iglesia le condenó, pero *la Tierra se mueve....*

Kepler, Menecmo, Apolonio. El mundo de las cónicas

Kepler construirá toda su teoría y descubrirá las leyes del movimiento de los planetas basándose en las precisas observaciones de Tycho Brahe. La batalla de Marte, la lucha de los cálculos de Kepler contra las observaciones de Tycho va a suponer la derrota del círculo aristotélico y la victoria de las cónicas de Menecmo y Apolonio. La primera de sus famosas leyes va a traer a la elipse al primer plano de la ciencia:

Primera Ley *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.*

Repasando las excentricidades de las órbitas de los planetas del sistema solar nos sigue pareciendo un milagro que Kepler saliese triunfador de esta batalla. La excentricidad de la órbita de Marte, la mayor, tras la de Mercurio, de los planetas conocidos en la época, no llega a una décima. Ni el ojo del pintor más experto distinguiría una elipse con esa excentricidad de una circunferencia. Pero Kepler era sobre todo tenaz y meticuloso.

Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Plutón
0,206	0,007	0,017	0,093	0,043	0,051	0,046	0,004	0,250

Las cónicas, esas atractivas curvas matemáticas estudiadas por Menecmo y Apolonio hace tantos siglos van a constituir una imprescindible herramienta matemática para explicar el mecanismo celeste. La eficacia de las matemáticas en el primero de los momentos estelares de la historia.

Los albores de estas curvas entroncan directamente con los dioses griegos, al menos con Apolo. Según la historia, aunque un poco adornada de leyenda, una mortífera peste asoló Atenas allá por el año 430 a. de C. Incluso Pericles perdió la vida. Los atenienses se dirigieron al oráculo de Delos para preguntar qué tenían que hacer para acabar con la maldición que amenazaba con acabar con la ciudad. El oráculo les dijo que para contentar a los dioses tenían que duplicar el altar de Apolo, que tenía forma cúbica. Nace así, entre la historia y la leyenda, uno de los tres problemas clásicos: la duplicación del cubo.

Menecmo es uno de los muchos que van a intentar resolver el problema: dado un cubo de arista a, encontrar arista de otro cuyo volumen sea el doble.

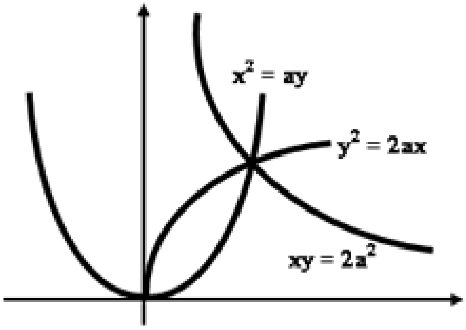
El primero en abordar la cuestión fue Hipócrates de Quíos, quien redujo el problema al de intercalar dos medias geométricas o proporcionales entre la magnitud que representa la arista del cubo primitivo y la correspondiente al doble de la misma.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Encontrar los valores de x e y equivales a resolver este sistema de ecuaciones cuadráticas

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 &= a \cdot y \\ y^2 &= 2a \cdot x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^3 = 2a^3$$

Menecmo se dio cuenta de que geométricamente, el problema consiste en encontrar el punto de corte de dos cónicas, de dos parábolas, como en el caso de arriba, o de una parábola y una hipérbola.

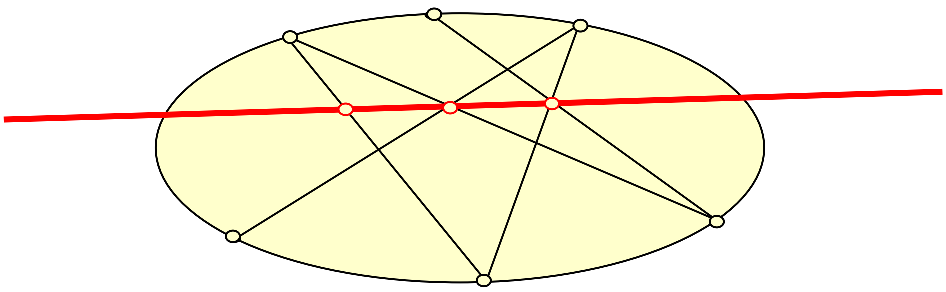


¡Las cónicas hacen su primera aparición en la historia...para resolver el problema de la duplicación del cubo! Por desgracia para Menecmo, encontrar el punto de corte de esas dos cónicas es un problema que no se puede resolver con regla y compás, como demostró en 1837 el francés L. Wantzel.

En el Renacimiento, si la elipse es la curva de Kepler, la parábola será la de Galileo, el padre de la cinemática. Será él quien descubra que cualquier proyectil lanzado al aire describe una trayectoria parabólica. Dos cónicas para explicar los movimientos, tanto de los cuerpos más próximos a nosotros, a la superficie terrestre como los más alejados en el cielo. Newton con su ley de gravitación universal y con la demostración de que toda órbita de un objeto celeste es una de las tres cónicas pondrá la guinda en el pastel de las curvas de Apolonio.

Si Apolonio realizó un estudio exhaustivo de esta familia de curvas, y Galileo, Kepler y Newton las colocaron en el centro de la explicación de los movimientos celestes, un joven Blaise Pascal, va a encontrar uno de los pocos resultados que se le pasaron por alto a Apolonio, en un famoso opúsculo desaparecido, titulado “Sobre las cónicas”

“los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono inscrito en una cónica están en línea recta”



El cálculo diferencial permitió a Newton atacar el estudio y la clasificación de otras curvas de grado mayor que dos. En su *Enumeratio linearum tertti ordinis* de 1676 nos describe hasta 72 curvas de tercer grado, aunque alguna se le escapó.

Arquímedes, Bernoulli. El mundo mágico de las espirales

"La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo, desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso... La vuelta sigue a la vuelta, y toda síntesis es la tesis de la nueva serie..."

Vladimir Nabokov

Ninguna curva ha fascinado tanto al ser humano, desde los tiempos más remotos, como la espiral. Su presencia en los objetos vivos, tanto animales como vegetales, tuvo que llamar la atención de nuestros antepasados desde los albores de la humanidad.

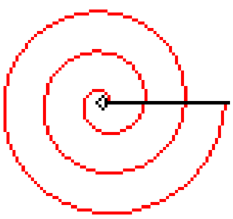
No existe ninguna cultura que no la haya utilizado como elemento simbólico, mágico o simplemente ornamental. La espiral ha acompañado al ser humano en todo tiempo y en todo lugar... salvo en las clases de matemáticas de secundaria y de universidad.

Ante las innumerables manifestaciones naturales de las espirales, tanto de carácter orgánico como mecánico, estas curvas no podían dejar de llamar la atención de los matemáticos y ser objeto de su investigación. Sin embargo, como su propia forma sugiere son curvas esquivas. No son curvas geométricas estáticas como la circunferencia, las cónicas o las lúnulas. Para construirlas se necesitan recursos mecánicos, algo que crece o que se mueve.

Arquímedes. La espiral uniforme $r = a \cdot \theta$

Sin duda, al menos desde un punto de vista matemático, la espiral más simple es aquella en que el radio varía de forma proporcional al ángulo girado. Y a esta es a la que dedicó su atención Arquímedes, a la espiral uniforme, que desde entonces lleva su nombre. La espiral arquimediana.

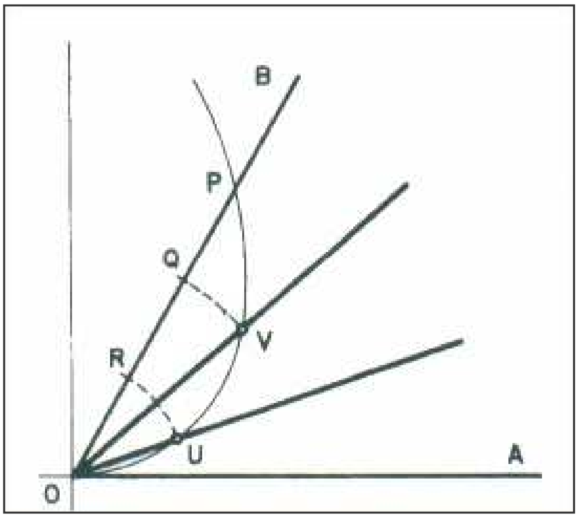
De Arquímedes se conocen dos libros sobre la geometría plana, uno dedicado a la circunferencia, *De la medida del círculo*, donde nos proporciona el salto a la fama del número π y una de sus aproximaciones más usadas hasta nuestros días; y otro dedicado a la espiral uniforme, *De las espirales*. Un libro complicado y de lectura difícil, donde Arquímedes hace un profundo estudio exhaustivo de la espiral uniforme.



En esta obra Arquímedes define, quizás por primera vez en la historia, una curva mecánica, una curva basada en el movimiento.

" Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un

punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral"
El interés del sabio de Siracusa por esta curva estaba motivado por un problema muy alejado del mundo de las curvas: la trisección del ángulo. Arquímedes, gracias a la espiral uniforme, descubrió un método para dividir un ángulo en tres partes iguales, y en general en n partes iguales.



Basta hacer coincidir el vértice del ángulo con el origen de la espiral, dividir el segmento que va desde el origen al punto de corte de la espiral con el segundo lado del ángulo en tres partes iguales y trazar por esos puntos arcos de circunferencia hasta que corten a la espiral.

Si unimos el origen con esos puntos de corte tendremos los tres ángulos que dividen al original en tres partes iguales.

Por desgracia para las matemáticas la espiral uniforme no se puede dibujar con regla y compás.

Sobre las espirales es una obra cargada de sorpresas, que colocan a Arquímedes en la cima de la historia de las matemáticas. En ella demuestra propiedades de las áreas de las diferentes espiras, tan sorprendentes, pensando que faltan casi dos mil años para que se invente el Cálculo diferencial, como estas:

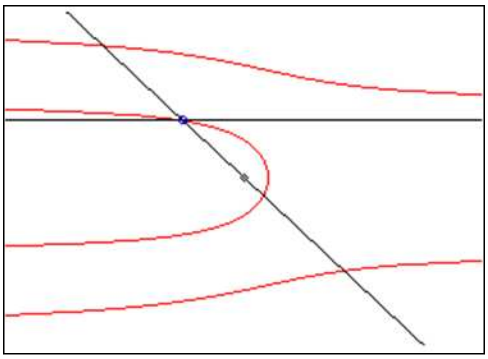
"El área barrida por el radio de la espiral en su primera revolución es la tercera parte del área del círculo cuyo radio es el radio final de esta revolución..."

"El área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta".

"El área barrida en la segunda revolución está en razón 7/12 con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector"

Decididamente, Arquímedes era un genio, uno de los tres grandes de las Matemáticas de todos los tiempos; y sin embargo nuestros jóvenes sólo le recordarán al acabar sus años escolares como el sabio de la bañera, el de ¡Eureka!, o, a lo sumo, como el descubridor de las leyes de la palanca... Injusticias de los planes de estudio de matemáticas.

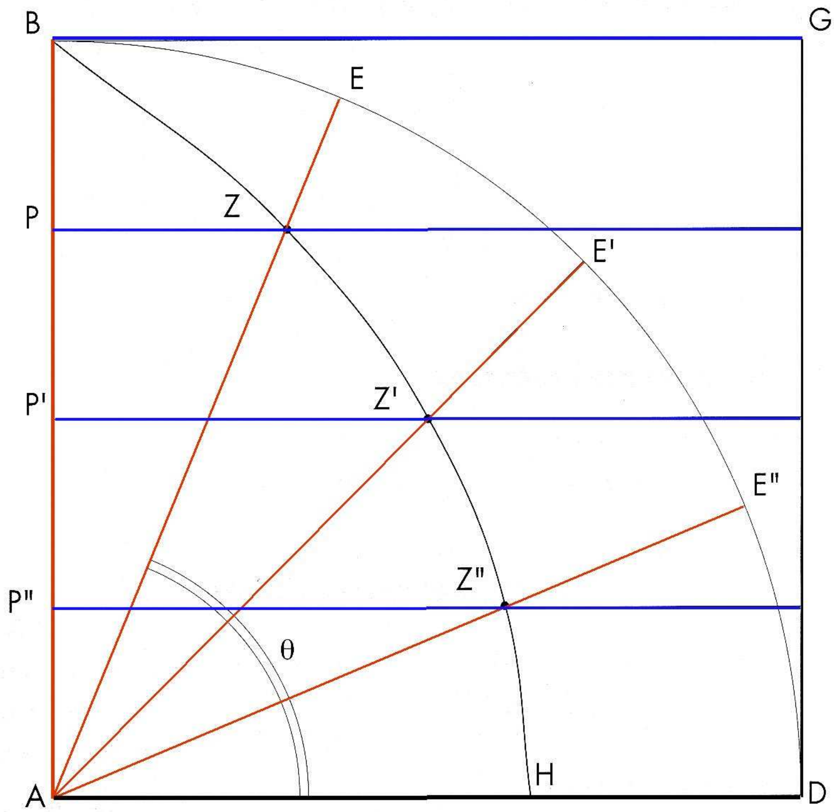
La cuadratriz de Dinóstrato



$$r = \frac{2}{\pi}\frac{t}{\sin t}$$

Aunque hemos dicho que Arquímedes es el primero que define con precisión una curva mecánica, basada en el movimiento de un punto, esto no es del todo cierto. Ni tampoco fue el primero en utilizar curvas extrañas para resolver uno de los tres problemas clásicos. En ambos casos se le adelantaron dos compatriotas, Hipias de Elis y sobre todo, allá por el año 390 a. de C., un hermano de Menecmo, el padre de las cónicas, llamado Dinóstrato, que inventaron una extraña curva generada por el movimiento uniforme de dos rectas, y que también servía para trisecar el ángulo. Desde entonces se la conoce como cuadratiz o trisectriz de Dinóstrato.

La curva se obtiene mediante los puntos de intersección de dos rectas en movimiento, AB y BG. La primera AB, gira con velocidad angular uniforme sobre el punto A hasta llegar a AD, la segunda BG se desplaza horizontalmente, también con velocidad uniforme, y de tal manera que llega a AD al mismo tiempo que la recta AB. Los puntos de intersección de ambas dibujan una curva BZZ´Z´´H que es la trisectriz.



Para trisecar el ángulo T basta marcar el punto Z de corte del lado del ángulo con la curva y trazar una paralela al otro lado AD del ángulo para encontrar el punto P. Si dividimos el segmento AP en tres partes iguales mediante los puntos P´y P´´, los puntos de corte de las paralelas a AD por dichos puntos determinan en la curva los puntos Z´ y Z´´. La rectas que se obtienen al unirlos con A dividen al ángulo en tres partes iguales.

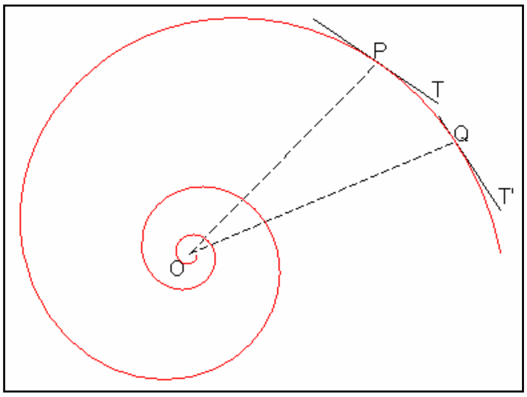
Por desgracia, al igual que ocurre con la espiral de Arquímedes esta curva no se puede trazar utilizando sólo regla y compás.

Jacob Bernoulli. La espiral logarítmica.

$$r = C \cdot e^{k \cdot \theta} \qquad\qquad \theta = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{r}{C}$$

¿Por qué el Nautilus tiene esta extraña y elegante forma?

El origen del estudio de esta espiral tiene que ver con la navegación. A lo largo de los siglos XVI y XVII miles de barcos surcan los océanos. Los navegantes sabían que sobre la superficie terrestre la distancia más corta entre dos puntos es un arco de círculo máximo. Pero para seguir un rumbo que encaje con este arco es necesario realizar continuos cambios de rumbo. Por ello sustituían este rumbo óptimo por otro en el ángulo que formaba la trayectoria del barco con todos los meridianos que atravesaba se mantenía constante. El rumbo se mantenía constante. Los rumbos de este tipo dibujan en la esfera terrestre una curva llamada loxodrómica. Pero los navegantes no trabajaban sobre una esfera, sus mapas eran planos, proyecciones de la esfera. Pues bien la proyección de la esfera sobre un plano convierte a la loxodrómica en una... **espiral equiangular.**



El primero en describirla como una curva mecánica, en contraposición a las curvas algebraicas, es Descartes quién en 1638 escribe al padre Mersenne los resultados de sus investigaciones. Descartes estaba buscando una curva creciente con una propiedad similar a la de la circunferencia, que la tangente en cada punto forme con el radio vector en cada punto siempre el mismo ángulo. De ahí el nombre de equiangular. También demostró que esta condición es equivalente al hecho de que los ángulos alrededor del polo son proporcionales al logaritmo del radio vector. De ahí su segundo nombre: espiral logarítmica.

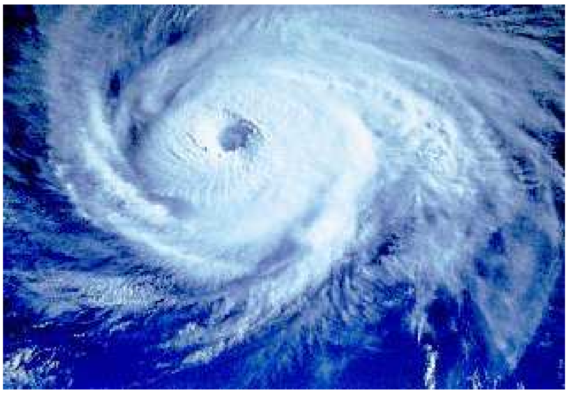
La separación de las espiras aumenta al crecer el ángulo, es decir, el radio vector crece de forma exponencial respecto del ángulo de giro. Por eso recibe un tercer nombre, espiral geométrica.

El padre de esta espiral, con toda justicia, es Jacob Bernoulli, quien realiza un profundo estudio de la misma, quedando cautivado por la curva hasta tal punto de pedir que en su tumba, en el cementerio de Basilea, figurara la inscripción *"Eadem mutata resurgo"* y un grabado en piedra con el dibujo de una espiral logarítmica. El cantero no era un buen matemático pues talló una casi perfecta espiral arquimediana.

Jacob Bernouilli descubrió varias propiedades de esta curva que les pasaron desapercibidas a Descartes y Torricelli, entre ellas el hecho de que la espiral logarítmica es la única curva que verifica que su evoluta, su involuta, su caustica y su podaria son, a su vez, una espiral logarítmica. Jacob Bernouilli había descubierto además otra extraña propiedad, la autosemejanza, que relaciona directamente esta espiral con los objetos fractales.

La espiral logarítmica es sin duda la espiral que más se prodiga en la naturaleza. El reino animal nos proporciona unos ejemplos preciosos en las conchas de los caracoles y los moluscos. Detrás de todas estas formas hay un fenómeno natural: un proceso de enrollamiento vinculado al proceso de crecimiento. De hecho la concha de un caracol no es ni más ni menos que un cono enrollado sobre sí mismo.

El cuerno de un rumiante también, aunque además está retorcido. Y aunque las leyes físicas del crecimiento de especies tan dispares no son las mismas, las leyes matemáticas que lo rigen sí: todas están basadas en la espiral geométrica, la curva de similitud continua. Si nos fijamos bien el crecimiento de las conchas y de los cuernos tiene otra curiosa propiedad se produce sólo por un extremo. Y esta propiedad de crecimiento terminal conservando la figura completa es exclusiva, dentro de las curvas matemáticas, de la espiral equiangular o logarítmica.



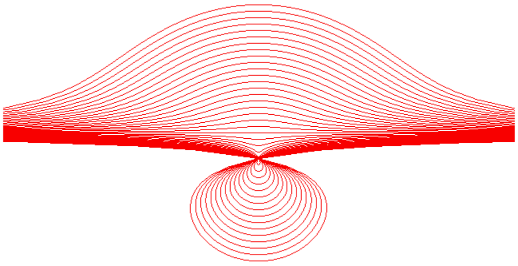
Las galaxias, las borrascas y huracanes nos brindan muestras espectaculares de espirales logarítmicas. Al fin y al cabo en cualquier fenómeno natural donde haya una combinación de expansión o contracción y rotación aparecerá por fuerza esta espiral.

En el mundo vegetal los ejemplos son si cabe más llamativos ya que entre las plantas aparecen un sinfín de espirales y no precisamente de una en una. La distribución de las pipas en cualquier girasol, las escamas de cualquier piña, no importa de qué variedad, una simple margarita... nos ofrecen una auténtico desfile de espirales entrelazadas.

En cualquier piña de los pinos, si la observamos desde arriba, descubriremos que los piñones se distribuyen formando un buen número de espirales. Y no precisamente de forma aleatoria. No es ninguna casualidad. Los piñones han de distribuirse de forma óptima, es decir, aprovechando el espacio al máximo; y esa optimización del espacio se consigue mediante una distribución en espiral.

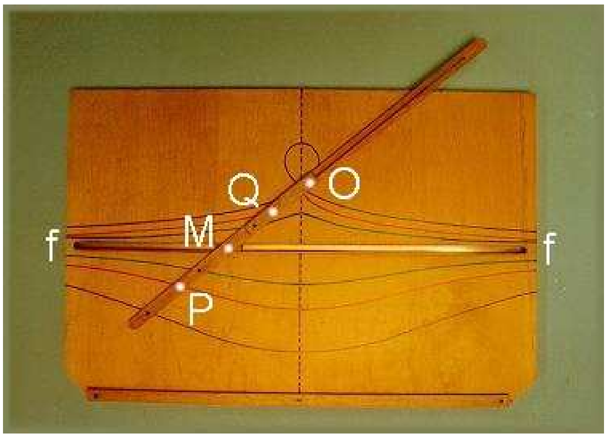
La concoide de Nicomedes

$$\rho = \frac{a}{\cos\theta} + b$$



El nombre de concoide se debe a su parecido con las conchas que tanto abundaban en las playas griegas. Aunque su creador es Nicomedes, un geómetra griego (280 – 210 a. de C.), que la investigó junto a otras 16 curvas matemáticas, esta concoide fue atribuida a Pappus.

También nació con la vocación de resolver los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo y de hecho la curva sirve para trisecar cualquier ángulo.



Su ecuación cartesiana es $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$, es decir una cuártica.

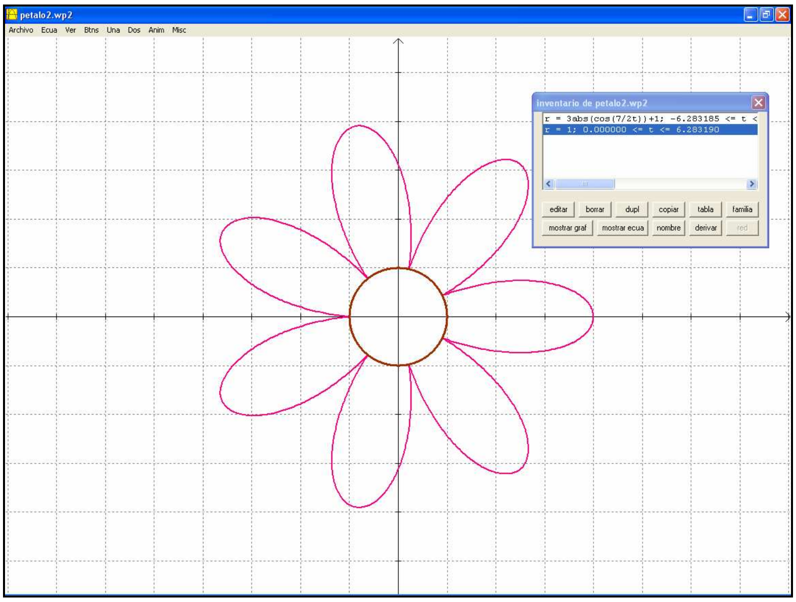
Es el lugar geométrico de los pares de puntos P y Q, situados sobre una recta que pasa por un punto fijo O, el polo, y otro punto M que a su vez se desplaza a lo largo de una recta ff´llamada directriz. La distancia de P a M y de Q a M es una distancia fija. Este método de construcción se lo debemos a Roberval.

Si en lugar de utilizar una recta como directriz usamos una circunferencia obtenemos la curva de Pascal.

La concoide de rosetón. El pétalo geométrico

Alejándonos de las espirales, existe una familia de curvas, investigada en el siglo XVIII por Abbot Guido Grandi, que parece haber nacido para identificarse con algunas de las flores más habituales en el campo o en las floristerías. Se trata de la **concoide de rosetón,** también conocida como **pétalo geométrico**.

Para investigarla utilizaremos una herramienta informática apropiada: un programa informático que vaya más allá de las curvas en coordenadas cartesianas y permita trabajar directamente en coordenadas polares y paramétricas, por ejemplo winplot, software desarrollado por el profesor Richard Parris de la Universidad de Exeter, que se puede obtener de forma gratuita en esta dirección: http://math.exeter.edu/rparris



Ideas para encontrar su ecuación. Necesitamos:

- una forma que rota y se repite periódicamente...
- una curva que se aleja y se acerca al centro...

Solución: ¡¡funciones trigonométricas y coordenadas polares!!

Para interpretar el crecimiento de hojas y flores las coordenadas rectangulares o cartesianas no son las más apropiadas, más bien son completamente inapropiadas. Recurriremos a las coordenadas polares, otro regalo a la historia del genial Euler, en las que las dos variables son el ángulo girado respecto a la horizontal y la distancia al origen.

Estas coordenadas son especialmente aplicables a todos aquellos casos en que dentro de la figura existe algún punto invariante, es decir, algún punto que no sufre ninguna deformación al crecer. En el caso de las plantas suele ser la base de la hoja, el "nodo" alrededor del cual se desarrolla toda la hoja o el centro de simetría circular en el caso de las flores.

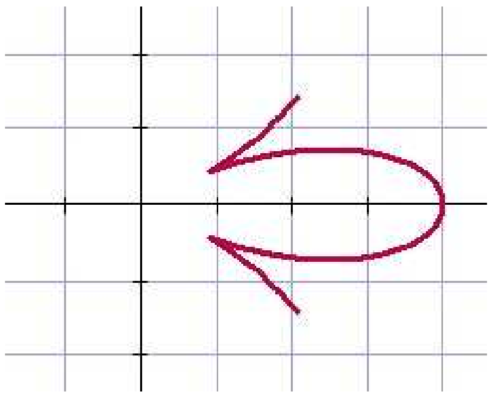
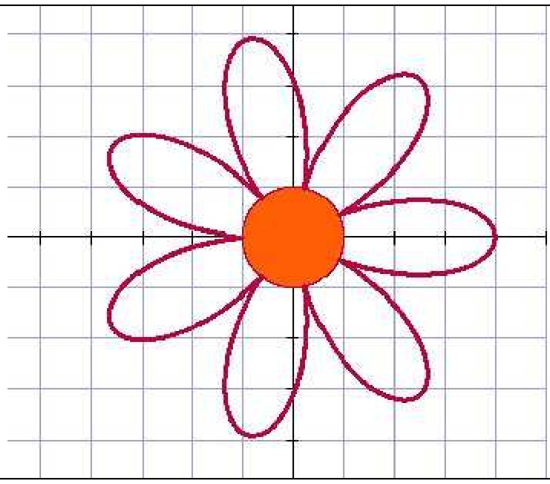
En estas coordenadas, todas las concoides de rosetón o de rosáceas, como dicen los franceses, tienen esta ecuación general

$$\rho = a \cdot \cos n\theta + b$$

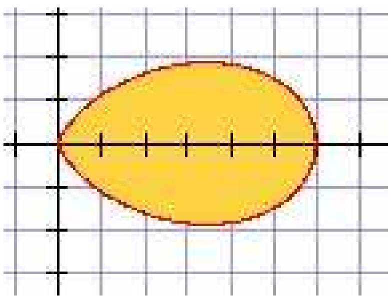
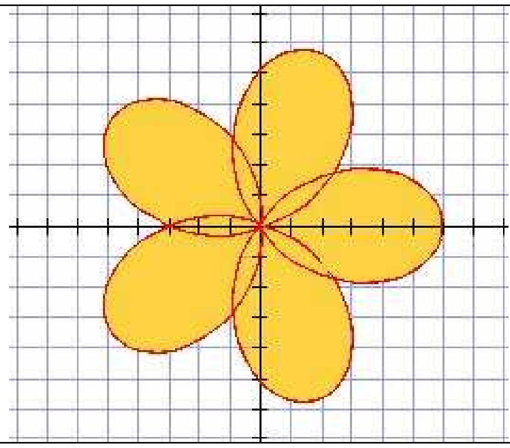
Cada pétalo base es simétrico respecto del eje OX y se obtiene haciendo variar el ángulo θ entre $-\dfrac{\pi}{n} < \theta < \dfrac{\pi}{n}$

Obtener, a partir de esta escasa información, formas aproximadas a las siluetas de algunas de las flores más populares no va a ser muy complicado.

Caso 0 < b < a

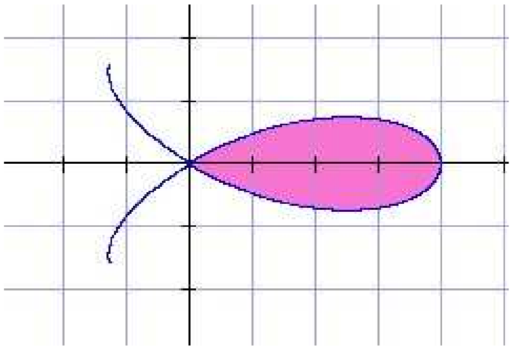
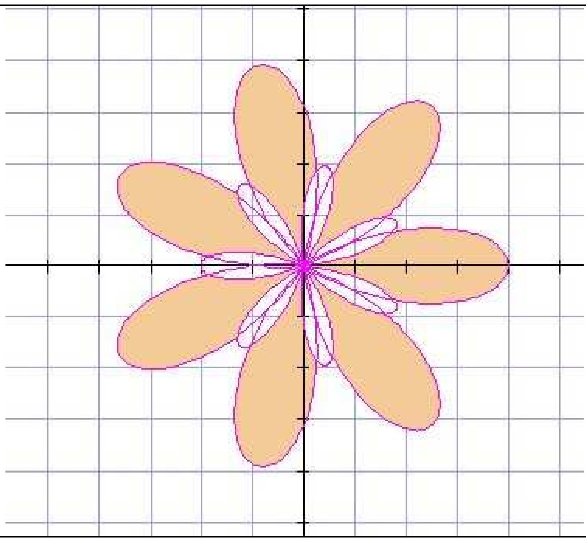
Ejemplo1: Pétalo simple: Caso 0 < b < a n = 7/2	Ecuación $\rho = 3\left\|(\cos\frac{7}{2}\theta)\right\| + 1$
	
$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$	Si hacemos variar $-2\pi < \theta < 2\pi$ obtenemos la flor completa

Caso a = b

Ejemplo1: Pétalo simple: Caso a = b n = 5/2	Ecuación $\rho = 3\cos\frac{5}{2}\theta + 3$
	
$-\frac{\pi}{2.5} < \theta < \frac{\pi}{2.5}$	Si hacemos variar $-4\pi < \theta < 4\pi$ obtenemos la flor completa

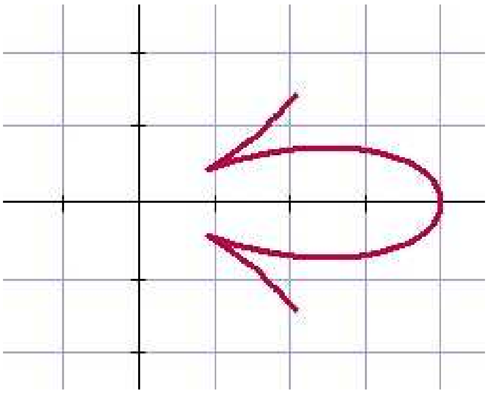
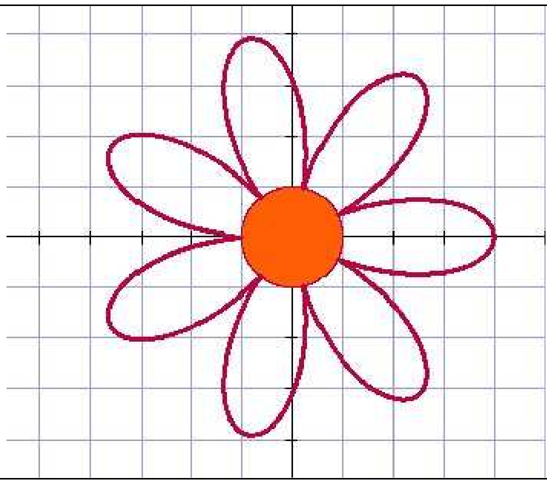
Si lo queremos con un círculo central, algo por otra parte muy frecuente en la naturaleza, basta con tomar el valor absoluto del coseno.

Caso 0 < *b* < *a*

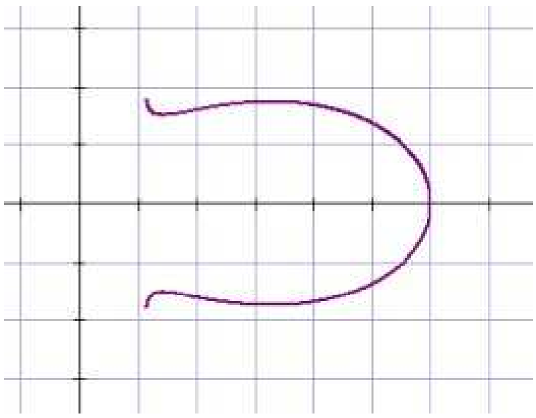
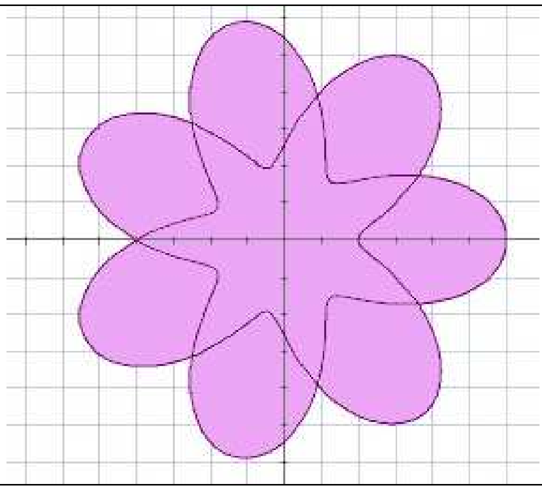
Ejemplo1: Pétalo simple: Caso 0 < b < a n= 7/2	Ecuación $\rho = 3\cos\frac{7}{2}\theta + 1$
	
$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$	Si hacemos variar $-2\pi < \theta < 2\pi$ obtenemos la flor completa

Se puede observar que el factor ***b*** alarga el pétalo mientras que *n* hace aumentar el número de los mismos en cada circunferencia.

Si introducimos al valor absoluto del coseno, nos volvemos a acercar a la realidad

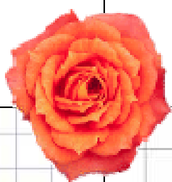
Ejemplo1: Pétalo simple: Caso 0 < b < a n = 7/2	Ecuación $\rho = 3\left|(\cos\frac{7}{2}\theta)\right| + 1$
	
$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$	Si hacemos variar $-2\pi < \theta < 2\pi$ obtenemos la flor completa

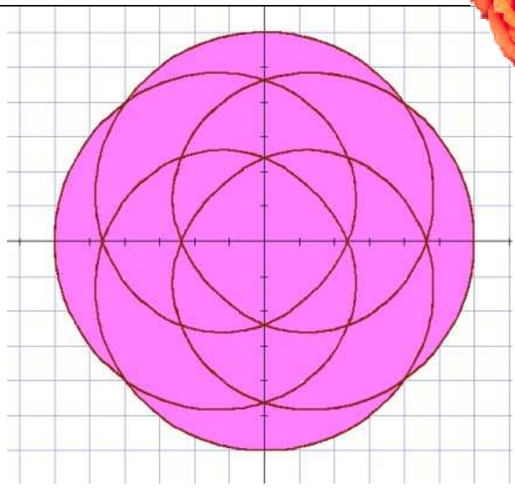
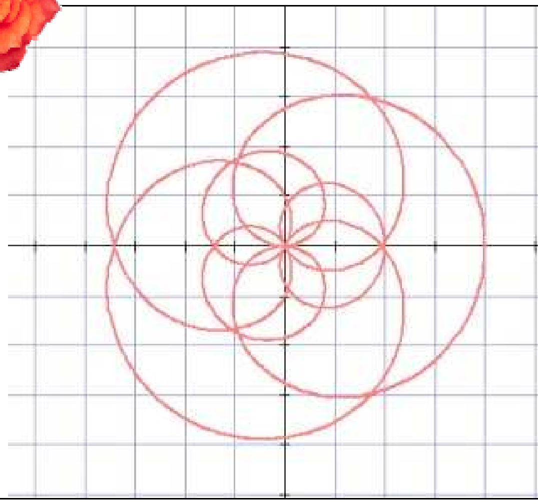
Caso $b > a$

Ejemplo1: Pétalo simple: Caso b > a n= 7/2	Ecuación $\rho = 2\cos\frac{7}{2}\theta + 4$
	
$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$	Si hacemos variar $-2\pi < \theta < 2\pi$ obtenemos la flor completa

El mundo de las rosas: n < 1

Hasta ahora en los tres casos hemos jugado con n mayor que 1. ¿Qué ocurre si n es menor que la unidad?... Nos adentramos en el mundo de las rosas...



Caso b > a Ecuación $\rho = 2\cos\frac{4}{5}\theta + 4$	Caso 0 < b < a Ecuación $\rho = 3\cos\frac{3}{5}\theta + 1$
	

Otras curvas con historia

El nacimiento y posterior desarrollo del cálculo diferencial brindó a los matemáticos del siglo XVIII una potente herramienta para mirar con otros ojos curvas que la naturaleza había puesto ante nuestros ojos y cuyo misterio se escapaba entre los dedos. Los métodos desarrollados en el siglo anterior, fundamentalmente por Descartes y Fermat, permitían el estudio de las curvas algebraicas, esto es aquellas donde la relación entre las variables *x* e *y* se daba mediante un polinomio. Descartes elimina de su *Geometría* toda consideración algebraica de las curvas no algebraicas, que denominó *mecánicas*. Pero el mismo Descartes consideró importante desarrollar técnicas no algebraicas para el estudio de las curvas mecánicas. De esta manera se imponía la necesidad de poseer una forma más general de estudiar las curvas, cualquiera que fuese su clasificación.

La cardiode $\rho = a(1+\cos\theta) = 2a\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

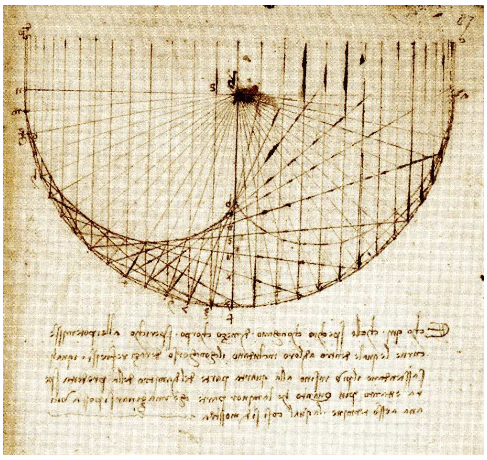
Su ecuación $\rho = a(1+\cos\theta)$ no deja de ser un caso muy especial de la concoide de rosetón en el caso en que *a=b* y *n=1*

Aunque en apariencia poco parecida con las rosas, existe otra curva que vemos todos los días en nuestros vasos cuando nos tomamos el café o la leche bajo una lámpara en cualquier cafetería. Se trata de la cardiode, esa curva que se forma en el vaso o la taza al reflejarse la luz de la lámpara del techo, una curva con forma de corazón.

El nombre se lo debemos a Francesco de Castillon que la denominó de esta forma en un trabajo titulado *De curva cardiode* en 1741, aunque previamente ya había sido estudiada antes por astrónomos y matemáticos.

Es también una epicicloide y se puede obtener al hacer girar un círculo sobre otro del mismo radio con velocidad uniforme

Como caústica del círculo ya fue estudiada por Leonardo Da Vinci en su código Arundel, fechado entre 1510 y 1515, en un intento de emular a Arquímedes en la construcción de espejos ustorios.

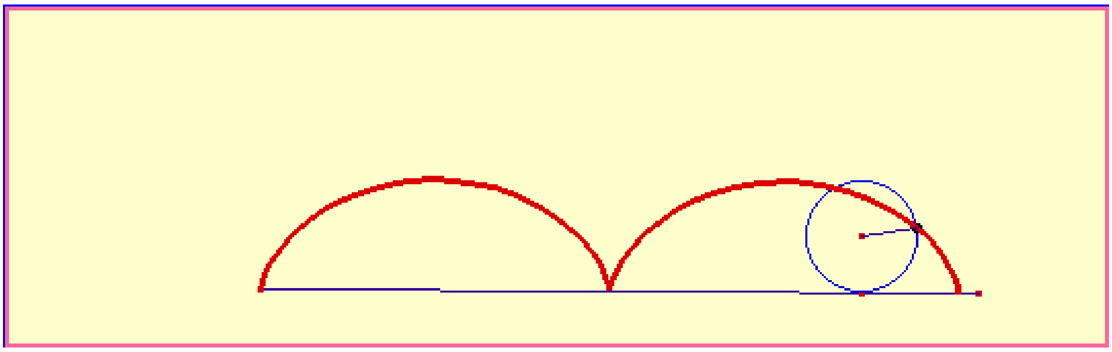


Galileo y la cicloide

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) = 2R\sin^2 \dfrac{t}{2} \end{cases}$$

Entre las curvas mecánicas que más atrajeron la atención de los matemáticos se encuentra la cicloide, que fue introducida con el fin de cuadrar el círculo mediante el uso de la integración.

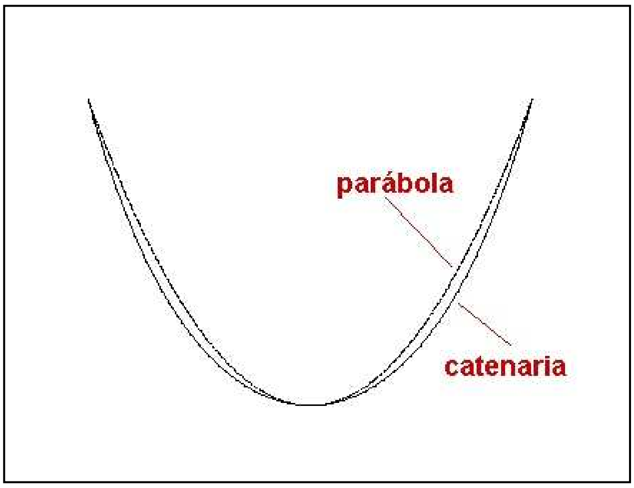
Galileo fue uno de los primeros en estudiar las propiedades de esta curva, a la que dice haber dedicado más de cuarenta años. Se planteó el problema de comparar el área bajo un arco de cicloide con el área del círculo que la genera. Como no consiguió resolver el problema mediante métodos matemáticos, recurrió a recortar y pesar piezas de metal con la forma de la cicloide. De esta manera encontró que la relación entre el área bajo un arco de cicloide y la del círculo que la genera es aproximadamente de 3 a 1, pero decidió que no debía ser exactamente 3, ya que intuía (erróneamente) que debía ser no racional.



Como veremos más adelante la cicloide es una auténtica caja de sorpresas.

El reto de Jacob Bernoulli. La catenaria

En 1690, Jacob Bernoulli publicó un artículo en las *Acta Eruditorum* de Leibniz en el que se utiliza por primera vez el término Integral. Al final del artículo y para demostrar la potencia del nuevo cálculo Jacob lanza un reto a la comunidad matemática de la época. Descubrir la ecuación de la curva que se forma al suspender de dos puntos una cuerda de peso uniforme: la catenaria.



Galileo ya había abordado el problema cometiendo de nuevo un error, al concluir que se trataba de una arco de parábola. Huygens demostraría más tarde que no se trataba de una parábola pero no pudo decidir de qué curva se trataba. Precisamente el nombre de catenaria se debe a Huygens

Lanzado el reto, Jacob obtuvo tres respuestas: de Huygens, de Leibniz y de su hermano Johann.

La respuesta es esta ecuación diferencial:

$$dx = \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$$

La respuesta en forma de ecuación integral es: $x = \int \frac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$

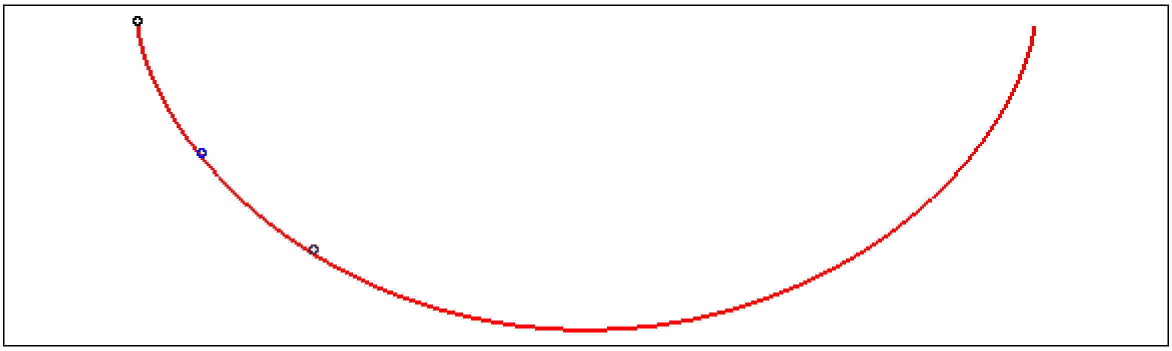
Hoy, la ecuación de la catenaria está incorporada en las calculadoras científicas de todos los alumnos de secundaria y corresponde a la función coseno hiperbólico:

$$y = a\cosh\frac{x}{a} = a\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

Por desgracia para los Bernoulli, Leibniz y Huygens la función exponencial aún no se había descubierto.

Tautócrona y Braquistócrona. El desafío de Johann Bernoulli

La búsqueda del mejor de los péndulos posibles para la construcción de relojes precisos había puesto de moda a principios del siglo XVIII las curvas relacionadas con los tiempos de caída de cuerpos siguiendo trayectorias con condiciones determinadas. Así se estudia la tautócrona, curva cuyo perfil hace que un cuerpo tarde desde cualquier punto el mismo tiempo en llegar al punto más bajo.



Pero sin duda la curva estrella será la braquistócrona, la curva que une dos puntos A y B de tal forma que un cuerpo que cae por ella tarda el mínimo tiempo posible. Johann Bernoulli propuso el problema de la braquistócrona en junio de 1696 y retó a la comunidad matemática a resolverlo antes del fin del año, añadiendo con sarcasmo que “la curva era una bien conocida de los matemáticos”.

En la actualidad es la curva que se utiliza en los toboganes de patinaje para conseguir llegar abajo en el menor tiempo.

El año siguiente aparecieron en total cinco soluciones: además de Johann Bernoulli, resolvieron el problema Leibniz, Jacob Bernoulli, L'Hôpital y un autor inglés anónimo. Johann no tuvo dificultad en reconocer que el autor era Isaac Newton y lo expresó con una frase histórica: *“Por las garras se conoce al león”*.

La ecuación diferencial no era nada elemental $\frac{ds}{dx} = \frac{C}{\sqrt{|y|}}$

Pero Johann lo había avisado la lanzar su reto. Era una curva muy conocida por los matemáticos, efectivamente se trata de un arco de cicloide, una curva conocida desde hacía más de un siglo.

El pasado reciente, el futuro inmediato. Fractales y Caos

Todo parece indicar que el estudio de las curvas de la Naturaleza es cosa del pasado. Sin embargo hace unos meses el físico-matemático Antonio Brú sorprendió a la clase médica y a los propios matemáticos con un descubrimiento que le mereció las primeras páginas de la prensa nacional: su equipo había descubierto un tratamiento eficaz para determinados casos de cáncer de hígado partiendo del estudio del perfil del tumor. Es decir, estudiando mediante ecuaciones su silueta. La frontera era una curva fractal.

En 1960 Edward Lorentz desarrolló un modelo matemático para realizar previsiones del tiempo. Este modelo era bastante simple y contemplaba sólo tres variables que rigen el movimiento de convección, relacionadas entre sí mediante tres ecuaciones diferenciales hoy muy populares.

Lorentz puso a trabajar su ordenador, cada minuto simulaba el paso de un día. Con sorpresa comprobó que una diferencia de menos de una milésima en una de las variables, al cabo de pocos minutos (unos días simulados) producía un estado climático totalmente distinto.
Había descubierto la segunda gran característica de los fenómenos caóticos: Una pequeña variación de las condiciones iniciales produce grandes cambios en el sistema a lo largo del tiempo. Es lo que se conoce como efecto mariposa. El batir de las alas de una mariposa en una selva africana puede producir dentro de unos meses un huracán en el Pacífico.
La primera característica del caos es por supuesto que el sistema es impredecible a largo plazo.
Pero incluso en los fenómenos caóticos aparecen ciertas regularidades, un cierto orden.

Estaba naciendo la Teoría del Caos. Y enseguida una matemática capaz de buscar el orden dentro del caos: la geometría fractal, las matemáticas de las curvas fractales. Incluso en aquellas regiones de la naturaleza lejos de las cómodas regularidades de las ecuaciones diferenciales las matemáticas se revelan como la herramienta imprescindible para interpretar la naturaleza. Y por supuesto siguen manifestando de manera rotunda su increíble eficacia.

Estaban naciendo otras curvas que tanto nos han sorprendido por su extraña e impactante apariencia y que, gracias a su tratamiento informático, hacen que Matemáticas y Arte se den la mano otra vez y de una forma sorprendente.

Otra vez Matemáticas y belleza viajando juntas por la historia; pues como dijo Hardy:

La belleza es la piedra de toque; en el mundo no hay un lugar permanente para unas matemáticas desagradables desde el punto de vista estético.

Bibliografía

Álvarez Pérez J.M. ***Curvas en la historia***. Ed. Nivola.2006

Aranda D. y Fuente M. Matemáticas. ***Naturaleza y Arte***. Junta de Andalucía. Córdoba 2001

D´Arcy Thompson. ***Sobre el crecimiento y la forma***. H. Blume Ed. Madrid 1980

Hildebrandt S, Tromba A. ***Matemáticas y formas óptimas***. Prensa Científica. Barcelona 1990

Mandelbrot B. ***La Geometría fractal de la naturaleza***. Tusquets. Barcelona 1977

Martín M, Morán M, Reyes M. ***Iniciación al caos***. Ed. Síntesis. Madrid. 1995

Pérez Sanz, A. ***Las ecuaciones de las flores***. Revista SIGMA. Bilbao. 2005.

Pérez Sanz, A. ***El vídeo: un recurso para ver las matemáticas de la Naturaleza***. El lenguaje de las matemáticas en sus aplicaciones. MECD. Madrid 2002

Río Sánchez, J. del. ***Lugares geométricos. Cónicas***. Ed. Síntesis. Madrid 1991

Sánchez C y Valdés C. ***Los Bernoulli. Geómetras y viajeros***. Ed. Nivola. Madrid 2002

Torija. R. ***Arquímedes. Alrededor del círculo***. Ed. Nivola. Madrid 1999

Direcciones de Internet

http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2dsp.shtml

http://math.exeter.edu/rparris

Vídeos

Serie Universo Matemático. RTVE

Pitágoras. Mucho más que un teorema
Historias de pi
Orden y caos. La búsqueda de un sueño

Serie Más por menos. RTVE

El mundo de las espirales
Cónicas: del baloncesto a los cometas
Fractales. La geometría del caos

Universo mecánico. Annenberg TV

Las Leyes de Kepler

Antonio Pérez Sanz

IES Salvador Dalí. Madrid

http://platea.pntic.mec.es/~aperez4