

Talleres de Matemáticas  
2005-2006  
**Dimensiones Fractales**

**J. Güémez**  
Dpto. Física Aplicada  
Universidad de Cantabria

Diciembre 12, 2005

En último cuarto del siglo XX se ha desarrollado un nuevo punto de vista sobre la descripción de la naturaleza: la geometría fractal [1, 2]. Los objetos naturales son más complejos que las formas de la geometría euclidiana. Objetos vegetales como las coliflores presentan espirales a muy distintas escalas, con partes de la planta presentando el mismo aspecto que su totalidad [3], una propiedad denominada *autosemejanza* por Benoit Mandelbrot. Los ríos, con sus meandros y sus deltas, no son simples líneas y observados en detalle presentan también el fenómeno de la autosemejanza, pudiendo llegar a medir longitudes mucho mayores que las que aparecen en los mapas [4].

Algunas de las características de autosemejanza de los objetos naturales pueden ser cuantificadas con un sólo número mediante la medida de la *dimensión fractal* del objeto en cuestión [5, 6].

Para este Taller de Matemáticas se han elegido dos actividades prácticas para la medida de dimensiones fractales: (1) medir cómo varían los diámetros de unas bolas –esferas– obtenidas (i) arrugando hojas de papel de diferentes superficies, (ii) hojas de papel de aluminio [8, 9] y, (2) observar cómo varía el peso de la concha marina de los moluscos (i) *Cerastoderma glaucum* y (ii) *Acanthocardia tuberculata*, con su dimensión lineal característica [10].

## **Diámetros de bolas de papel arrugado**

Se toman hojas de papel de dimensiones  $l_1 \times l_2$ , se arrugan hasta formar una bola –procurando hacerlo siempre de la misma manera– y se mide el diámetro de la bola esférica resultante. En la Tab. 1 se muestran los resultados obtenidos para dos series de experimentos de este tipo, uno con hojas de papel normal y otro con papel de aluminio.



Figura 1: Bolas de papel arrugado

n (i)	$l_1/\text{cm}$	$l_2/\text{cm}$	$D/\text{cm}$	$D/\text{cm}$	n (ii)	$l_1/\text{cm}$	$l_2/\text{cm}$	$D/\text{cm}$
1	12,2	8,3	2,07	2,18	1	32,4	32,7	3,71
2	12,1	8,3	1,99	2,20	2	20,5	20,4	2,61
3	16,5	12,3	2,85	2,54	3	16,5	16,0	2,02
4	24,5	16,8	3,96	3,29	4	10,2	10,1	1,86
5	33,4	24,7	5,09	4,94	5	7,8	7,6	1,16
6	49,5	33,6	6,19	6,21	6	8,0	8,2	1,15
7	67,1	49,5	8,63	8,52				

Tabla 1: (i) Dimensiones lineales,  $l_1$  y  $l_2$ , de 7 hojas de papel rectangulares, y diámetro,  $D$ , que presentan cuando son arrugadas en forma de bola esférica (se miden dos diámetros). (ii) Dimensiones lineales,  $l_1$  y  $l_2$ , de 6 cuadrados de papel de aluminio, y diámetro,  $D$ , que presentan cuando son arrugados hasta formar una bola compacta.

Si una masa igual a  $m = \rho(l_1 \times l_2) = \rho A$ , donde  $\rho$  es la densidad superficial de la hoja de papel y  $A$  su superficie, se transforma en una esfera homogénea, con  $m = \rho \pi D^3/6$ , donde  $D$  es su diámetro, se tiene que

$$D \propto A^d,$$

con  $d = 1/3$ .

En la Fig. 2 se muestra la representación gráfica de  $\ln D$  frente a  $\ln(l_1 \times l_2)$  para los datos de la obtención de bolas de papel arrugado dados en la Tab. 1.

La dimensión fraccionaria obtenida,  $d = 0,40 \pm 0,04$ , no parece depender ni del tipo de papel utilizado –se obtiene el mismo exponente si se utiliza papel de aluminio, con esferas muy compactas– ni del procedimiento para arrugar el papel –siempre y cuando sea el mismo para las diferentes bolas– [8].

El inverso de  $d$ ,  $\delta = 1/d = 2,5 \pm 0,3$ , es la dimensión fractal de las bolas,  $D = km^{1/\delta}$ , y  $k = (1/\rho)^{1/\delta}$  es una medida de la densidad promedio

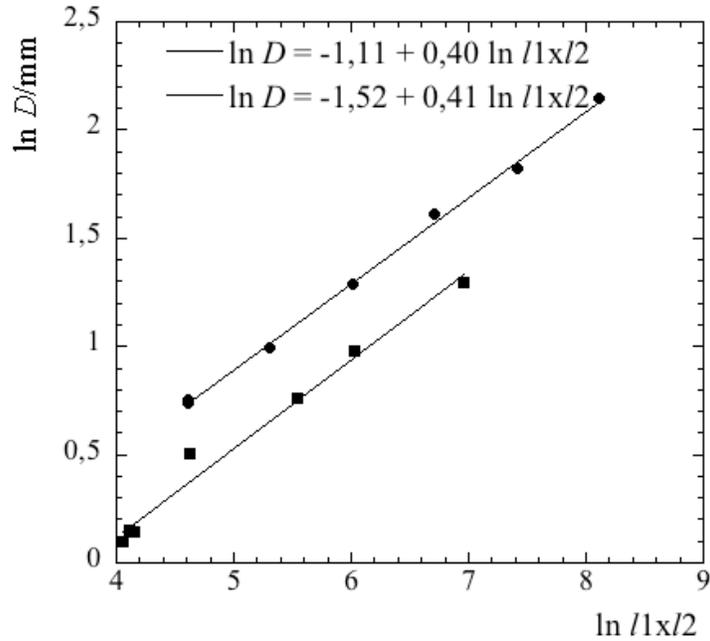


Figura 2: (i) Representación gráfica de  $\ln d$  frente a  $\ln l_1 \times l_2$  para los datos de las hojas de papel arrugadas dados en la Tab. 1. Se obtiene el ajuste  $\ln m = -1,11 + 0,40 \ln l$ . (ii) Representación gráfica de  $\ln d$  frente a  $\ln l_1 \times l_2$  para los datos de las hojas de papel de aluminio dados en la Tab. 1. Se obtiene el ajuste  $\ln m = -1,52 + 0,41 \ln l$

de estas estructuras fractales. La dimensión topológica de estas bolas es  $D_T = 2$ , puesto que son equivalentes a superficies. Por otro lado, las bolas se encuentran embebidas en un espacio euclídeo de dimensión  $E = 3$ .

Debido a que las esferas no son homogéneas –son superficies auto-evitantes–, el diámetro de las bolas arrugadas crece más deprisa de lo que aumentaría si fuesen esferas homogéneas. Un argumento que surge del estudio de los polímeros [8] indica que el diámetro  $D$  escala con la dimensión lineal de la hoja de papel  $l$  como

$$D \approx l^\nu; \nu = \frac{4}{E + 2}.$$

Si la masa escala como  $m \approx l^2$ ,

$$D \approx m^{1/\delta}; \delta = \frac{E + 2}{2} = 2,5,$$

que es el resultado obtenido.



Figura 3: Conchas de *Cerastoderma glaucum* (berberecho).

## Crecimiento de conchas marinas

La forma en que las conchas de algunas especies de bivalvos crecen proporciona cierta información sobre los hábitos y ecología del animal [10].

Se han recogido conchas marinas de dos especies diferentes, 9 conchas de *Cerastoderma glaucum* (berberecho) y 8 de la especie *Acanthocardia tuberculata*. Se ha medido una dimensión lineal característica –desde el extremo más agudo hasta la parte más ancha– y su masa. En la Tab. 2 se muestran los resultados numéricos obtenidos.

n (i)	$m/g$	$l/mm$	n (ii)	$m/g$	$l/mm$
1	0,4	10,7	1	6,8	36,1
2	0,55	12,3	2	9,6	39,9
3	0,7	16,1	3	12,1	42,1
4	0,85	16,9	4	14,3	46,4
5	1,2	20,1	5	17,6	48,1
6	1,5	22,7	6	22,3	51,7
7	3,3	28,0	7	30,5	55,7
8	4,35	30,1	8	33,4	58,9
9	4,6	34,7			

Tabla 2: (i) Masa,  $m$ , y dimensión lineal,  $l$ , para 9 conchas de mar de la especie *Cerastoderma glaucum* (berberecho); (ii) Masa,  $m$ , y dimensión lineal,  $l$ , para 8 conchas de la especie *Acanthocardia tuberculata*.

La masa  $m$  de la concha –proporcional a su volumen  $V$ , si se considera que su densidad  $\rho$  es constante a lo largo del crecimiento de la concha– varía con la dimensión lineal  $l$  como

$$m = Al^d,$$

donde  $d$  es un exponente –una dimensión– que puede proporcionar in-

formación sobre la ecología del animal.

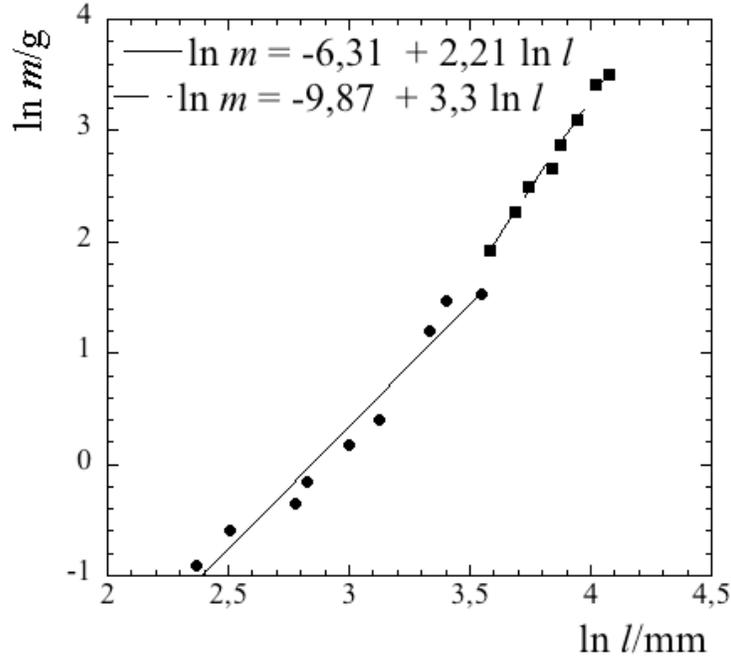


Figura 4: Representación gráfica de  $\ln m$  frente a  $\ln l$  para los datos de la Tab. 2. (i) Se obtiene el ajuste para *Cerastoderma glaucum*,  $\ln m = -6,31 + 2,21 \ln l$ , y, (ii) para *Acanthocardia tuberculata*  $\ln m = -9,87 + 3,3 \ln l$ .

En la Fig.4 se muestra la representación gráfica de  $\ln m$  frente a  $\ln l$  para los datos de la Tab. 2.

Para un objeto de medidas  $L \times L \times a$ , si cada una de estas dimensiones aumenta como  $\alpha L$ ,  $\alpha L$  y  $\alpha^{1+\beta} a$ , siendo  $\alpha$  lo que varía una dimensión lineal, el volumen aumenta como  $\alpha^{3+\beta}$ , con un exponente  $d = 3 + \beta$  mayor que 3. La dimensión fractal mayor de 3 se podría explicar pues como un crecimiento adicional del grosor de la concha.

Una explicación semejante ha sido dada por Bayne [7] que obtiene una dimensión fractal de 3,5 para una población del género *Mytilus*, que es una especie que vive en zonas muy batidas, mientras que para una población del género *Elliptia*, una especie de agua dulce, se obtiene una dimensión fractal de 2,65 [10].

## Agradecimientos

Quiero agradecer al Prof. Manuel González-Carreró su colaboración científica en la realización de este trabajo, especialmente por haber clasificado las conchas de mar, por haberme enseñado a distinguirlas

contando el número de estrías de cada especie y por explicarme la forma de vida de cada una de ellas.

## Referencias

- [1] B Mandelbrot, *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, Colección Metatemas 49, Barcelona (1997).
- [2] H-O Peitgen, H Jürgens, D Saupe, *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*, Springer, New York (1992).
- [3] M Zanoni, *Measurement of the fractal dimension of a cauliflower*, The Physics Teacher **40**, 18-20 (2002).
- [4] K Zembrowska, M Kuzma, *Some exercises on fractals for high school students*, The Physics Teacher **40**, 470-473 (2002).
- [5] P Knutson, E D Dahlberg, *Fractals in the classroom*, The Physics Teacher **41**, 387-389 (2003).
- [6] M Amaku, L B Horodyski-Matsushigue, P R Pascholati, *The fractal dimension of breads*, The Physics Teacher **37**, 480-481 (1999).
- [7] B L Bayne, *Marine Mussels: Their Ecology and Physiology*, Cambridge University Press, New York, 1976.
- [8] M A F Gomes, *Fractal geometry in crumpled paper balls*, American Journal of Physics **55**, 649-650 (1987).
- [9] F F Lima, V M Oliveira, M A F Gomes, *A Galilean experiment to measure a fractal dimension*, American Journal of Physics **61**, 421-422 (1993).
- [10] H D Sheets, J C Lauffenburger, *Looking for scaling laws, or physics with nuts and shells*, The Physics Teacher **37**, 376-378 (1999).