¿Cuál es la estructura formal básica de las ciencias de la naturaleza?

Preguntas que pueden responderse con SI o NO (ó afirmaciones que pueden ser ciertas o falsas)

CALCULO PROPOSICIONAL (semejante a la lógica, pero no es lo mismo como veremos)

A. Conjunto parcialmente ordenado (poset) L

Para algunos pares $a \prec b$, si a es cierto, b es cierto (implicación) con axiomas

1) a $\prec$ a $\forall$ a $\in$L,

2) $a \prec b$ y $b \prec a$ implica $a = b$,

3) $a \prec b$ y $b \prec c$ implica $a \prec c$,

B. Retículo

Para todo par $a, b \in$ L existe

1) *conjunción:* a $\cap$ b tal que a $\cap$ b $\prec$ a, a $\cap$ b $\prec$ b, c $\prec$ a y c $\prec$ b implica c $\prec$ a $\cap$ b,

(ambas, a y b son ciertas)

2) *disyunción:* a $\cup$ b tal que a $\cup$ b $\succ$ a, a $\cup$ b $\succ$ b, c $\succ$ a y c $\succ$ b implica c $\succ$ a $\cup$ b,

(a es cierta o b es cierta o ambas son ciertas).

Se ve claramente la diferencia entre simple poset y retículo con los diagramas de Hasse.

C. Retículo completo

Si J es un índice y a_i (i $\in$ J) cualquier subconjunto de L, existe $\cap_i a_i$ tal que x $\prec$ a_j $\forall$ i $\in$ J $\Leftrightarrow$ x $\prec$ $\cap_i a_i$

Esto implica la existencia de ϕ = $\cap_{a \in L} a$ (proposición absurda, siempre falsa)

D. Retículo ortocomplementado (negación)

$\forall$ a $\in$ L $\exists$ a' $\in$ L tal que

1) $(a')' = a$,

2) $a \cap a' = \phi$,

3) $a \prec b \Leftrightarrow b' \prec a'$.

Esto, y la completitud, implican la existencia de I = $\cup_{a \in L} a$ (proposición trivial, siempre cierta).

En **física** consideramos: *Sistemas, estados y magnitudes (u obsrvables)*

E. Estado

Es una aplicación $v : L \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $a \prec b$ implica $v(a) \leq v(b)$. Se interpreta que v(a) = 1 si a es cierta, v(a) = 0 si es falsa.

Algunos autores llaman $lógica$ a todo retículo ortocomplementado y completo, pero esto puede llevar a confusión. En la lógica usual se consideran también proposiciones a las afirmaciones acerca de la verdad o falsedad de otras proposiciones. Por ejemplo la relación $a \cap b \prec a$ sería una proposición en la lógica, pero no en el "cálculo proposicional" que aquí consideramos. Las proposiciones aquí consideradas se refieren siempre (al menos en física) a valores de magnitudes, como por ejemplo "la altura de esta mesa es menor de dos metros".

En física clásica (y en otras ciencias) el retículo de las proposiciones tiene también la propiedad distributiva:

F. Distributivo

$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c), \; a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$

Un retículo ortocomplementado, completo y distributivo se llama $\acute{a}lgebra\ de\ Boole$. Es también la estructura de los subconjuntos de un conjunto. La relación (entre el retículo de las proposiciones y el de los subconjuntos) se ve intuitivamente considerando el conjunto de los estados sobre el retículo y estableciendo una correspondencia biyectiva entre cada proposición, $a \in L$, y el conjunto de los estados en los que $v(a) = 1$. Entonces la relación de orden, $\prec$, entre dos proposiciones corresponde a la inclusión de los correspondientes conjuntos. La propiedad distributiva en el álgebra de subconjuntos se ve claramente con los diagramas de Venn.

También la estructura de las proposiciones de la lógica usual es un álgebra de Boole.

FÍSICA CLÁSICA FRENTE A FÍSICA CUÁNTICA

En física clásica (y otras ciencias de la naturaleza) el retículo de las proposiciones es, además de ortocomplementado y completo, distributivo. Pero en física cuántica no es así porque, en un determinado contexto experimental, *no es posible* asignar un valor de verdad a todas las proposiciones que tienen valor de verdad en otros contextos. Por ejemplo la proposición: "hay un electrón en el punto x = 0" es cierta o falsa en determinado contexto experimental, pero no es posible decir si lo es en otro contexto. (No se trata de afirmaciones siempre sin sentido como "esta mesa es jueves"). La mencionada imposibilidad es lo que hace tan extraña a la teoría cuántica.

Una de las soluciones que se han propuesto es la *lógica trivalente*, donde las proposiciones pueden ser: verdaderas, falsas o sin sentido en un determinado estado. Otra solución fué propuesta por G. Birkhoff y J. von Neumann en Annals of Matematics, 37, 823 (1936). La llamaron *lógica cuántica*, llegando a afirmar que es mejor que la lógica usual. (Pero hoy se tiende a decir que no es una lógica, sino un cálculo proposicional y que la lógica usual es válida también en las *deducciones* hechas en física cuántica).

Luego veremos de donde dedujeron Birkhoff y von Neumann sus conclusiones.

Pobabilidad (que en física llamamos estado)

Más general que el "estado puro" definido por la aplicación $v : L \to \{0, 1\}$ arriba mencionada es el "estado mezcla" definido como una aplicación

p: L $\to [0, 1]$ con los axiomas

1) 0 $\leq$ p(a) $\leq$ 1,

2) p$(\phi) = 0$, p$(I) = 1$,

3) si $\{a_j\}$ es una sucesión tal que $a_j \prec a'_k$ para todos los pares j $\neq k$, entonces $\sum_i p(a_i) = p(\cup a_i)$,

4) para toda sucesión $\{a_j\}$, p$(a_i) = 1$ $\forall$ a$_i$ implica $p(\cap a_i) = 1$,

5) (a veces se incluye, pero no siempre) si a $\neq$ b existe un estado p tal que $p(a) \neq p(b)$.

Si se define sobre un álgebra de Boole, estos axiomas se reducen a los usuales de la probabilidad (de Kolmogorov). Si se definen sobre un retículo de proposiciones cuánticas, se llama probabilidad cuántica. (Hay congresos que suelen anunciarse como QP-PQ, quantum probability-probabilité quantique).

¿De donde procede todo esto?

Werner Heisenberg en 1925, con base en resultados empíricos y teorías previas (en particular el modelo de átomo debido a Niels Bohr) propuso asociar *cuadros de números* a *las magnitudes*. Inventó unas reglas de suma y de multiplicación de esos cuadros, que su profesor Max Born identificó como la teoría de las matrices, ya conocida de los matemáticos pero no de los físicos. Propusieron que los valores posibles de las magnitudes son soluciones de ecuaciones de valores propios como

$$Eu = \lambda u,$$

donde E es *una matriz cuadrada* (real simétrica o compleja hermítica), que representa **una magnitud física**, u es *una matriz columna*, que representa **el estado del sistema**, y λ *un número real*, que es **el valor** que se obtiene al medir la magnitud E en ese estado.

Erwin Schrödinger en 1926 propuso, independientemente, una ecuación análoga pero ahora $u = u(x, y, z)$ es una función y E un operador (que transforma una función en otra). Por ejemplo, en una dimensión podría ser

$$E := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \ (ec.\ de\ Hermite : Eu = \lambda u.)$$

Paul A. M. Dirac en 1926 propuso una unificación en la que u es un vector de un espacio vectorial sobre los complejos y E un operador lineal (autoadjunto) en ese espacio.

Eso lleva a que el formalismo matemático de la mecánica cuántica sea el de los *espacios de Hilbert* que son espacios vectoriales sobre los complejos, posiblemente de dimensión infinita, con ciertas propiedades topológicas que no enunciaré. Se postula que a cada sistema físico se asocia un espacio de Hilbert, a cada magnitud (que se suele llamar "observable") se asocia un operador (autoadjunto) y a cada "estado puro" un rayo del espacio (es decir, un subespacio unidimensional). Por eso se suele decir que el espacio de la mecánica cuántica es el de Hilbert *proyectivo*, porque todos los vectores múltiplos de uno dado representan el mismo estado. A un "estado mezcla" se le asocia un operador autoadjunto, positivo y de traza unidad (esos operadores se llaman "operadores densidad").

Para aclarar esto usaré un ejemplo en el que el espacio vectorial es de dimensión finita (entonces es con seguridad espacio de Hilbert). Un sistema físico cuyo espacio vectorial sea de dimensión dos se llama un $qubit$ (en el contexto de la teoría de la información cuántica, hoy muy de moda). Sus (infinitos) *estados puros* posibles son los vectores (α, β) (con $\alpha, \beta \in C$) unitarios, es decir tales que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Los observables posibles son todas las matrices hermíticas 2×2, las cuales se pueden escribir siempre como combinaciones lineales con coeficientes reales de las 4 matrices

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \text{i} \\ \text{-i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{-1} \end{pmatrix}$

que puede decirse constituyen una base de los *cuaterniones de Hamilton*. Las tres últimas suelen llamarse matrices de Pauli. Los posibles *estados mezcla* son las matrices de la forma

$$\rho = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\sum_j r_j\sigma_j,\ j = 1, 2, 3,\ r_j \in R,$$

con $\sum_j r_j^2 = 1$. Se puede comprobar que ρ así definida es hermítica (su traspuesta es su compleja conjugada), tiene traza unidad y es positiva, es decir, sus dos valores propios son no negativos.

¡ COMPROBAD ESTAS PROPIEDADES!

Birkhoff y von Neumann en 1936 asociaron las proposiciones cuánticas con operadores de proyección o, lo que es equivalente, subespacios del espacio vectorial (de Hilbert):

$$P^2 = P, \text{ valores propios: } \{0, 1\}\,.$$

Con la relación de inclusión como relación de orden, se obtiene un retículo no distributivo (lógica cuántica). Si A y B son subespacios (proposiciones), la conjunción es el mayor subespacio contenido en A y B, la disyunción es el menor subespacio que contiene a los dos.

¡EN EL ESPACIO DE DIMENSIÓN 2, COMPROBAD QUE LOS RAYOS (más el vector nulo que es la proposición absurda y el espacio bidimensional que es la trivial) FORMAN UN RETICULO ORTOCOMPLEMENTADO Y COMPLETO! (si a es un rayo, a' es el rayo ortogonal).

¡COMPROBAD, USANDO TRES VECTORES NO COLINEALES, A, B, C, QUE NO SE CUMPLE LA PROPIEDA DISTRIBUTIVA!

Ejemplos: ¿Cuál es el valor del observable σ_z en el estado definido por el vector unitario (α, β) ?. Respuesta: Es 1 si $|\alpha| = 1$ (y, por tanto, $\beta = 0)$, es -1 si $|\beta| = 1$ (y, por tanto, $\alpha = 0)$, no está definido en los demás casos.

En la "lógica" de Birkhoff y von Neumann la afirmación "el valor de σ_z es 1", ¿en qué estados es cierta?. Respuesta: si, y sólo si, $|\alpha| = 1$ (y, por tanto, $\beta = 0)$.

Consecuencias

1. Hay proposiciones cuyo valor de verdad no está definido (o hay que tomarlas como falsas por definición, B&vN).

Los valores de las magnitudes no “preexisten”, “emergen” al medir

Paradojas: ¿Está la Luna ahí cuando nadie la mira?

2. La medición perturba al sistema de forma incontrolada.

Esto más el teorema de “no-cloning” se aprovecha en criptografía cuàntica.

3. *Principio de superposición*: Si a_1 y a_2 son estados posibles $(\in H)$, también lo es $a_1 + a_2$ $(\in H)$.

Esto explica las interferencias en los experimentos de “dos rendijas”.

Ejemplo de la pantalla a la que se dispara.

Paradojas: El gato de Schrödinger.

4. El *entrelazamiento* (“entanglement”): Hay estados de dos cuerpos del tipo

$$a_1 b_1 + a_2 b_2$$

que no tienen análogo clásico; se trata de aprovechar en computación cuántica.

Ejemplo: ecuación de Hermite

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\lambda - x^2\right) u = 0,\ u \rightarrow 0\ si\ x \rightarrow \pm\infty$$

soluciones gráficas en Dicke, pag. 62

Solución analítica

$$\begin{aligned} u(x) &= H(x) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \\ H_n(x) &= Polinomios\ de\ Hermite \end{aligned}$$

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,\ H_2(x) = 4x^2 - 2, ...$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\lambda - x^2\right) u = 0,\ u \to 0\ si\ x \to \pm\infty$$

SOLUCIÓN ALGEBRAICA

Definimos

$$R_\pm := -\frac{d}{dx} \pm x,$$

se ve que

$$R_+R_-u(x) = \left(-\frac{d}{dx} + x\right)\left(-\frac{d}{dx} - x\right) u\left(x\right) = \frac{d^2u}{dx^2} - x^2u + u$$

$$R_-R_+u(x) = \left(-\frac{d}{dx} - x\right)\left(-\frac{d}{dx} + x\right) u\left(x\right) = \frac{d^2u}{dx^2} - x^2u - u$$

Definimos

$$E := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2,\ Hermite : Eu = \lambda u.$$

y se tiene

$$R_+R_- = R_-R_+ + 2 = 1 - E.$$

$$Eu_n = \lambda_n u_n \Rightarrow ER_\pm u_n = \left(\lambda_n \pm 2\right) R_\pm u_n.$$

$R_\pm$ son operadores de *escalera*, R_+ de *subida* y R_- de *bajada.*

Como $\lambda \geq 0$ (si no $\frac{d^2u}{dx^2}$ tendría el mismo signo que u, lo que implicaría $u \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$) , debe existir un valor propio mínimo, λ_0, cuya función propia, u_0, cumplirá

$$ER_-u_0 = \left(\lambda_0 - 2\right) R_-u_0,$$

que solamente es posible si

$$R_-u_0 = 0 \Longleftrightarrow -\frac{du_0}{dx} - xu_0 = 0,$$

cuya solución es

$$u_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

de donde

$$R_+R_-u_0 = (1-E)\,u_0 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 1.$$

Las restantes soluciones son

$$u_n = (R_+)^n \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) = \left(-\frac{d}{dx}+x\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right),$$

y sus valores propios asociados

$$\lambda = 1, 3, 5, 7, ...$$