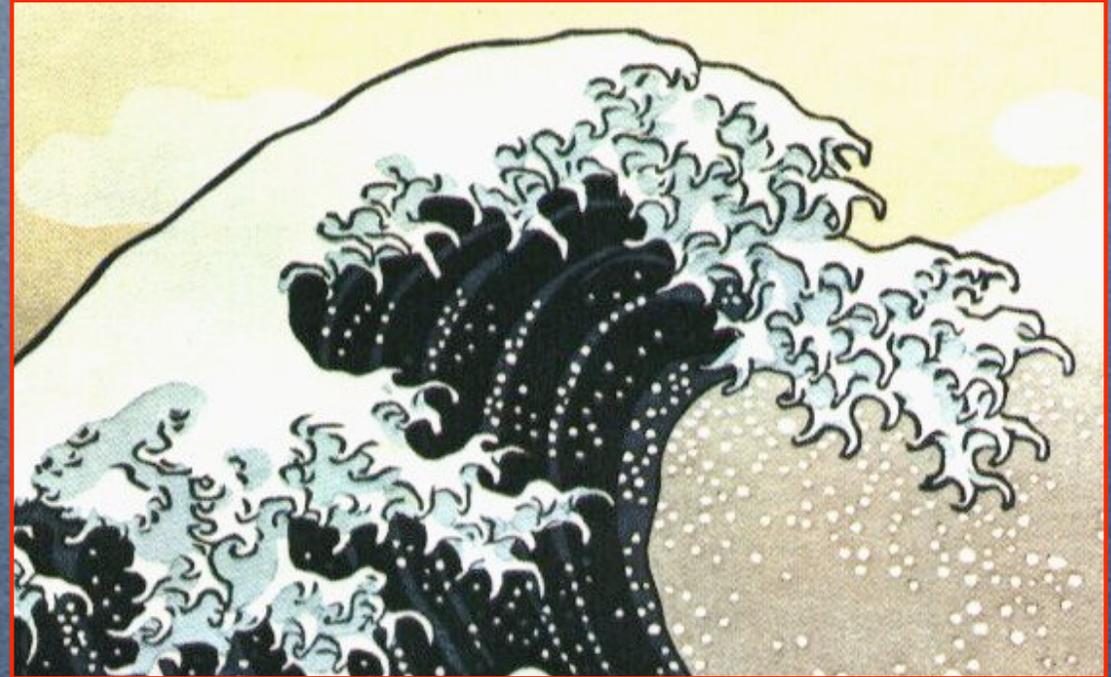
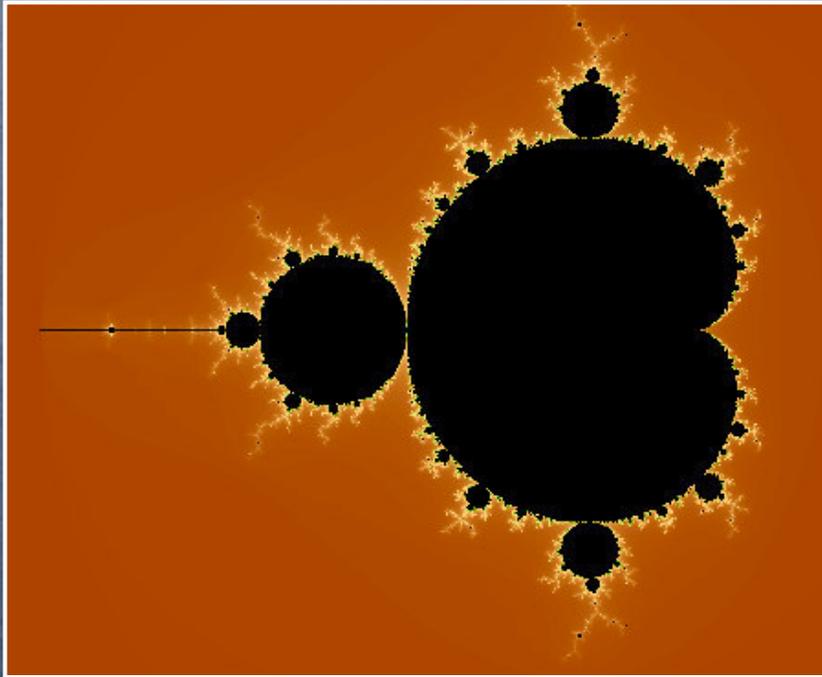


Matemáticas en la Física



Fractales: La geometría de la naturaleza

Talleres de Matemáticas
2005-2006

J. Güémez

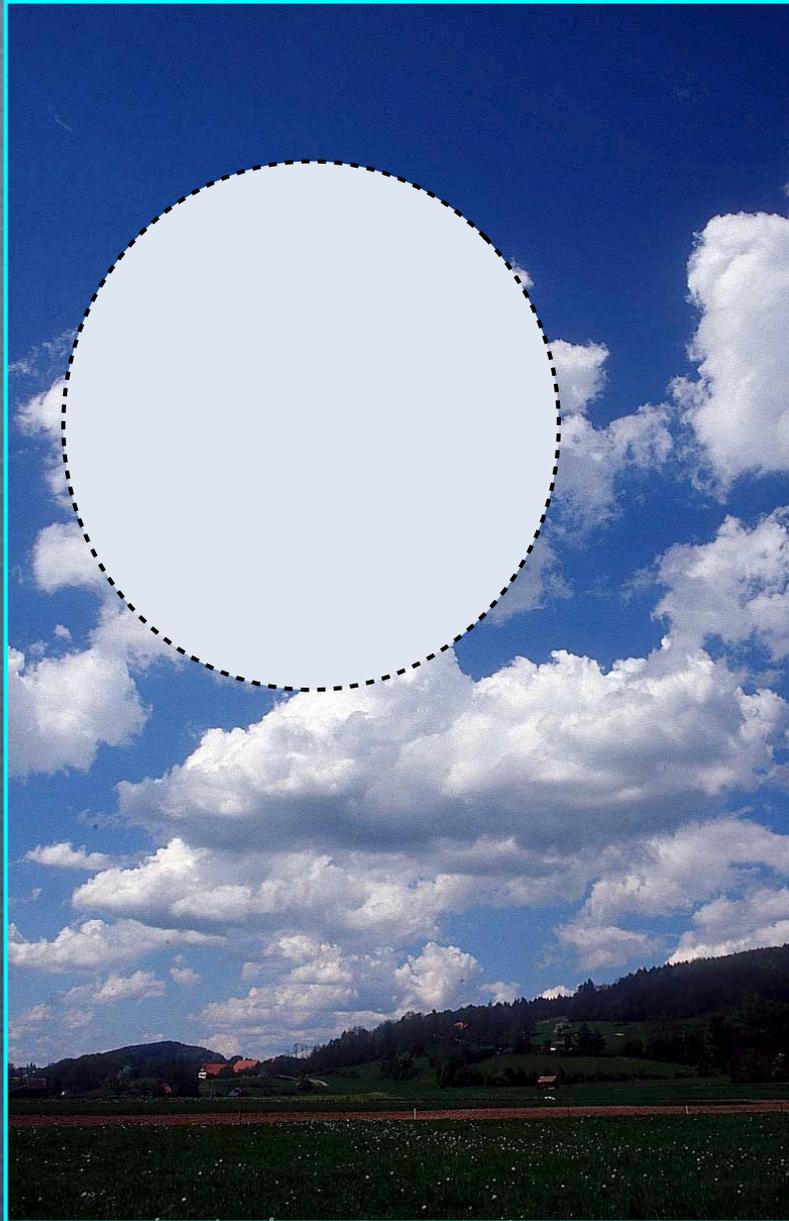
Fractales: La geometría de la naturaleza

1. Descripción de los objetos naturales.
2. ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña? Entrevista con Benoit Mandelbrot.
3. Cálculo de la dimensión fractal de un objeto. Fractales regulares.
4. Taller. Dimensión fractal de bolas de papel arrugadas y de conchas marinas.

Fractales: La geometría de la naturaleza

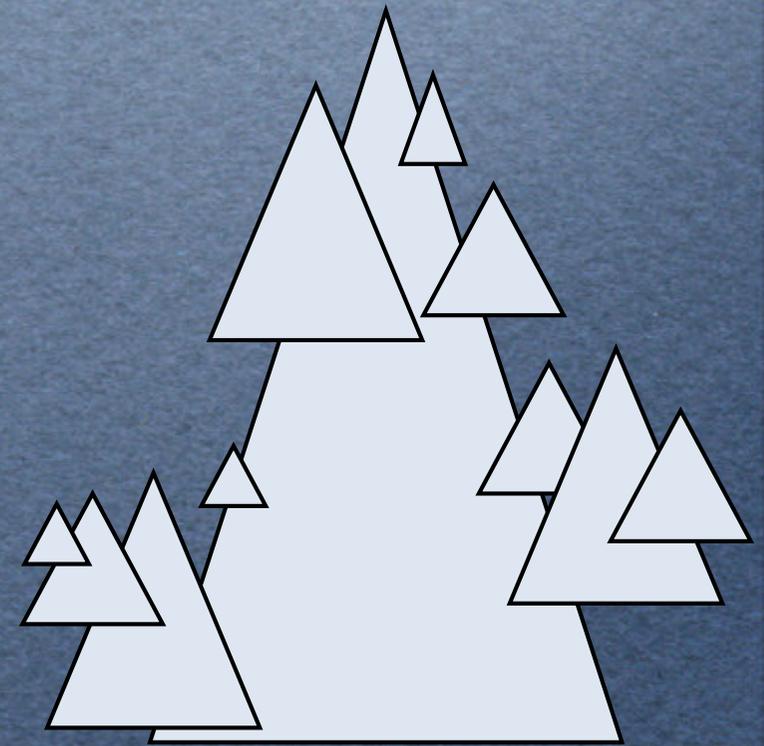
La aplicación simple de la geometría euclidiana no es capaz de describir muchos objetos que aparecen en la naturaleza, como, por ejemplo, la forma de una nube, una montaña, un árbol, un rayo o una costa.

Una nube no es una esfera,



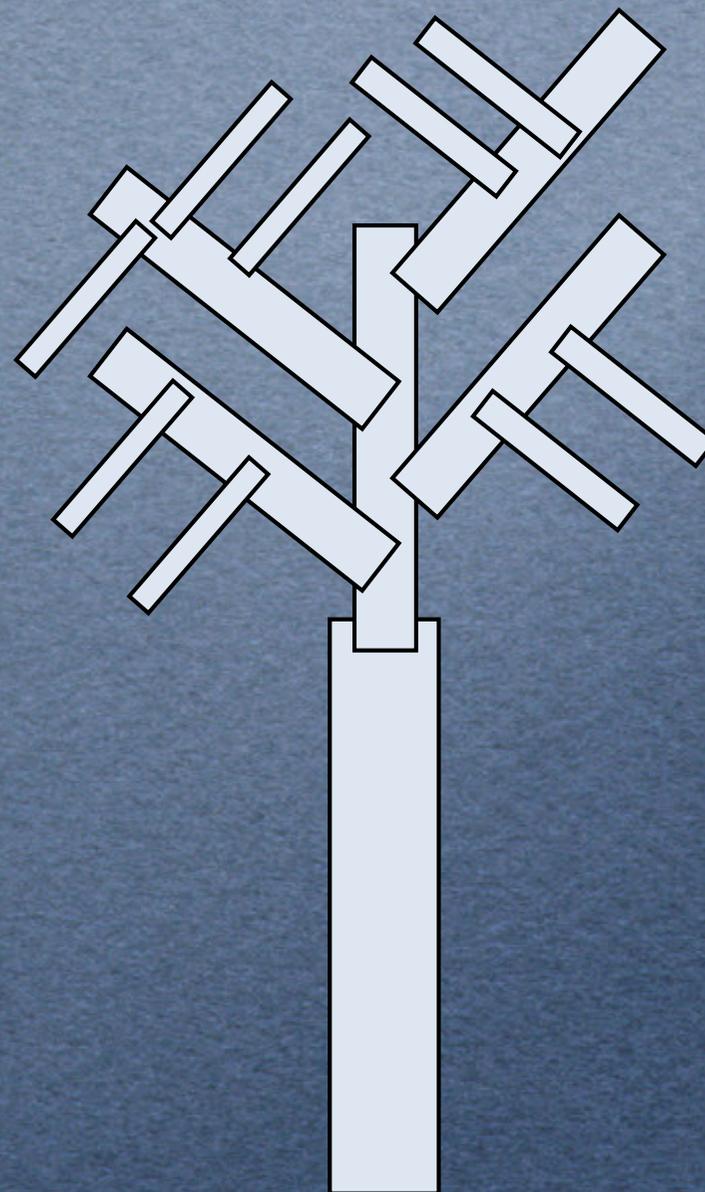
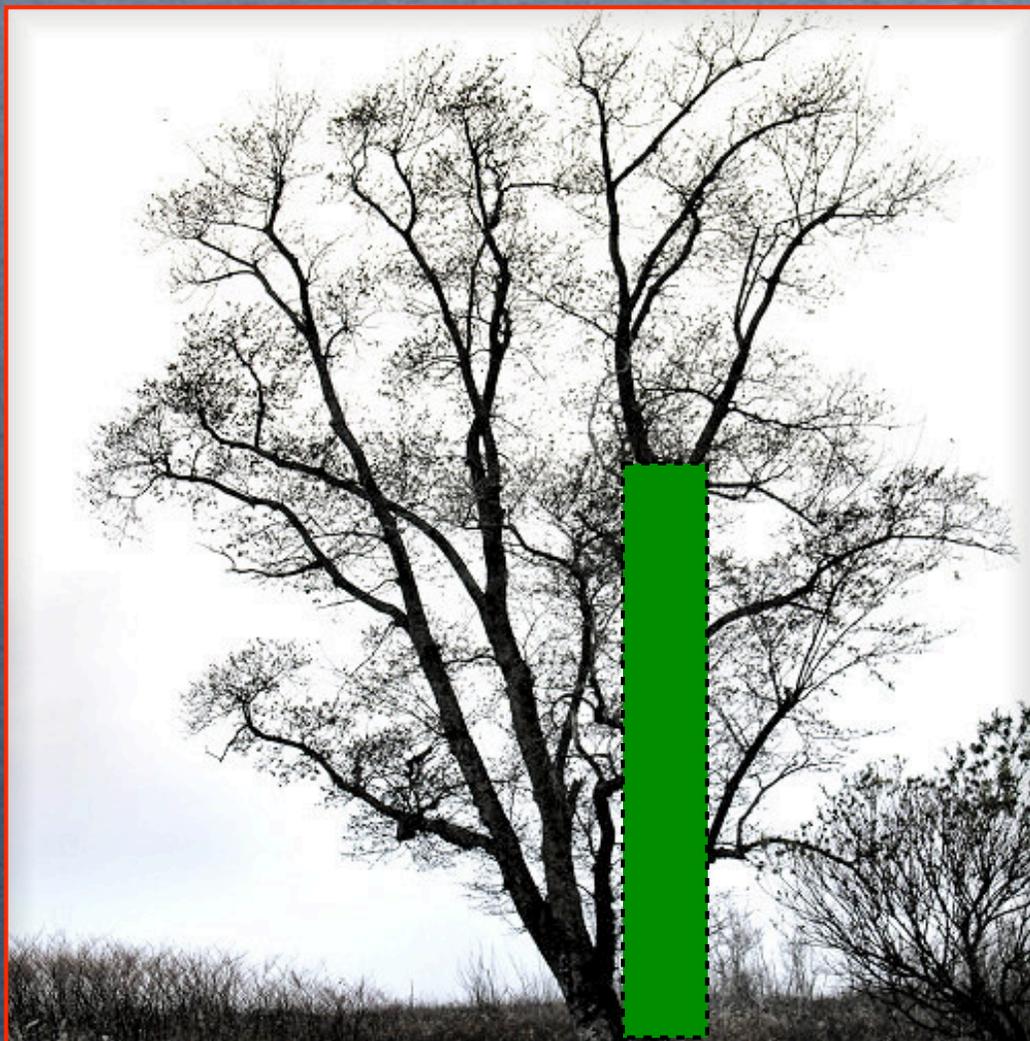
Con muchas esferas de diferentes tamaños se puede intuir una nube

Una montaña no es un cono



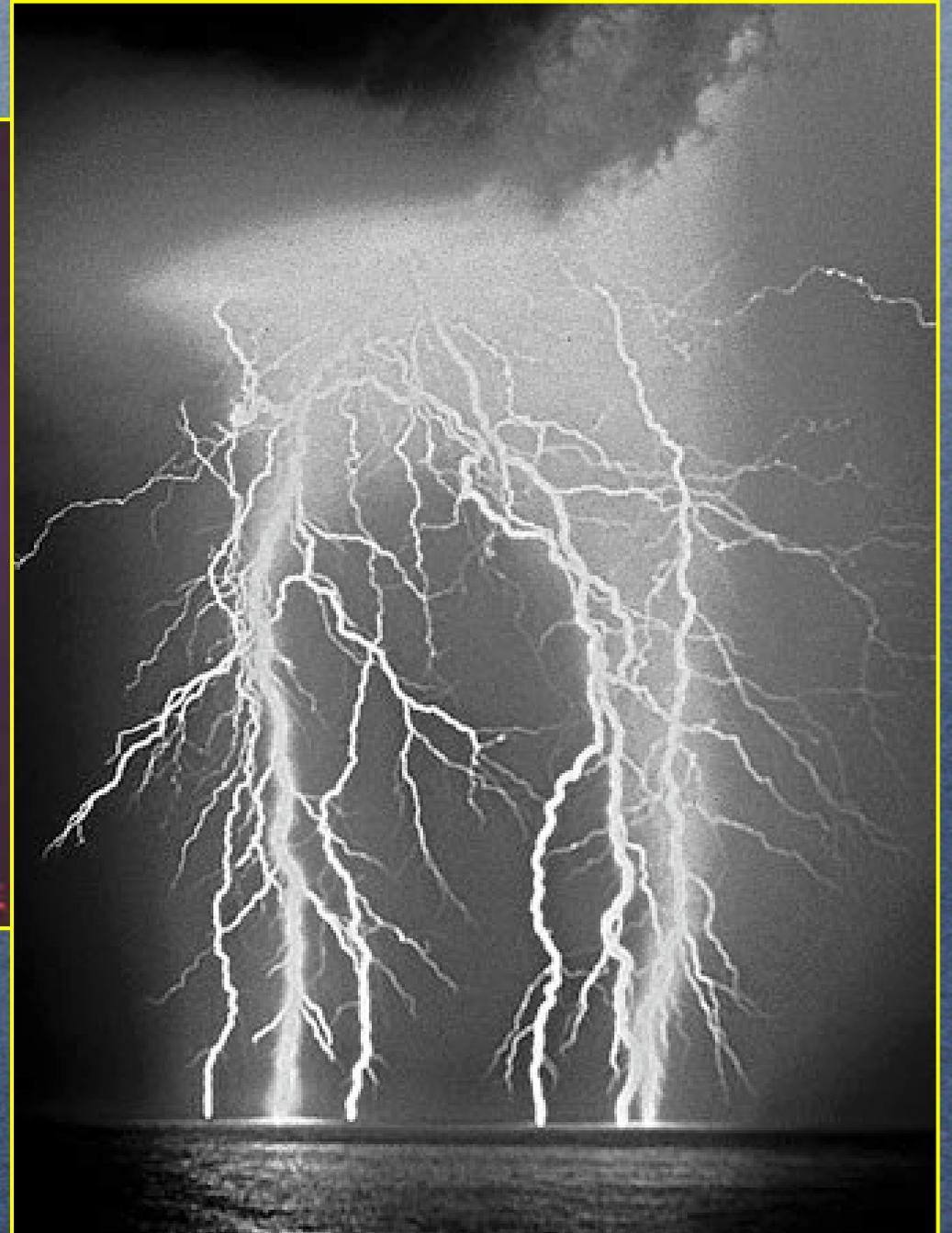
Con muchos triángulos de diferentes tamaños se puede sugerir una montaña

Los árboles no son cilindros



Con muchos rectángulos de diferentes tamaños se puede sugerir un árbol

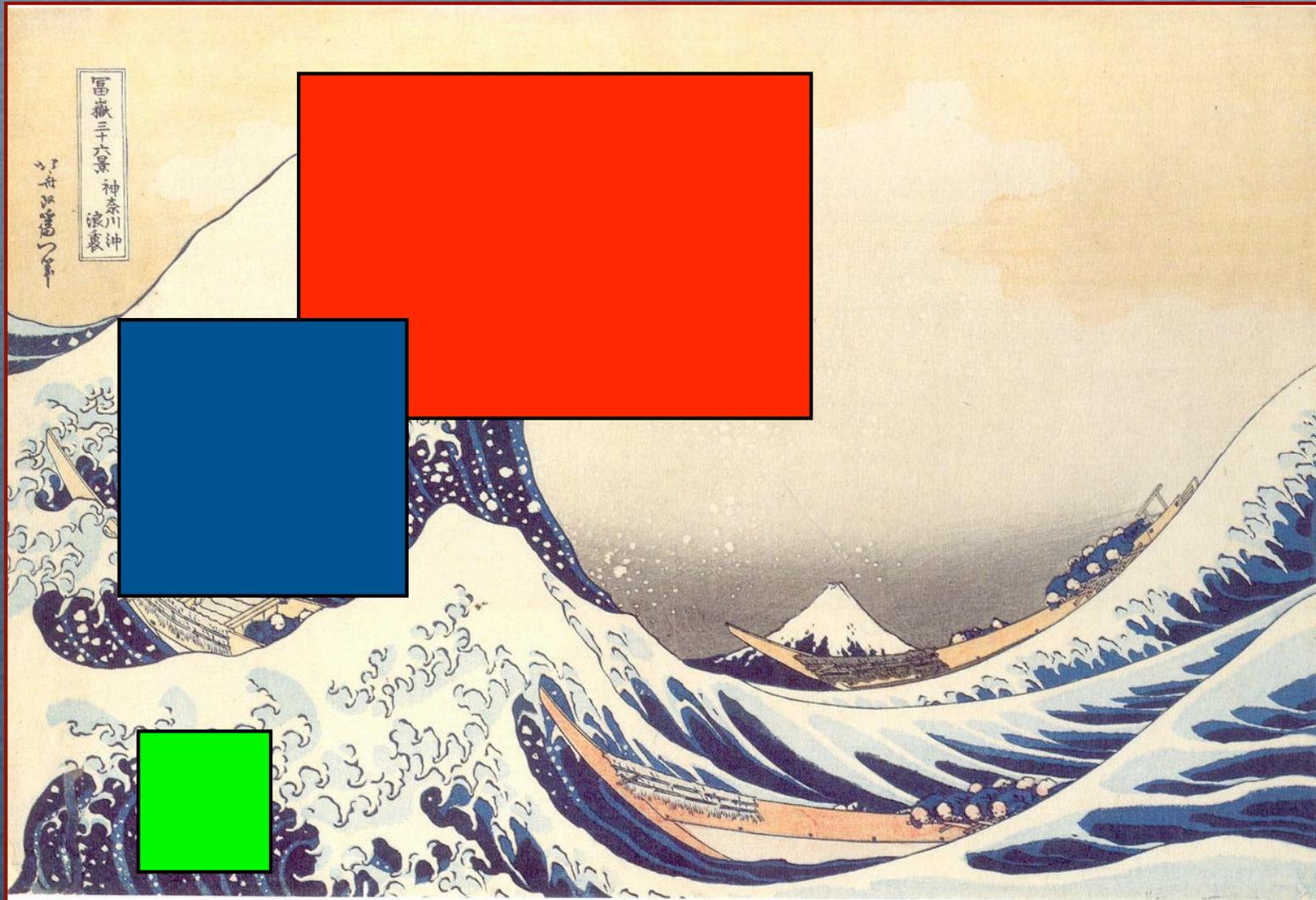
El rayo no es rectilíneo



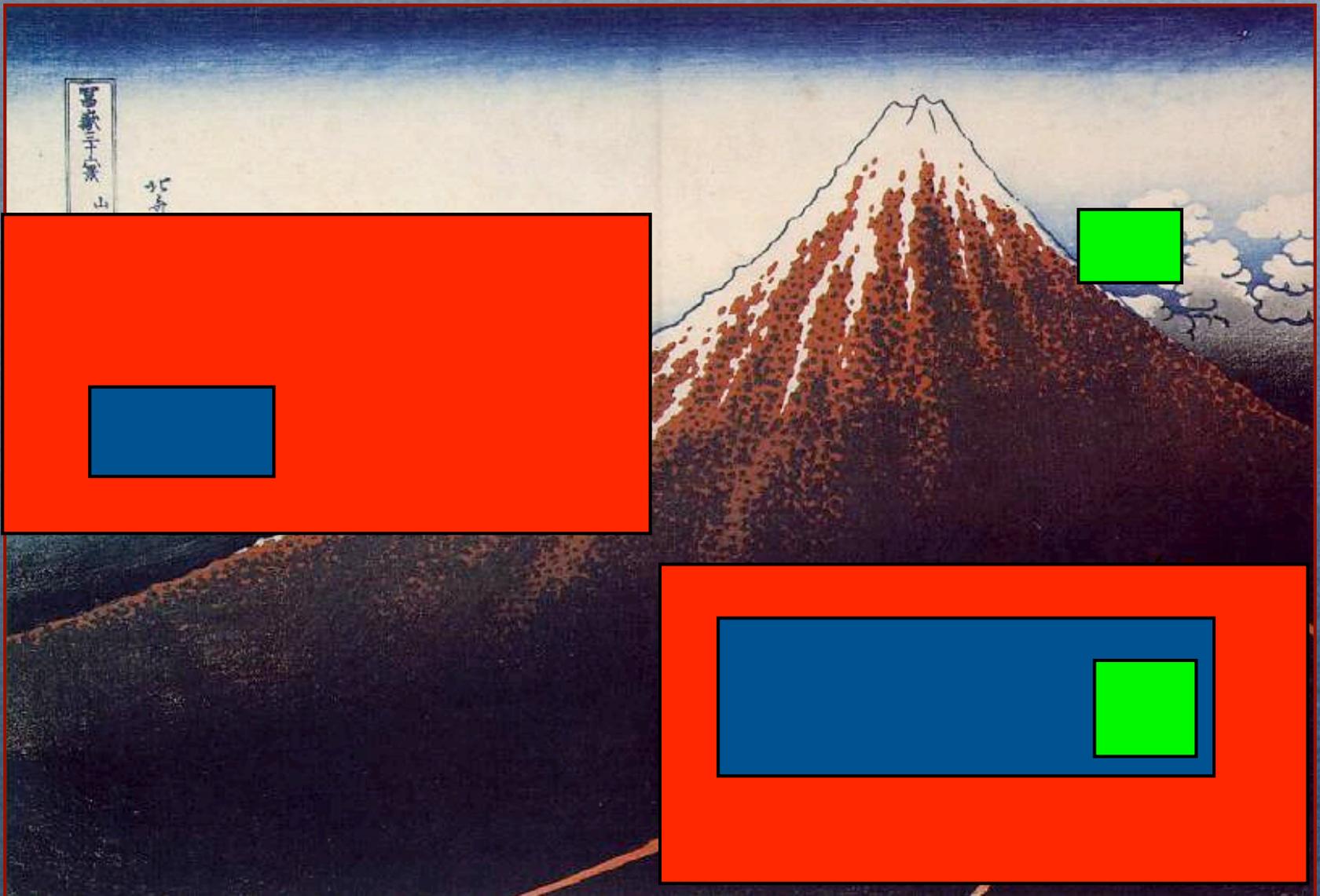
Las costas no son rectas.
Tampoco los ríos o las fronteras son rectas.



Repeticiones de escala en el arte



Katsushika Hokusai (1760-1849).
La gran ola (De la serie, 36 vistas del Fuji).



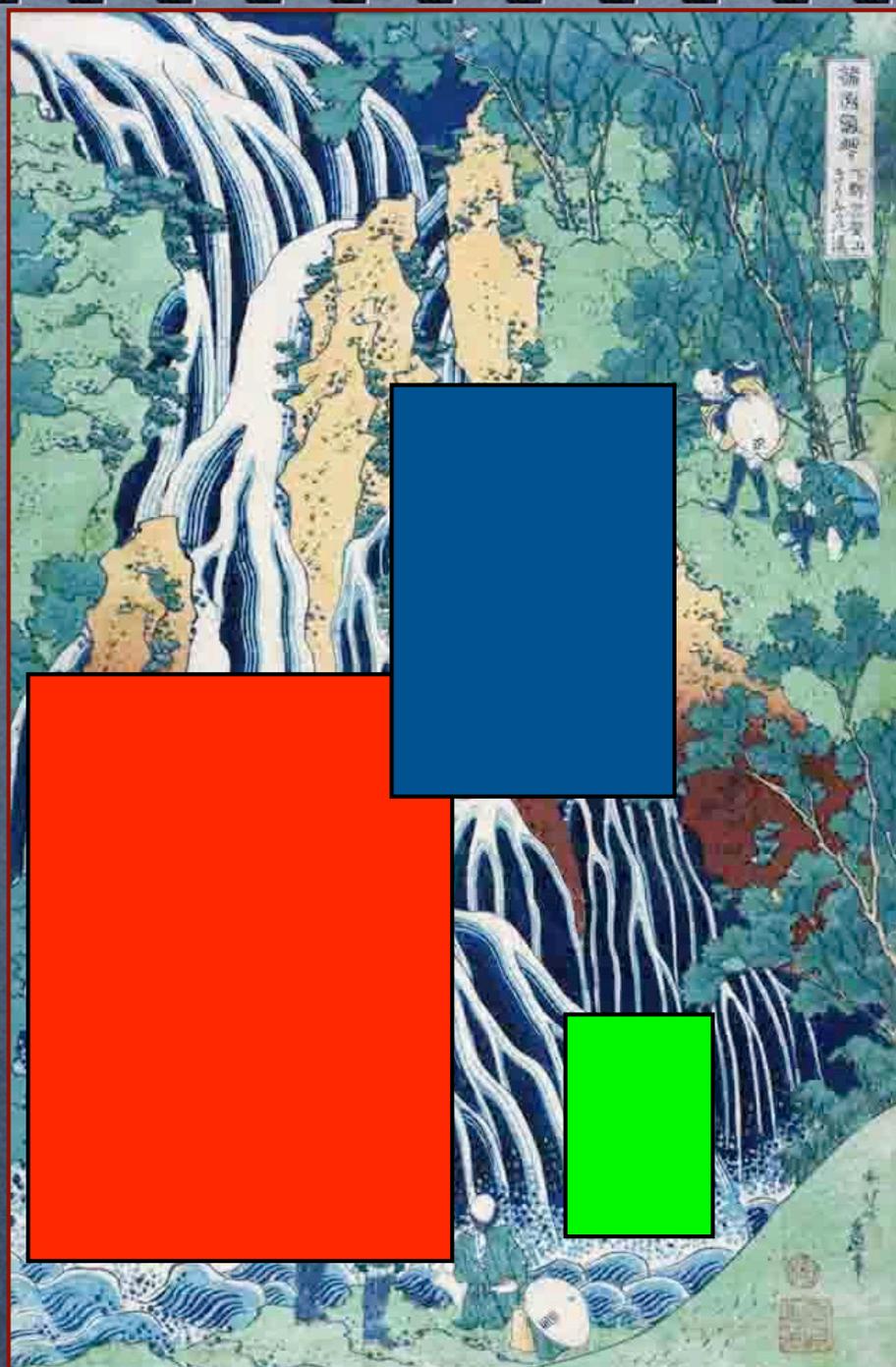
Hokusai. Tormenta de verano en el monte Fuji (Una vista del Fuji).



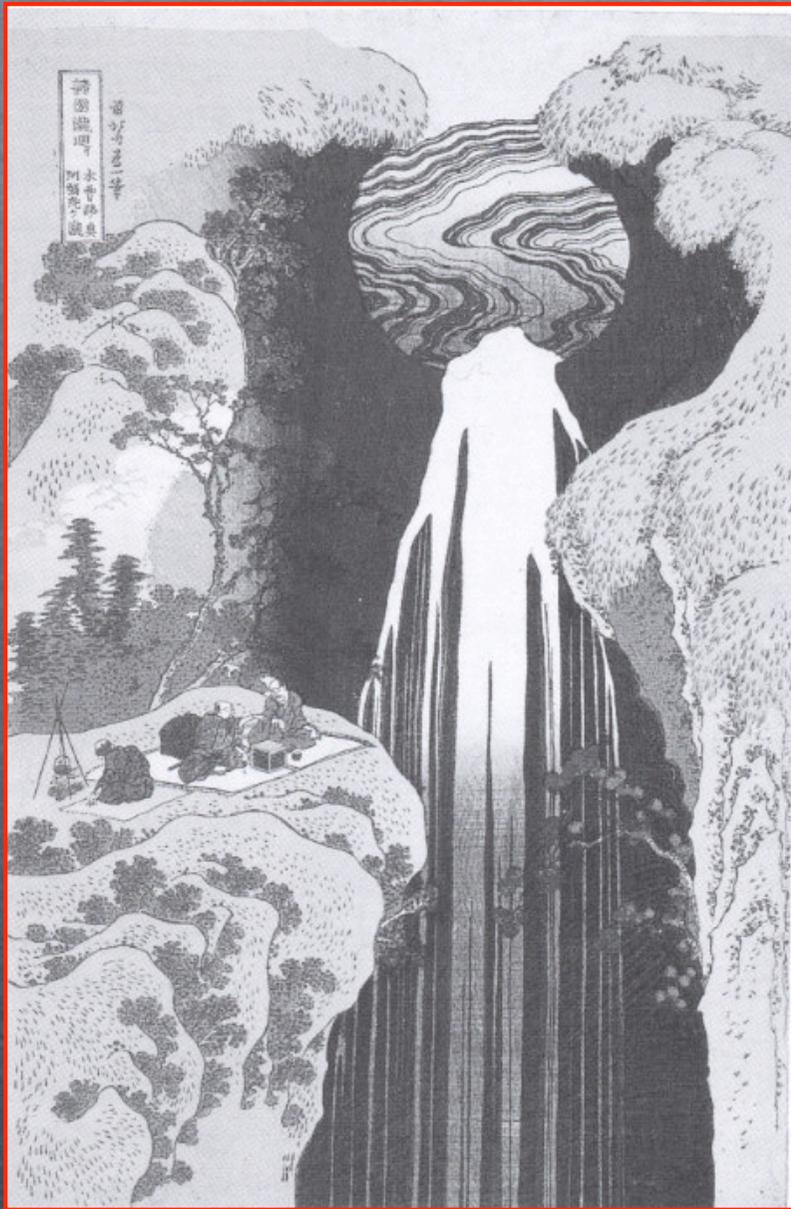
Hokusai

La cascata di Amida molto in profondità sulla strada Kiso, 1834-1835

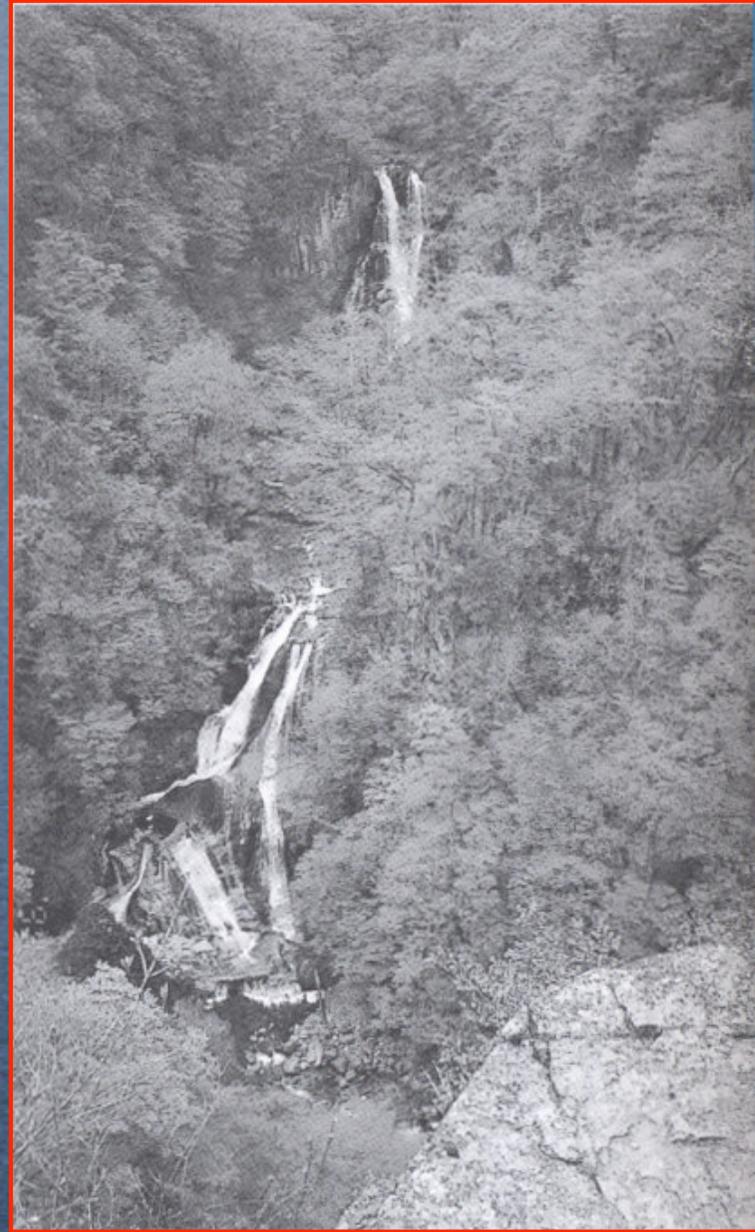
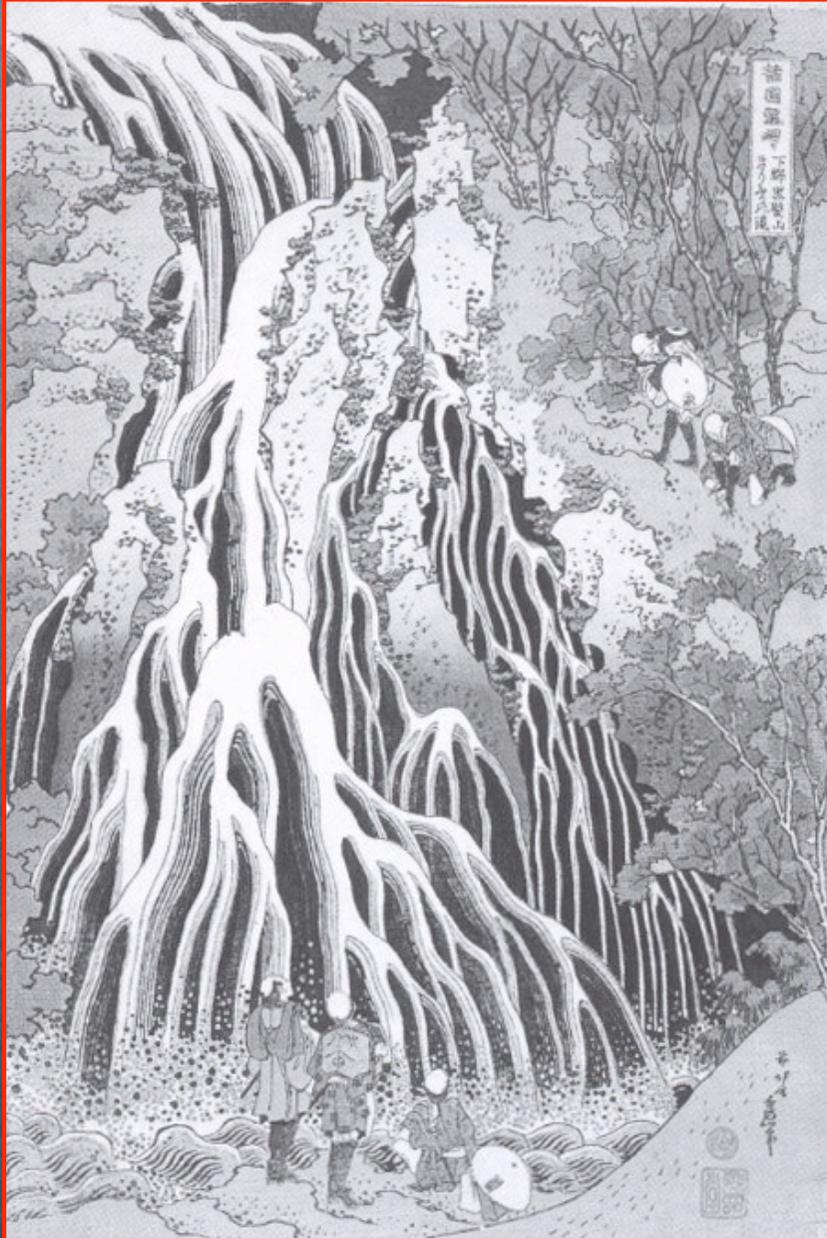
Hokusai.
Catarata Amida



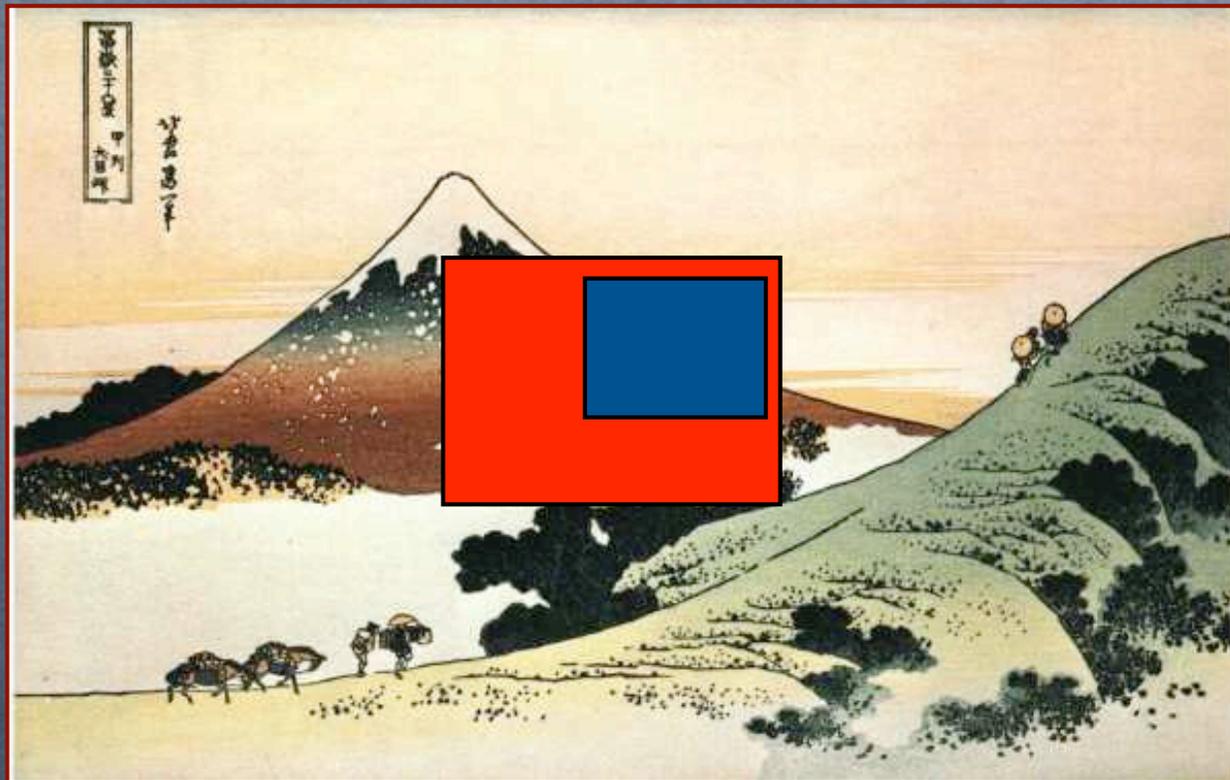
Katsushika Hokusai.
Catarata Kirifuri, en
el monte
Kurokami en la
provincia de
Shimotsuke



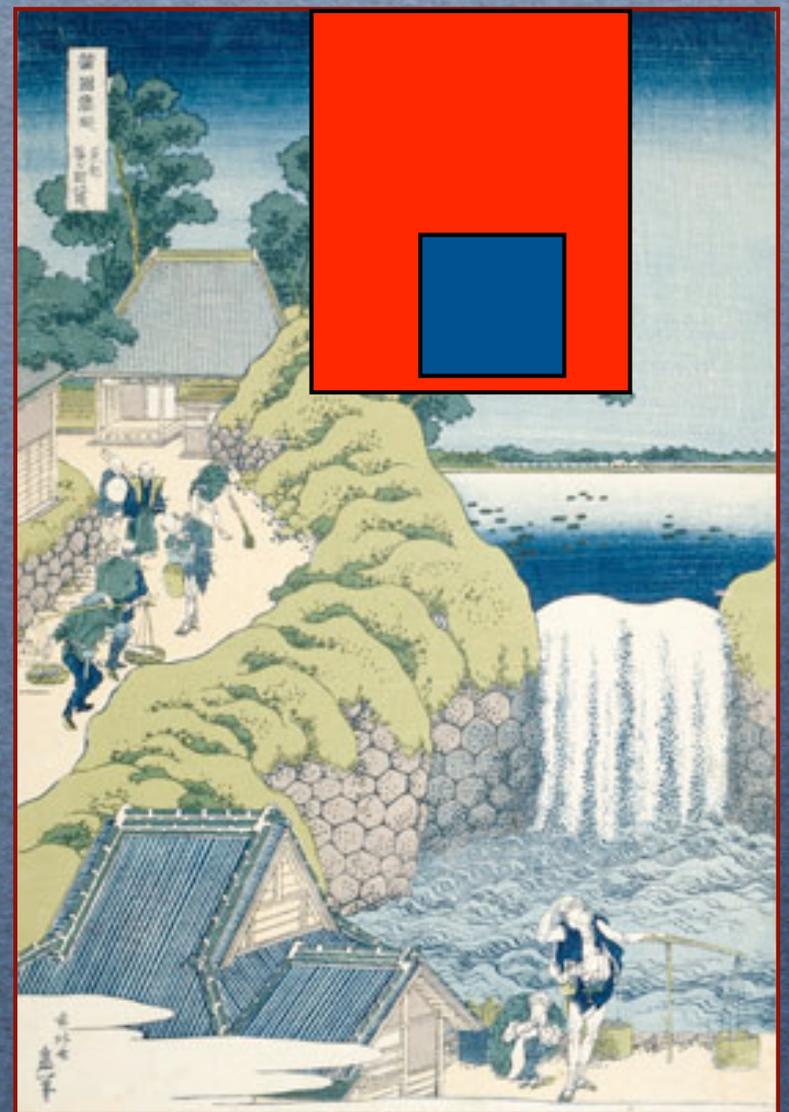
Hokusai. Catarata Amida



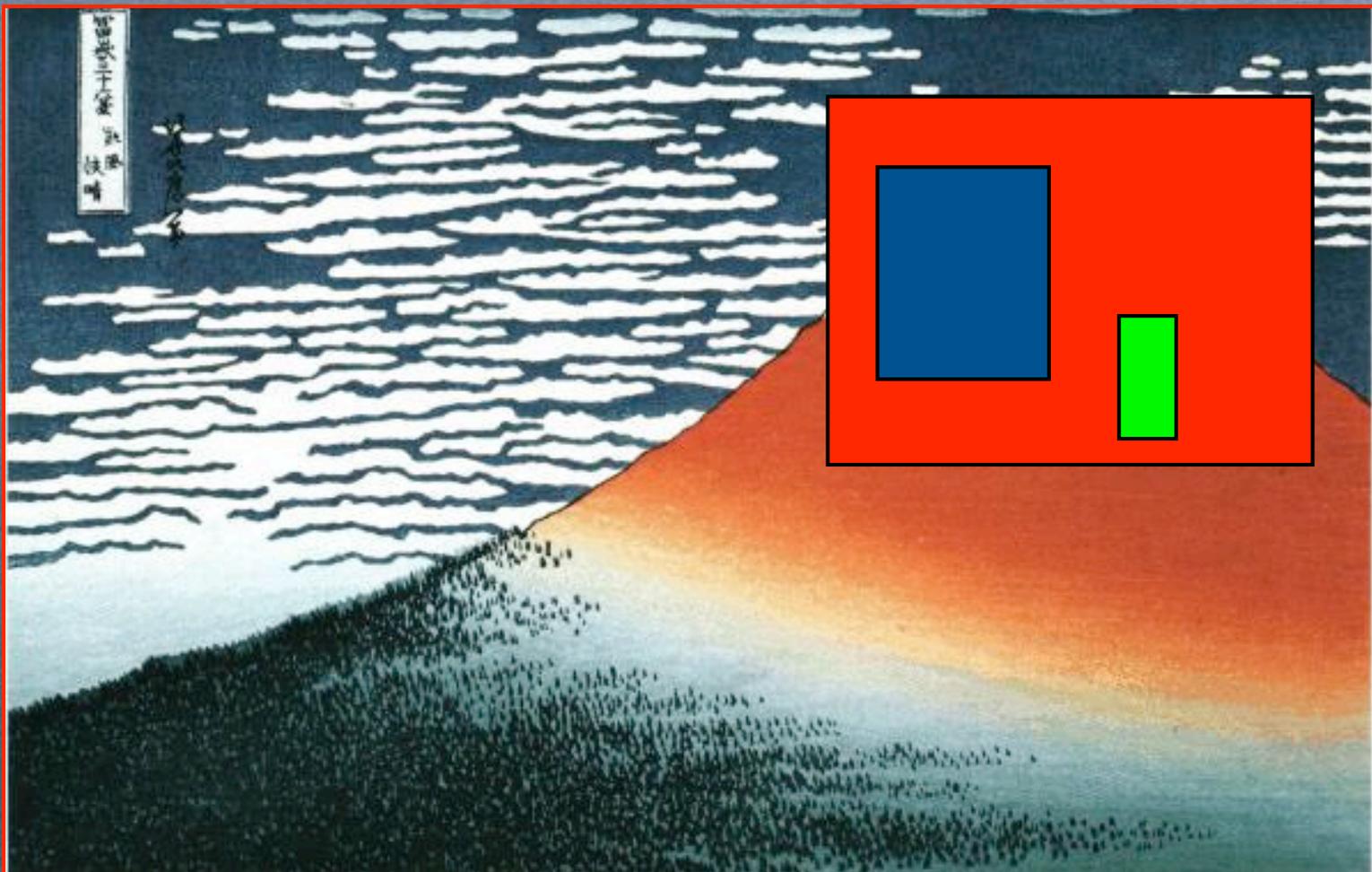
Hokusai. Catarata Kirifuri.



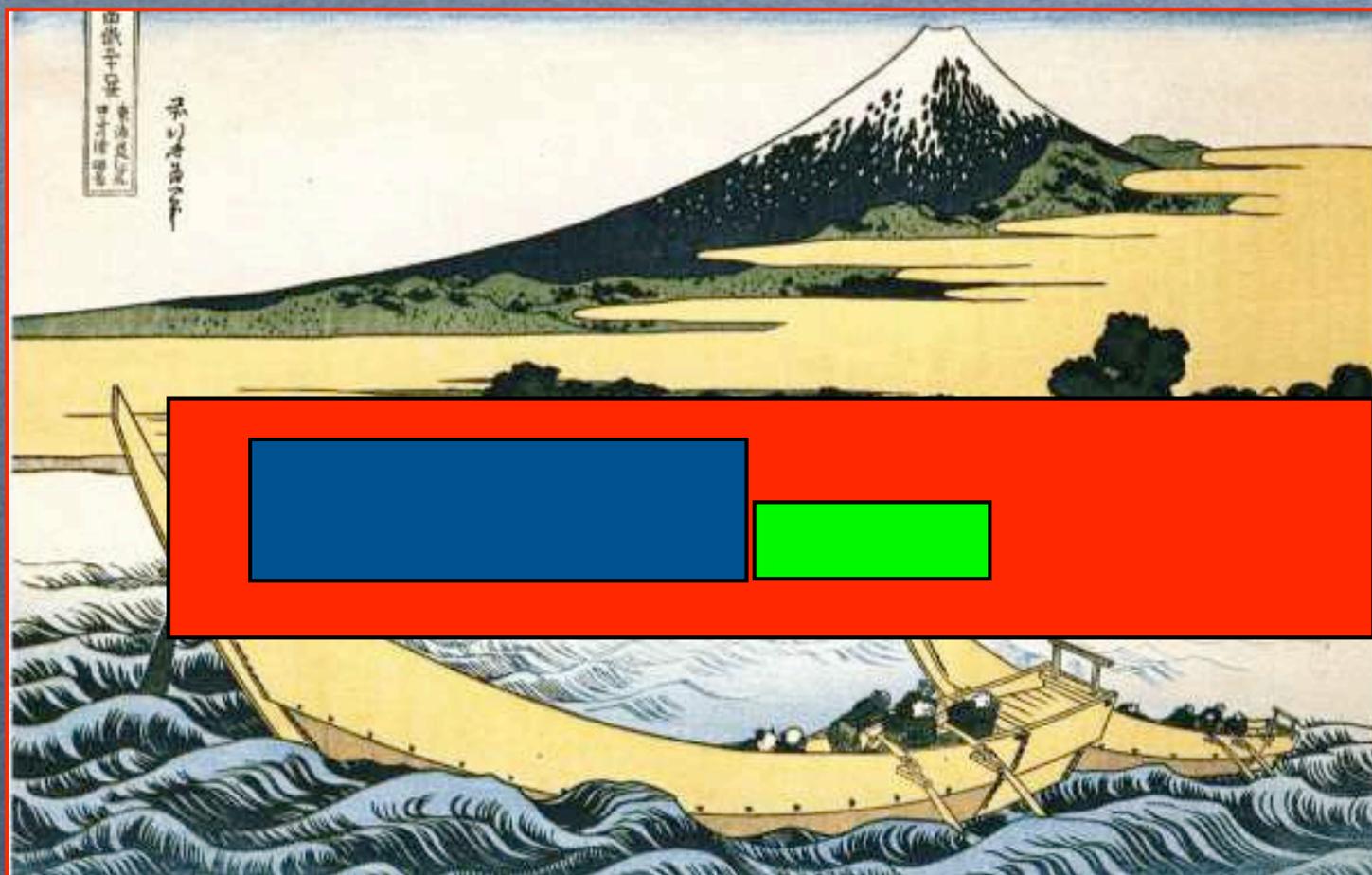
Hokusai.
Una vista del monte Fuji



Hokusai.
Una catarata en Aoigaoka



Hokusai. Una vista del monte Fuji



Hokusai. Una vista del monte Fuji

La geometría de la naturaleza

Las formas naturales son tan irregulares y fragmentadas que, en comparación con la geometría euclidiana, la naturaleza presenta un grado superior de complejidad.

El número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos, infinito.

¿Cuánto mide la frontera entre Portugal y España?

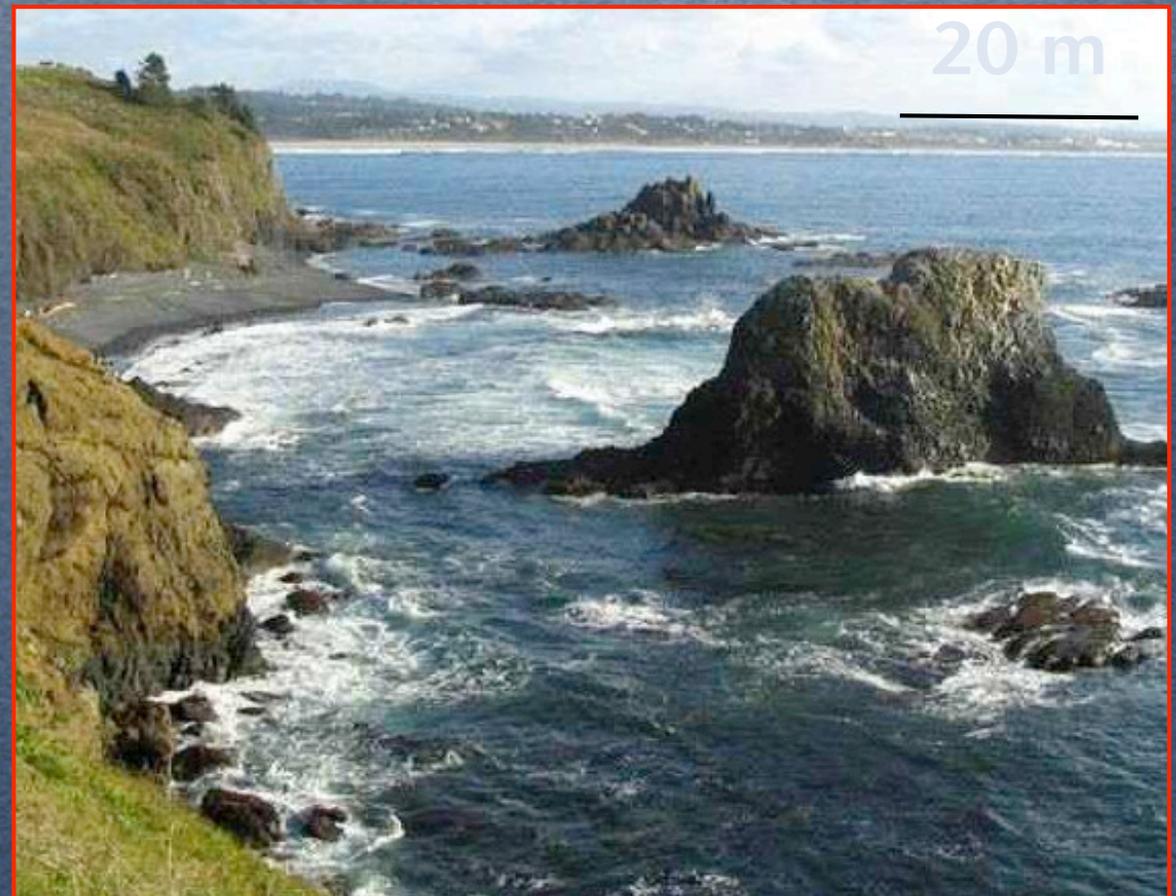
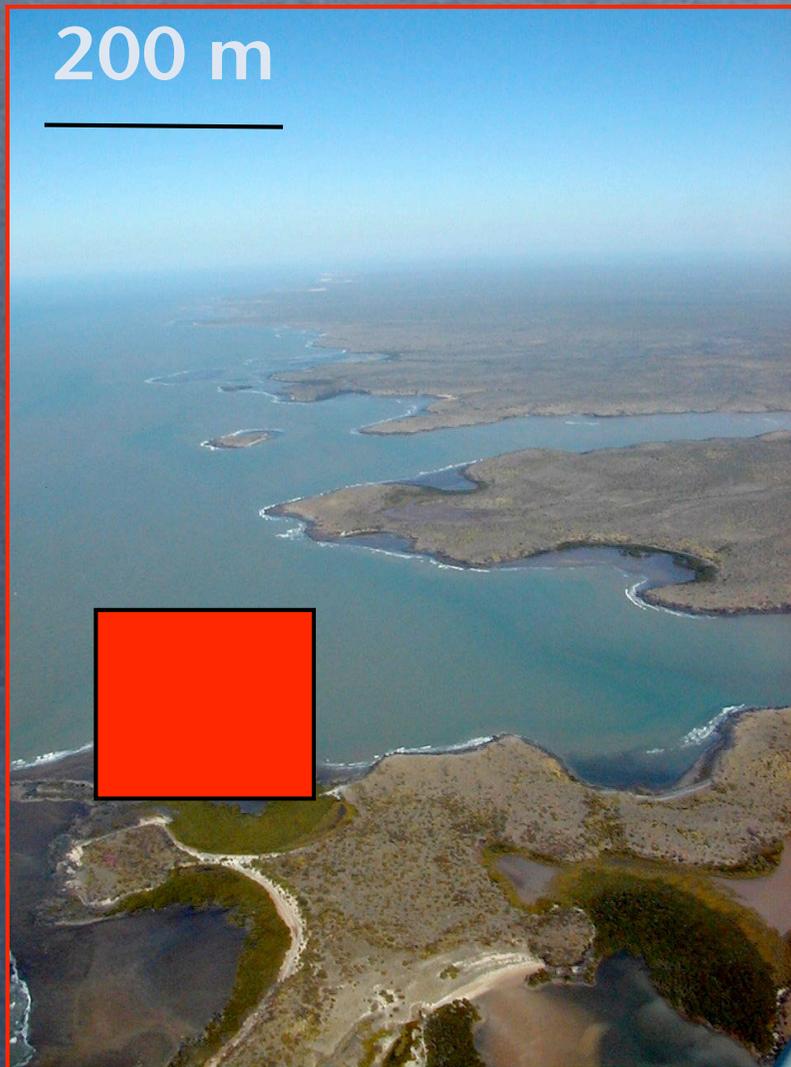
Lewis Fry Richardson, 1925

Para los portugueses, 1214 km,
para los españoles 987 km.

¿A qué se deben esas
diferencias?

Principalmente a que España es un país más grande que Portugal y a que sus mapas tienen una escala mayor, es decir, con menor precisión en los detalles.

*La pregunta que planteó en 1970 Mandelbrot fue:
¿cuánto mide la costa de Gran Bretaña?*



La costa de Gran Bretaña e Irlanda



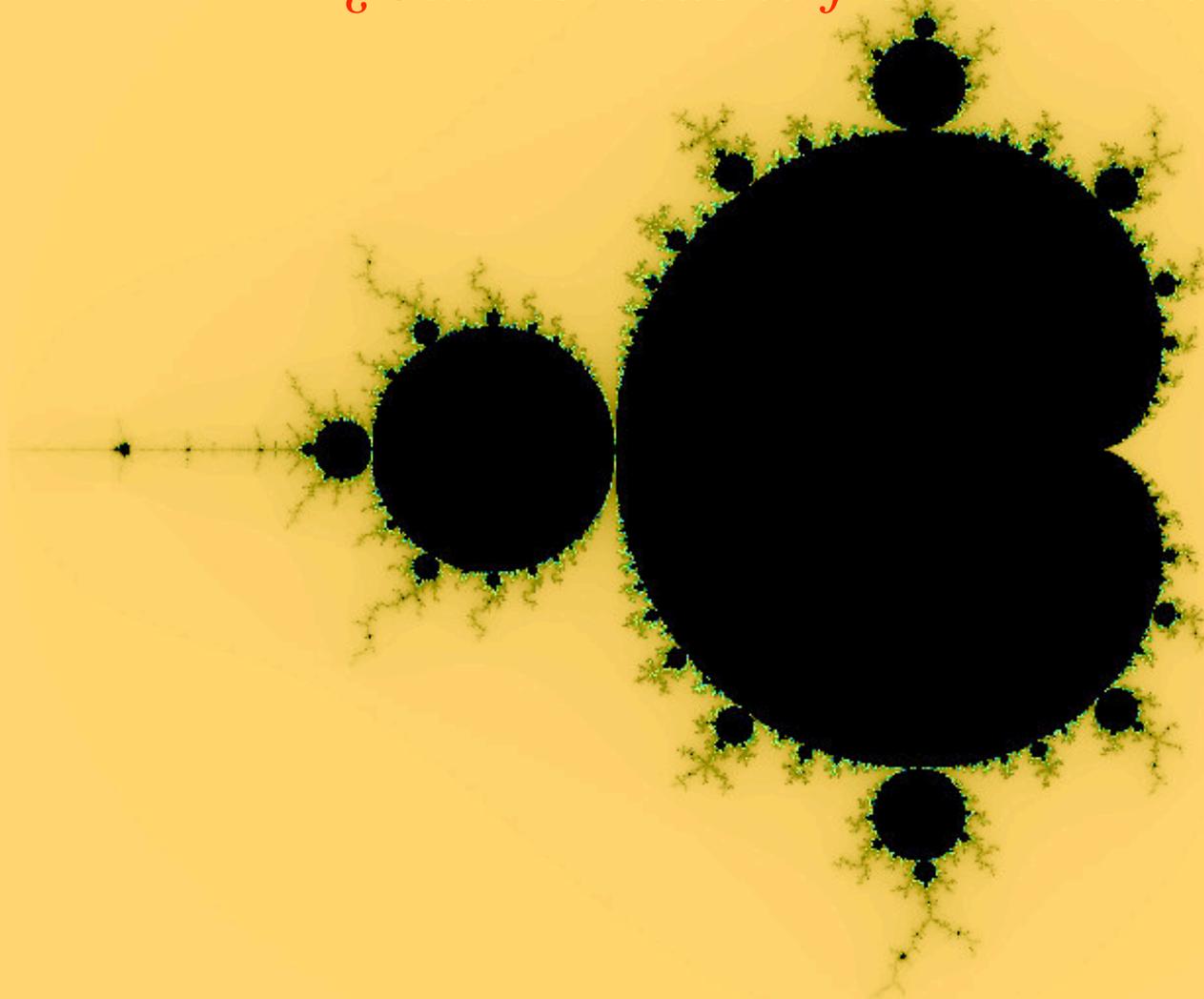
1:6.000.000

1:20.000.000

1:80.000.000

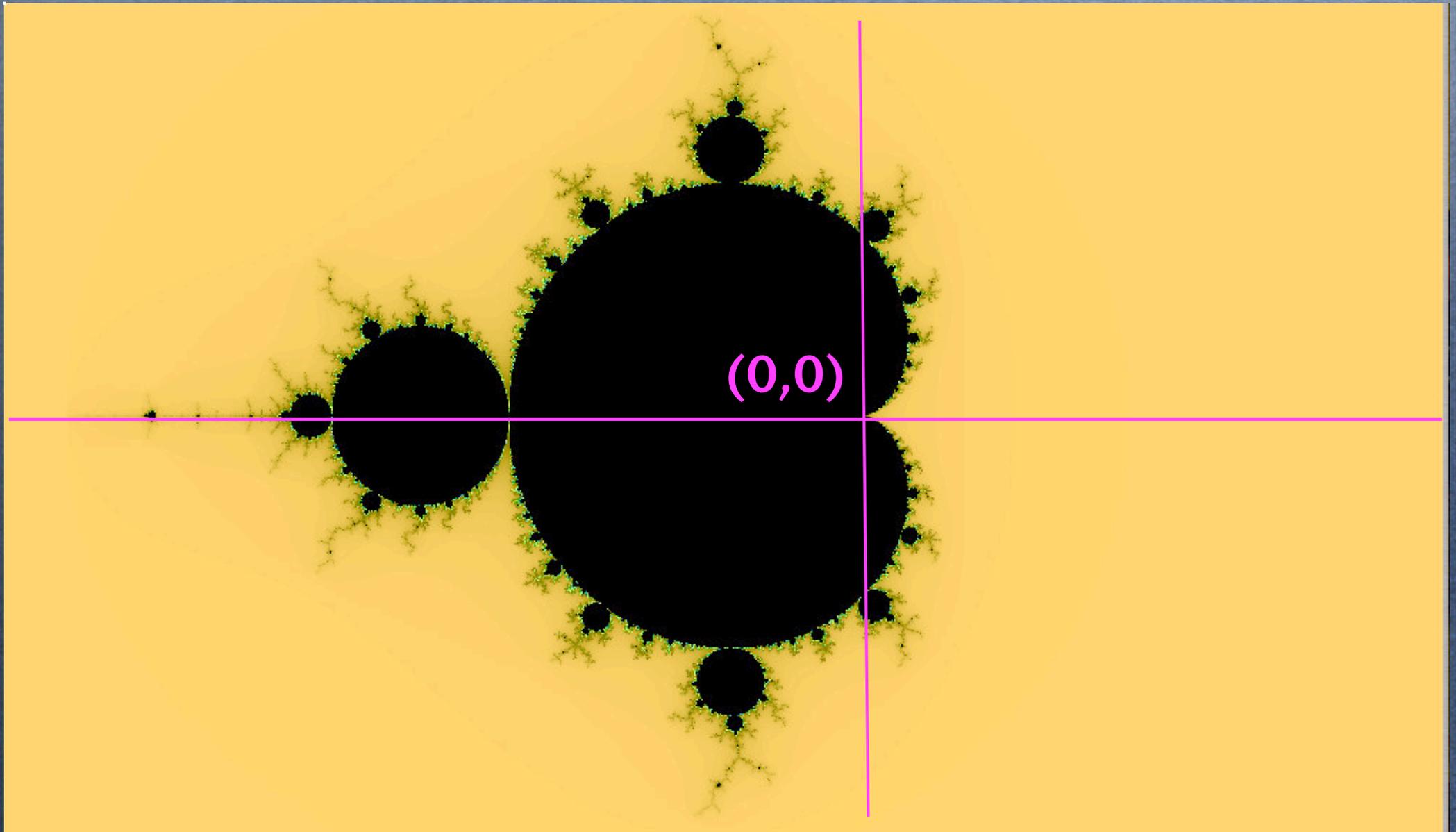
A medida que disminuye la escala,
se van perdiendo detalles más finos.

*Oasis (matemático). rodeado de desierto.
¿Cuánto mide la frontera de este oasis?*



Conjunto de Mandelbrot

Conjunto de Mandelbrot



Conjunto de Mandelbrot

$$c = a_0 + ib_0 = z_0$$

Punto c en el plano complejo

¿Pertenece al Conjunto de Mandelbrot?

$$z_1 = z_0^2 + c$$

$$z_1 = a_1 + ib_1$$

Nuevo punto en el plano complejo

$$r_1 = |a_1^2 + b_1^2|^{1/2}$$

Se calcula su módulo

Se calcula su módulo

$$r_1 = \left| a_1^2 + b_1^2 \right|^{1/2}$$

Condición

Si $r_1 \geq 2$ No pertenece

Si $r_1 \leq 2$ Nueva Iteración

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1}$$

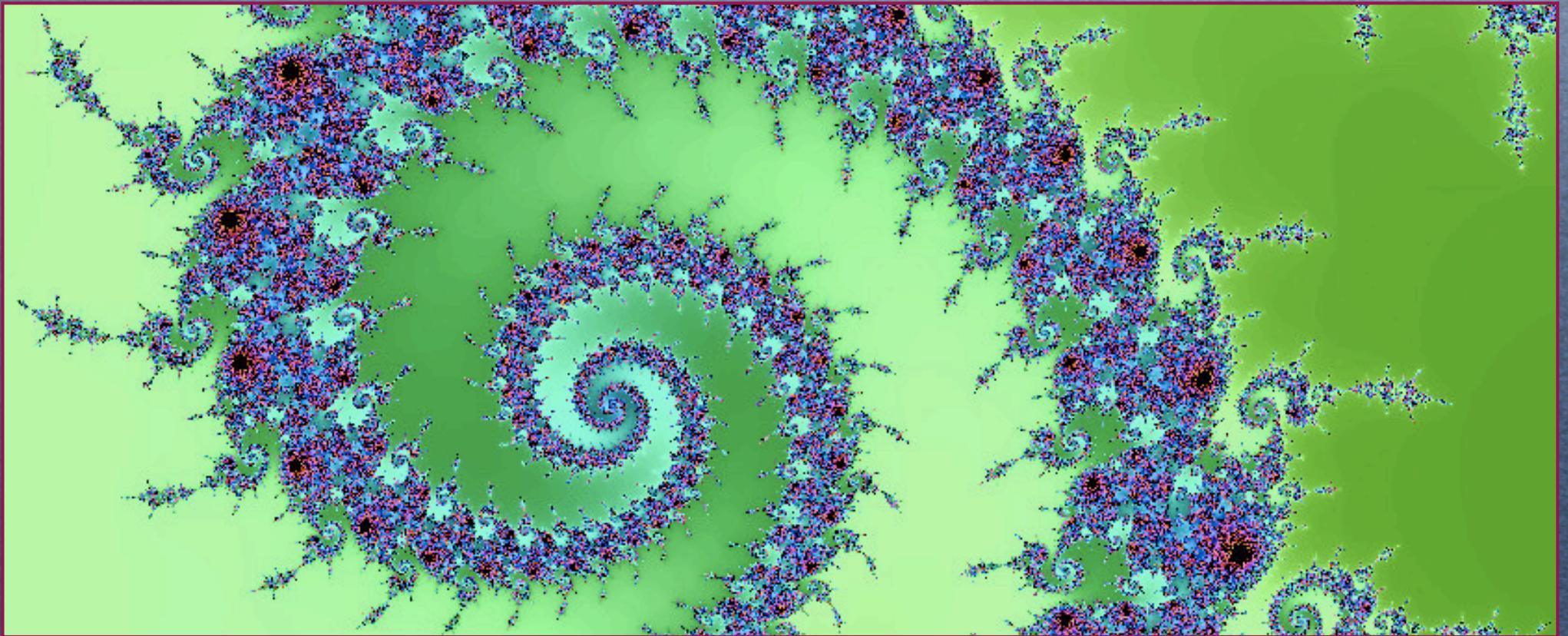
$$r_{n+1} = |a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2|^{1/2}$$

Si $r_{n+1} \geq 2$ No pertenece

Si $r_{n+1} \leq 2$ Nueva Iteración

Si después de 100 (1000) iteraciones, el módulo nunca ha superado 2, se considera que el punto c pertenece al Conjunto de Mandelbrot, y se pinta de negro.

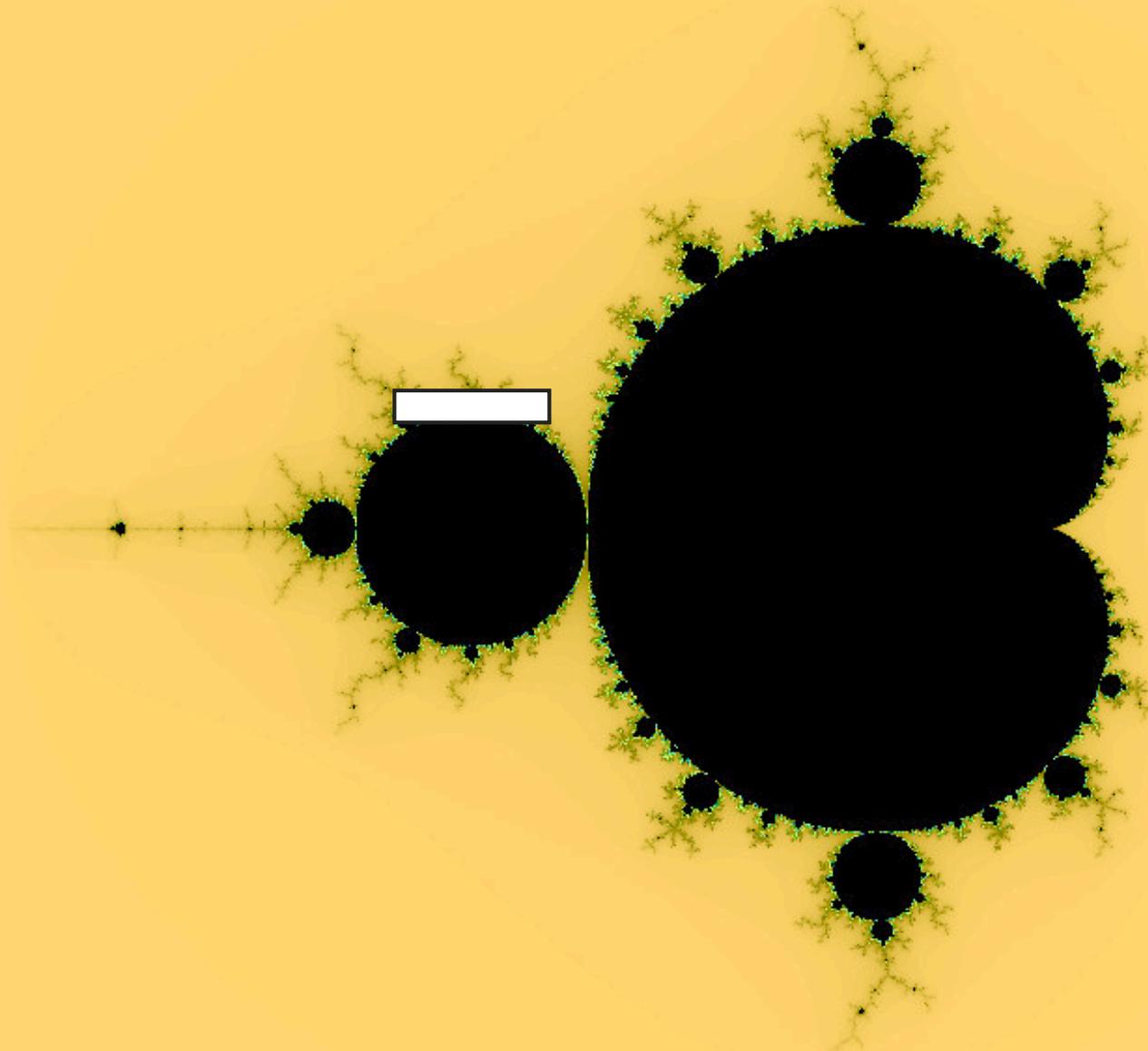
Explicar cómo se han producido
algunos de los fractales expuestos



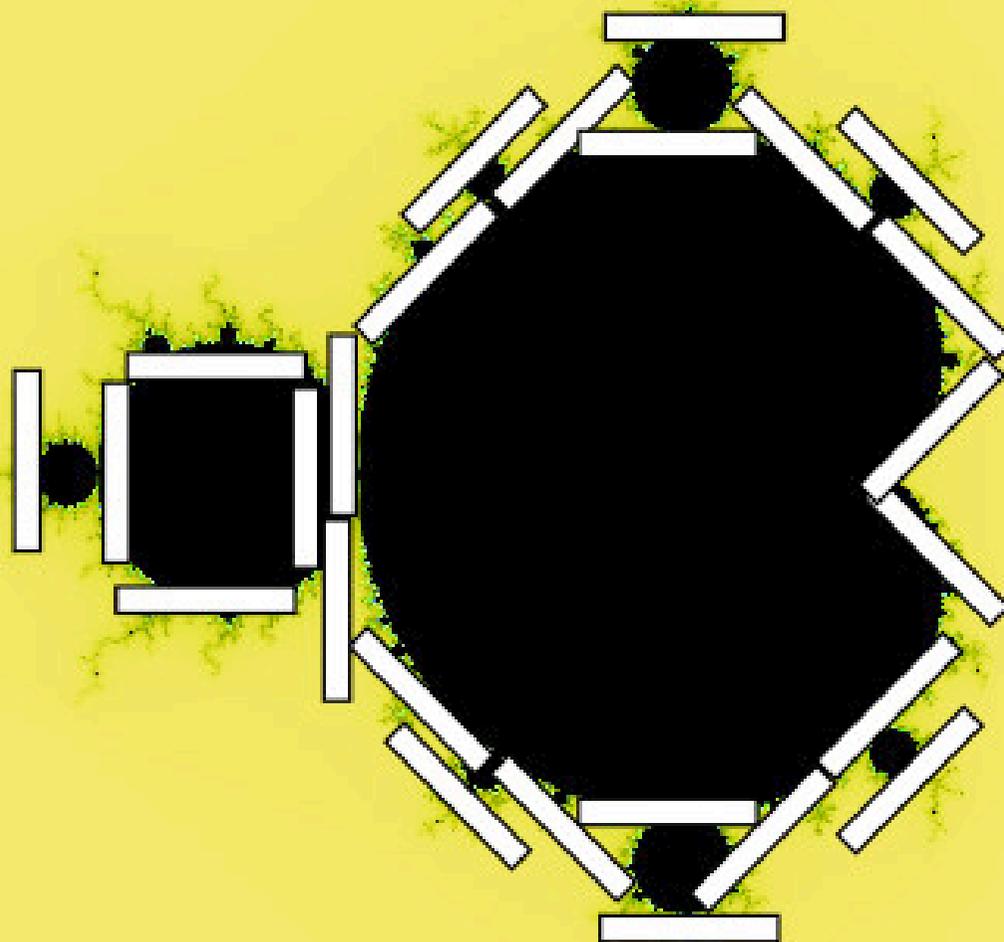
Mandelbrot on Cocoa

Tener el algoritmo es como tener todos los mapas

Conjunto de Mandelbrot

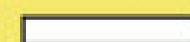


Escaia 1:1000



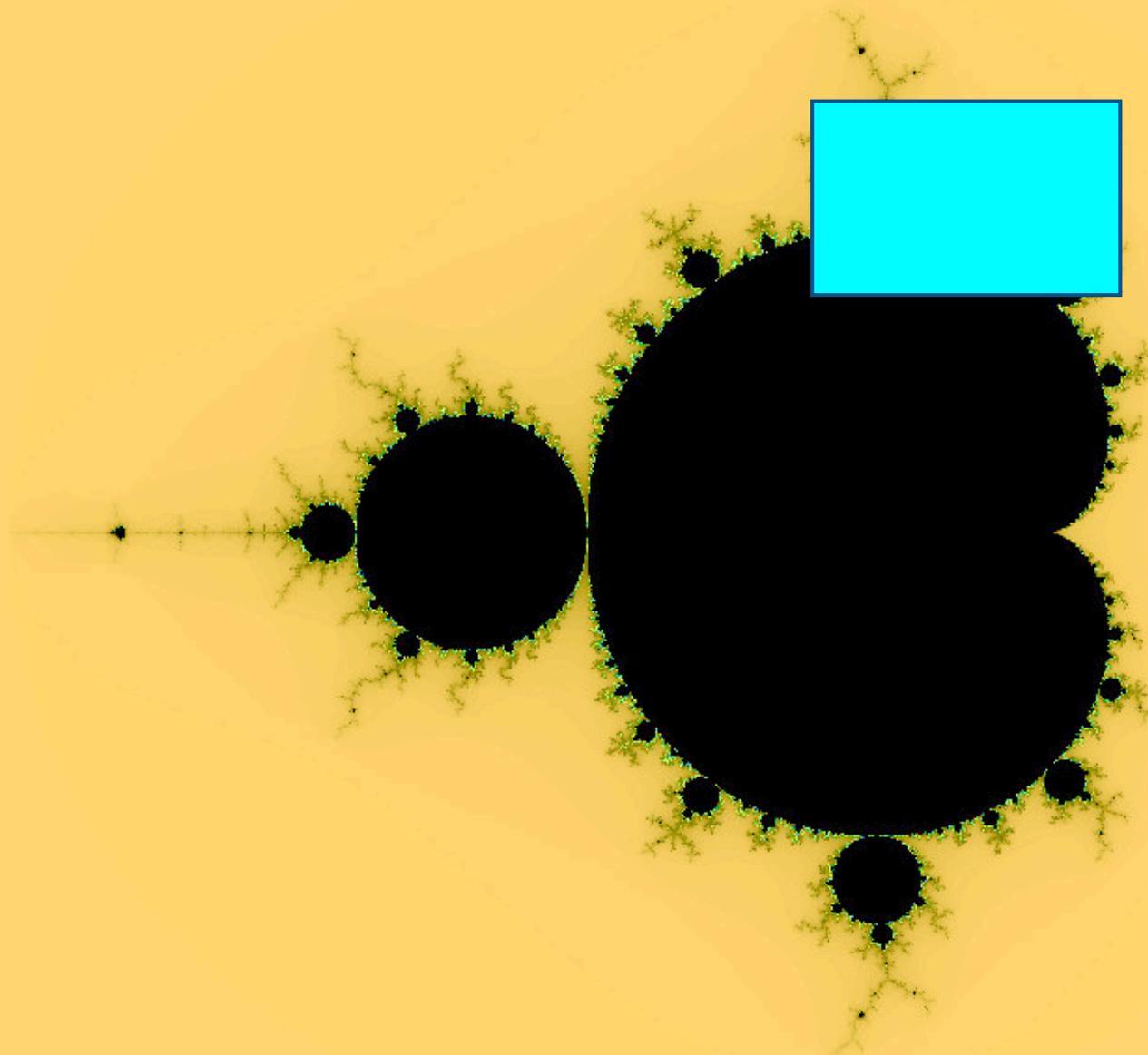
29 unidades

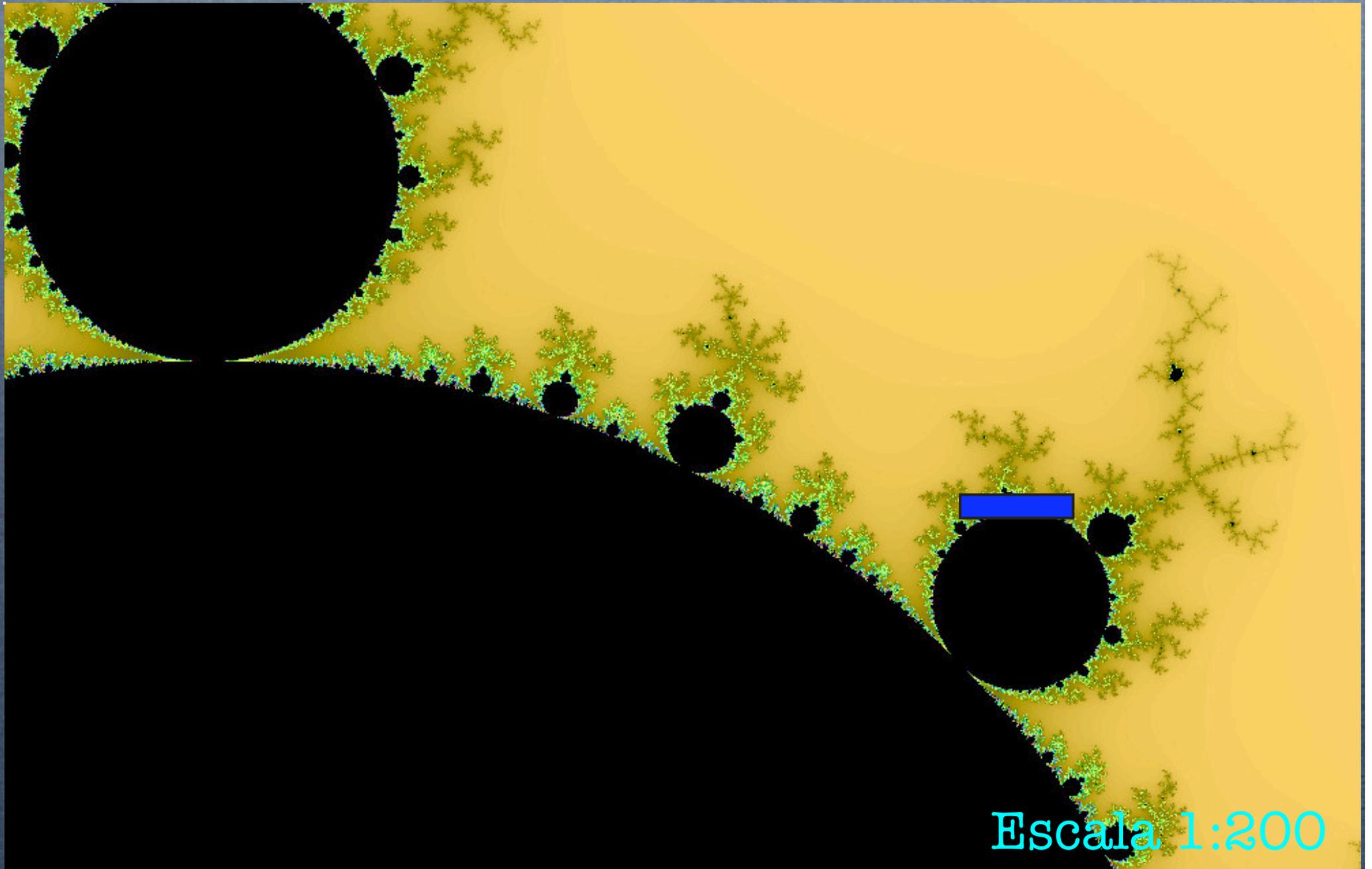
Unidad



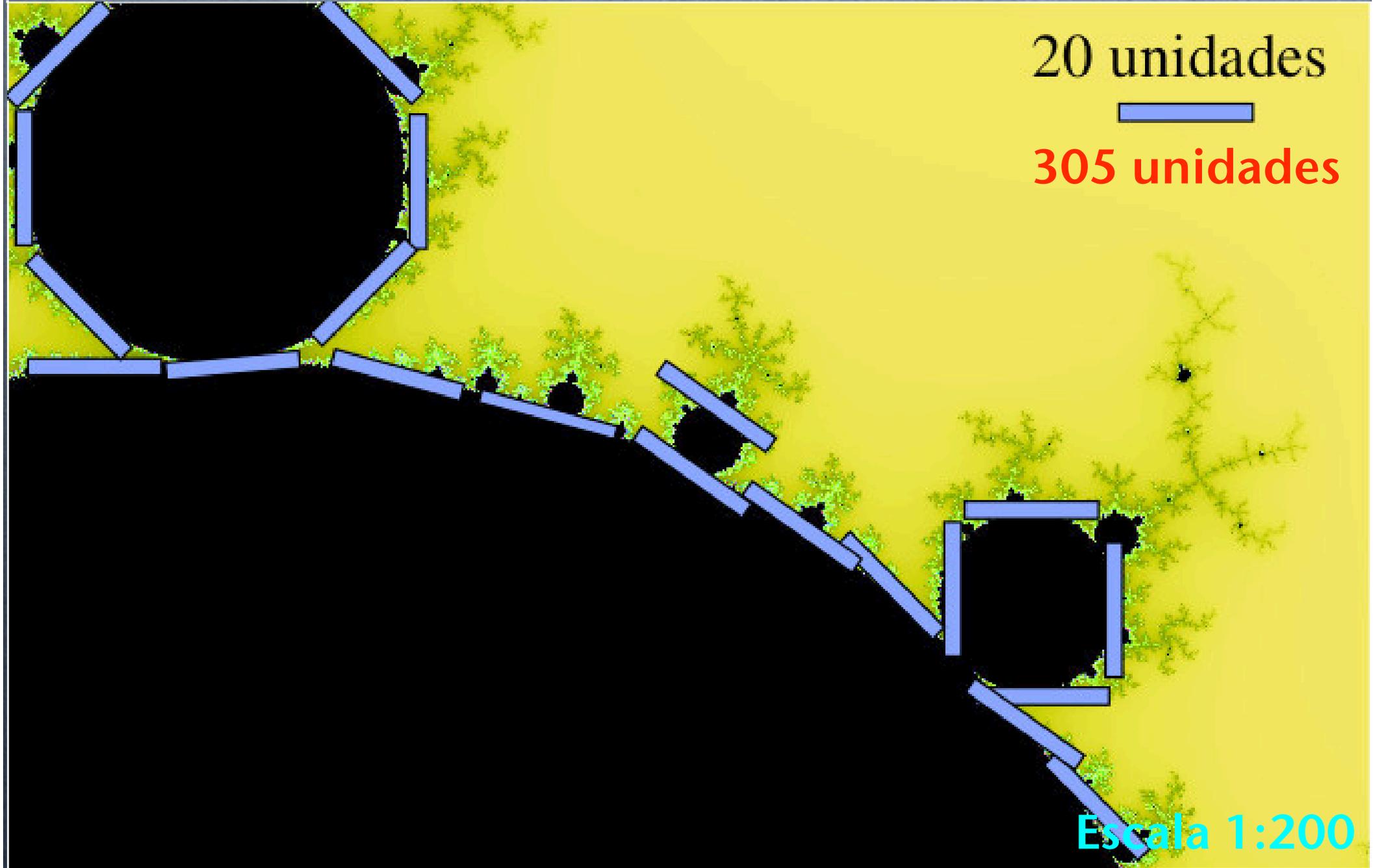
Escala 1:1000

Ampliación del mapa

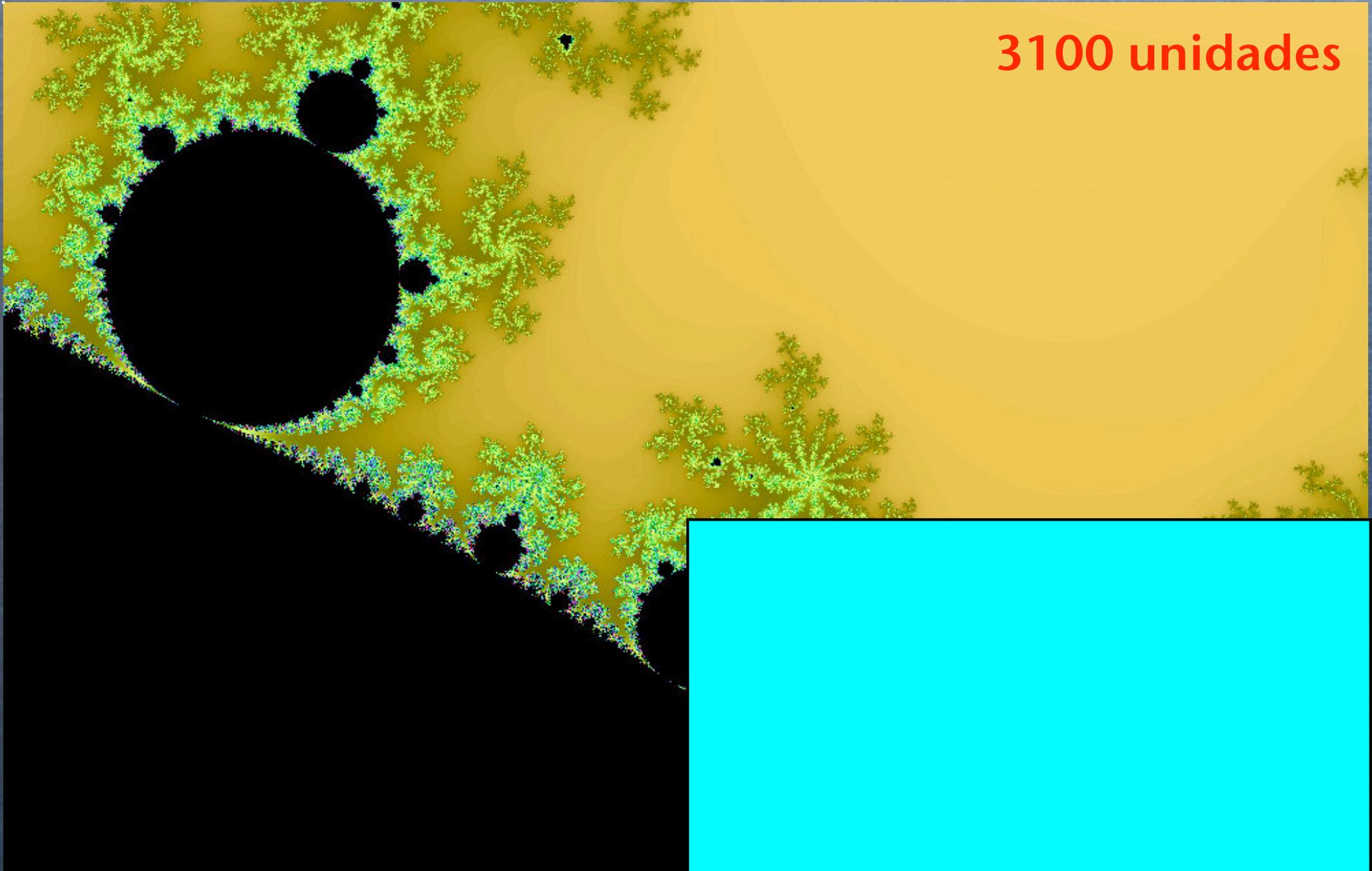




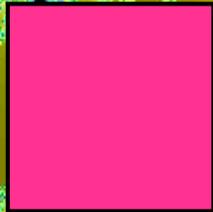
Escala 1:200



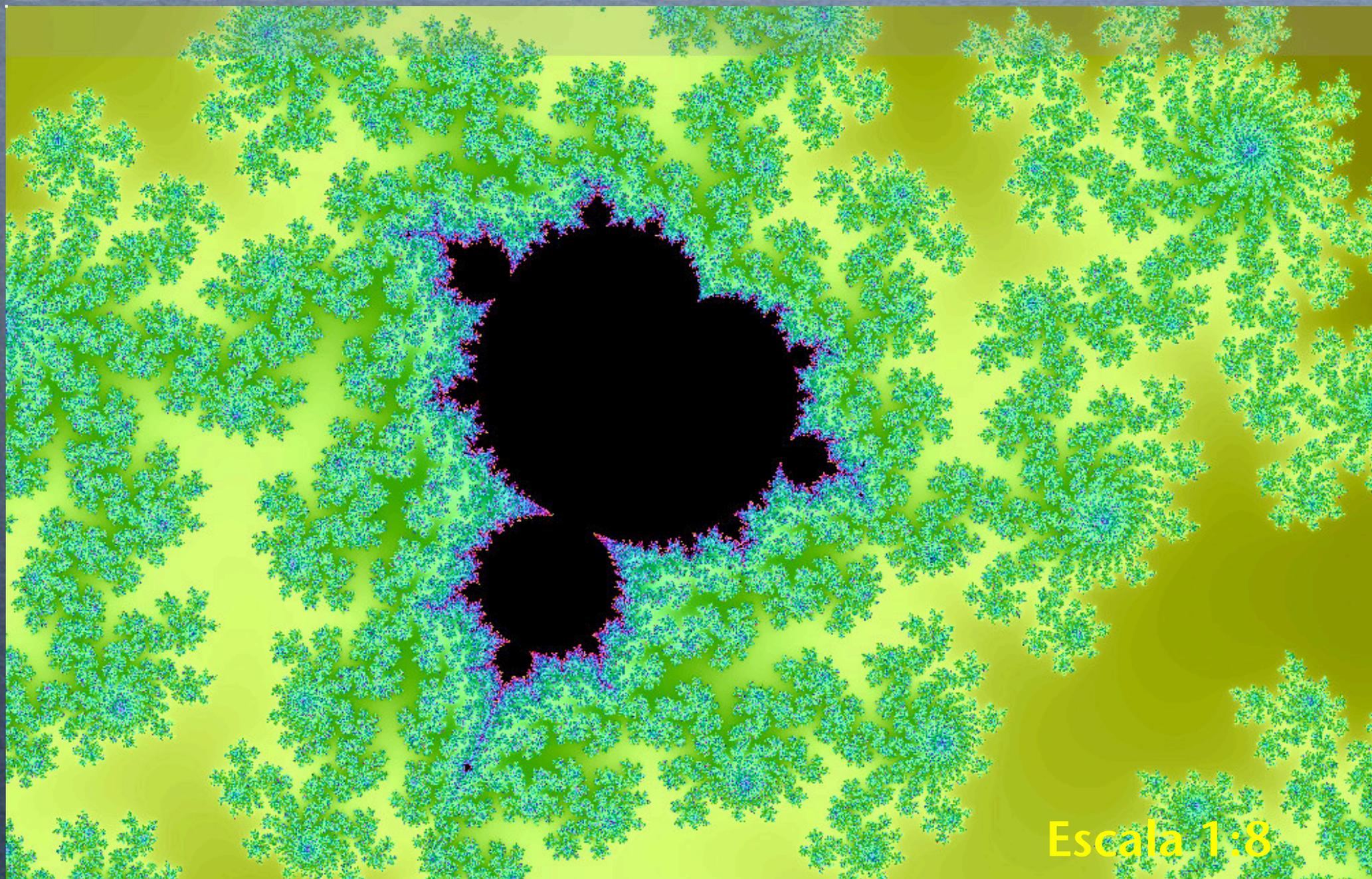
3100 unidades



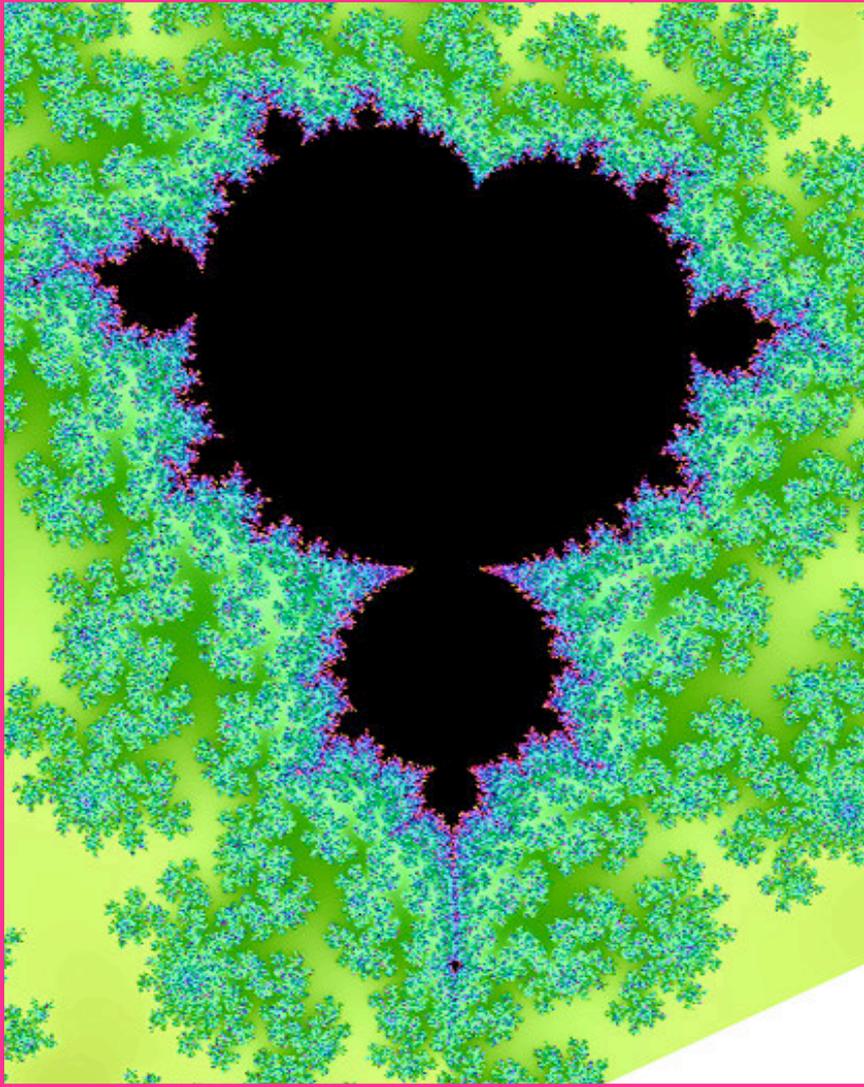
33505 unidades



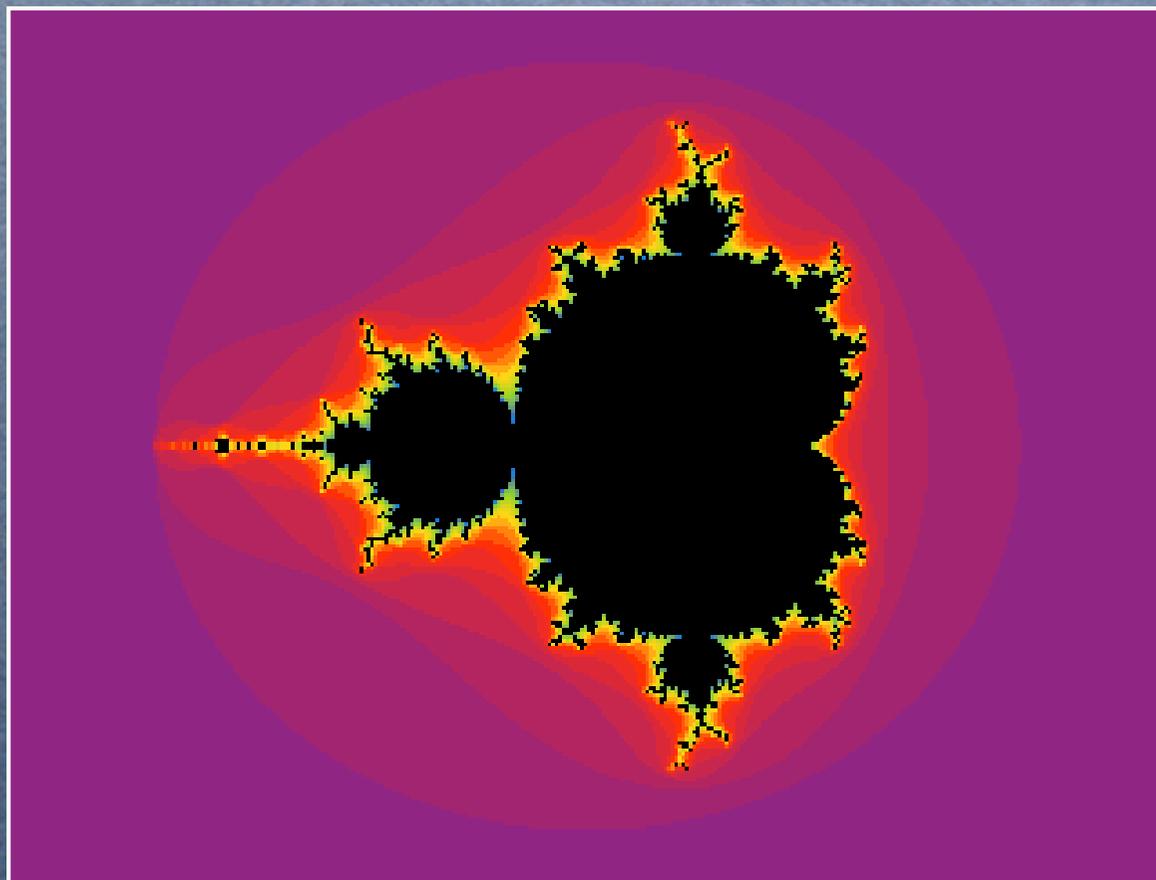
Escala 1:8

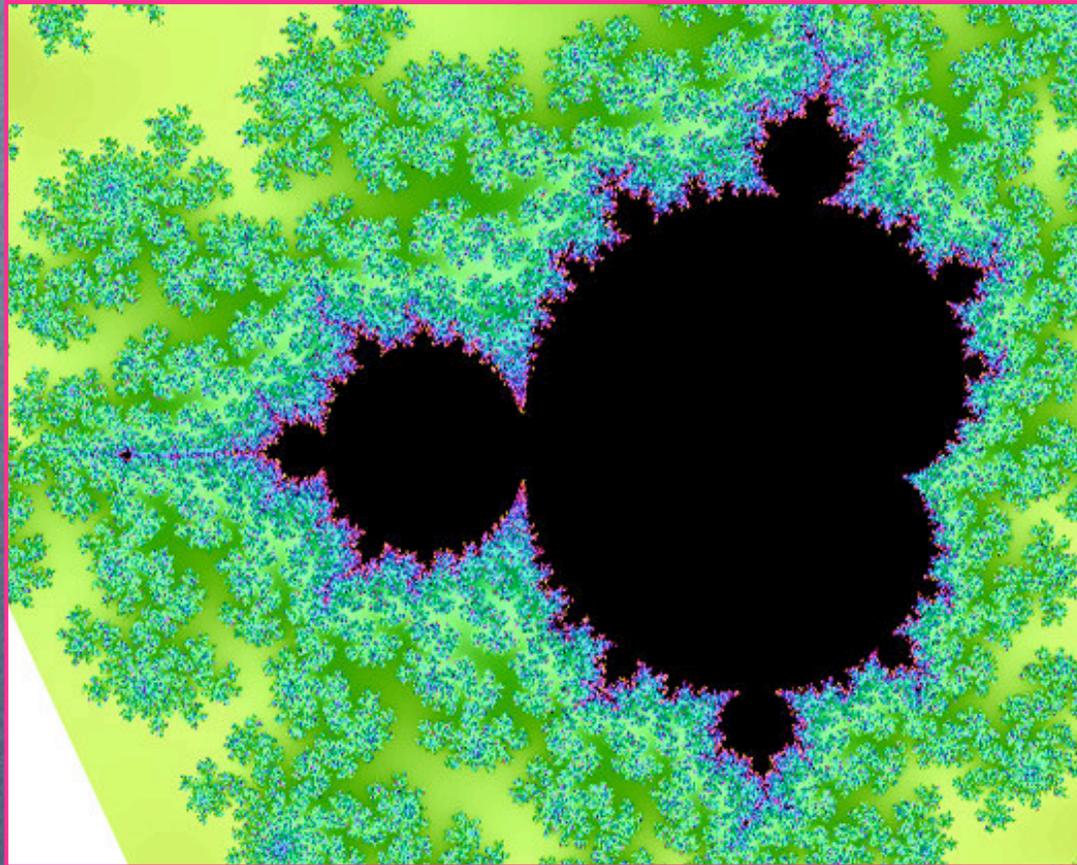


Escala 1:8



Entrevista con Benoit Mandelbrot



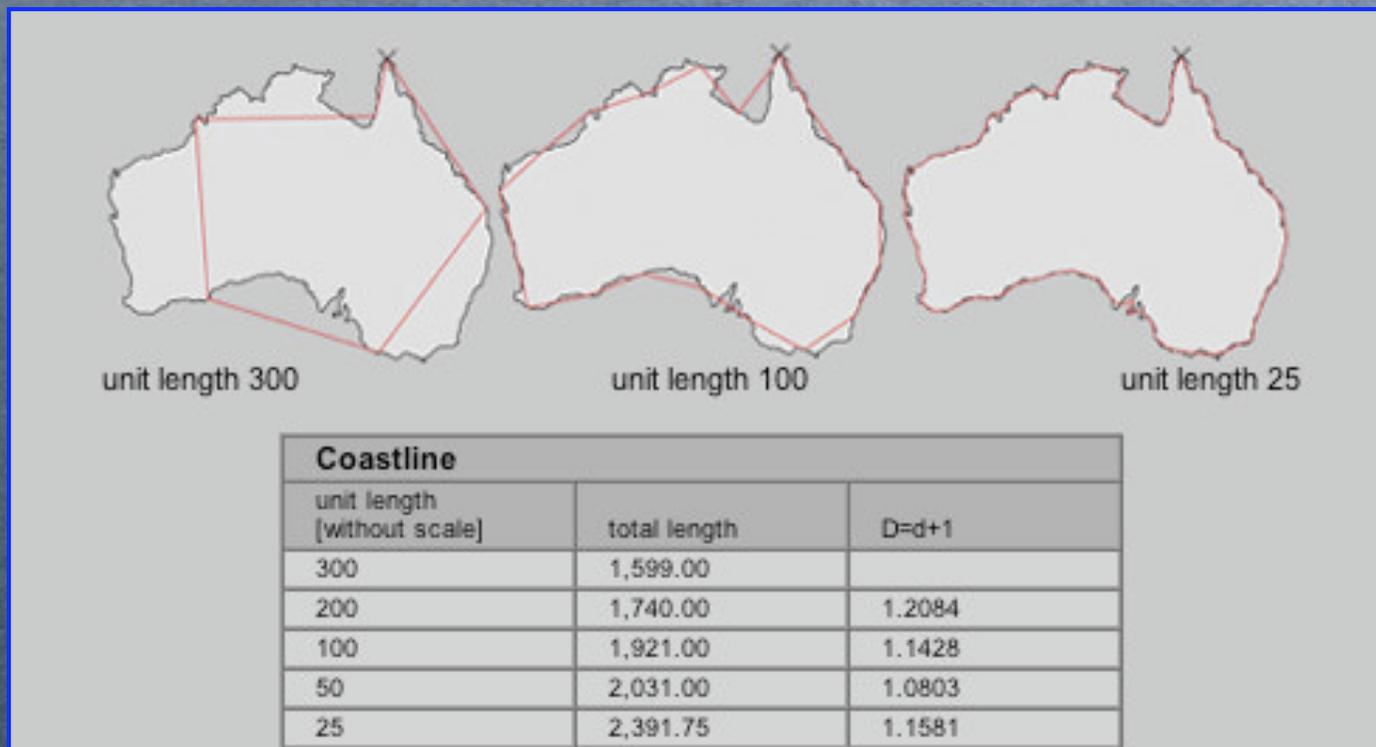


Conclusión 1: La costa del conjunto de Mandelbrot, cualquier costa, presenta --casi-- un aspecto similar a cualquier escala de observación.

Conclusión 2: la costa del conjunto de Mandelbrot, la costa de Inglaterra, cualquier costa, tiene una longitud infinita.

¿Cómo puede caracterizarse la rugosidad de una costa o de una frontera?

No por su longitud, que siempre es infinita.



Se desearía poder disponer de una medida que distinga entre la rugosidad de la costa de Noruega, que uno sospecha alta, y la de la frontera de Arizona, que uno sospecha baja.

Dimensión de un objeto

Los objetos del mundo físico-matemático euclidiano pueden ser puntos, dimensión 0, unidimensionales (líneas rectas), dimensión 1, bidimensionales (superficies lisas), dimensión 2, tridimensionales (volúmenes compactos), dimensión 3.

La dimensión es un buen índice para distinguir la naturaleza espacial de un objeto

¿Cómo se mide, en general, la dimensión de un objeto?

(Lo bueno de los matemáticos es que, a veces, se hacen preguntas que los demás sabemos responder --siempre que no nos pregunten--.)

Cálculo de la dimensión Hausdorff-Besicovich de un objeto

Se elige una unidad de medida, un cubo de lado r_1 , y se mide el número de unidades que son necesarias para cubrir el sistema, por completo obteniéndose el valor N_1 .

La unidad de medida se reduce, por ejemplo, a la mitad, $r_2=r_1/2$, y se mide el número de las nuevas unidades que ahora son necesarias para recubrir el sistema, N_2 .

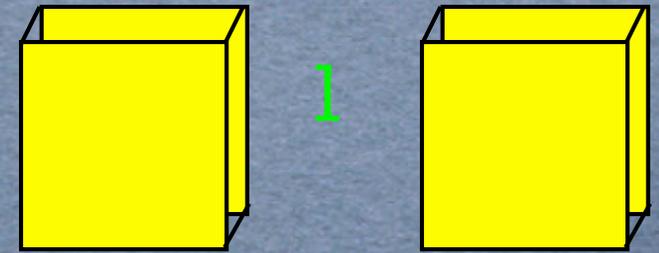
La unidad de medida vuelve a reducir, $r_3=r_2/2$, y se mide el número de las nuevas unidades que ahora son necesarias para recubrir el sistema, N_3 .

$$N(r) = A \left(\frac{1}{r} \right)^d$$

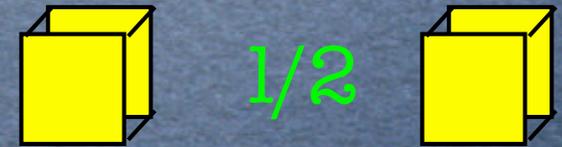
El objeto tiene dimensión Hausdorff-Besicovich d

Dimensión de un punto

Unidad 1, 1 elemento



Unidad 1/2, 1 elemento



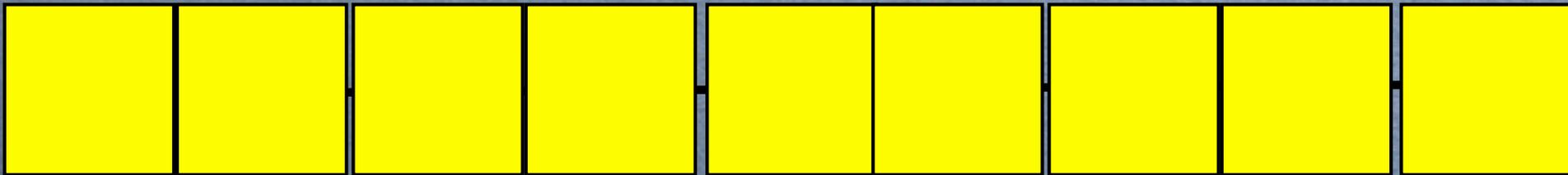
Unidad 1/4, 1 elemento



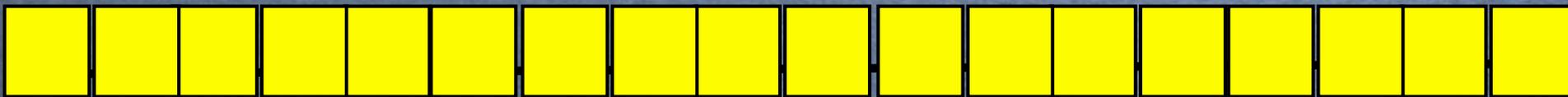
Un punto tiene $d=0$

$$N(l) = A \left(\frac{1}{l} \right)$$

Dimensión de una línea recta



Unidad 1, 9 elementos



Unidad 1/2, 18 elementos

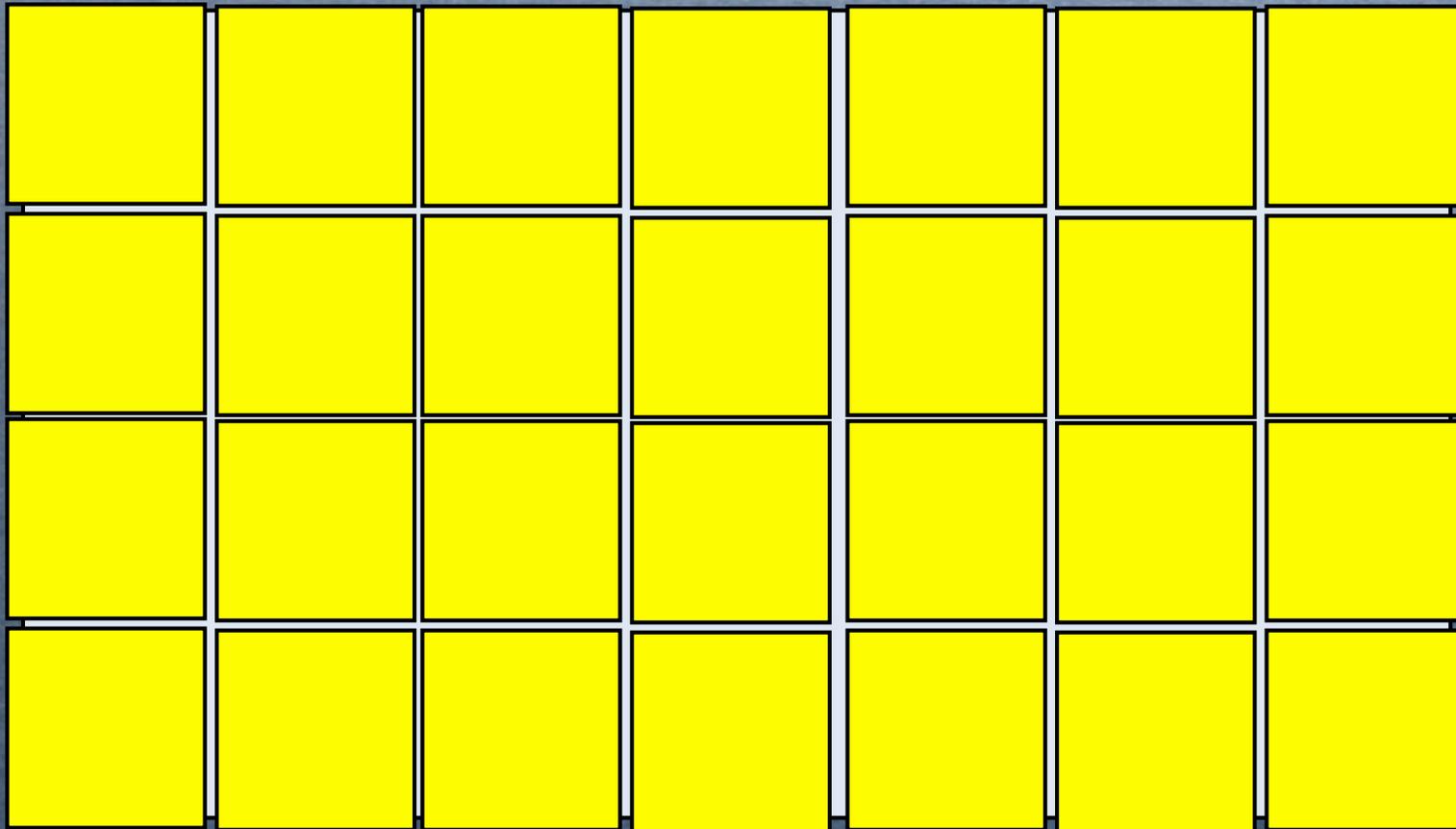


Unidad 1/4, 36 elementos

Una recta tiene $d=1$

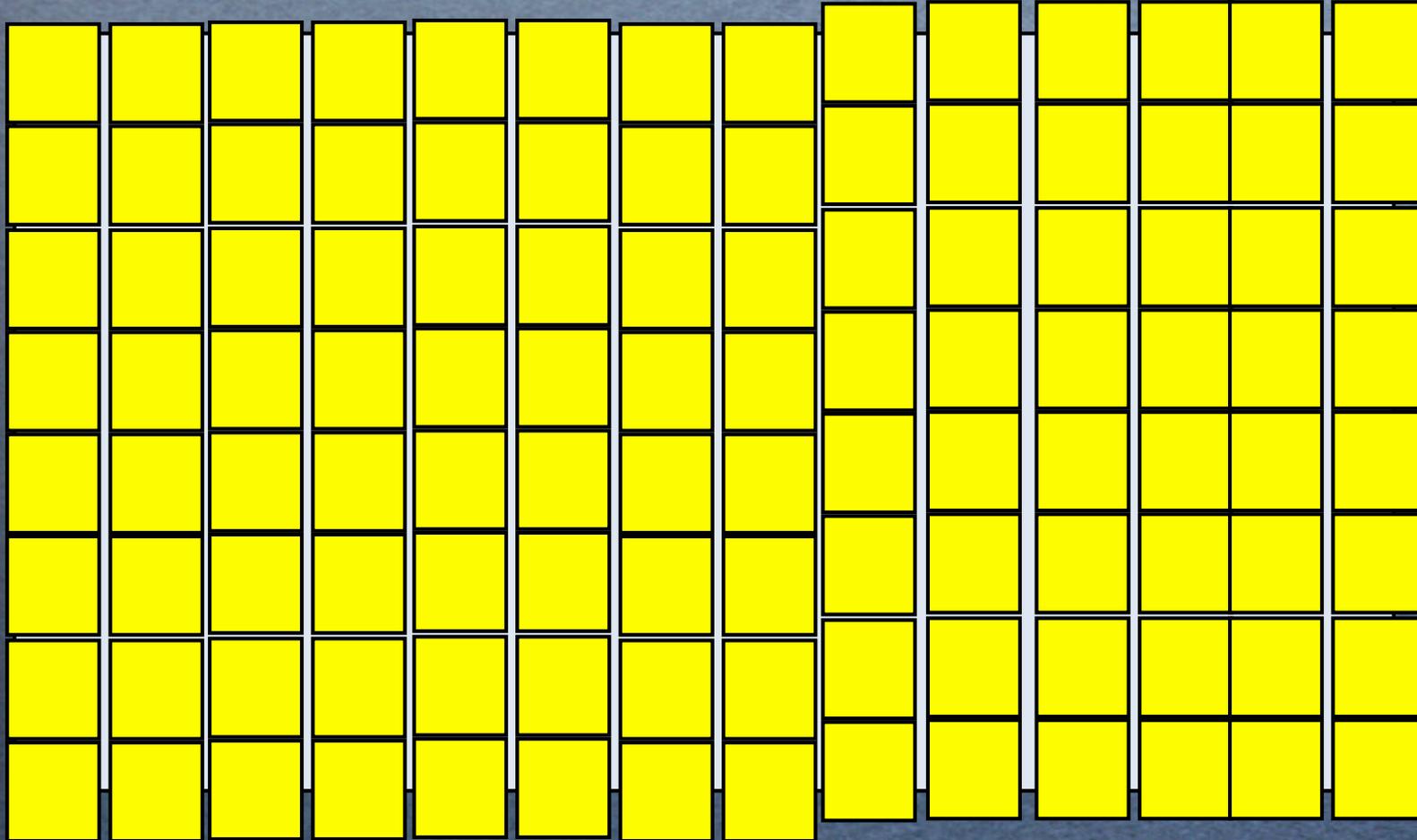
$$N(l) = A \left(\frac{1}{l} \right)$$

Dimensión de una superficie



Unidad 1, 28 elementos

Dimensión de una superficie



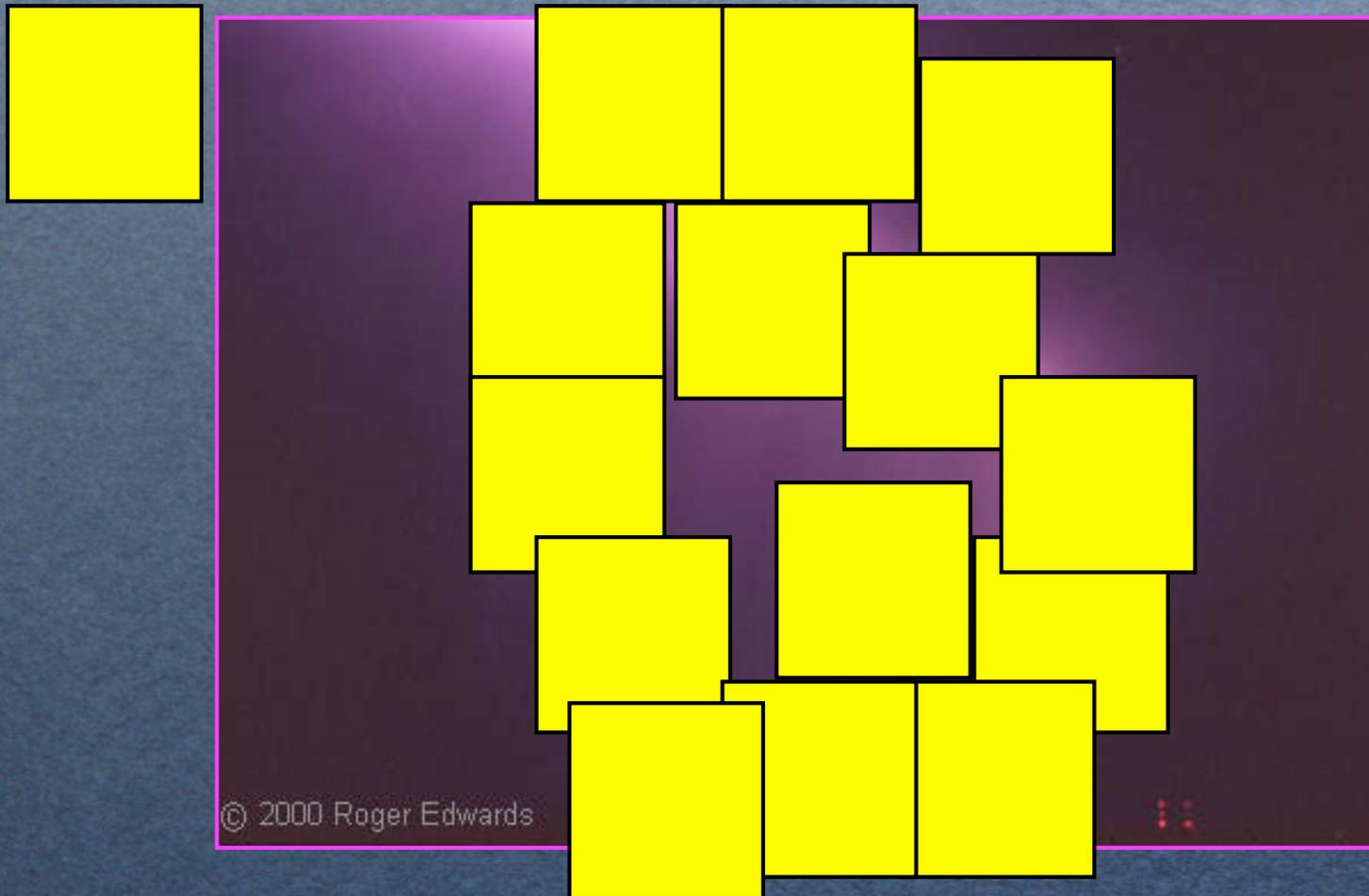
Unidad $1/2$, 112 elementos

Una superficie tiene $d=2$

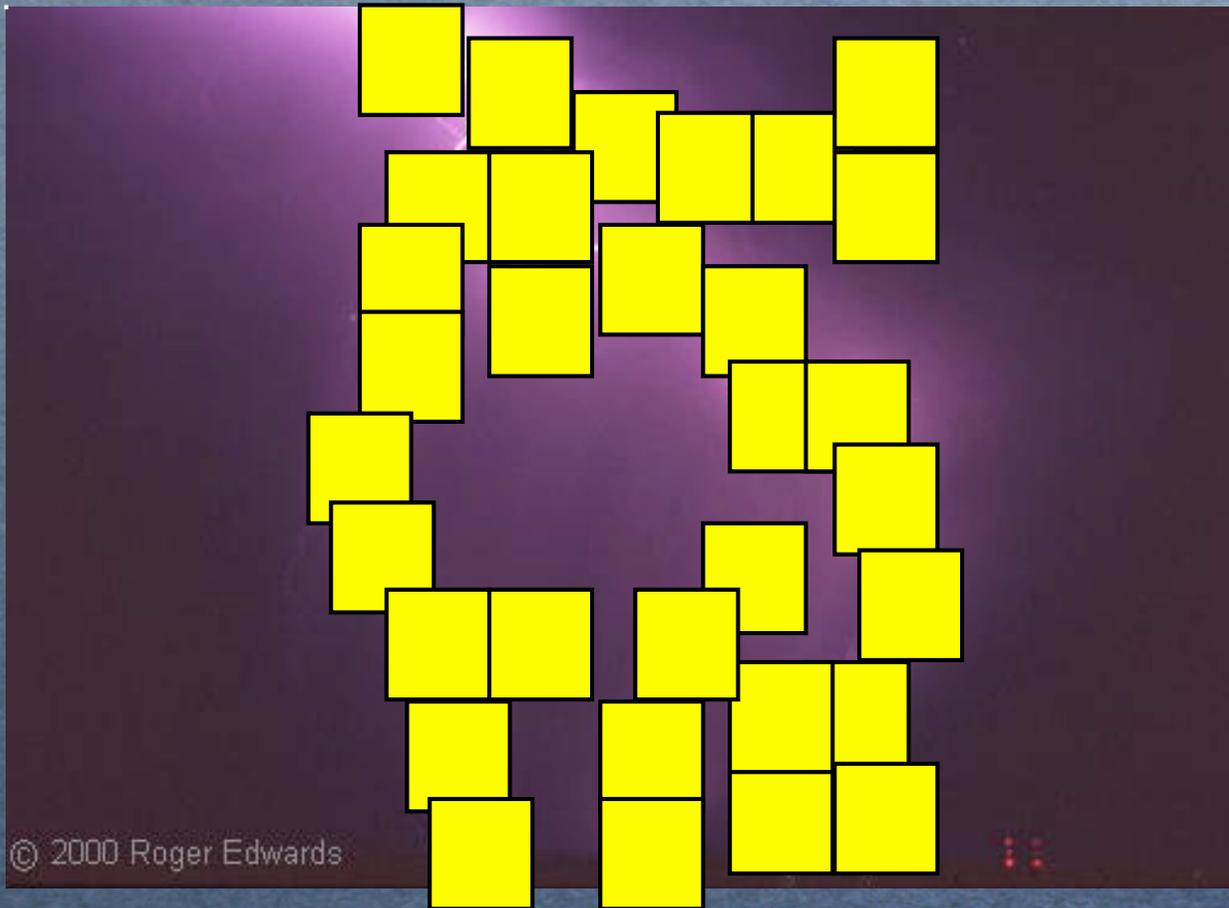
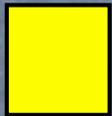
$$N(l) = A \left(\frac{1}{l} \right)$$

Contaje de cajas (*box counting*)

Dimension de un rayo



Unidad 1, 14 elementos



Unidad 1/2, 33 elementos



Unidad 1/4, 79 elementos

$$N(l) = A \left(\frac{1}{l} \right)^d$$

Este rayo tiene $d=1,32$

El número de cajas necesarias para cubrir la imagen del rayo crece con la disminución de la unidad de medida más rápido que si fuera una línea recta, pero más lento que si fuera una superficie.

Dimensión fractal.

Dimensión fractal

La dimensión fractal proporciona, con un sólo número, mucha información sobre el objeto. Si la dimensión fractal está próxima a 1, entonces el objeto será muy parecido a una recta, si está próxima a 2, será semejante a una superficie, etc. Dimensiones fractales intermedias, 0,5, 1,5, 2,5, etc, caracterizarán sistemas complejos.

Dimensión fractal de la costa de Australia $d=1,15$



unit length 300



unit length 100



unit length 25

Coastline		
unit length [without scale]	total length	$D=d+1$
300	1,599.00	
200	1,740.00	1.2084
100	1,921.00	1.1428
50	2,031.00	1.0803
25	2,391.75	1.1581
fractal dimension [slope]		1.1505

Some Exercises on Fractals for High School Students

K. Zembrowska, High School in Kolbuszowa
M. Kuźma, Institute of Physics, University of

Dimensión fractal
del río Vístula $d=1,31$

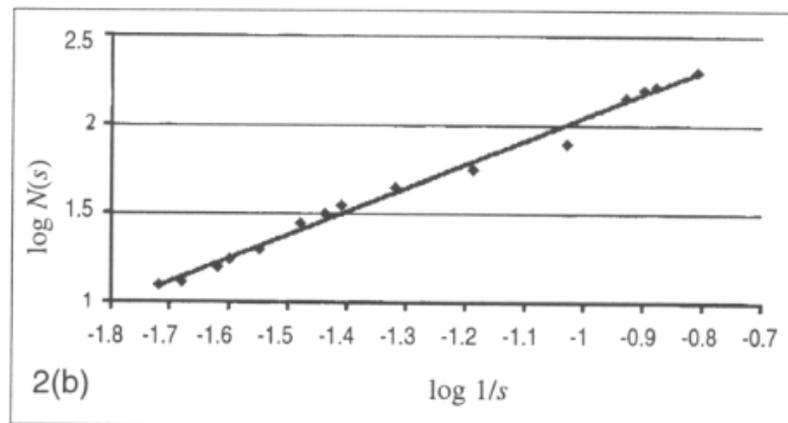
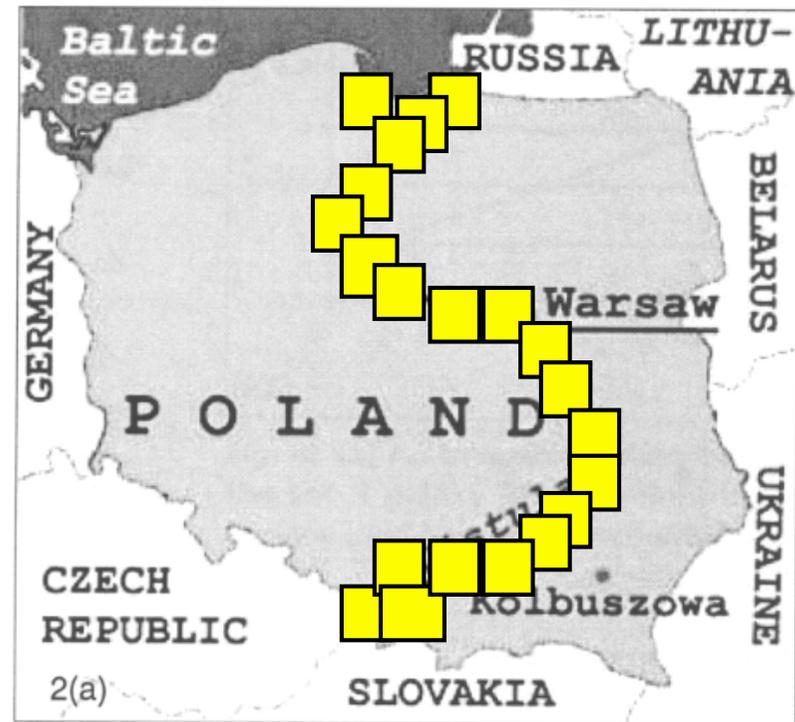


Fig. 2. (a) The Vistula River. (b) Its log-log plot of $N(s)$ as a function of a scale factor $1/s$.



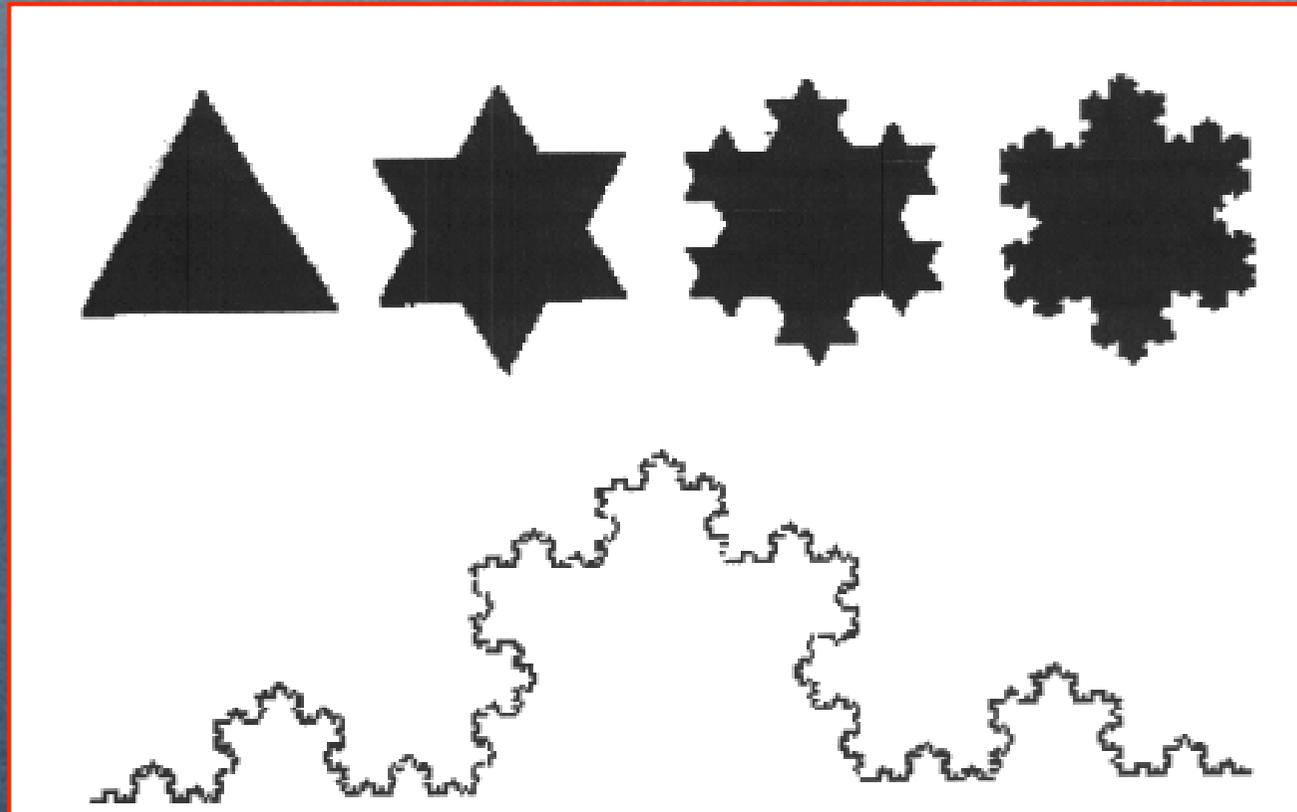
Río Amarillo
(China)



Delta del
río Lena (Siberia).

Dimensión de objetos matemáticos

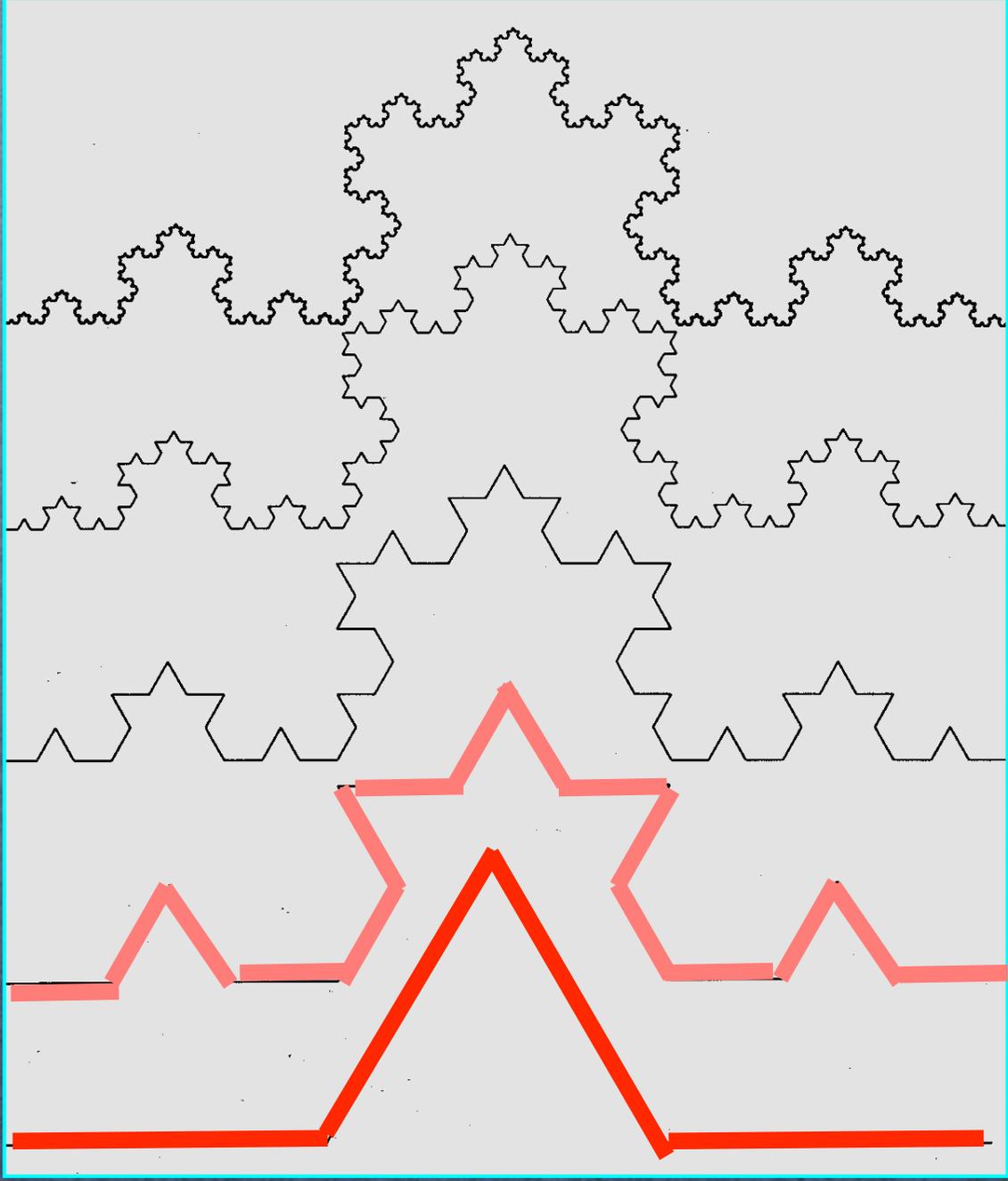
Curva de Koch



Una curva de longitud infinita encierra una superficie de área finita.

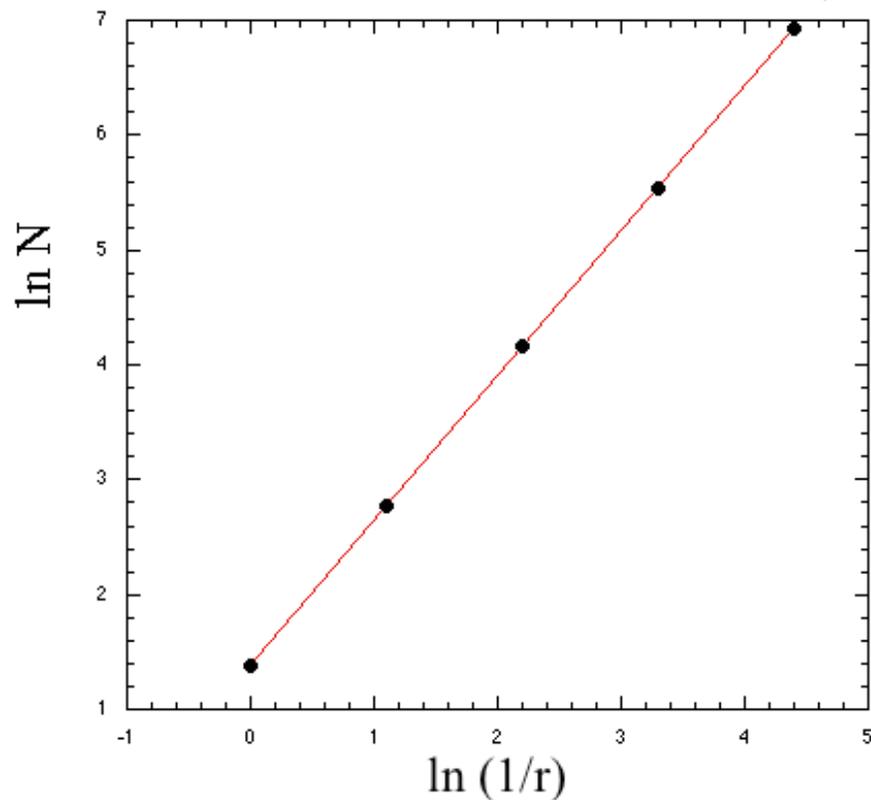
Curva de Koch

-  1024 unidades
- $1/81$
-  256 unidades
- $1/27$
-  64 unidades
- $1/9$
-  16 unidades
- $1/3$
-  4 unidades
- 1



$$\ln N = \ln A + d \ln(1/r)$$

$$\text{---} \ln N = 1,3863 + 1,2619 \ln(1/r)$$



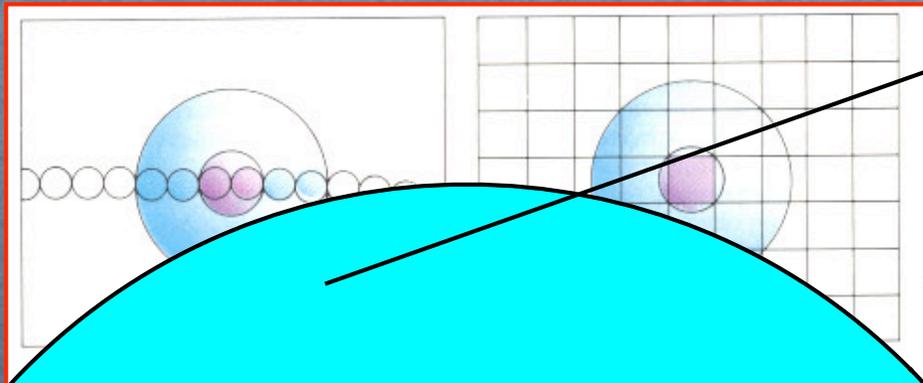
Curva de Koch
dimensión fractal
 $d=1,26$

Cuando la unidad disminuye en 3, el número de unidades para recubrir aumenta en 4.

$$d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26$$

Dimensión fractal $d=1,26$

Dimensión de objetos matemáticos



9; 25

Cuando el radio aumenta en 3, el número de unidades que recubre aumenta en 5.

3; 5

1; 1

$$d = \frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1,46$$

Dimensión fractal $d=1,46$

Dimensión de objetos obtenidos por simulación por ordenador

Difusión limitada por agregación (DLA)

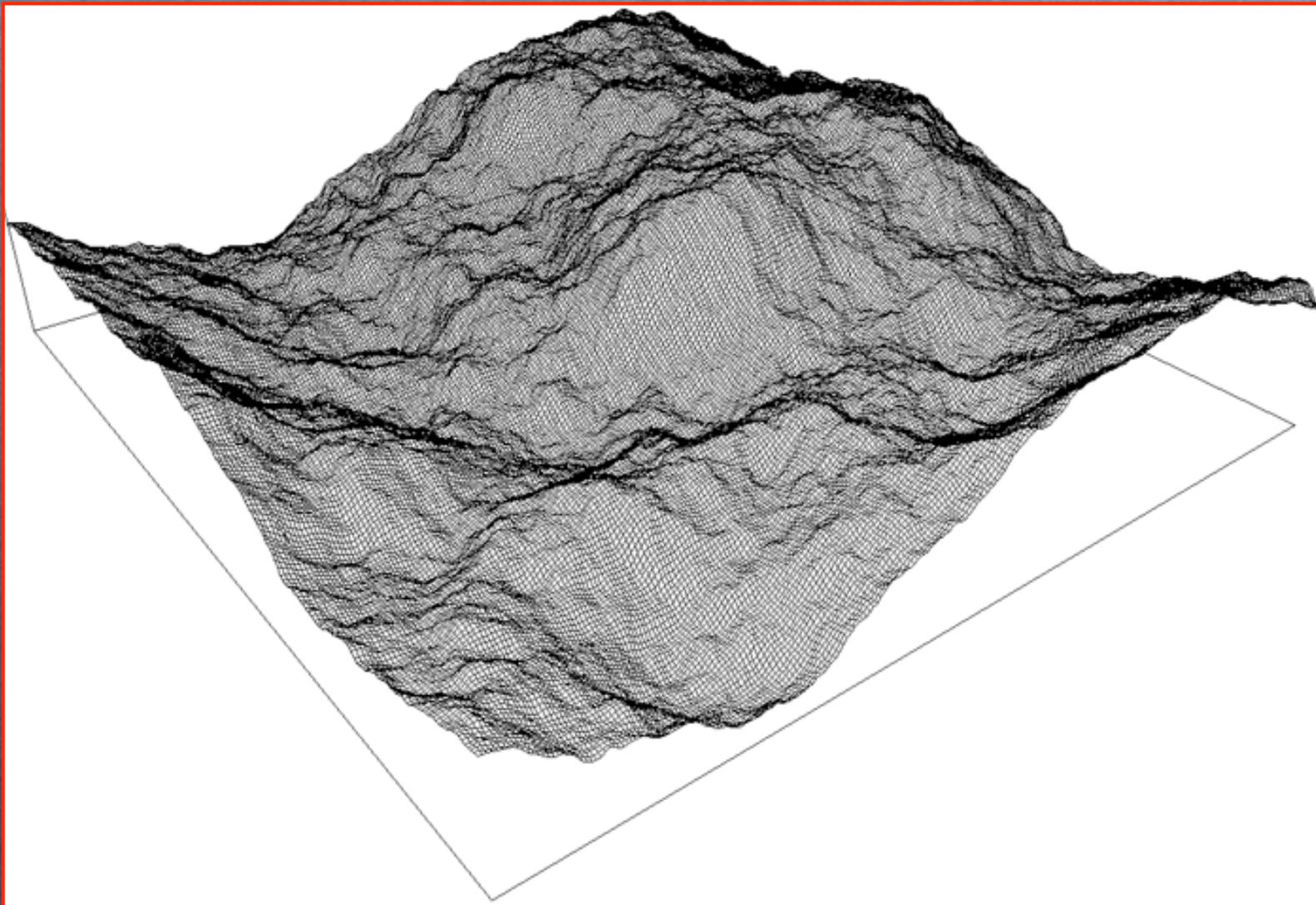


$$N(l) = A \left(\frac{1}{l} \right)^{1,47}$$

Fractal

La mejor manera de definir un *fractal* es a través de sus atributos: un fractal es *rugoso*, lo que significa que no es suave en ningún sitio; es *autosemejante*, es decir, sus partes tienen el aspecto del todo; se desarrolla mediante *iteraciones*, lo que significa que se obtiene por aplicaciones sucesivas; es *complejo*, pero se puede describir mediante *algoritmos* sencillos (lo que significa también que detrás de muchos objetos naturales rugosos hay cierto orden).

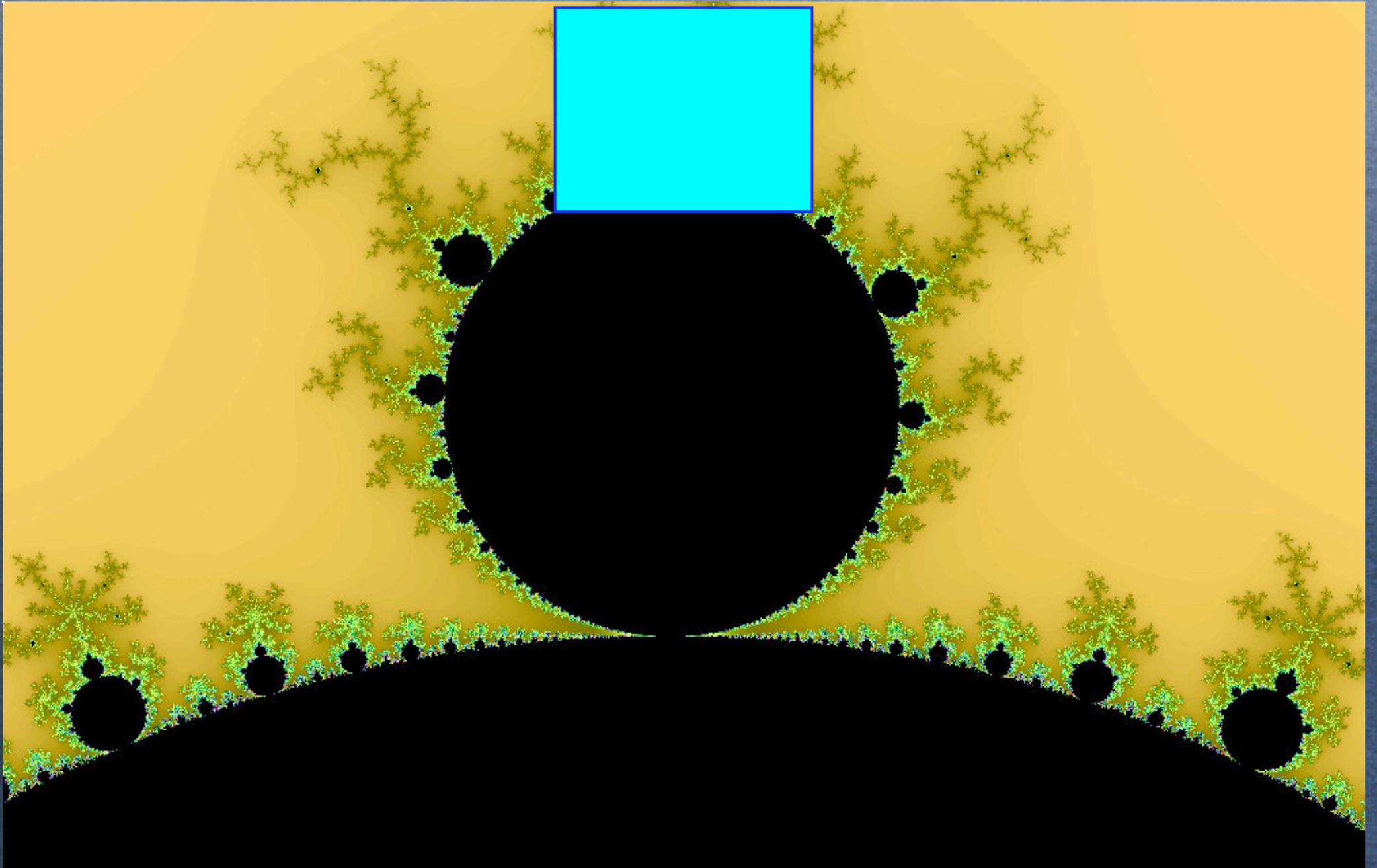
Montaña *fractal rugosa, autosemejante*, obtenida mediante iteraciones de algoritmos sencillos, y que constituye un objeto complejo, detrás de cual hay cierto orden matemático.

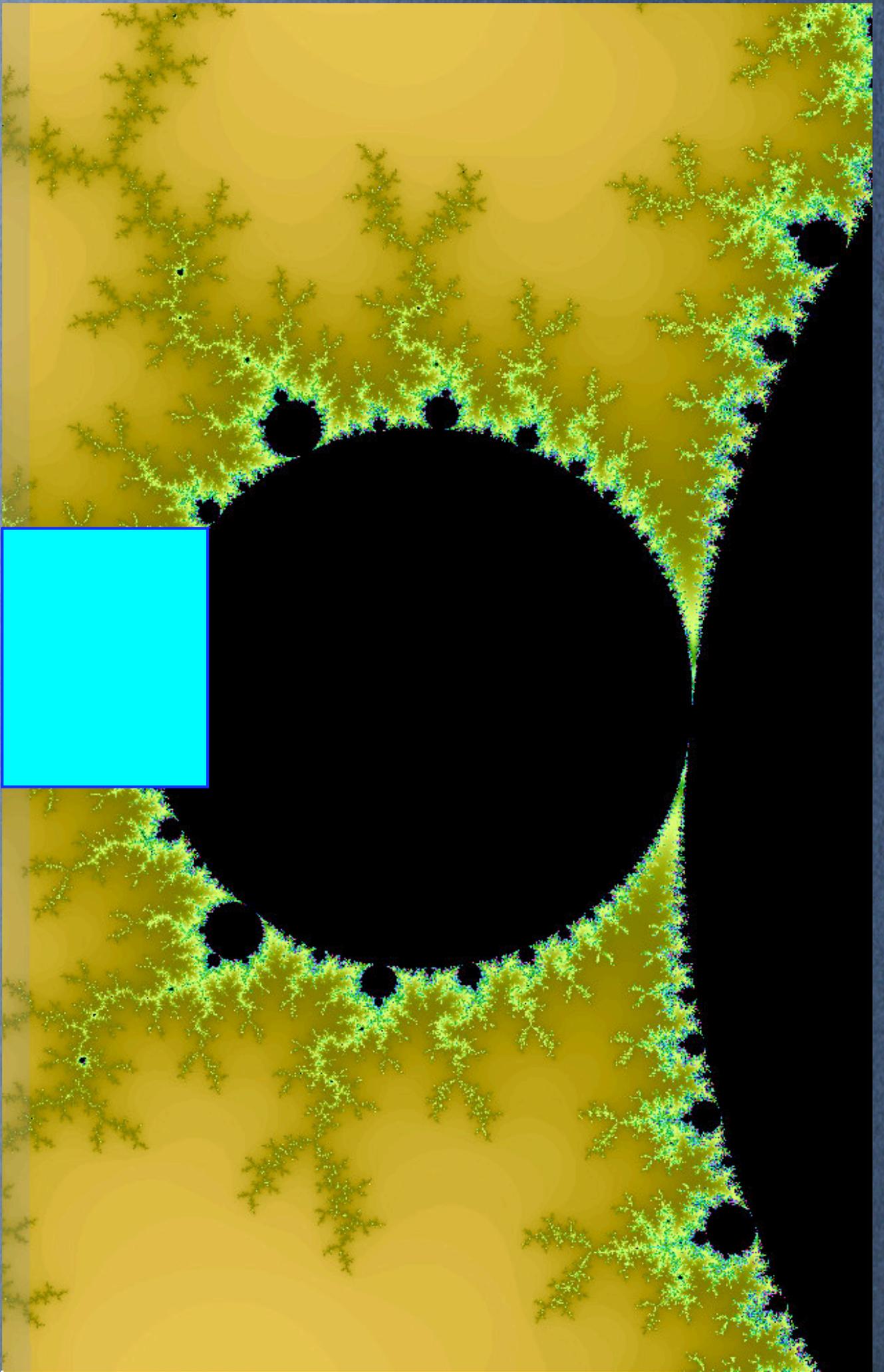


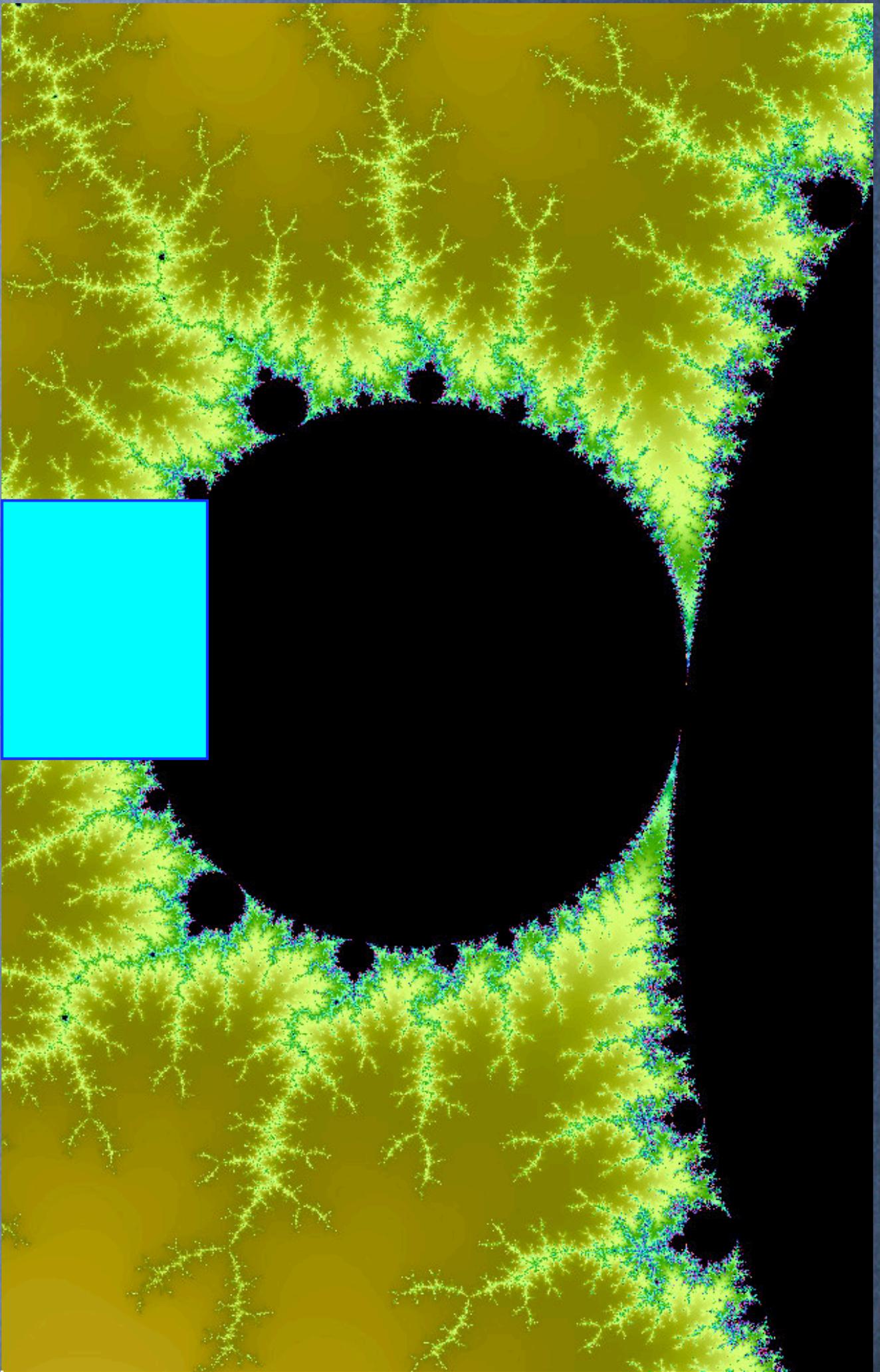
Autosemejanza

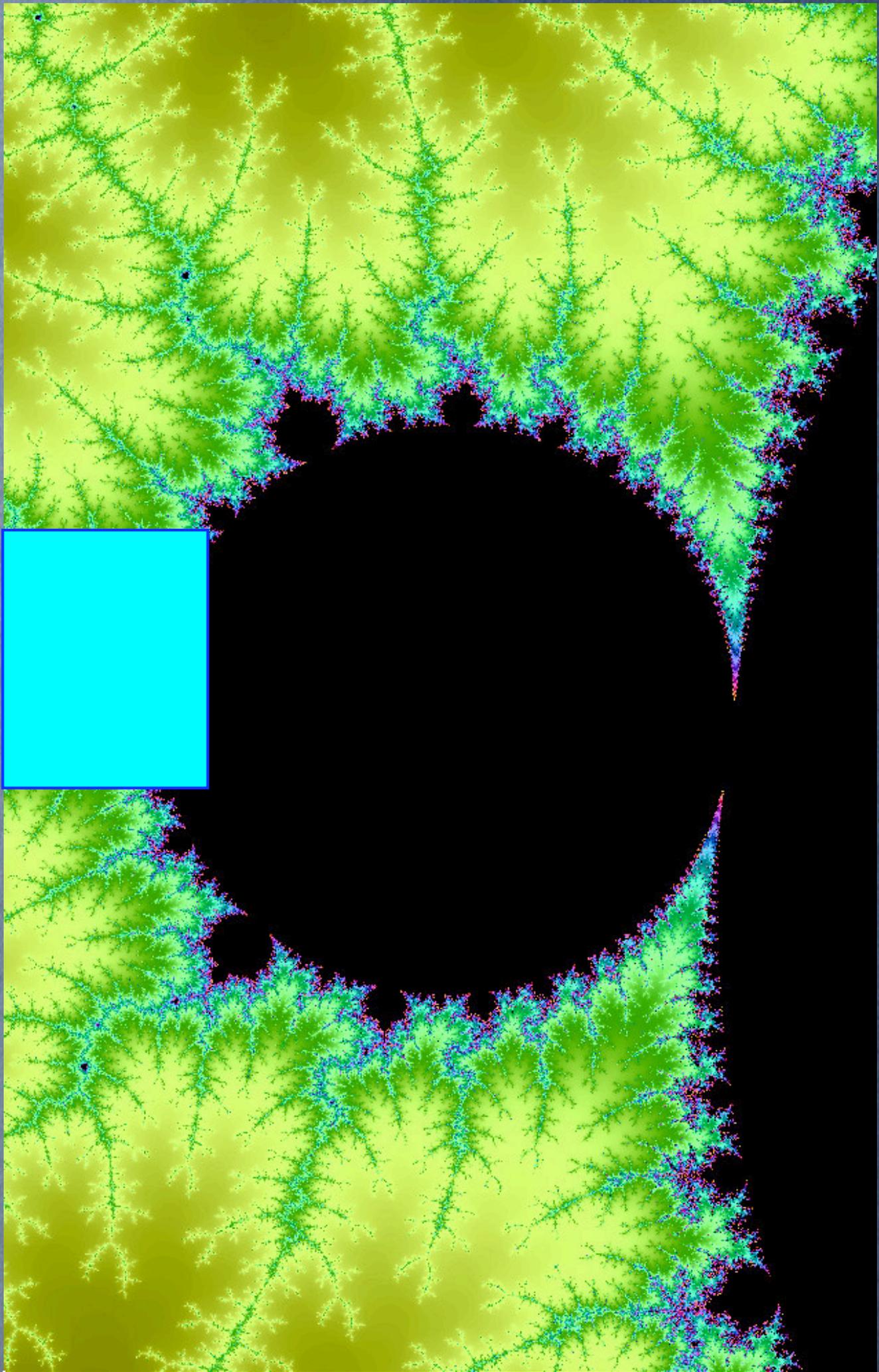
En un fractal las partes menores tienen el aspecto del todo.

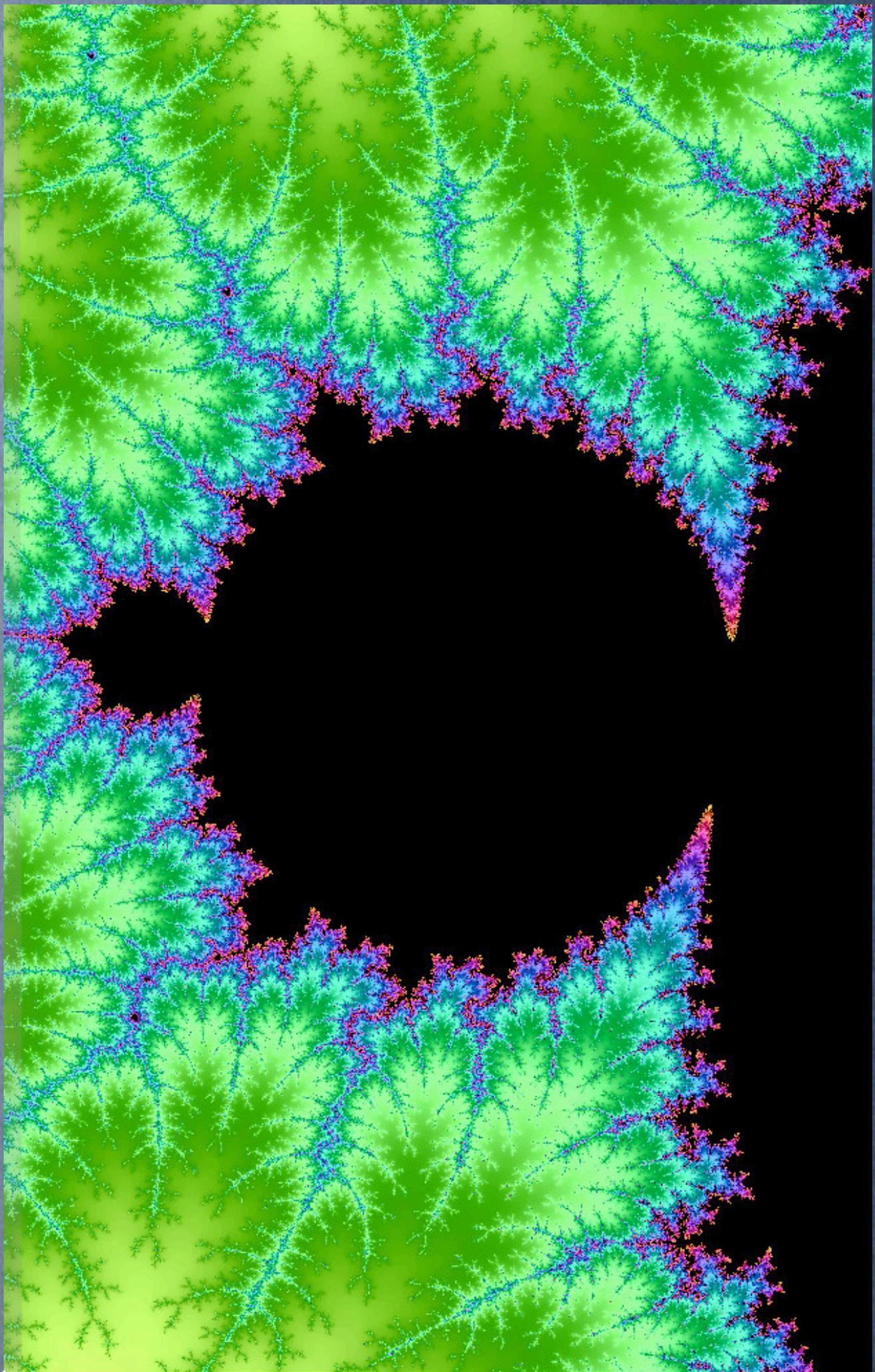
Autosemejanza en el Conjunto de Mandelbrot

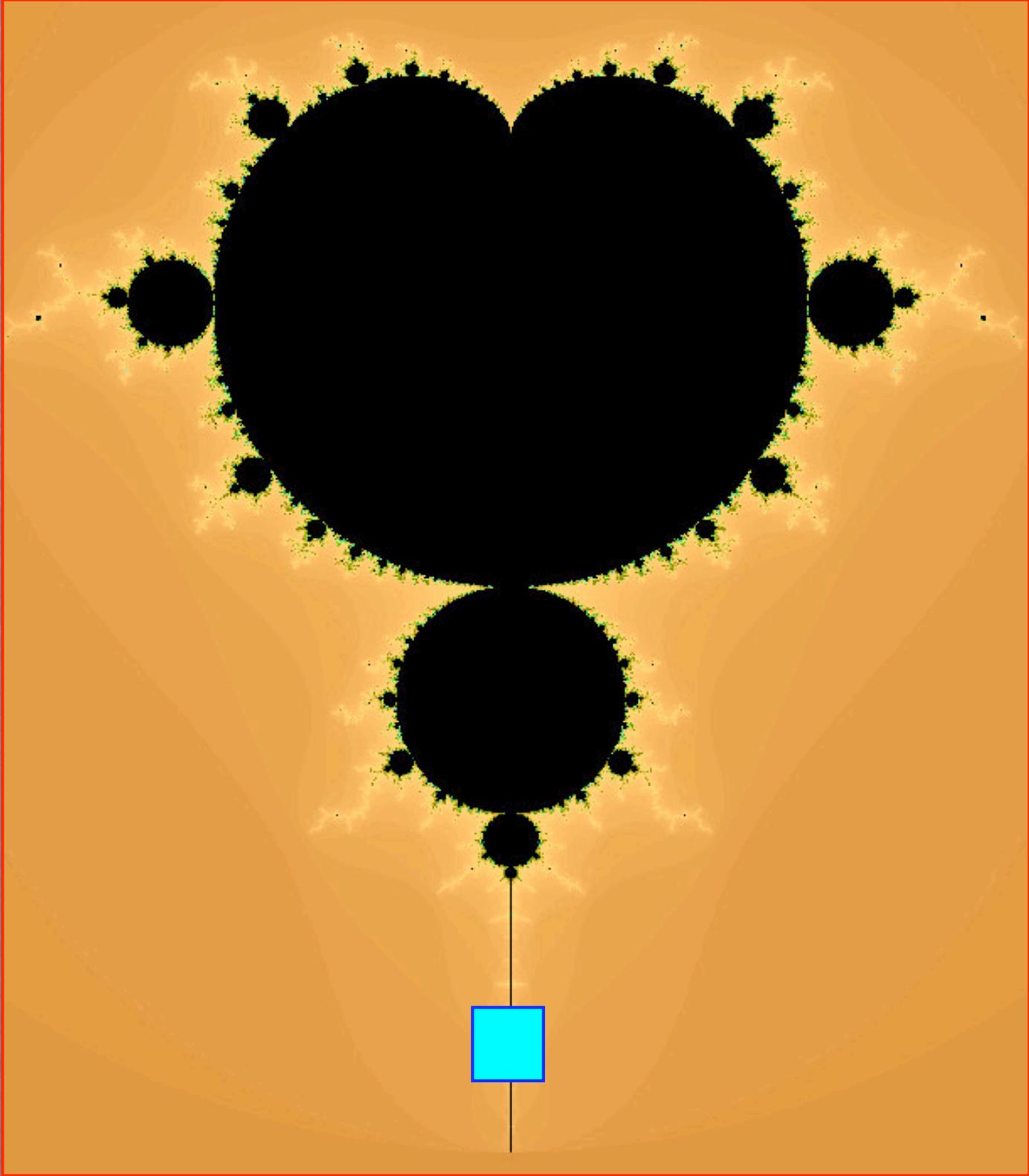


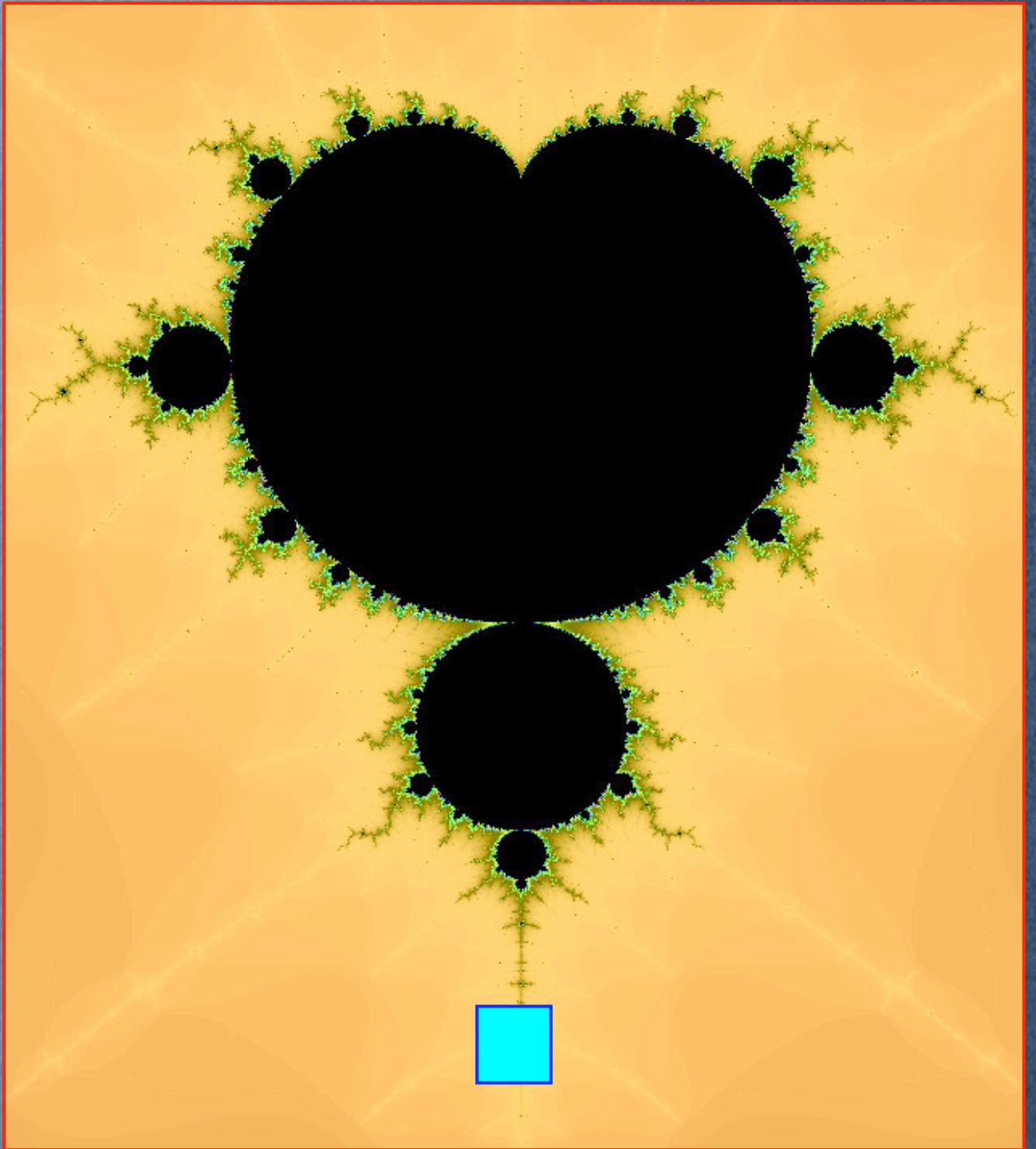


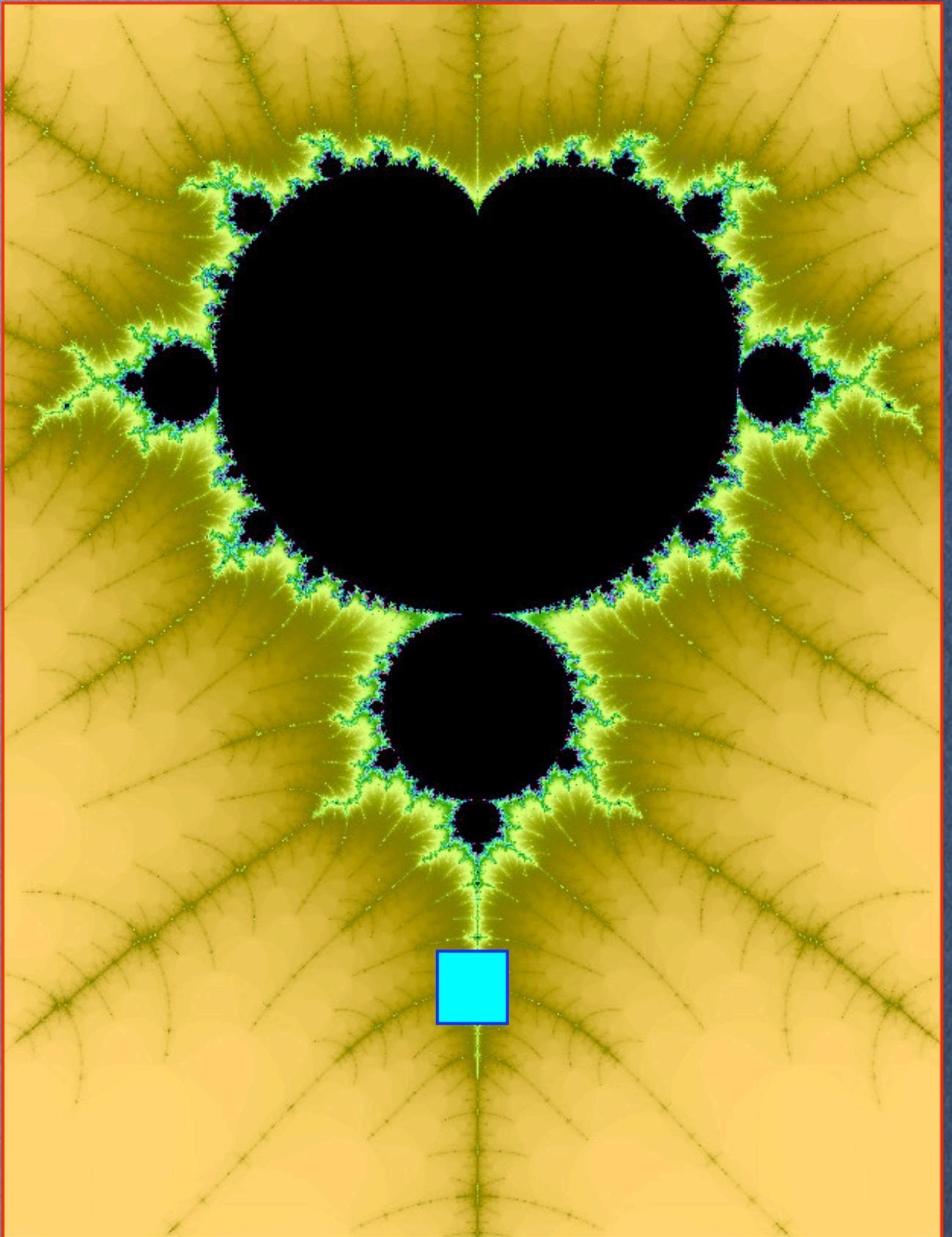


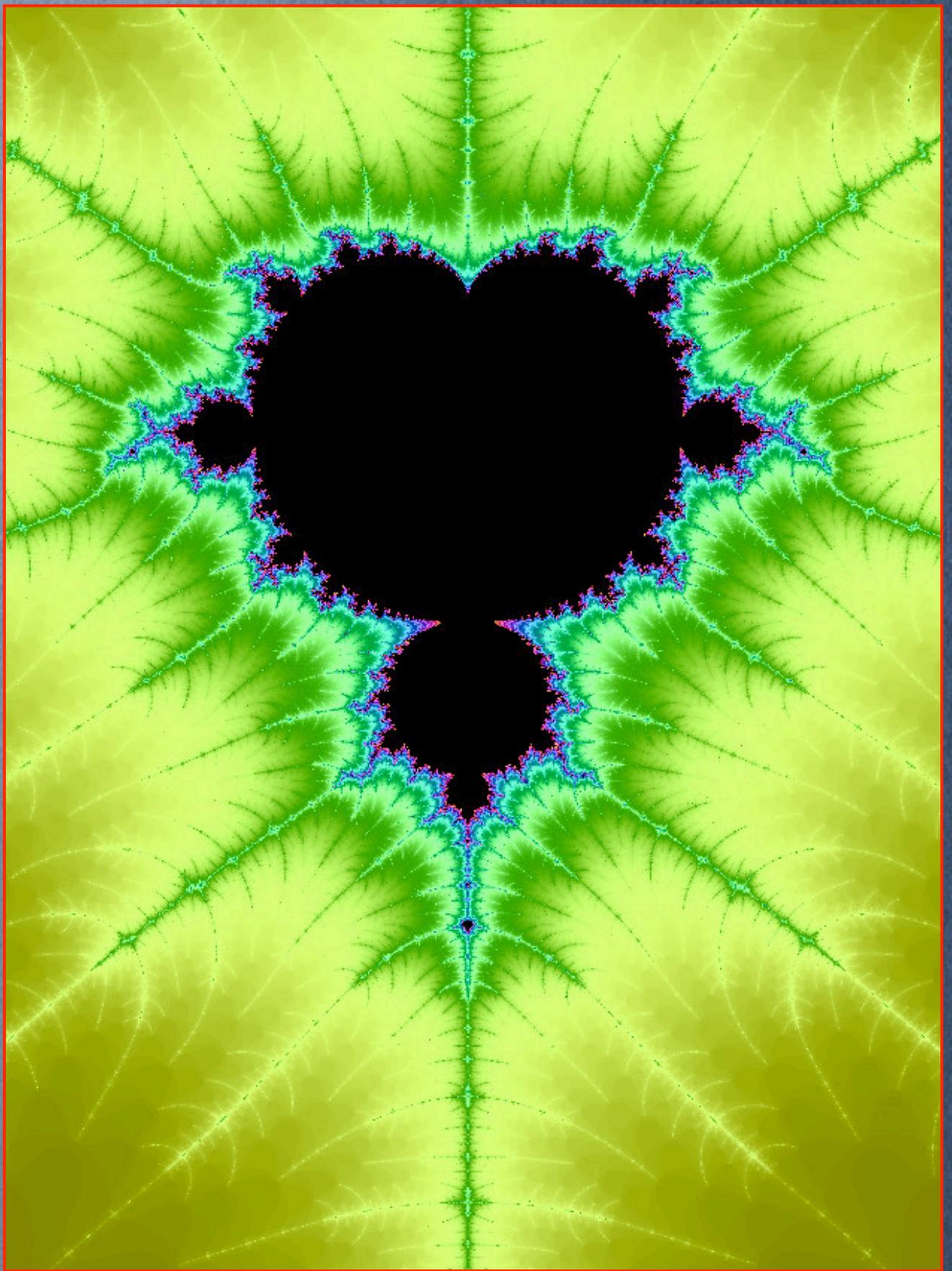










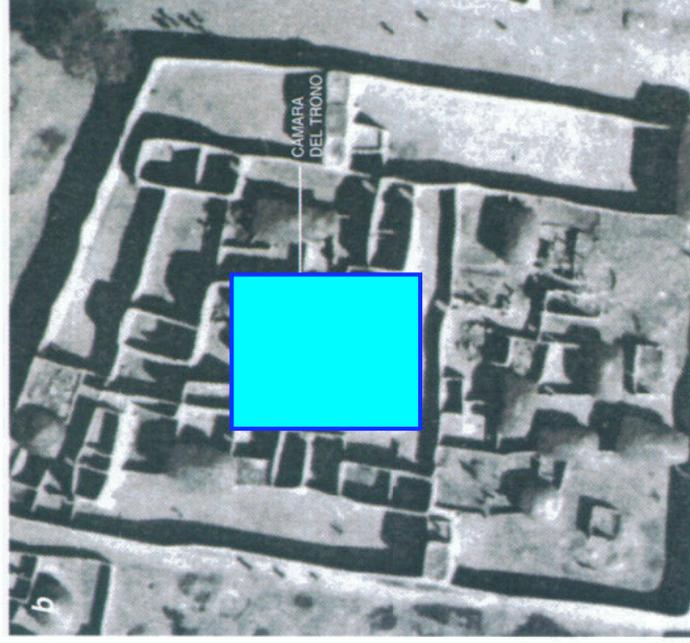
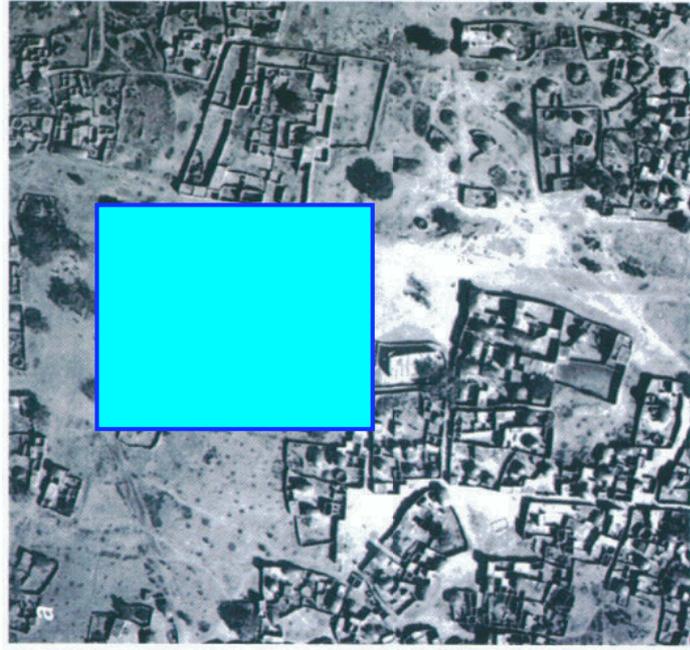


Curiosidades

- Fractales en arquitectura: poblados africanos.
- Fractales en pintura moderna: variación de la dimensión fractal en los cuadros de Pollock con la edad.

CIENCIA Y SOCIEDAD

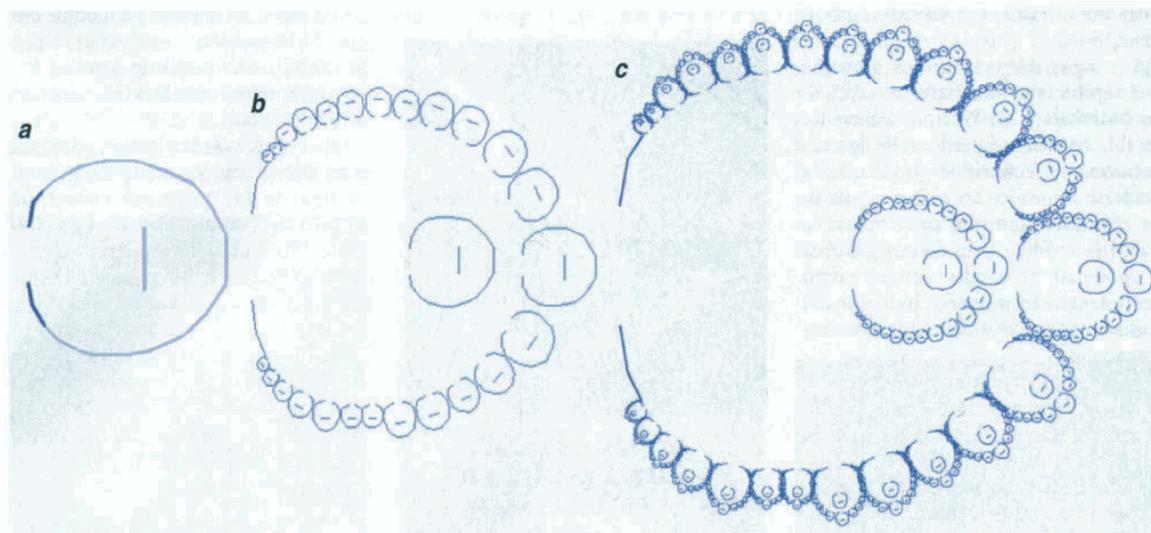
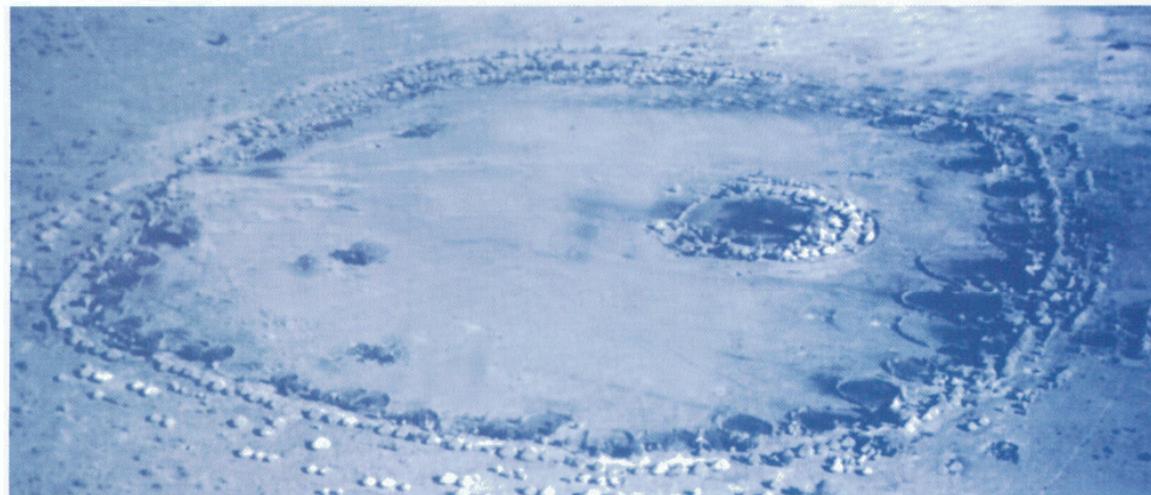
Logone-Birni y los poblados Ba-ila *Fractales urbanos africanos*



1. Vista aérea del pueblo camerunés de Logone-Birni (a), construido por los kotoko, y ampliación del palacio real (b). Se pueden distin-

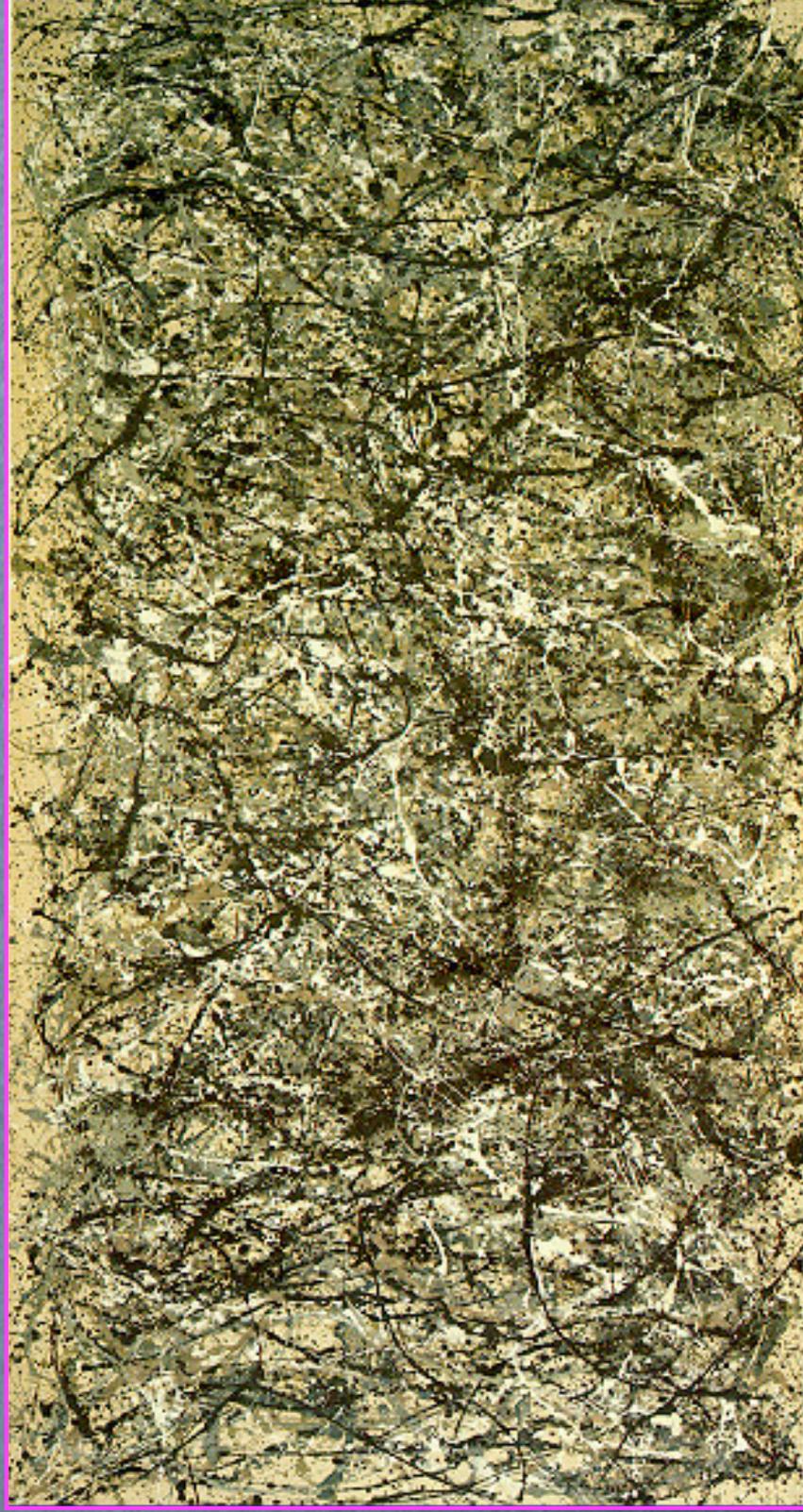
guir los aposentos del monarca (*delimitados por un trazo discontinuo rojo*) y la cámara del trono.

Poblado Ba-ila



3. Vista aérea de un poblado Ba-ila. El motivo inicial (a) se repite sobre los segmentos que lo componen. La operación se repite de

nuevo sobre las mismas zonas del motivo que se ha creado (b). El resultado (c) es similar a la vista de conjunto del poblado.



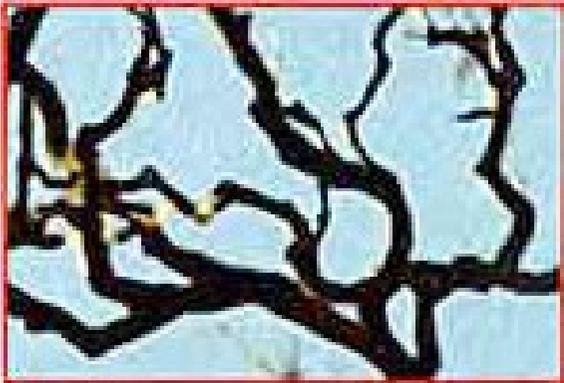
Art, science and chaos



PhysicsWorld

OCTOBER 1999

VOLUME 12 NO 10



Autose-
mejanza
en un
árbol



Number 32 (1950)



Full Fathom Five (1947)



Scaevola

Autose-
mejanza
en la
obra de
Pollock



Scientific objectivity proves to be an essential tool for determining the fundamental content of the abstract paintings produced by Jackson Pollock in the late 1940s. Pollock dripped paint from a can onto vast canvases rolled out across the floor of his barn. Although this unorthodox technique has



Figure 1 *Alchemy*, painted by Jackson Pollock in 1947. Drip paintings of this period are characterized by fractal dimensions close to 1.5. Reproduced by permission of ARS, NY and DACS, London, 1999.

the higher range are shaped by his motions around the canvas.

Our analysis shows that Pollock refined his dripping technique as his fractal dimensions increased from close to 1.5 in the late 1940s. Because D increases with time, the fractal analysis could be used as a quantitative, objective technique both to validate and date Pollock's drip paintings. The change in D reflects a dramatic evolution in visual character. His initial drip paintings of 1943 consisted of a single layer

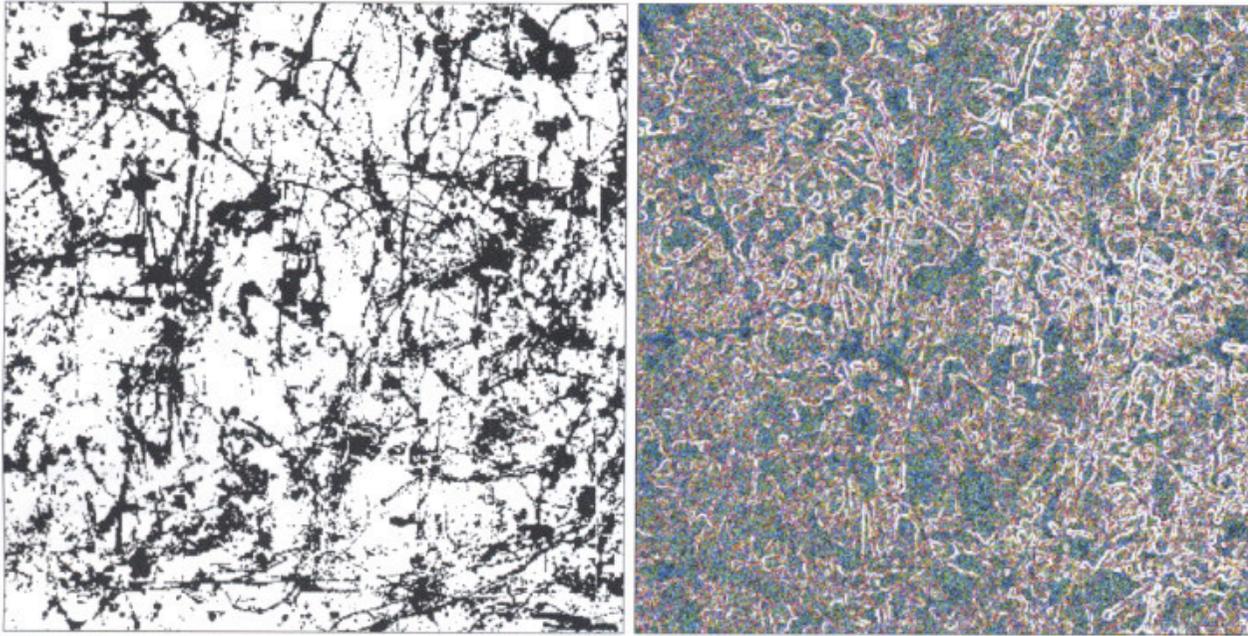
viewing moving patterns with an orthogonal orientation.

McKay⁵ reported that viewing a stationary pattern of radial lines causes the illusion of fine grains or wavy lines moving in circles. This has been explained as being due to antagonism between pattern and movement channels within an orientation column⁶. We have discovered a new visual after-effect by extending this model to explore antagonism between different orientation columns.

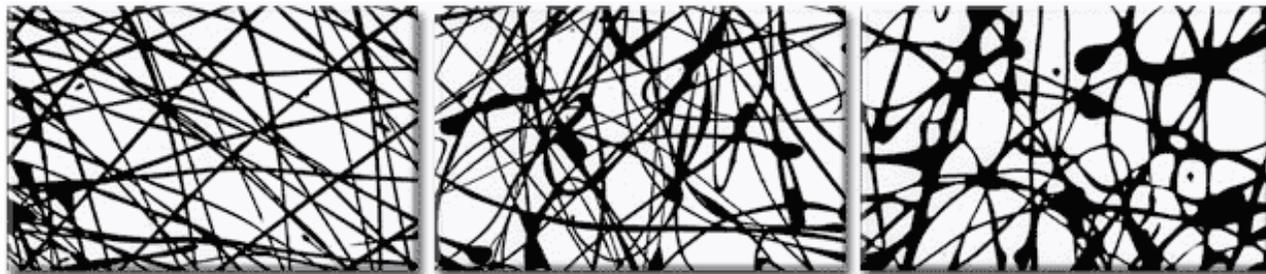
With the subject fixating at the centre, a windmill pattern is presented that slowly rotates at 0.2 Hz in one direction for 5 s, and then in the other direction (Fig. 1a). If this is followed by a pattern orthogonal to the windmill, namely concentric rings, diverging and converging for 5 s each at 2 Hz, viewing a blank screen after the concentric rings causes a vivid after-effect of a stationary windmill for a few seconds. This after-effect is quite different from that seen after viewing the concentric rings alone at 2 Hz, if indeed any after-effect is visible. With a cyclical presentation of the sequence shown in Fig. 1a, a striking windmill-like after-effect is always seen after the concentric rings (bottom left blank in Fig. 1a), but no comparable after-effect is visible immediately after the windmill (top right blank in Fig. 1a). We found that the after-effect could be produced if the rings were delayed by up to 30 s, but not after 60 s.

La dimensión fractal de la obra de Pollock aumenta con la edad del artista-pintor.

J Mureika



Physics gives art the edge



and colleagues at the University of Toronto first isolated blobs with specific colours in over 40 abstract paintings by Pollock and members of a movement known as *Les Automatistes* (left). Next, the researchers analysed the edges of the blobs to produce a pattern in which regions of high contrast, such as red against green or black against white, appear white, while areas of low colour contrast appear dark (right). Finally, the team calculated the fractal dimension of these filtered patterns. While the fractal dimension of the blobs could not distinguish between different artists, the edge technique showed that the fractal dimensions of paintings by Pollock were significantly higher than those by other artists. The technique could therefore be used to authenticate works of art, and may even help explain why we find one abstract image more artistically appealing than another.

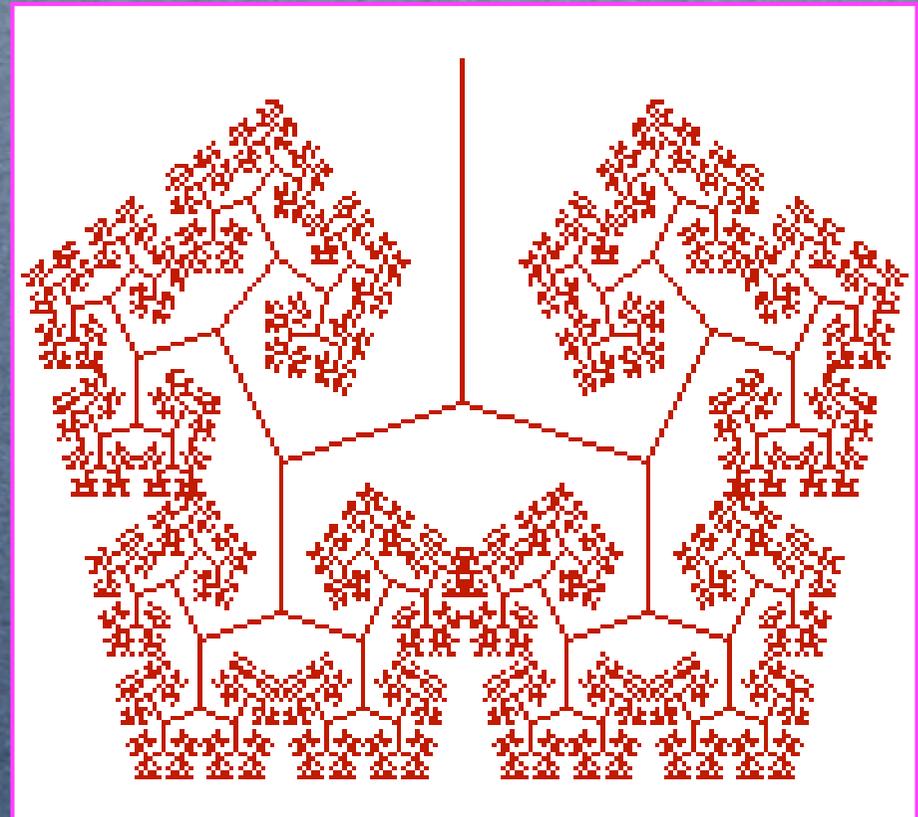
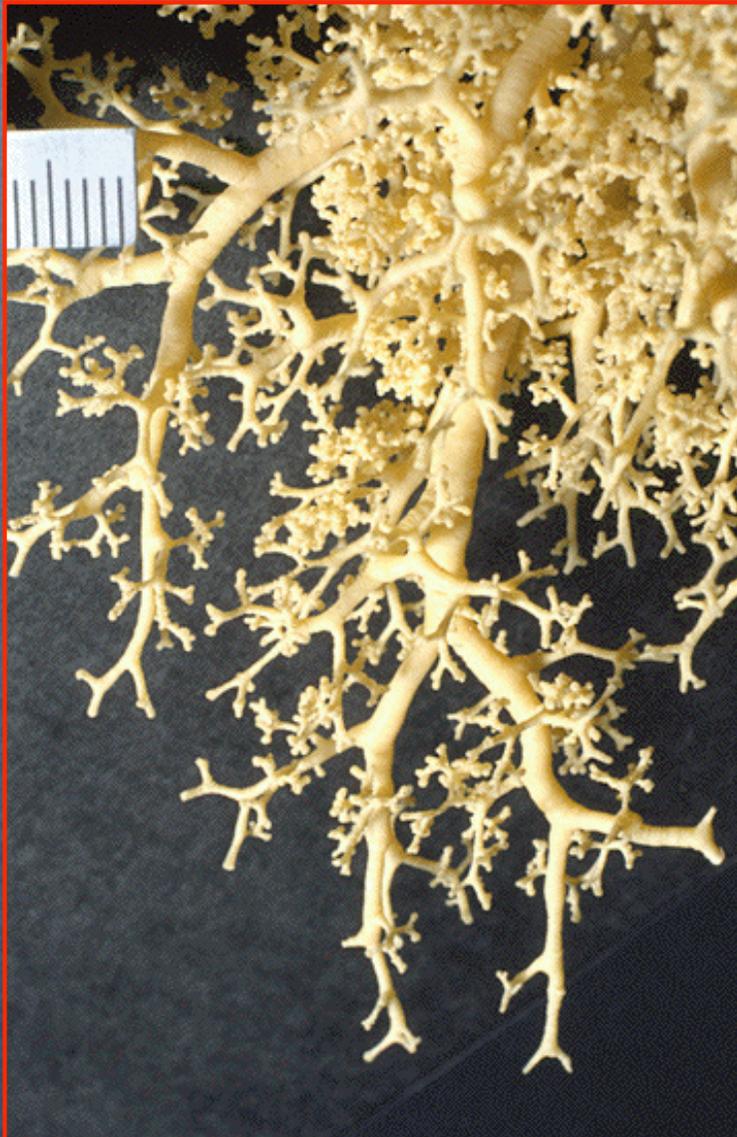
La dimensión fractal de las esquinas de las gotas de pintura en las obras de Pollock es mayor que en la de otros artistas.

Fractales en seres vivos

¿Por qué son las formas fractales tan frecuentes en la realidad viva?

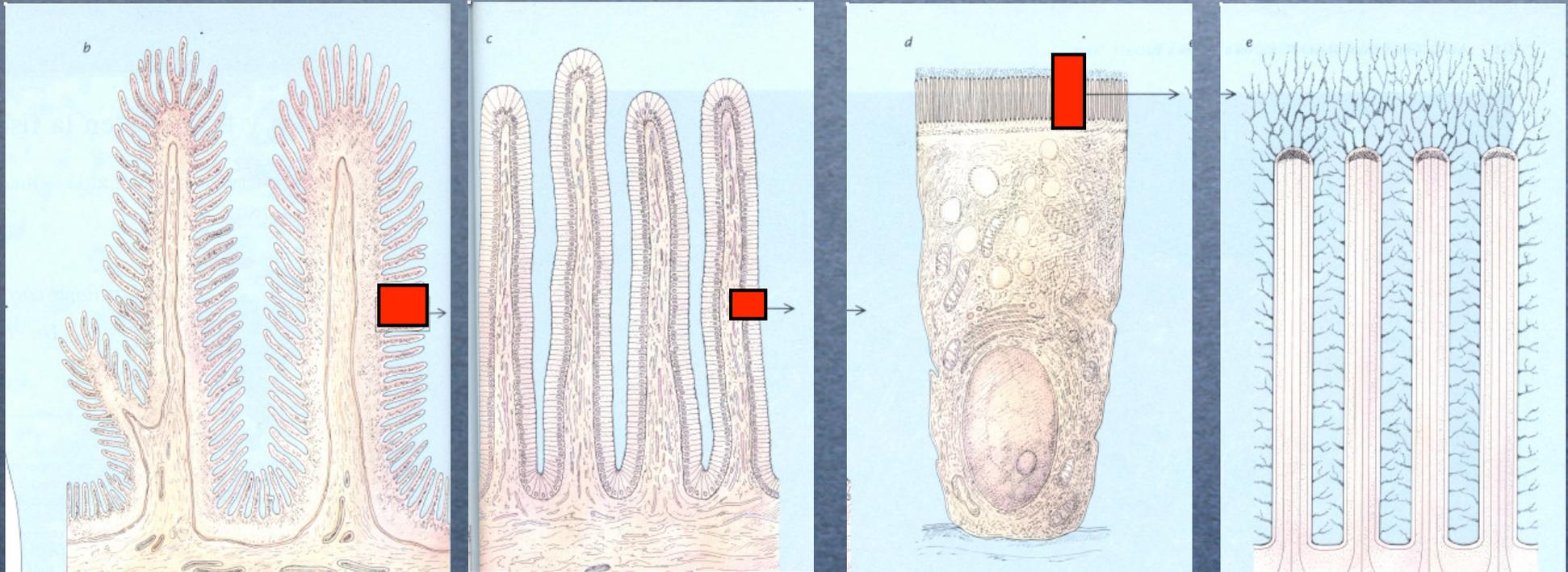
¿En qué favorece la fractalidad a un individuo vivo para que éste siga vivo?

Fractales en Fisiología



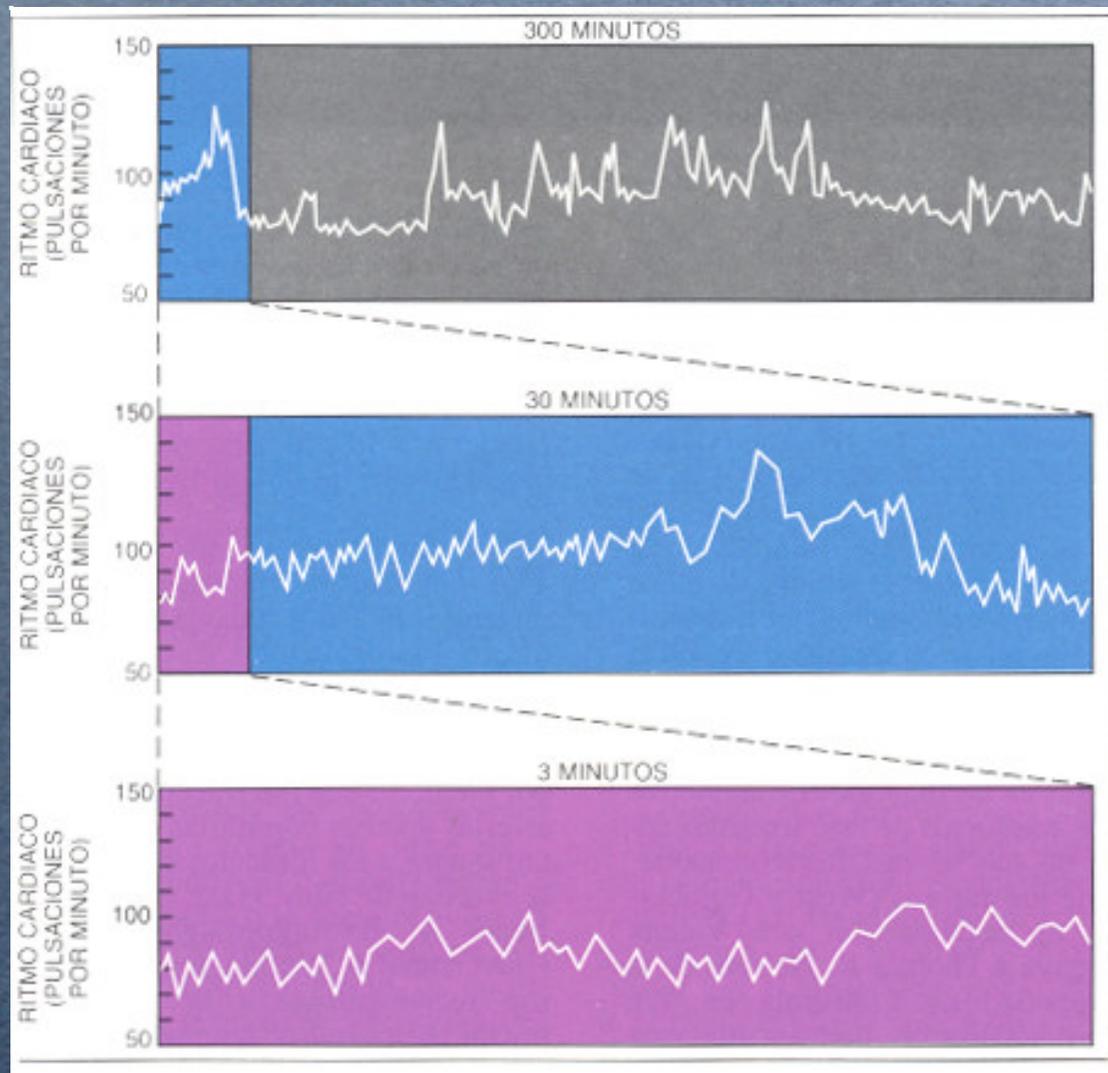
Modelo de pulmones

Estructuras del intestino delgado



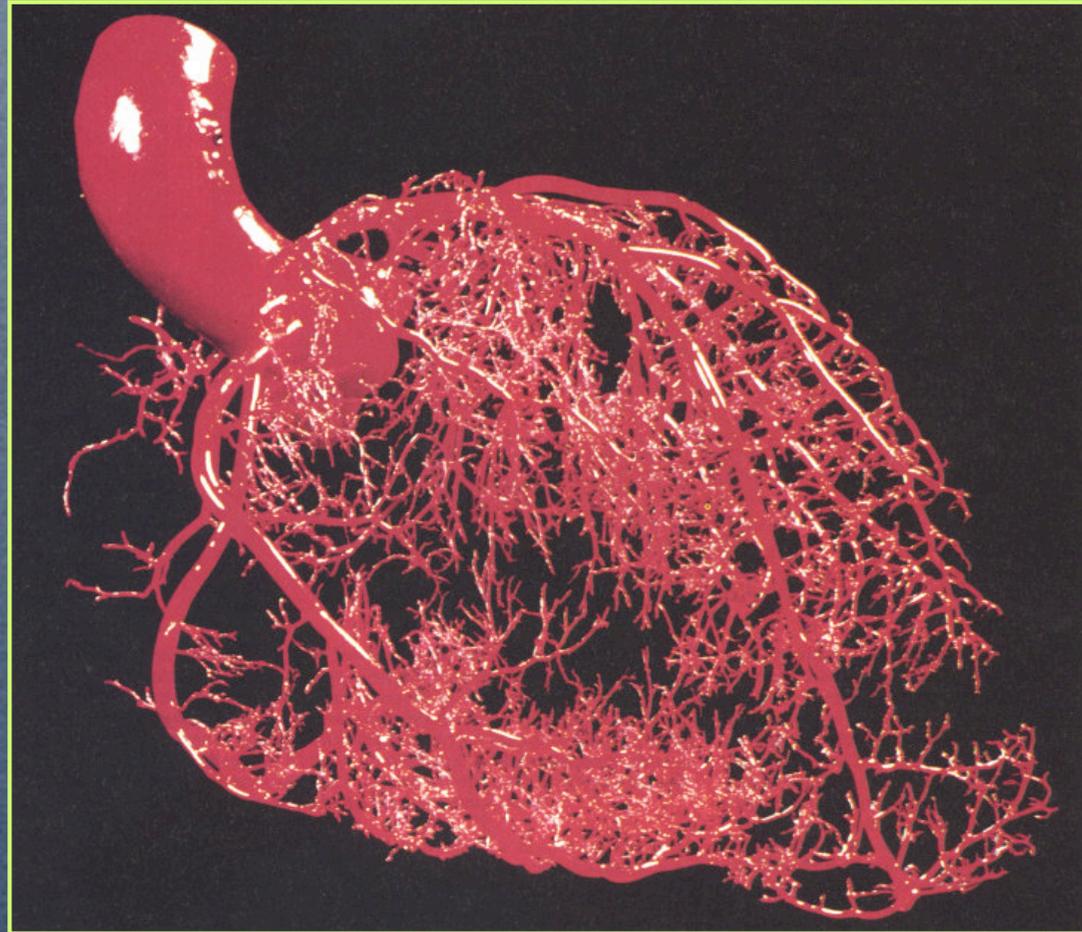
O, cómo conseguir una superficie (casi) infinita en un volumen finito. $d = 2,2$

Ritmo cardíaco

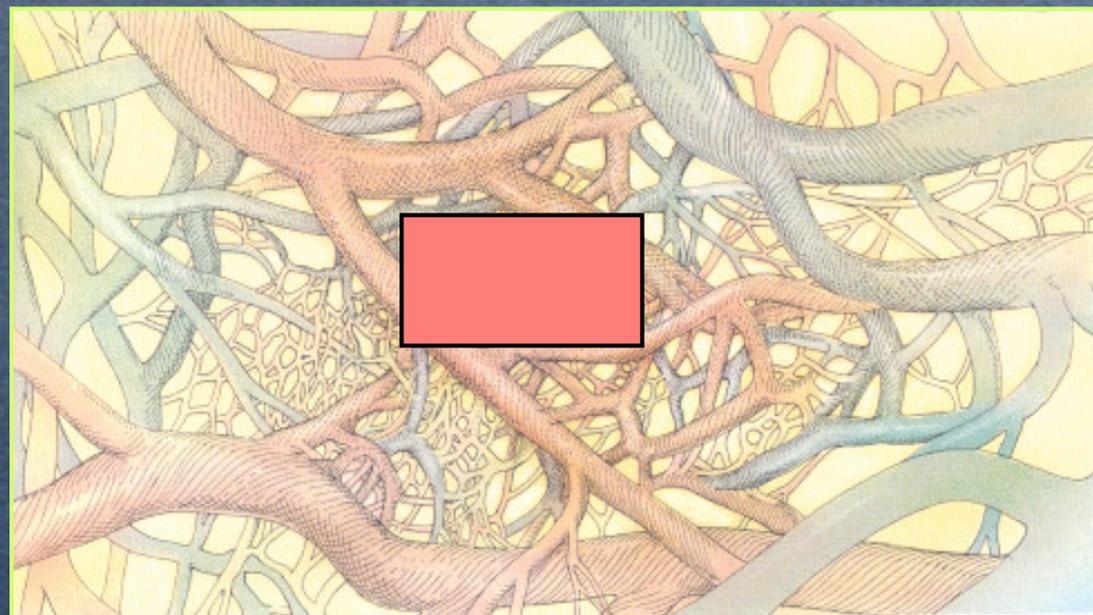
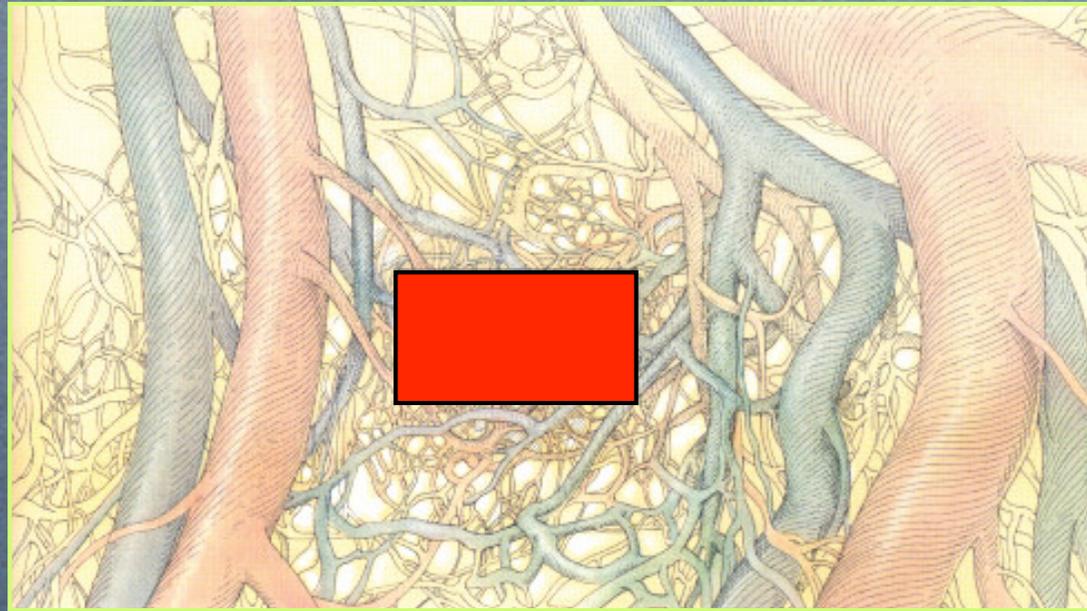


A mayor dimensión fractal, corazón mas sano

Vasos sanguíneos del corazón



Vasos sanguíneos del corazón



Las formas en la naturaleza

La esfera protege, el hexágono pavimenta,
la espiral almacena, la hélice agarra, el ángulo
penetra, la onda comunica, la parábola emite
la catenaria sostiene.

Importancia de los fractales en la naturaleza

El fractal coloniza

Importancia de los fractales en la naturaleza

La fractalidad coloniza.

Es una manera de llenar el espacio, de crecer, manteniendo cierta continuidad entre las diferentes partes, una continuidad por donde puede circular un líquido como la sangre o un gas como el aire.

A gran escala se tiende a la esfericidad, pero a menor escala, a la escala en la que se intercambian gases, líquidos, calor, nutrientes, etc., se tiende a las estructuras fractales.

Taller

- Variación de la dimensión lineal de una bola de papel arrugado con la masa.
- Variación del peso de una concha con su dimensión lineal.

Measurement of the Fractal Dimension of a Cauliflower

Michele Zanoni, I.R.I.A. Montichiari (Bs), Italy; mzanoni@libero.it

I recently experienced a very interesting example of the importance of making careful observations. It happened during lunch one day as I looked at the cauliflower lying before me on the table. Suddenly I noticed its spirals and the fact that they were composed of smaller, similarly shaped spirals. And I saw that those spirals were made up of still smaller ones, and then smaller still, and so on (see cover photo and Fig. 1). I estimated that such replication of spirals extended to at least five levels. The property of an object whose every part is similar to the whole (i.e., each part is a reduced identical version of the original) is called *self-similarity*.¹

"Hey! That's a fractal!" I said aloud. Fractals are geometrical objects showing the property of



Fig. 1. Cover photo showing the property of self-similarity of cauliflower spirals.

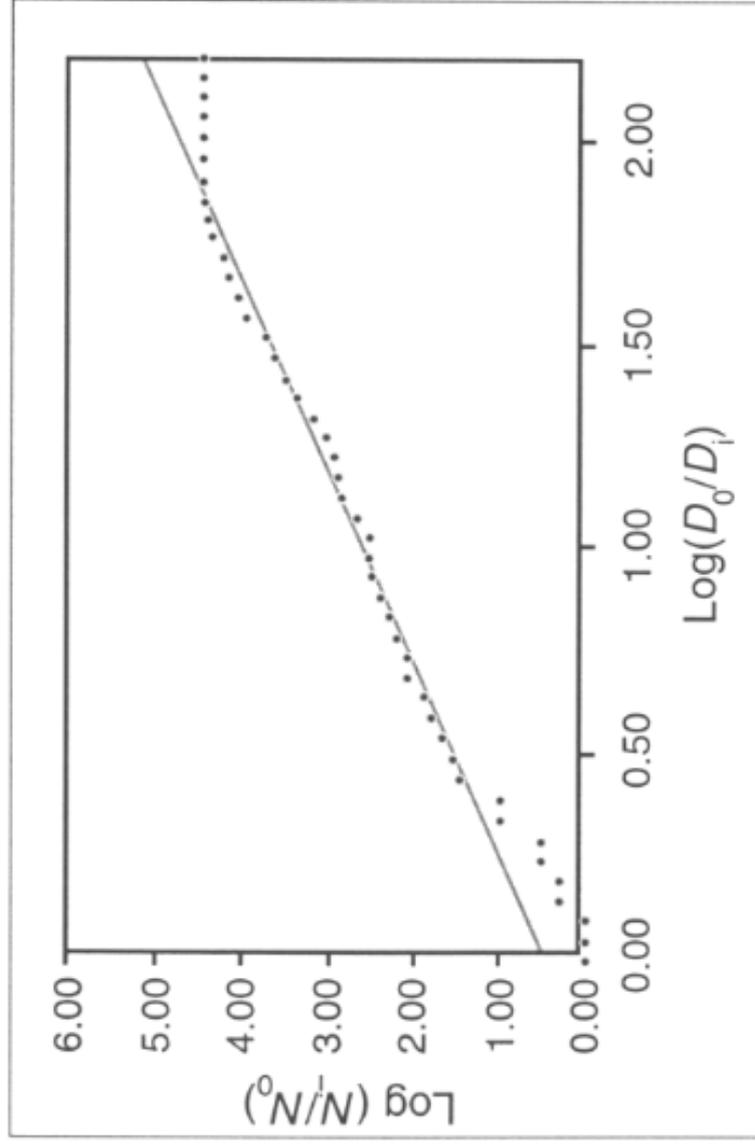


Fig. 3. Graph for determining fractal dimension for a cauliflower.

Fractal geometry in crumpled paper balls

M. A. F. Gomes

Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, 50.000 Recife, PE, Brazil

(Received 11 December 1985; accepted for publication 6 October 1986)

The geometry of crumpled paper balls is examined. The analysis stresses some physical, mathematical, and intuitive aspects of the problem, introducing the concept of fractal dimension which underlies many areas of modern physics.

Fractals are now a topic of wide interest¹ and here we describe an interesting example of fractal dimension defined via the mass-size exponent. In what follows, we discuss this example which has been used with success in the last two years in the freshman course Experimental Physics 1 at UFPE.

With two sheets of paper divided in the way indicated in Fig. 1 we construct after crumpling ($n + 1$) handmade balls of different sizes and masses (Fig. 2). We assign mass $M = 1$ to the smallest ball and mass $M = 2^n$ for the ($n + 1$)th ball, with n increasing with the size of the paper (see Fig. 1). In our case $1 < M < 2^{13}$, with the largest mass corresponding to a sheet of paper of $98 \text{ cm} \times 65 \text{ cm}$. Typical log-log graphs of the average diameter (L) versus mass (M) for such crumpled paper balls are quite well described by $L = kM^{1/D}$. D is interpreted as the fractal dimension of the balls and $k \sim (1/\rho)^{1/D}$ is a measure of the average mass-density ρ on these fractal structures. The values obtained for D and k were $D = 2.51 \pm 0.19$, $k = 5.75 \pm 0.71$ for writing paper of surface density $\sigma \sim 80 \text{ g/m}^2$. The fractal dimension D in this case tells about the complexity or degree of contortion of the area, since a fixed measure of rounded smooth area can enclose a larger volume than a complicated one can. The values of D and k are statistically independent of the students' weight and height. It is experimentally evident that k (lacunarity¹) has a percent mean square deviation approximately two times larger than that of D , and $(\Delta\rho/\rho) = D(\Delta k/k) \approx 0.31$. These values show that D is much less affected by the way of crumpling (pressure applied, haste or not, etc.) than the density is. The topological dimension of these balls is $D_T = 2$, since they

view our crumpled paper balls are self-avoiding surfaces. In this case the Flory argument² predicts that the size L obeys $L \sim l^\nu$, where $\nu = 4/(E + 2)$, l is the linear size of the uncrumpled paper, and E is the dimension of the bedding space. Since the mass scales with l according to $M \sim l^2$ we obtain $L \sim M^{\nu/2} = M^{2/(E+2)} \equiv M^{1/D}$, with $D = [(E + 2)/2] = 2.5$, for $E = 3$, as experimentally obtained.

On the other hand, the experimental dependence of D with the surface density $\sigma (\text{g/m}^2)$ of the paper is shown in

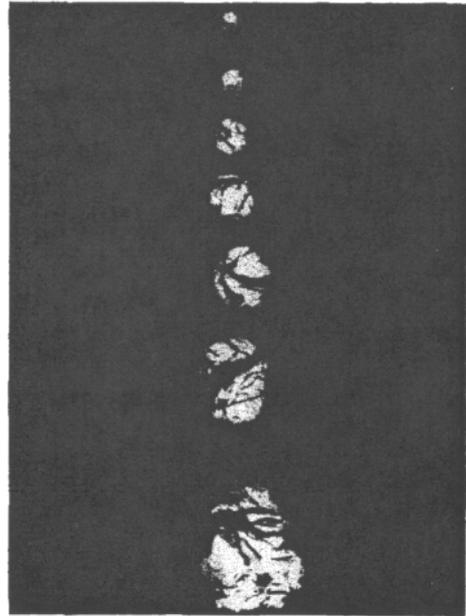
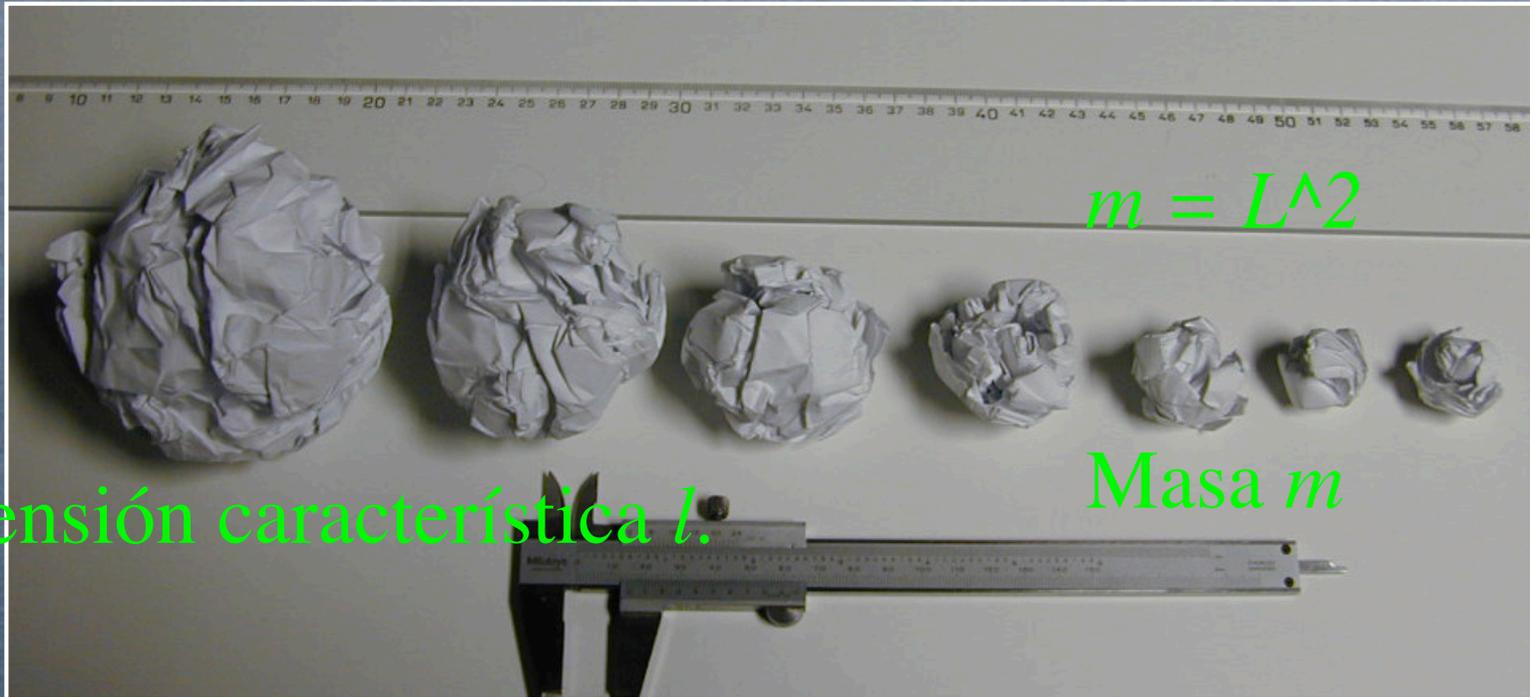


Fig. 2. A typical set of crumpled paper balls with masses 1, 2, 4, ..., 64.

Bolas de papel arrugado.



Dimensión característica l .

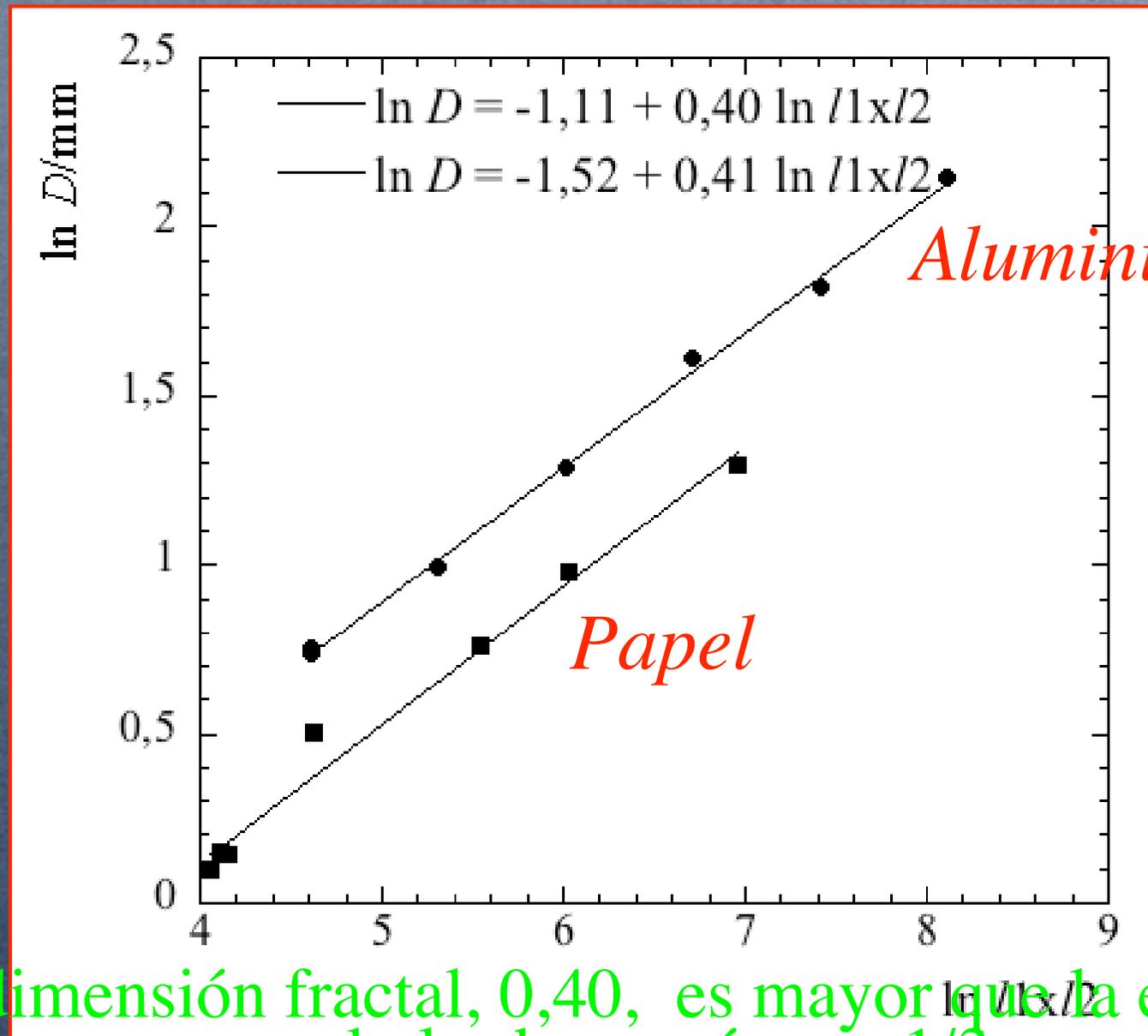
$$m = L^2$$

Masa m



Bolas de papel de aluminio arrugado.

Dimensión fractal en bolas de papel arrugado



Aluminio

Papel

Esta dimensión fractal, 0,40, es mayor que la esperada para bolas homogéneas, 1/3.

N O T E

Looking for Scaling Laws, or Physics with Nuts and Shells

H. David Sheets and James C. Lauffenburger, Department of Physics, Canisius College, Buffalo, NY 14208;
sheets@gort.canisius.edu

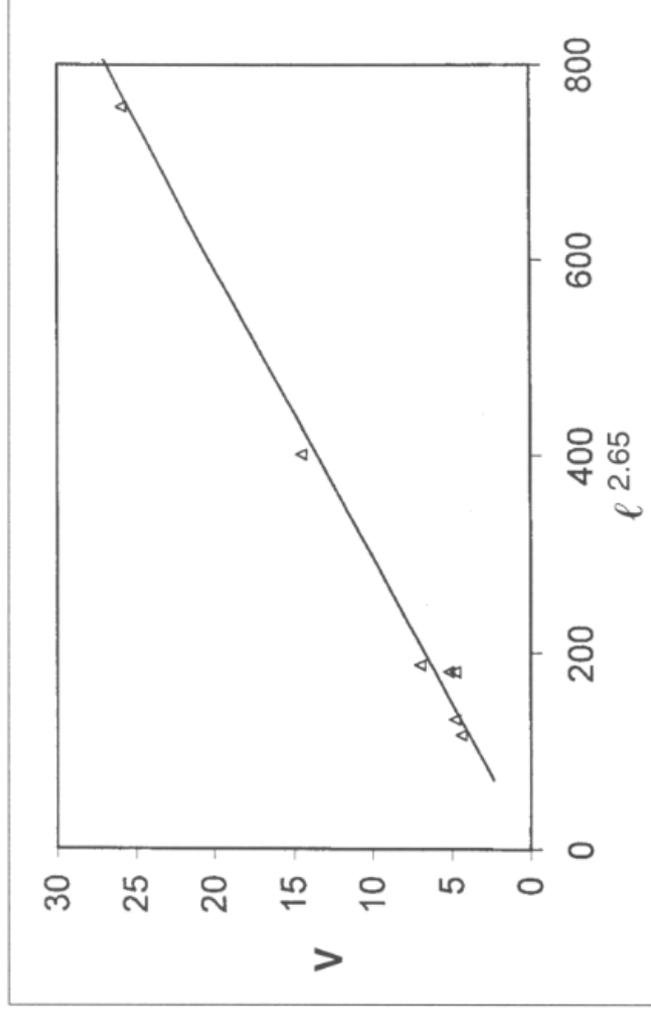


Fig. 3. Volume of freshwater clams as a function of length to the 2.65 power, showing that volume is proportional to $l^{2.65}$.

Conchas de *Cerantoderma Glaucum*

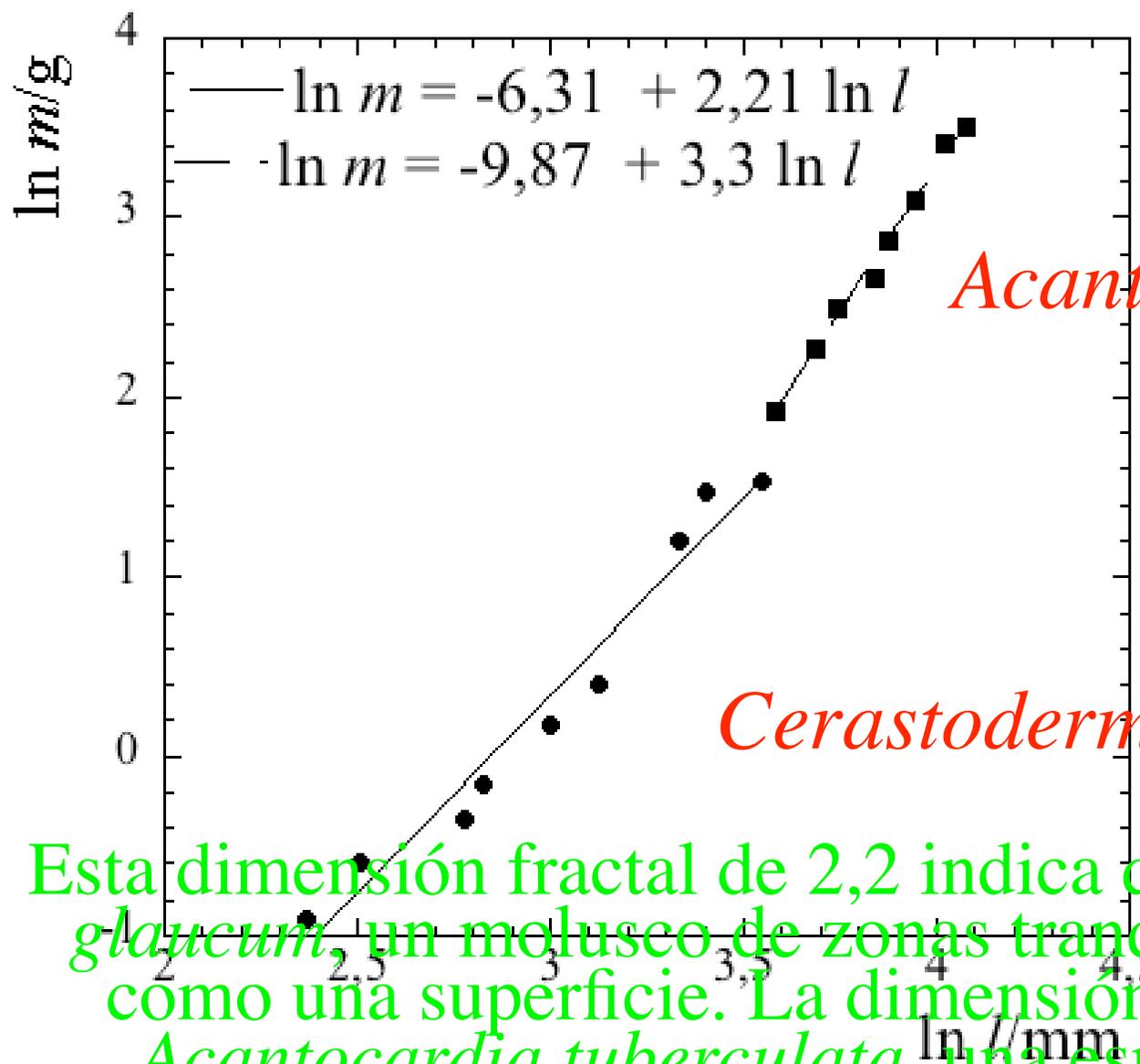


Concha de
Acanthocardia tuberculata



Masa m

Dimensión característica l .

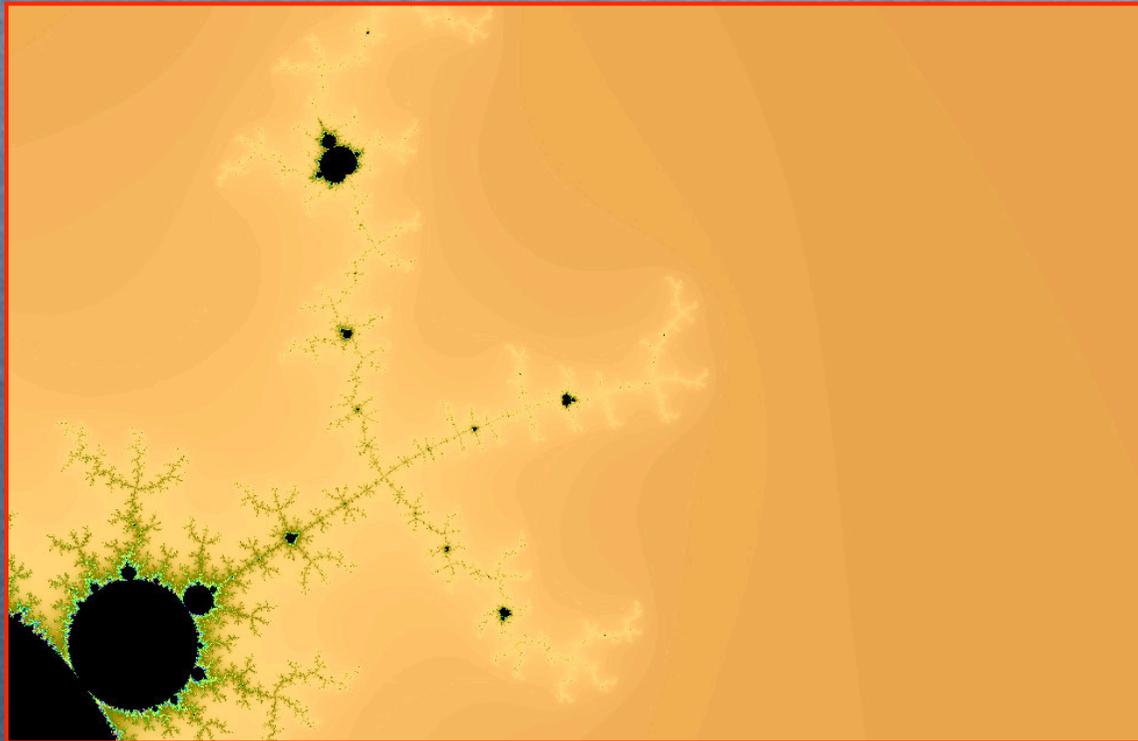


Acontocardia tuberculata

Cerastoderma glaucum

Esta dimensión fractal de 2,2 indica que *Cerastoderma glaucum*, un molusco de zonas tranquilas, crece casi como una superficie. La dimensión 3,3 indica que *Acontocardia tuberculata*, una especie de zonas batidas, aumenta su grosor más rápido que su superficie

Fractales: La geometría de la naturaleza



Talleres de Matemáticas 2005-2006

J. Güémez

Fin