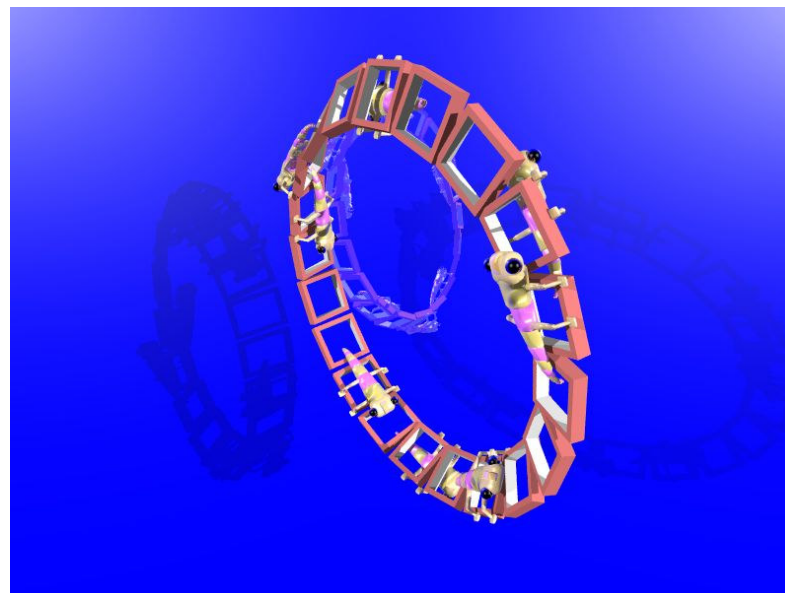


¿Es realmente la tortuga más veloz que Aquiles?



Matemáticas en Acción

Santander

1 de marzo de 2006



Las paradojas han tenido un papel crucial en la historia intelectual, a menudo presentando los desarrollos revolucionarios de las Ciencias, de las matemáticas y de la lógica.

Cada vez que, en cualquier disciplina, aparece un problema que no puede resolverse en el interior del cuadro conceptual susceptible de aplicarse, experimentamos un choque, choque que puede constreñirnos a rechazar la antigua estructura inadecuada y a adoptar una nueva.

Es a este proceso de mutación intelectual al que se le debe el nacimiento de la mayor parte de las ideas matemáticas y científicas.

“Escapar a la paradoja”
1967

Anatol Rapoport (1911-)





**Las paradojas
aparecen a diario,
aunque no nos demos
cuenta...**



<http://go.to/funpic>

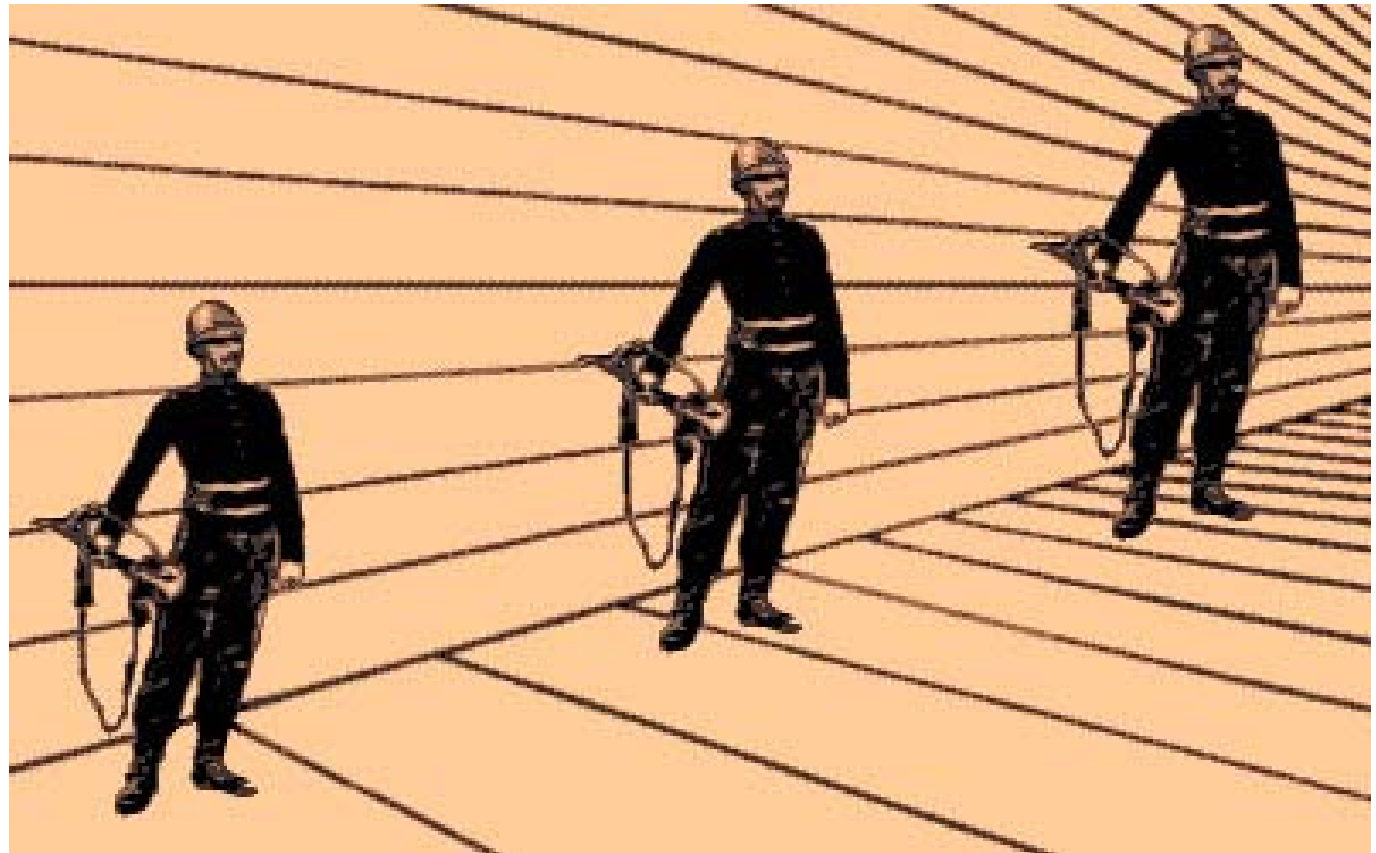
Guión de la charla

- **Paradojas visuales**
- **Paradojas del infinito**
- **Paradojas lógicas**
- **Paradojas semánticas**
- **Paradojas de la vaguedad**
- **Paradojas de la confirmación**
- **Paradojas de la predicción**
- **Paradojas de la teoría de la probabilidad**
- **Paradojas de la teoría de la medida**
- **Paradojas topológicas**

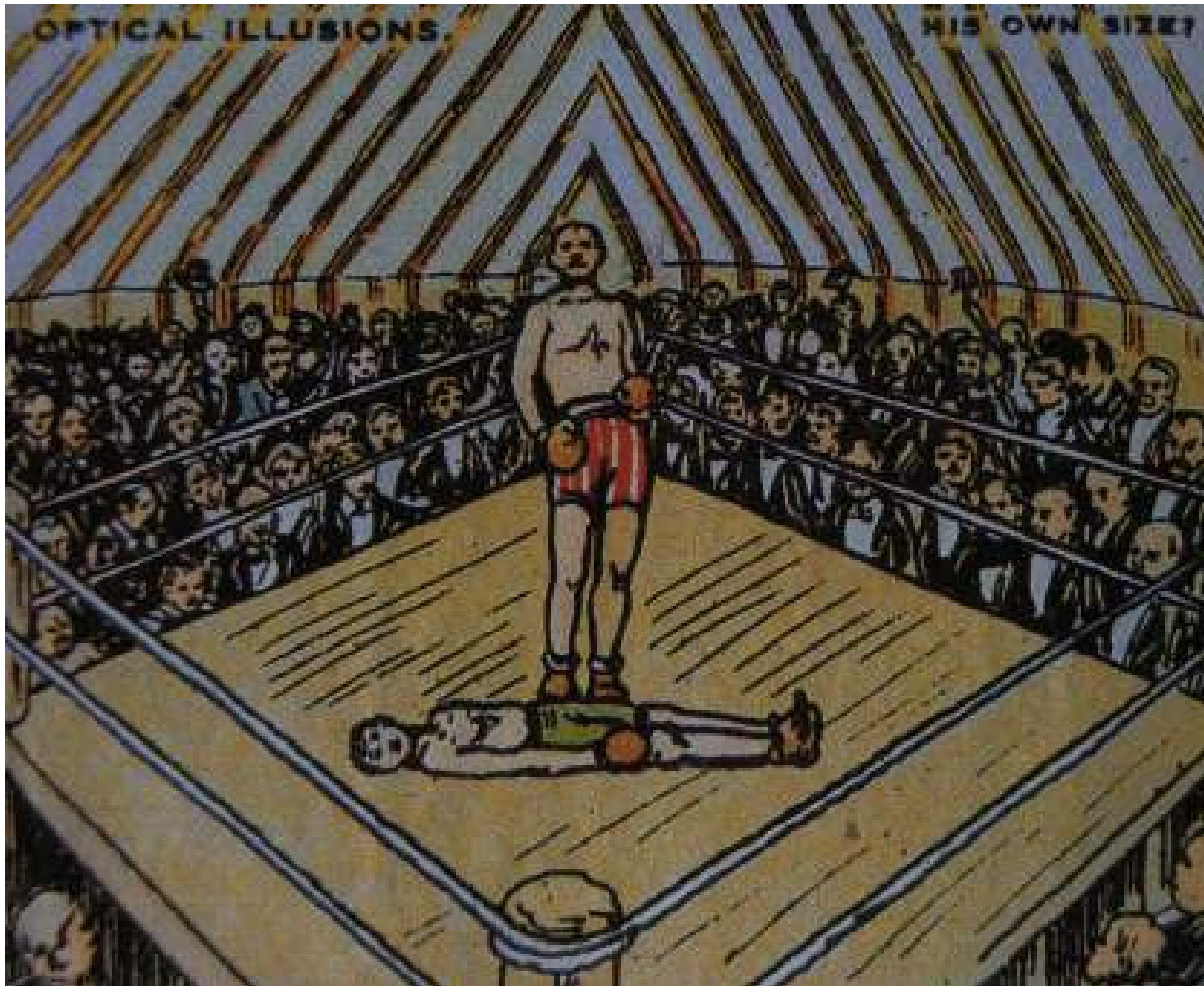
Paradoja de la perspectiva

**Paradoja
de la
perspectiva
ascendente**

**¿Son los
soldados
del
mismo
tamaño?**



Paradoja de la perspectiva



¿Cuál de los dos boxeadores es más alto?

Paradoja de la perspectiva



**William Hogarth
(1697-1764)**

***The Magpie on
the Gallows*
1754**

Hay más de 20 errores de perspectiva...



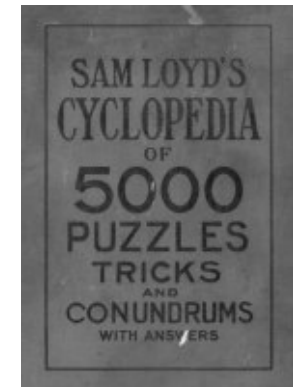
Desapariciones geométricas

Rompecabezas *Abandone la Tierra*, 1914 Sam Loyd (1841-1911)

Just to show the style best calculated to sell in the stores or by street hawkers as a novelty, occasion is taken to illustrate the famous "Get Off the Earth" puzzle, of which over ten millions were sold to the public. The puzzle was printed in bright colors upon two movable pieces (which cannot be shown here). You first see thirteen men, and then only twelve, and the puzzle is to tell which man disappeared.

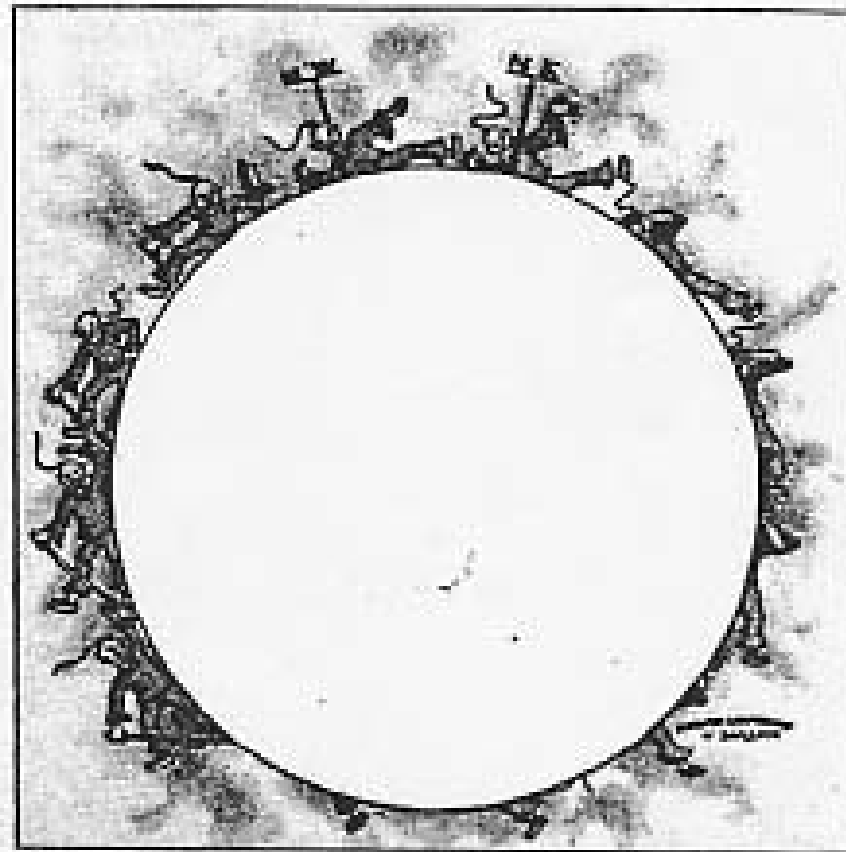
Out of many hundreds of thousands of attempted answers, the most idiotic of which recently appeared in the **LONDON STRAND MAGAZINE**, not one explained the mystery, for which reason Mr. Loyd has issued a new puzzle called **TEDDY AND THE LIONS**, which fully refutes all so-called explanations.

\$1,000 worth of prizes being offered for the best answers received during the year 1909.

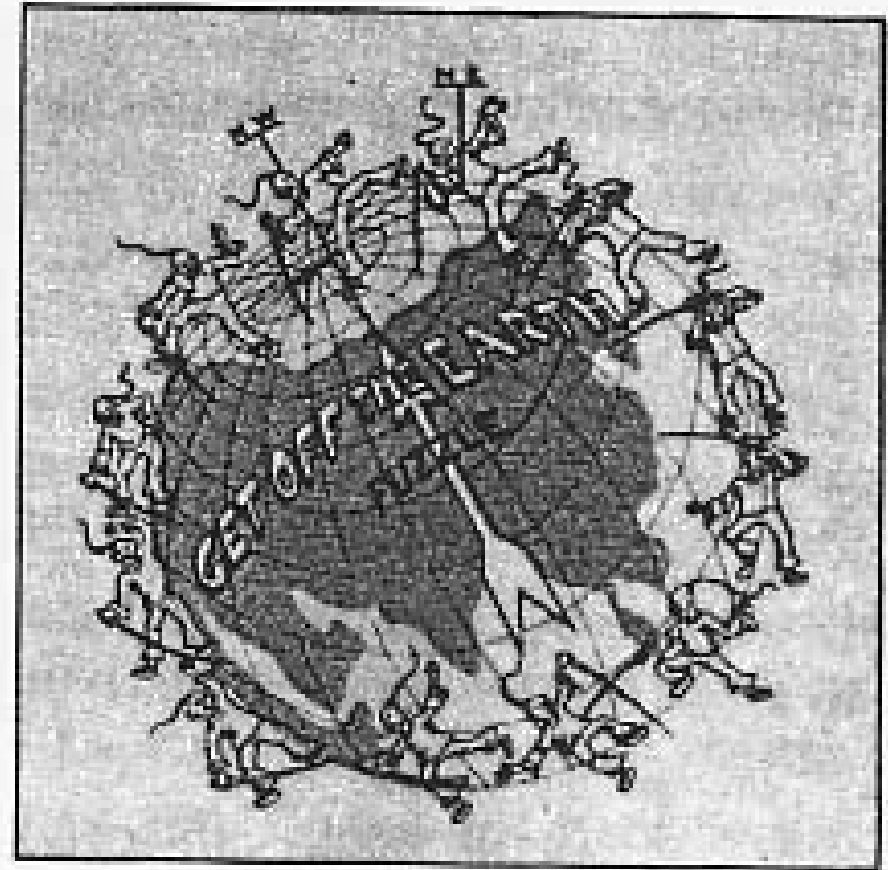
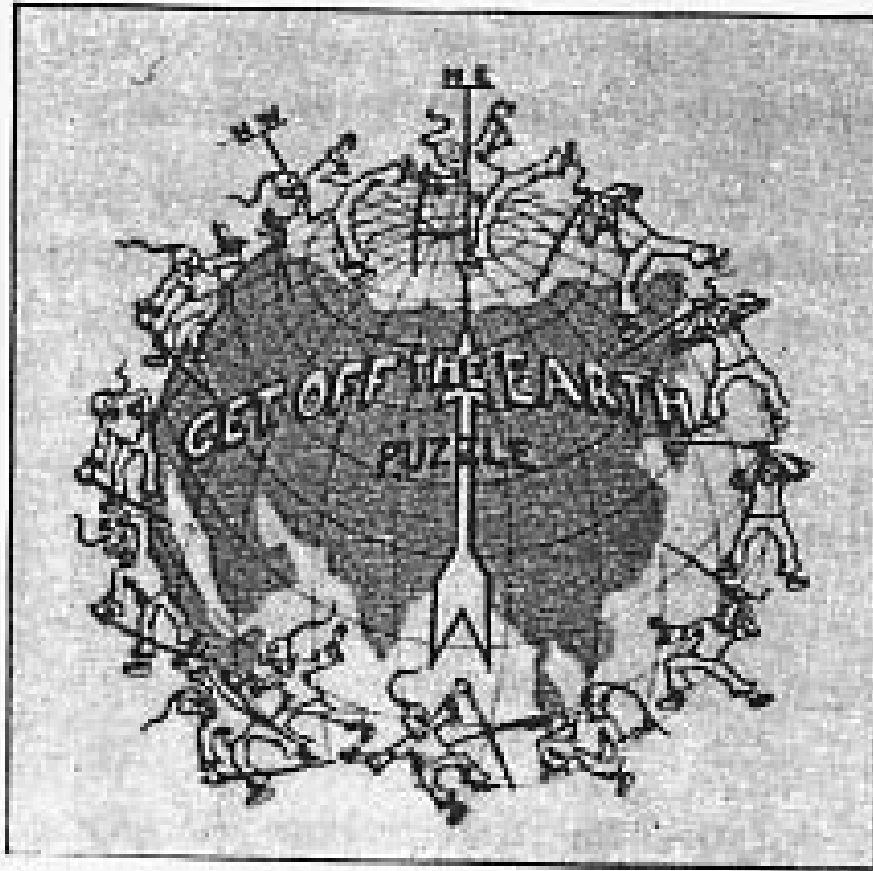
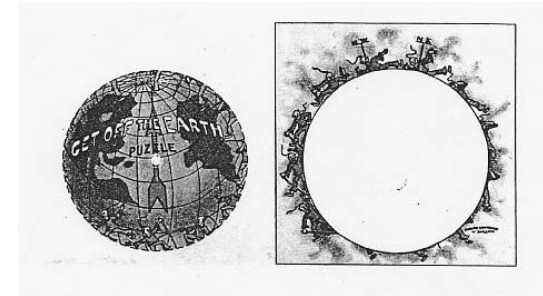


Rompecabezas “*Abandone la Tierra*”, Sam Loyd

<http://www.mathpuzzle.com/loyd/>



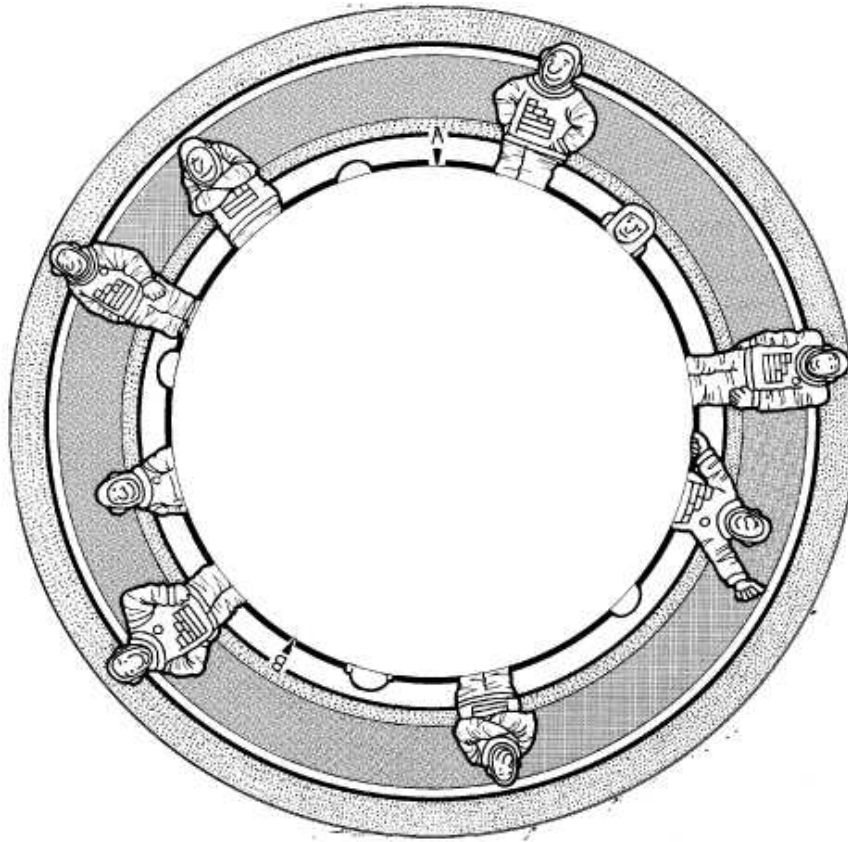
“Abandone la Tierra”, Sam Loyd



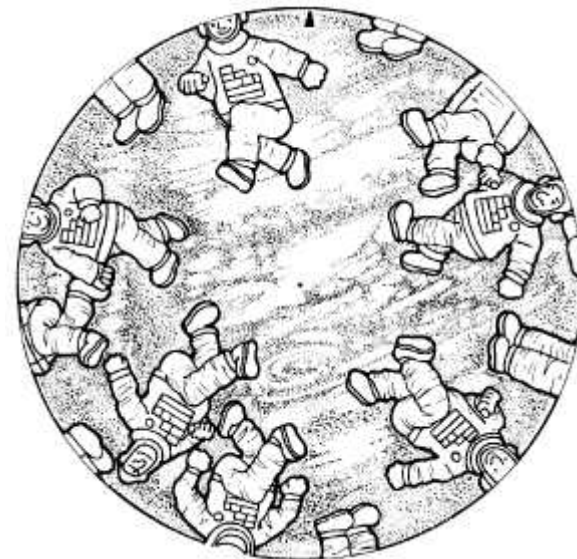
13 guerreros al norte... y 12 guerreros al noroeste

Desapariciones geométricas

<http://www.aimsedu.org/Puzzle/LostInSpace/space.html>



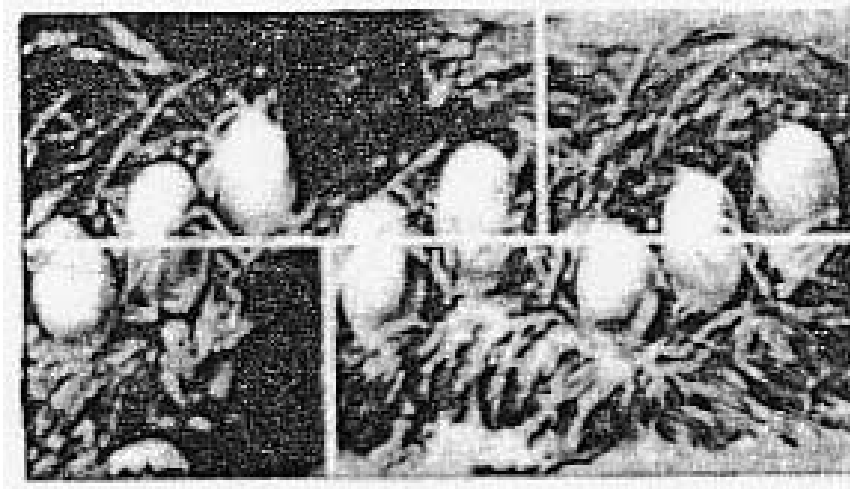
LOST IN SPACE



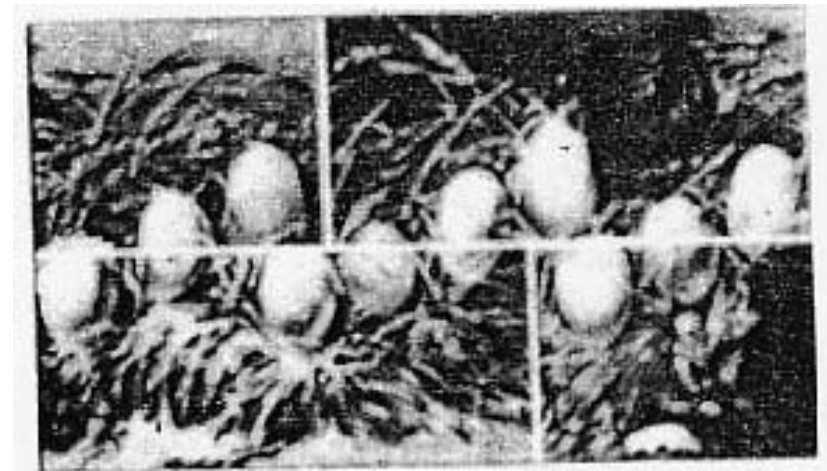
En posición A, 15 astronautas rodean el planeta ... cuando se rota el disco de modo que la flecha apunte a B, quedan sólo 14 astronautas ...

Desapariciones geométricas

La paradoja del *huevo desapareciendo*: los cuatro trozos que pueden redistribuirse para obtener seis, siete, ocho, diez, once o doce huevos.

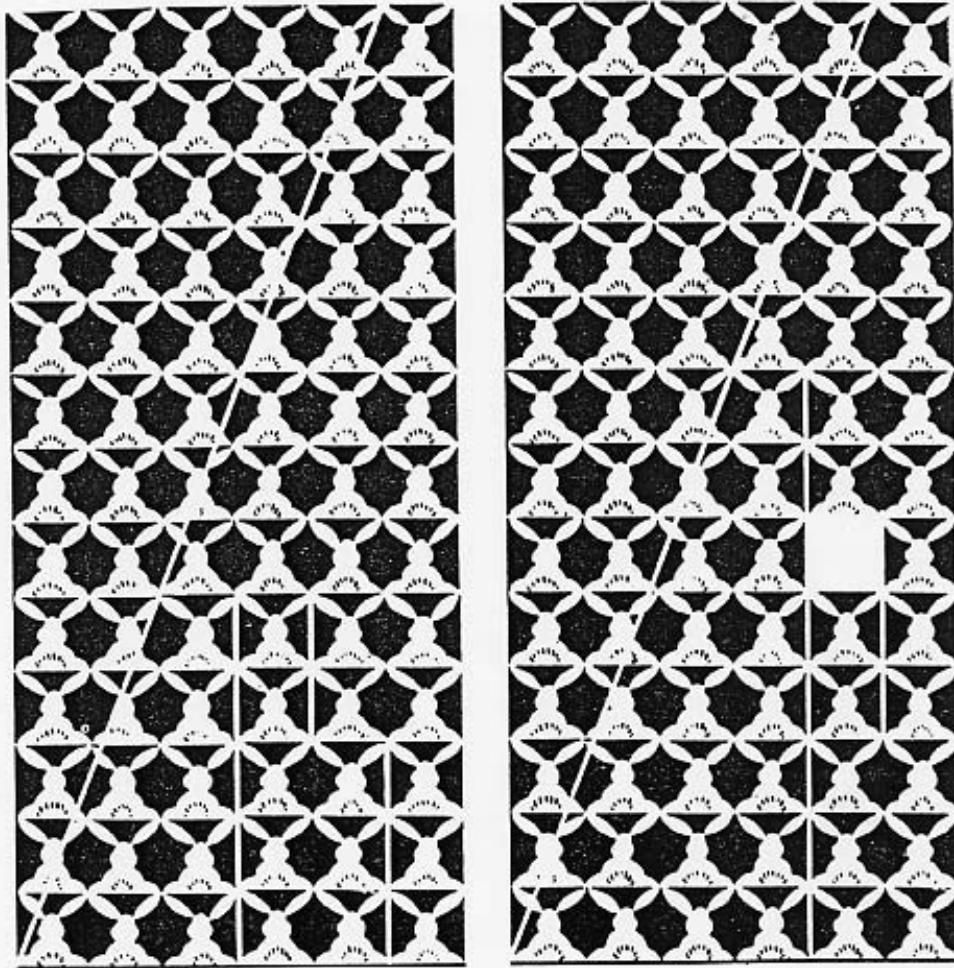


8 huevos



10 huevos

Desapariciones geométricas



Paradoja de Curry

El primer rectángulo
tiene $6 \times 13 = 78$
conejos.

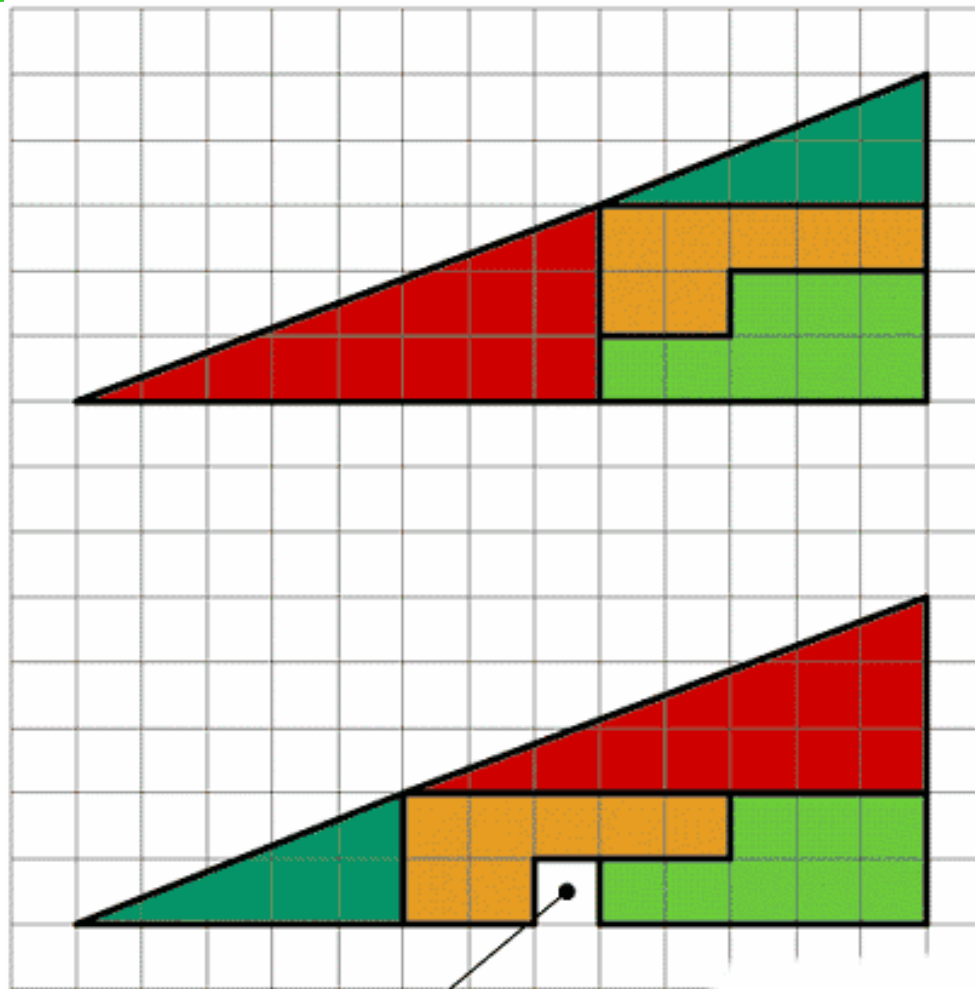
Tras cortar y
recolocar
quedan ¡77 conejos!

¿Dónde ha quedado
el conejo que falta?

Desapariciones geométricas

Una paradoja de Hooper

La aparente pérdida de superficie es debida al reajuste de los trozos.

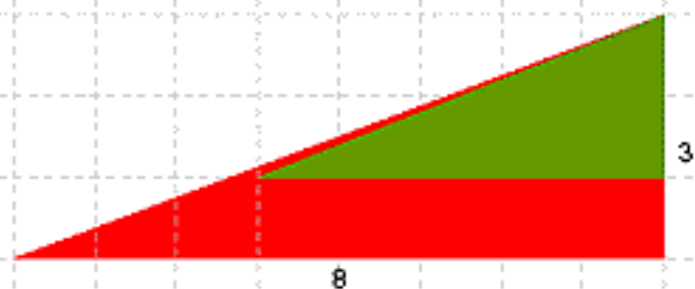


*Movemos
las cuatro piezas*

*Las piezas son
exactamente
iguales que las
empleadas arriba*

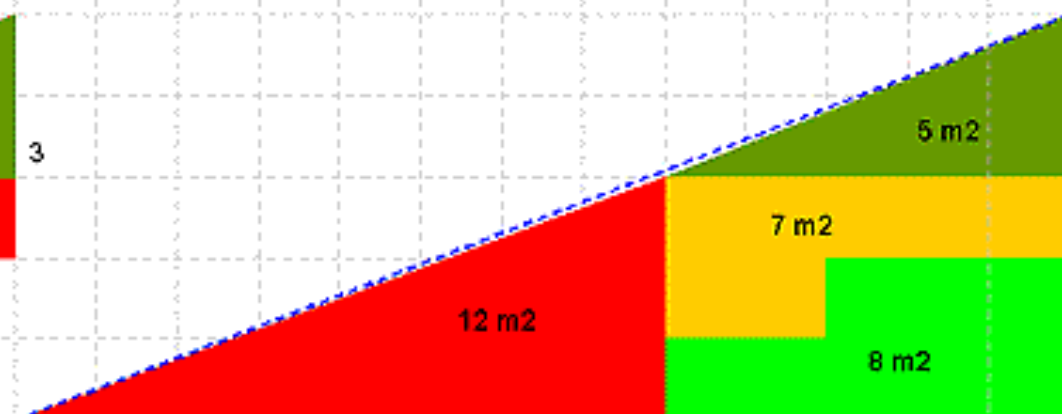
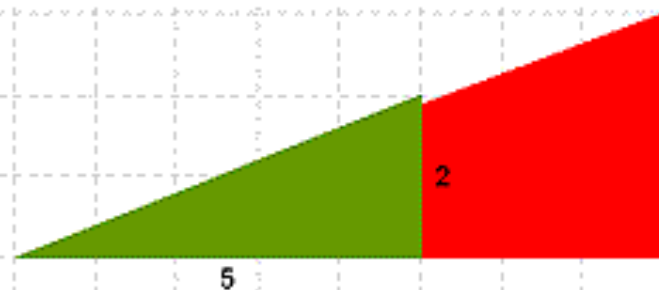
¿De dónde sale este "agujero"?

EL TRUCO ESTA EN EL BORDE NEGRO QUE OCULTA QUE LOS DOS TRIANGULOS NO SON PROPORCIONALES
LOS DOS TRIANGULOS NO TIENEN LA MISMA PENDIENTE



Los dos triángulos no tienen la misma pendiente

$$\frac{8}{3} \neq \frac{5}{2}$$



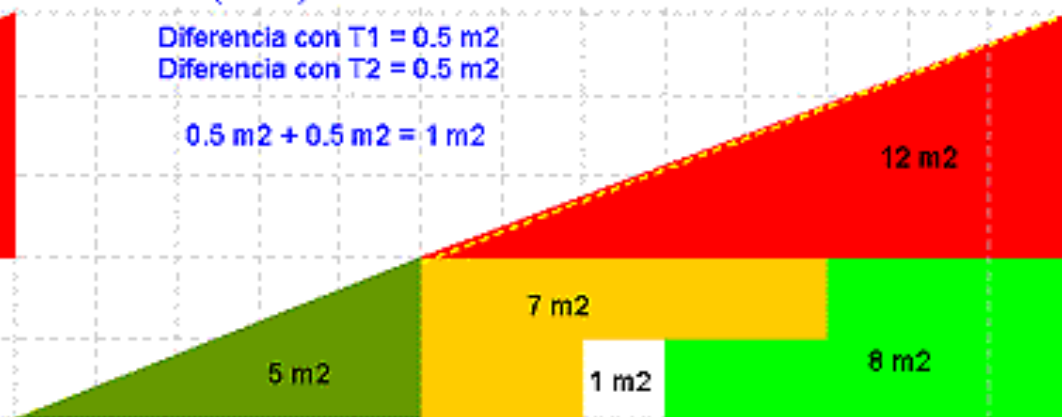
T1 Total 32 m²

Area del triángulo ficticio 13 x 5
(13 x 5) : 2 = 32.5 m²

Diferencia con T1 = 0.5 m²

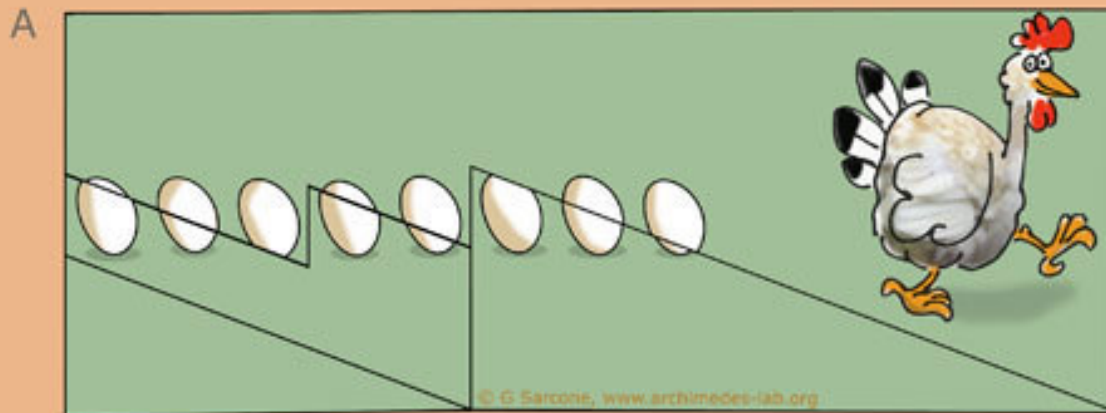
Diferencia con T2 = 0.5 m²

0.5 m² + 0.5 m² = 1 m²

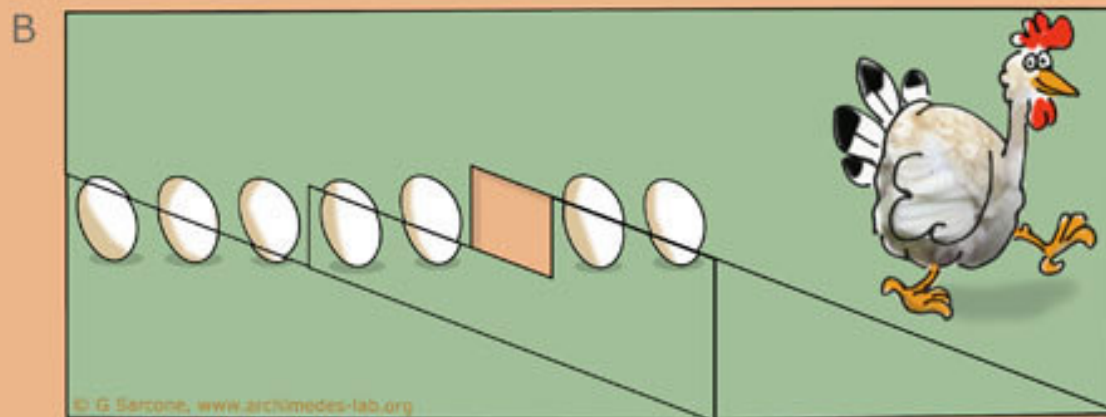


T2 Total 33 m²

Desapariciones geométricas



By permuting the triangular pieces an egg disappears. How does it happen?



http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html

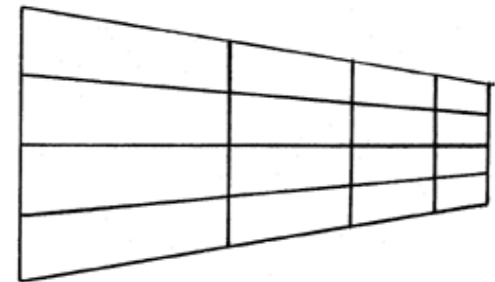
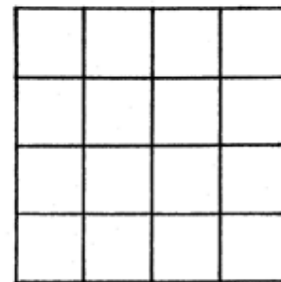
Anamorfosis

Una anamorfosis es una deformación reversible de una imagen a través de procedimientos matemáticos u ópticos.

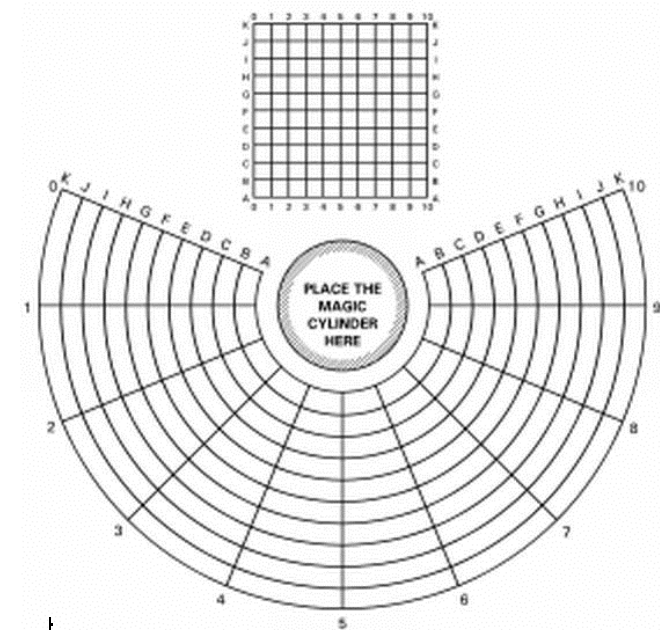
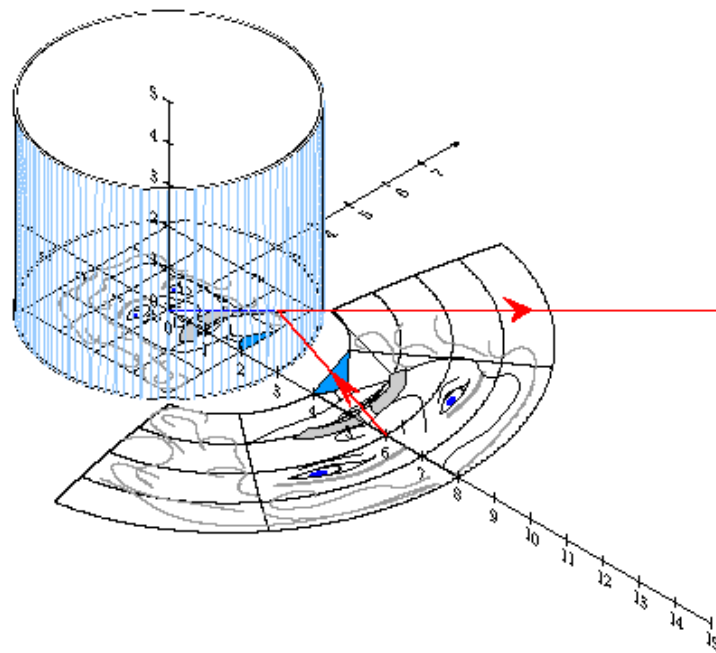


En este grabado de Durero (velo de Alberti), el artista usa un retículo para guardar las proporciones de la modelo.

¿Y si no se coloca el enrejado de forma perpendicular?

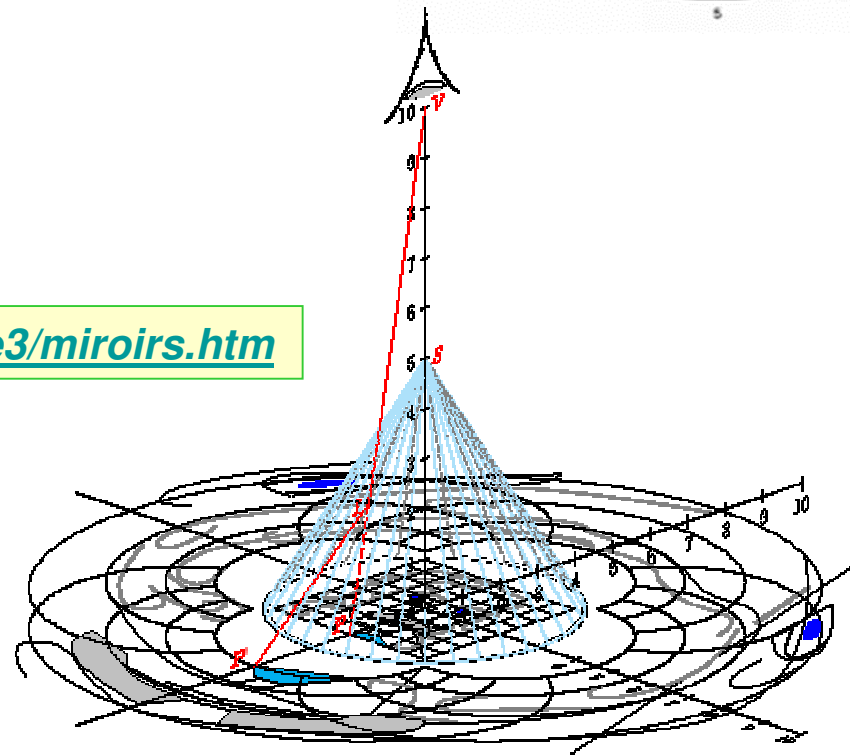


Anamorfosis cilíndrica



<http://members.aol.com/ManuelLuque3/miroirs.htm>

Anamorfosis cónica



Anamorfosis

Programa para crear anamorfosis:

Anamorph me! (version 0.2)

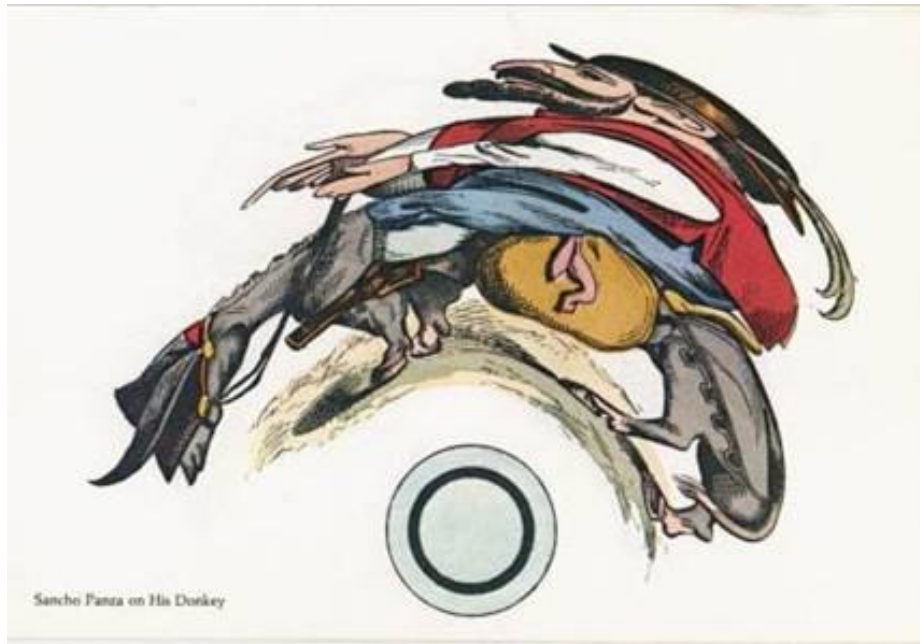
software libre que lee imágenes en formatos estándar (JPEG, BMP, etc.) y les aplica diversas anamorfosis.

Funciona sólo en Windows (95/98/NT/ME/2000/XP).

<http://myweb.tiscali.co.uk/artofanamorphosis/software.html>

Programa

Anamorfosis cilíndrica



***Sancho Panza
y su burro***

Napoleón



Anamorfosis cilíndrica



El murciélago



Anamorfosis



Erhard Schön (1491-1542): *Vexierbild*, 1535
Lugares, barcos y ciudades... y... composición
anamórfica de Carlos V, Fernando I, el papa Pablo III y
Francisco I.



Video

Anamorfosis

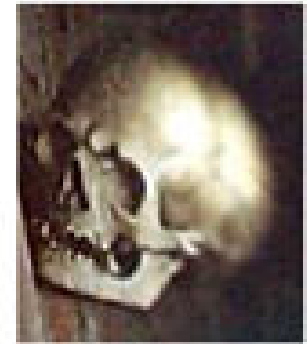
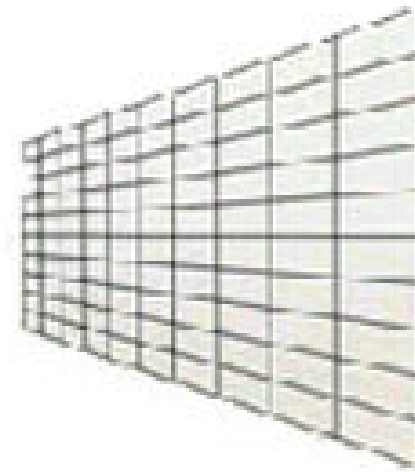
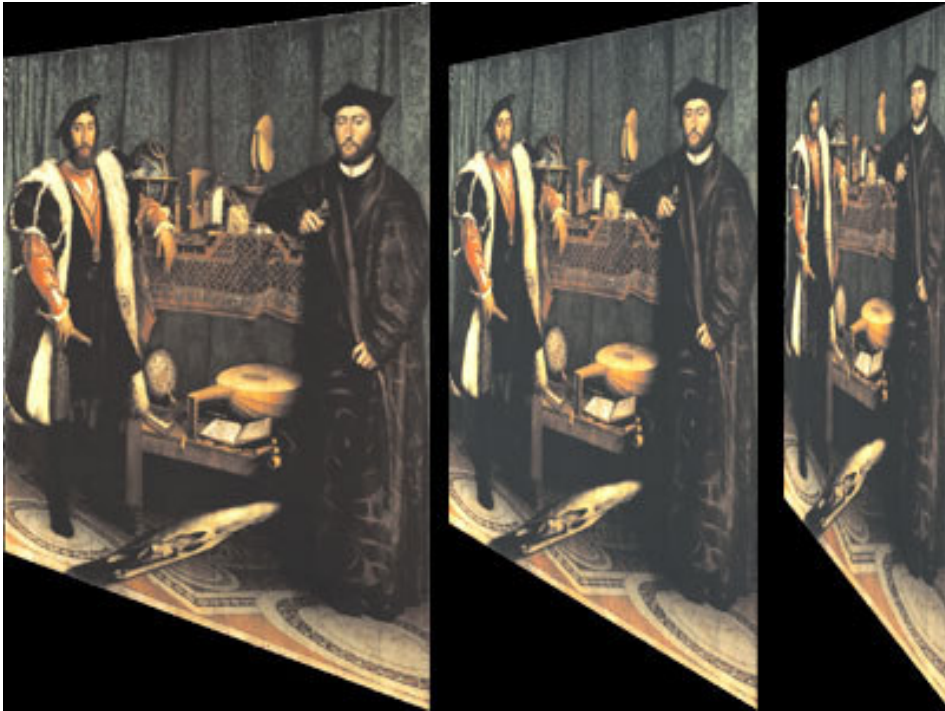


“Los Embajadores”
(1533)

por

Holbein el joven
(1497-1543)

Y, al salir de la sala, al mirar el cuadro desde otro punto de vista, aparece...



Video

Anamorfosis



Casa Professa del Gesù de Roma (1680) Decorada por Andrea Pozzo (1642-1709)

América

Capilla de
San Ignacio

Dios Padre
proyecta la
luz sobre el
Hijo, quien
la transmite
hacia San
Ignacio, del
cual parten
cuatro rayos
que se
dirigen a los
cuatro
continentes.





**La primera es la imagen
anamórfica...**

**... la segunda es la “buena”
visión, colocándose en un
determinado punto.**





Ángeles anamórficos



Anamorfosis



Kurt Wenner

Dies Irae, Italia

Musas, Suiza

<http://www.kurtwenner.com/>

Anamorfosis



Edinburgh City Centre

Visto de lado: 13 metros

Julian Beever

<http://users.skynet.be/J.Beever/pave.htm>

Make Poverty History

Dibujo encargado para la campaña de presión al G8

Vista de frente



Anamorfosis

Anamorfosis en un
ángulo de la pared y
el suelo: 1,5 metros



Le Wallandais

*Habitant des
murs*



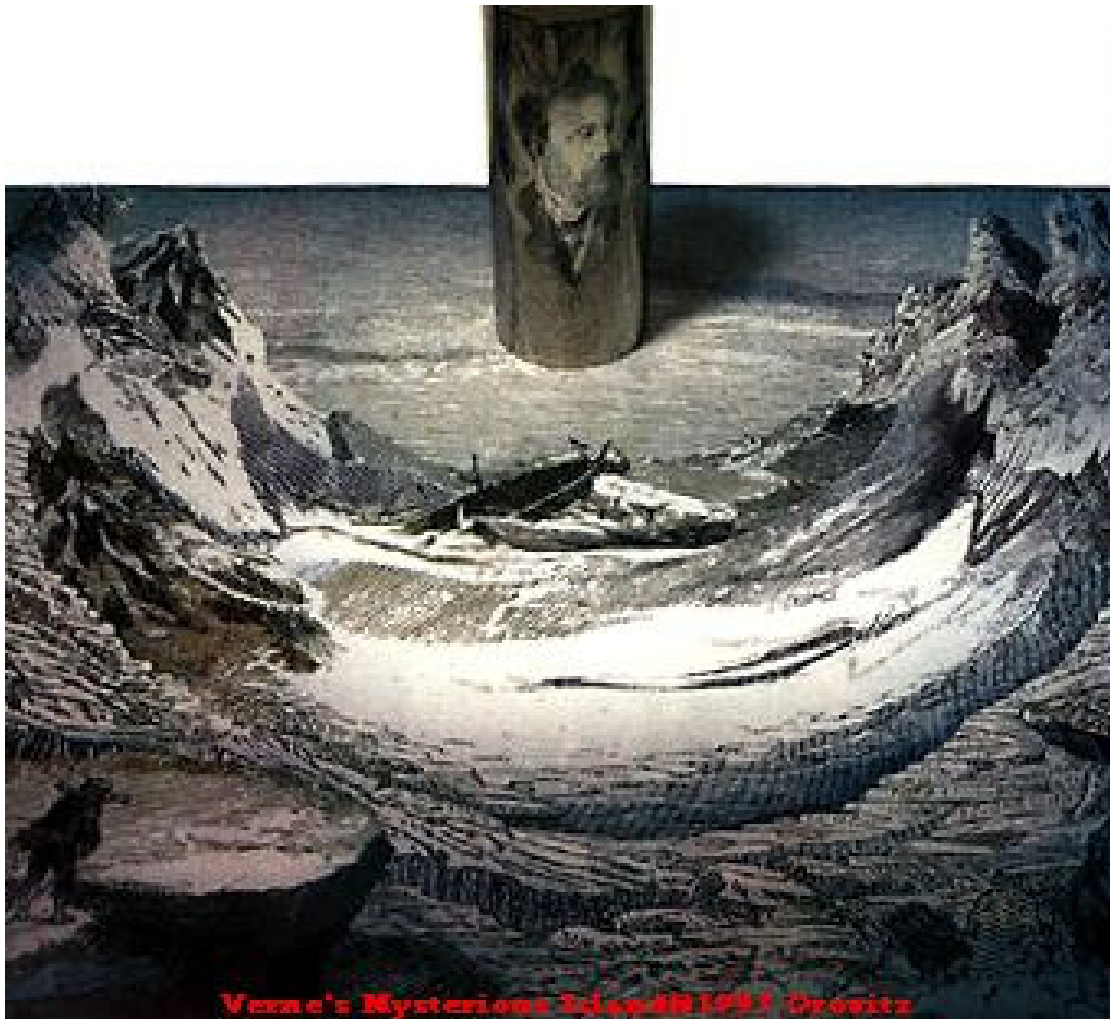
Anamorfosis



Con la ocasión del *'Museumsnacht'* (2004) en Hamburgo, el Museo de Artes y Oficios se presentó a sí mismo con el eslógan *"Todos los caminos conducen al Arte"*.



Anamorfosis cilíndrica



<http://www.geocities.com/SoHo/Museum/8716/>



István Orosz

*“La isla misteriosa
y el retrato de Julio
Verne”*

Video

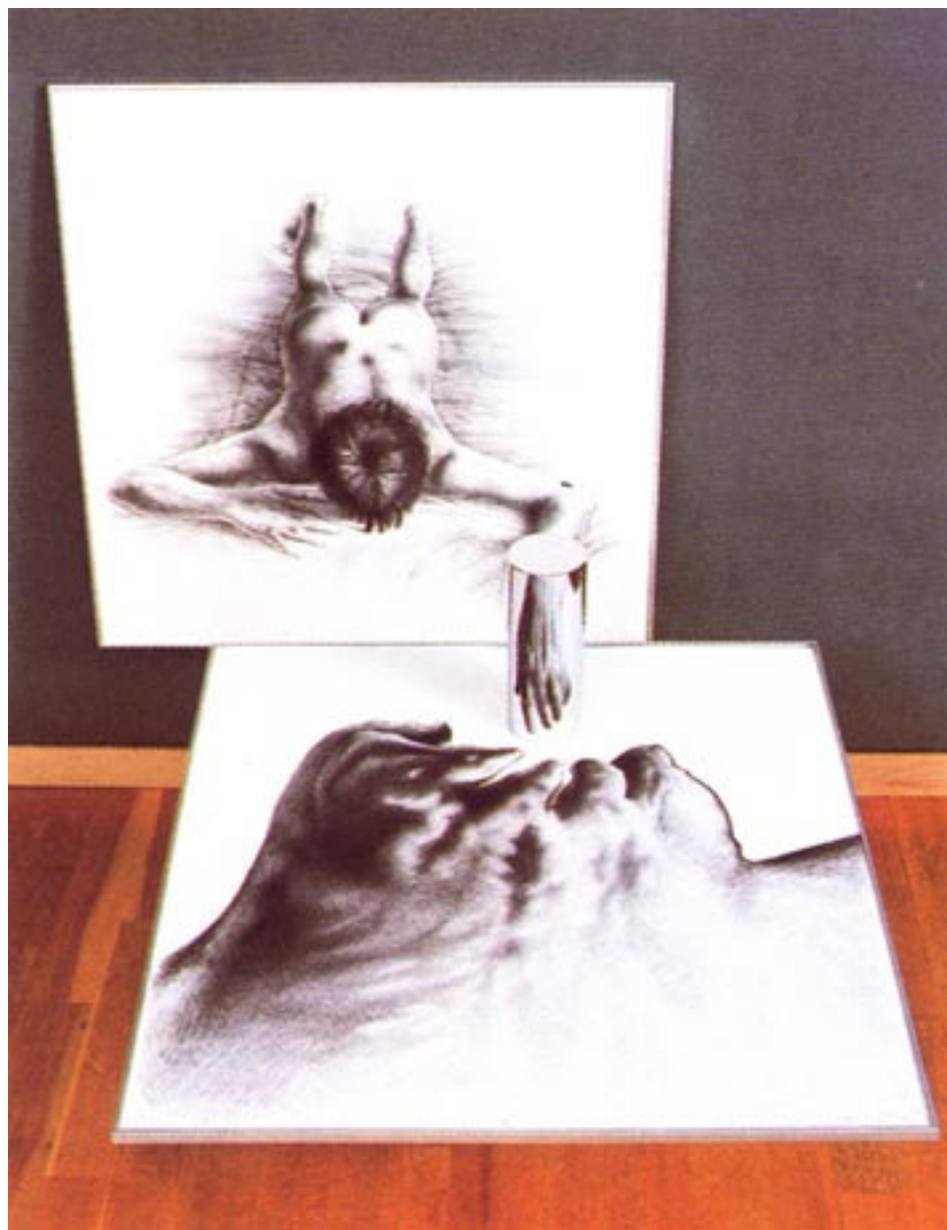
Anamorfosis



István Orosz



Escalera de dimensión tres, vista desde diferentes ángulos. Los dos primeros revelan una figura que camina sobre las escaleras, un tanto distorsionada. Sólo la figura final resuelve la anamorfosis.



Mano

Pie



Foot 1997 Ozovitz

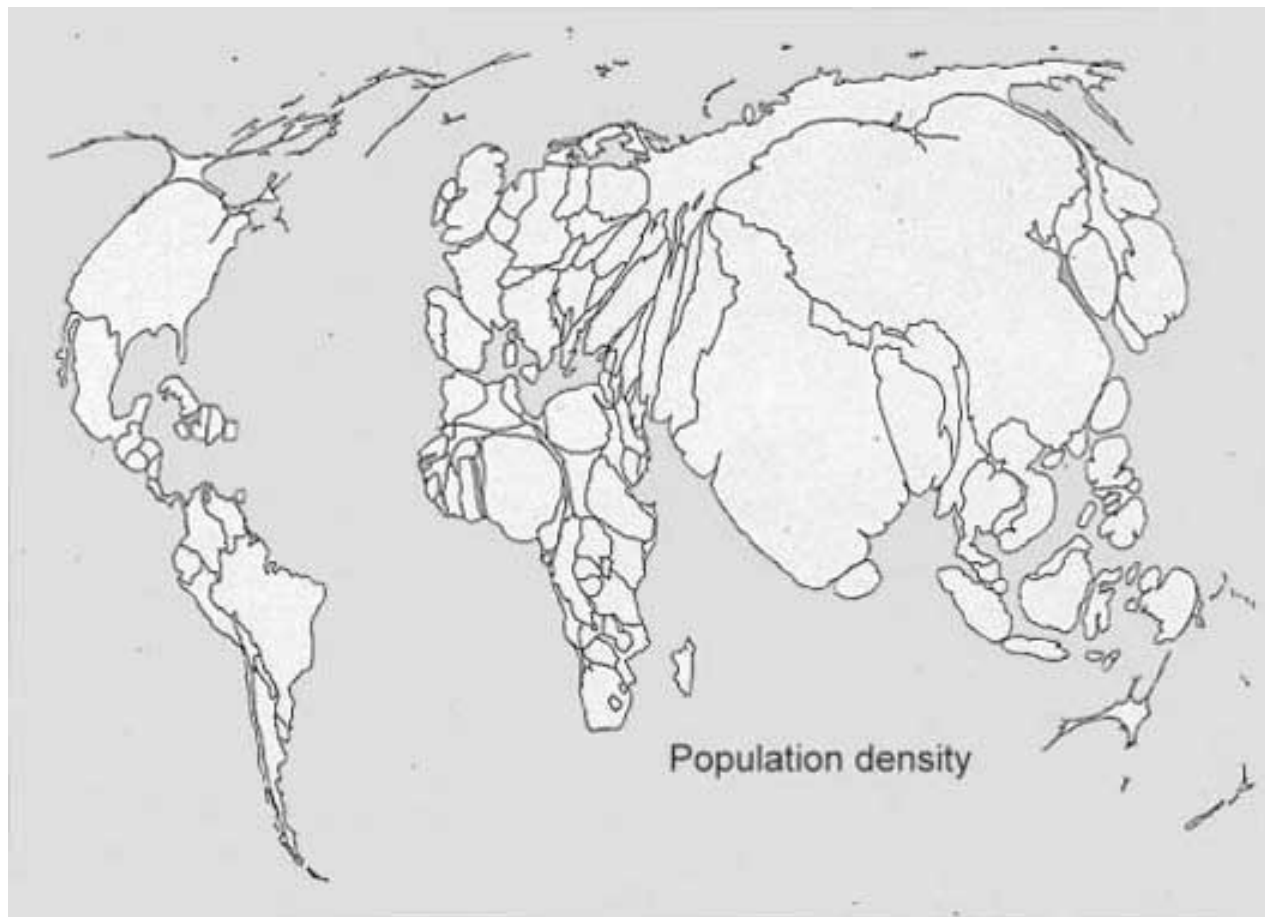
Anamorfosis y señalización



Las anamorfosis se usan a menudo en señales de tráfico, para que las señales sean correctamente interpretadas por los conductores.



Anamorfosis y cartografía estadística



Las anamorfosis se utilizan en cartografía estadística para mostrar la importancia de un fenómeno dado. El mapa ya no representa la realidad geográfica, sino la realidad del fenómeno.

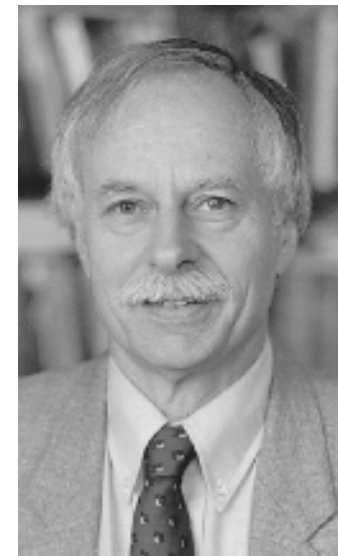
La deformación se realiza usando transformaciones matemáticas.

Figuras ambiguas

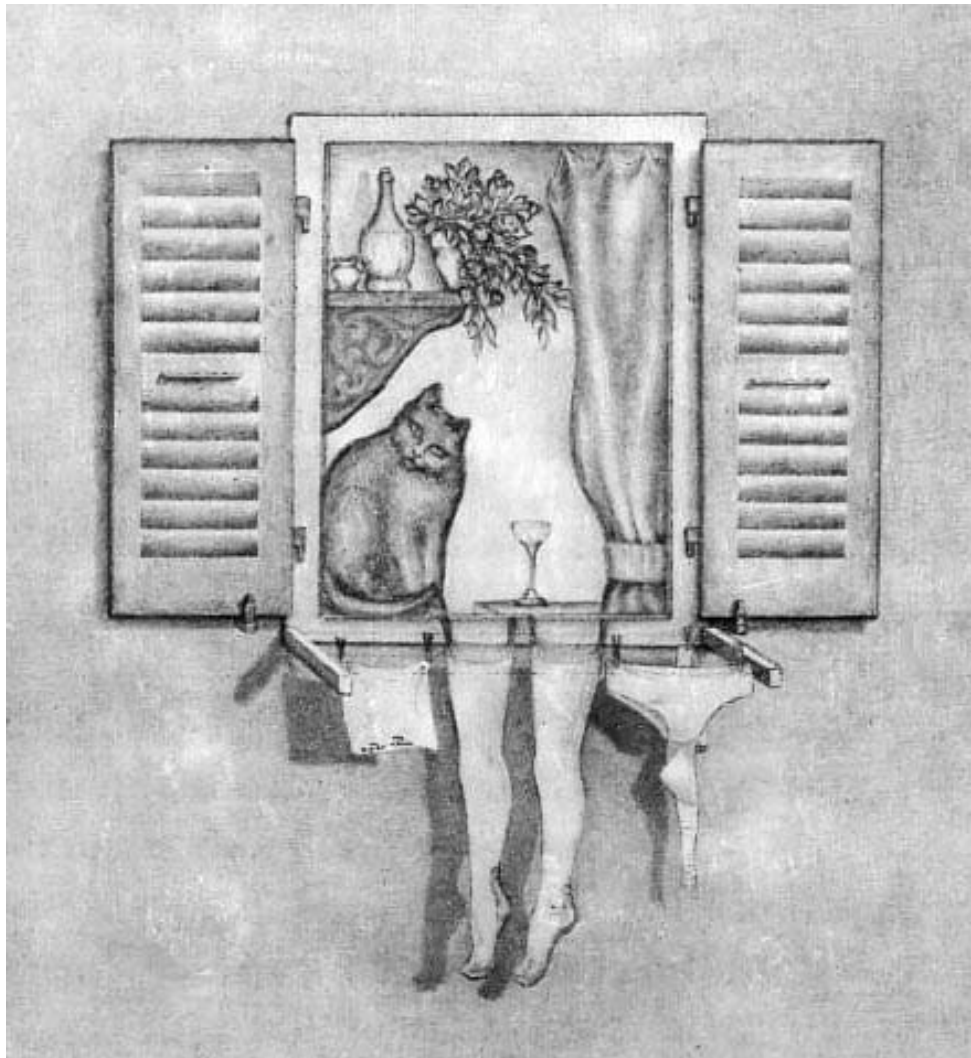


Roger N. Shepard
(1929-)

Sara Nader



Figuras ambiguas



**Sandro del
Prete (1937-)**

*Todo lo que
vemos puede
ser visto de
otra manera*

Figuras ambiguas



El charco

<http://www.mcescher.com>

Tres mundos

M. Cornelius Escher (1898-1972)

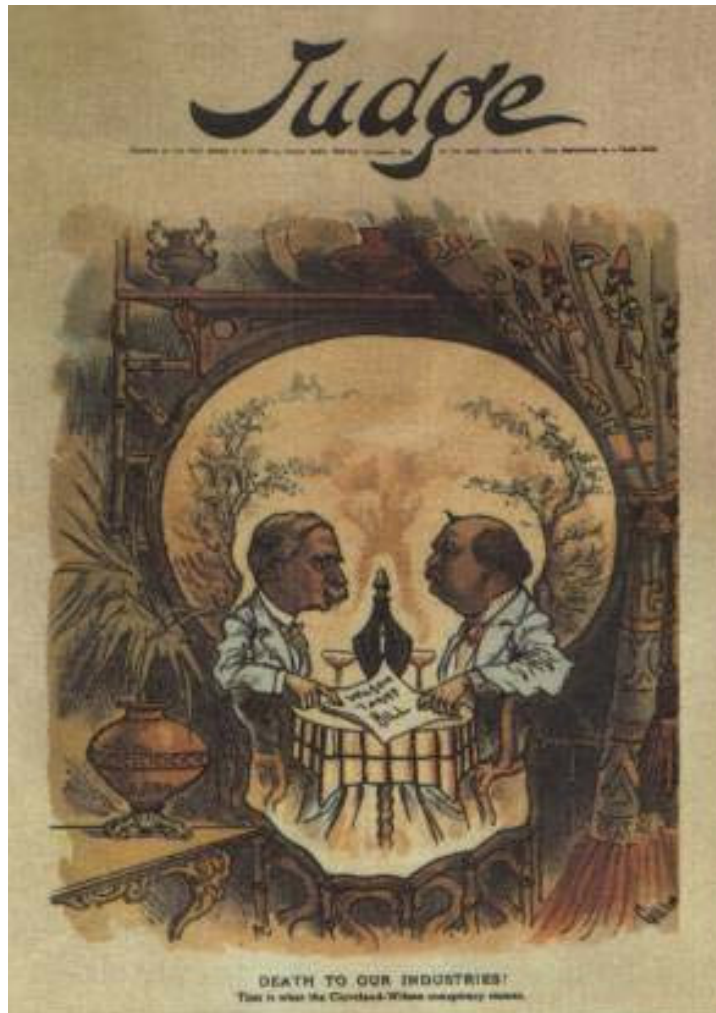


Figuras ambiguas



**Caja de cerillas: 12 elefantes y sólo 6 cabezas
(aparte del elefante central)**

Figuras ambiguas



**Gillam: Cubierta del Magazine
JUDGE 26, 1894
Cartel reivindicativo contra los
aranceles**

**En el papel del cartel:
*“Wilson Tariff Bill”***

**Base del cartel:
*“Death to our industries.
That is what Cleveland-Wilson
conspiracy means”***

Figuras ambiguas



Peter Brookes
De cerca se ve el ratón
y
de lejos, el gato

Ambigramas

infinite



**Scott
Kim
(1955-)**

<http://www.scottkim.com/>



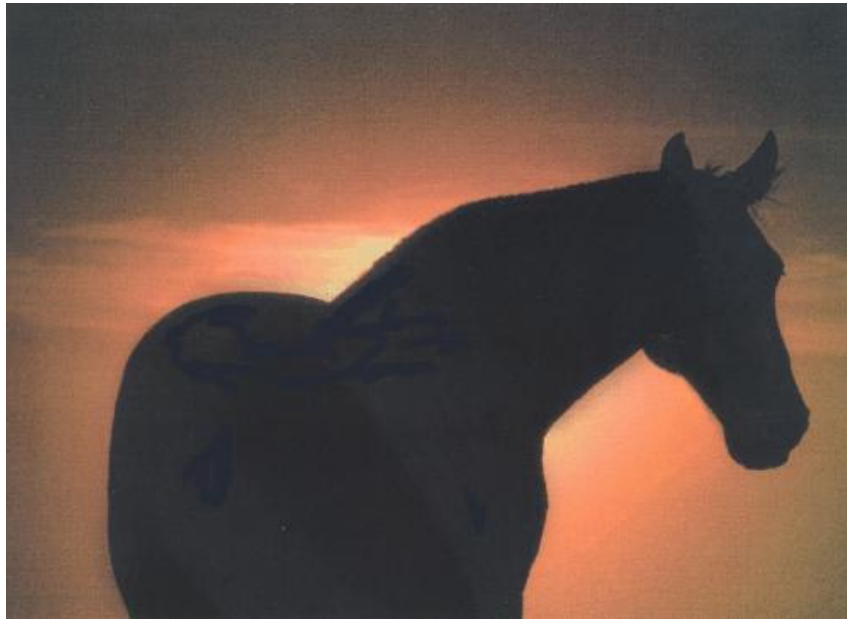
Scott Kim: *Input-Output*



Scott Kim: *Melody-Rhythm*



Ilusión fotográfica



¿Hacia que lado mira el caballo?

Jerry Downs



Ilusión óptica

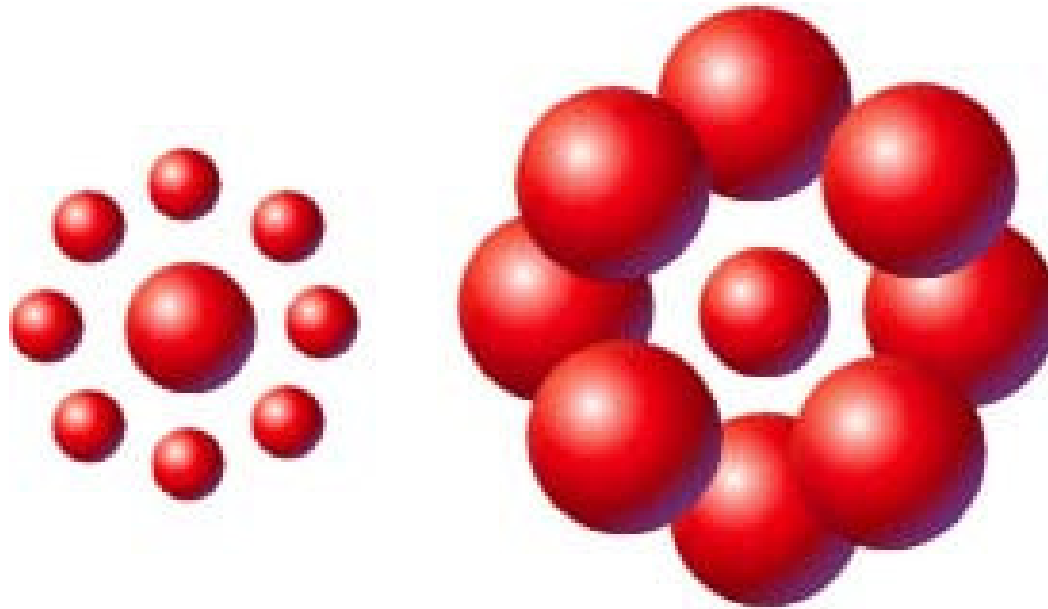
http://www.archimedes-lab.org/Gallery/new_optical_illusions/index.html



El color en esta foto de una vaca no está bien equilibrado; el lado izquierdo es menos amarillo que el derecho...

Para restaurar el color, mira la mosca del segundo diagrama durante 30 segundos y después mira a la vaca de nuevo...

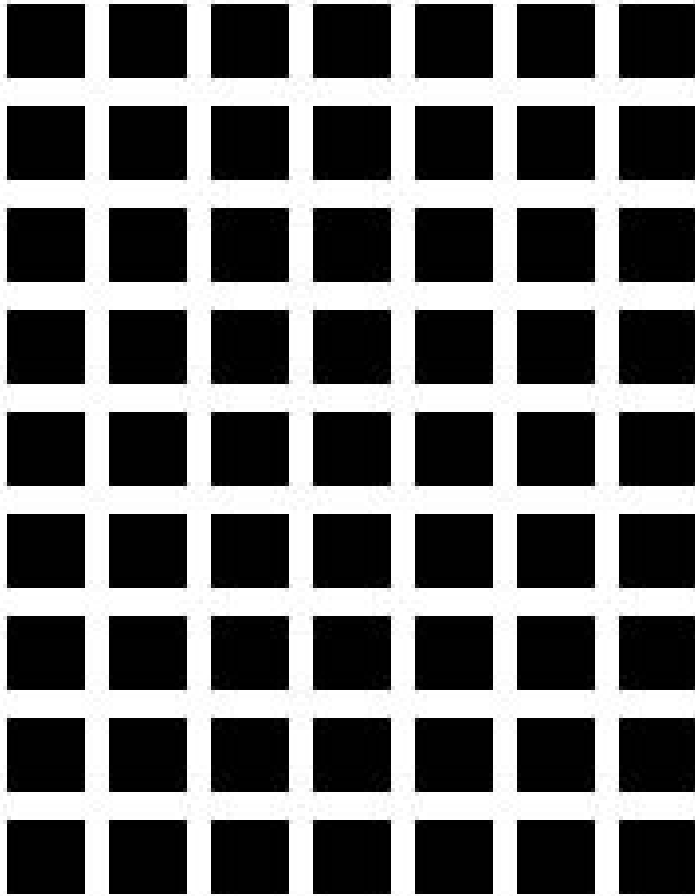
Ilusión óptica



Titchener y Delboeuf

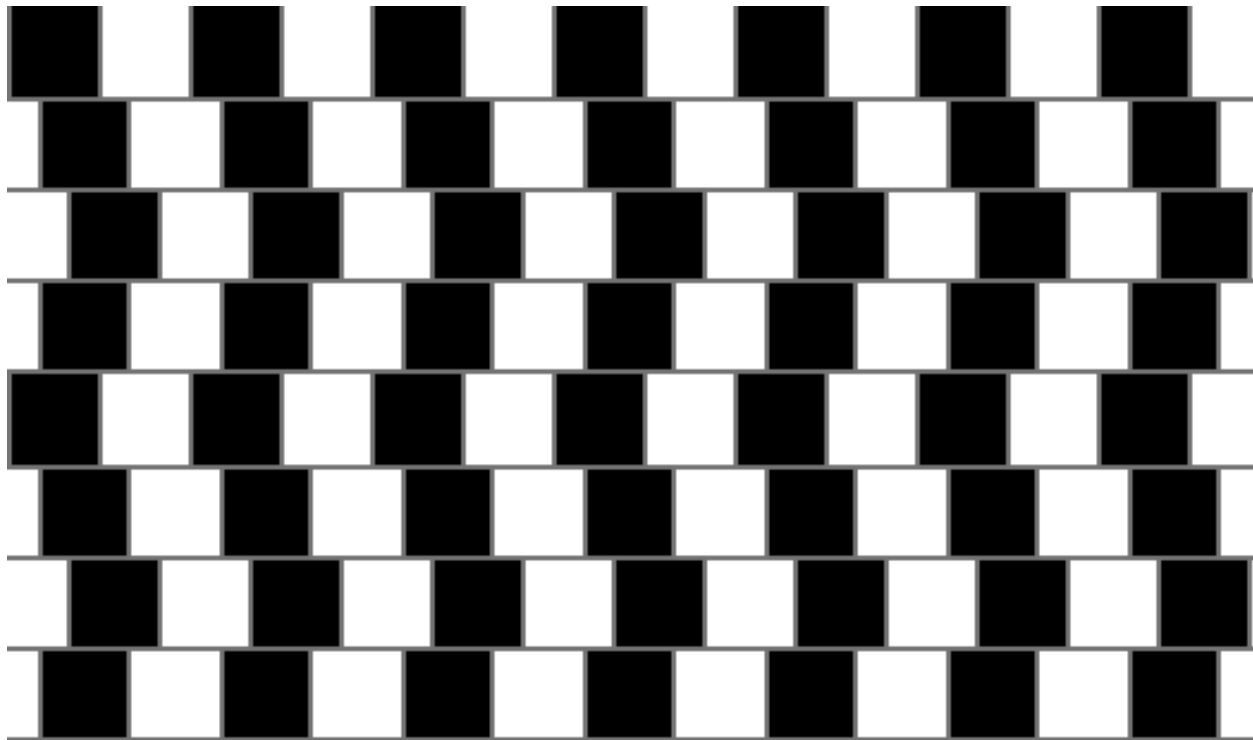
¿Cuál de los dos círculos centrales es de mayor tamaño?

Ilusión óptica



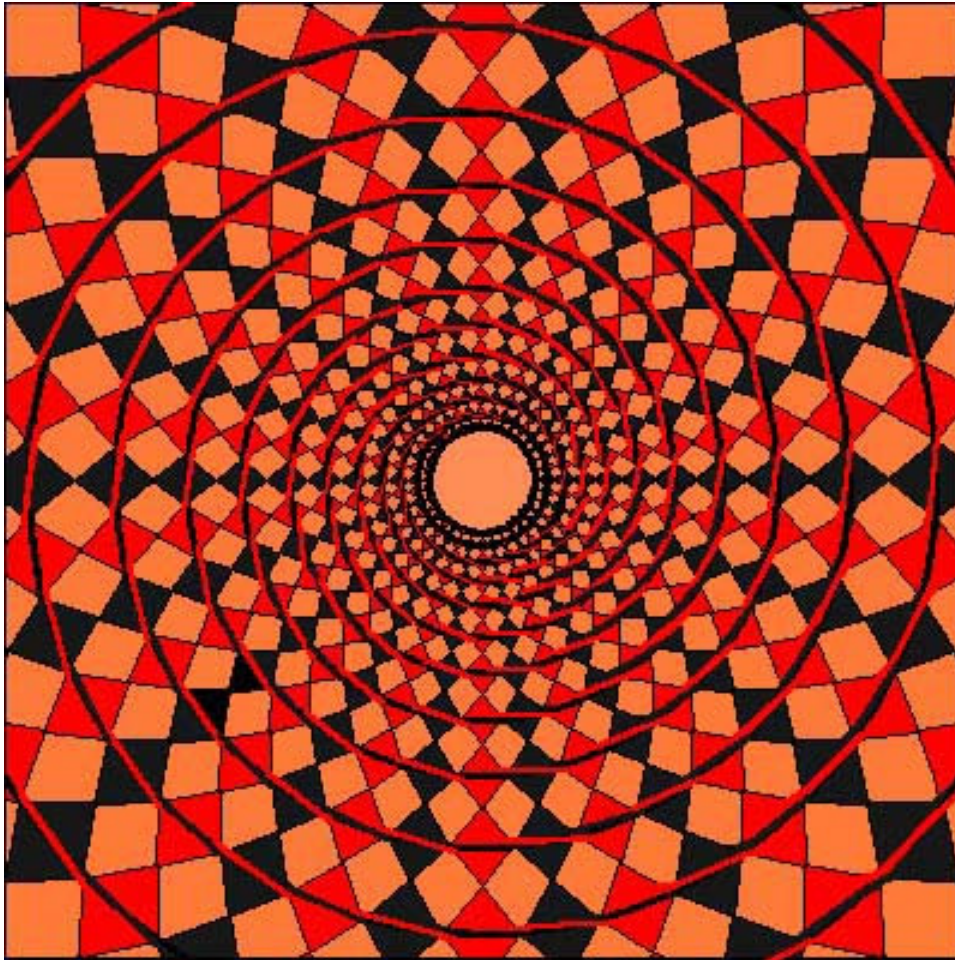
**Ilusión del enrejado
por contraste de
colores**

Ilusión óptica



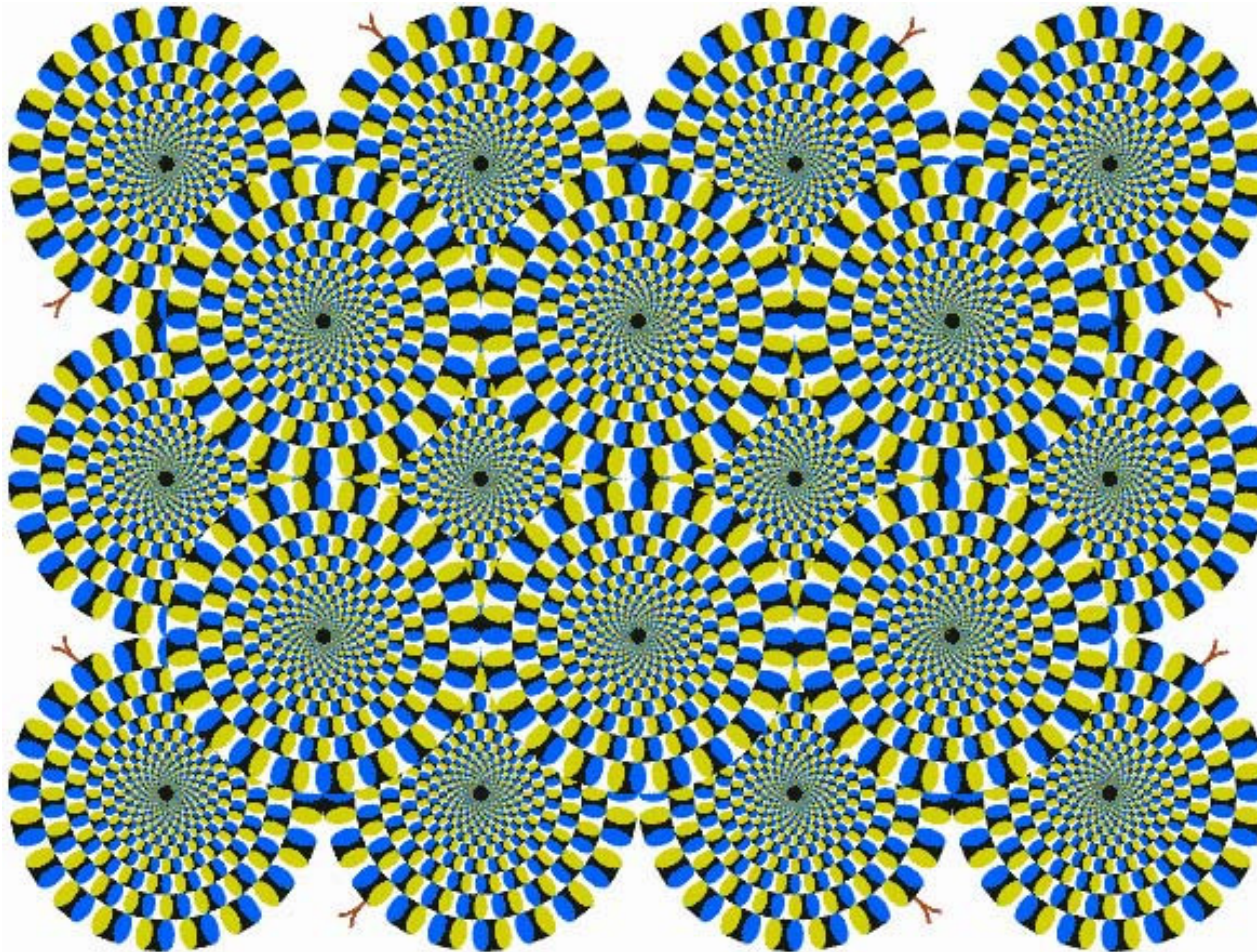
**¿Son
paralelas las
líneas?**

Ilusión óptica



**Ilusión de las
cuerdas de
Frazier**

Ilusión óptica



**Akiyoshi
Kitaoka**

*Serpientes
rotando*

<http://www.ritsumeai.ac.jp/~akitaoka/index-e.html>

Ilusión óptica en 3D





Si te mueves alrededor de este dragón de papel, parece que te sigue a lo largo de la habitación.

¿Qué sucede? Cuando te mueves alrededor de un objeto sólido, tu cerebro sabe como se comporta. Pero este dragón nos da “falsas pistas”... interpretamos que la nariz del dragón apunta hacia nosotros, cuando de hecho su cara es cóncava...

<http://www.grand-illusions.com/opticalillusions/dragonillusion/>

Figuras imposibles



Guido Moretti (1947-)

http://www.guidomoretti.it/S_terzavia.htm



Anillo y Paralelepipedos imposibles

Video + video Haemakers

Figuras reversibles



¿El
granjero
inglés y
el asno?



Figuras reversibles



Sergio Buratto
¿sapo o caballo?

Figuras reversibles



Shigeo
Fukuda
(1932-)

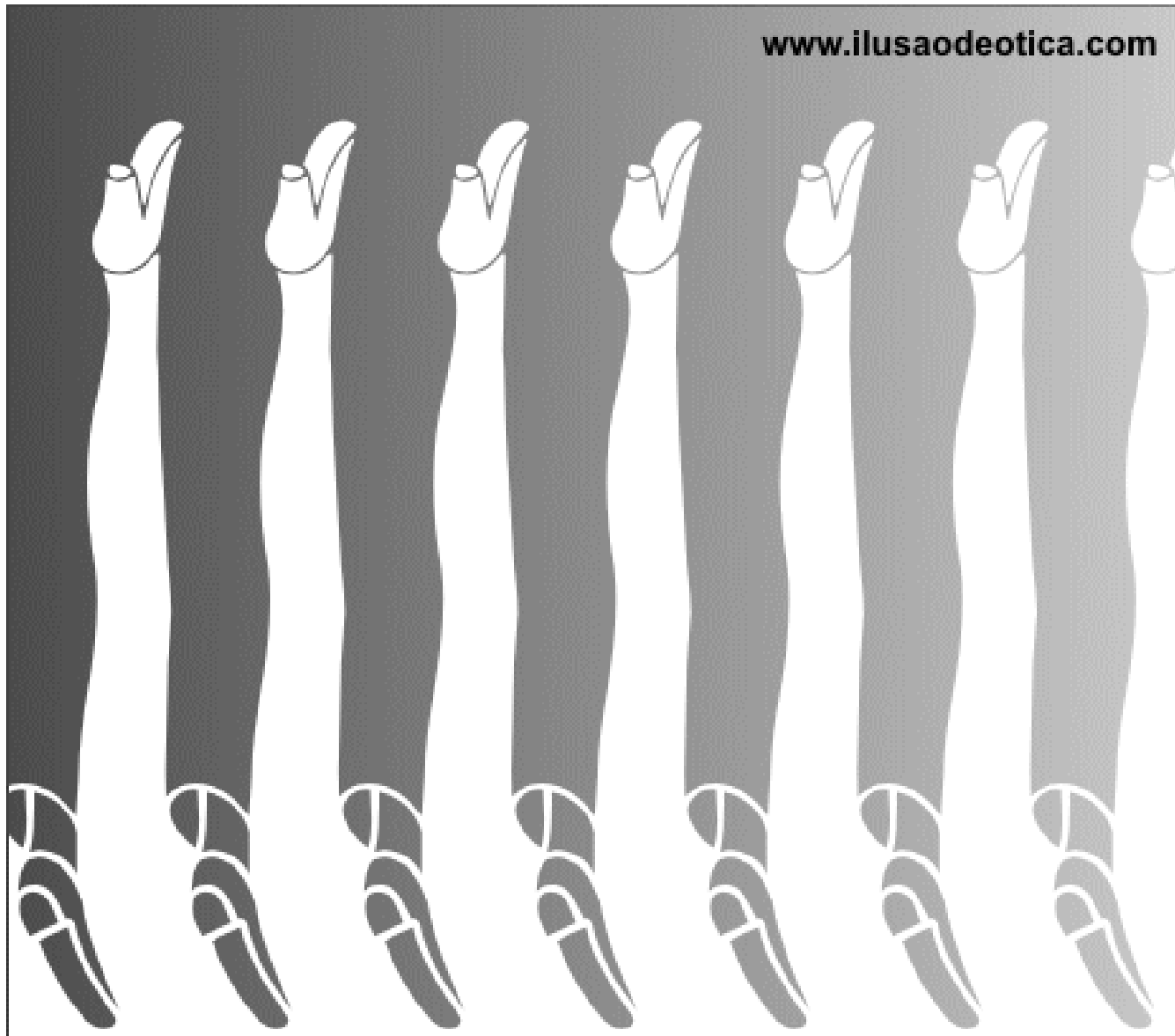


“Encore”



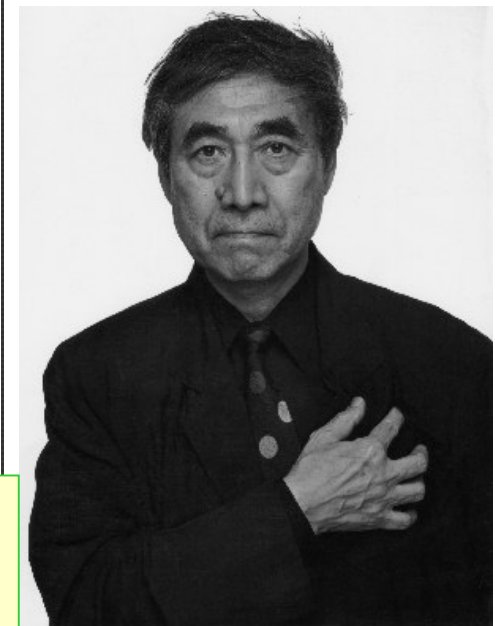
Escultura en madera

Video + Fukuda clamps



***Piernas de
dos géneros
diferentes
(1975)***

**Shigeo
Fukuda**



[http://psylux.psych.tu-
dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/
html/art_of_shigeo_fukuda.html](http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/art_of_shigeo_fukuda.html)

Figuras reversibles



Un hombre sobre un caballo
ataca a un pobre elfo... que
sabe defenderse.

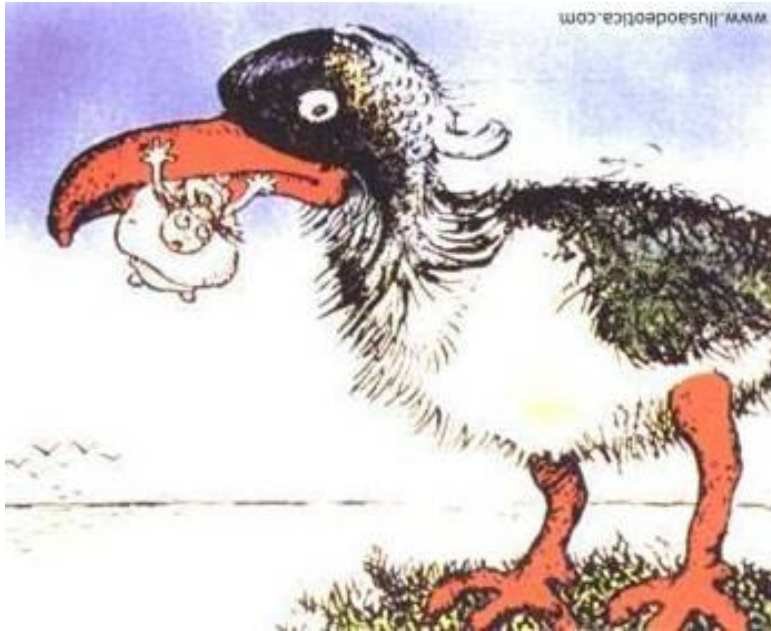
**Peter Newell
(1862-1924)**

Caballero y elfo



<http://wwar.com/masters/n/newell-peter.html>

Figuras reversibles



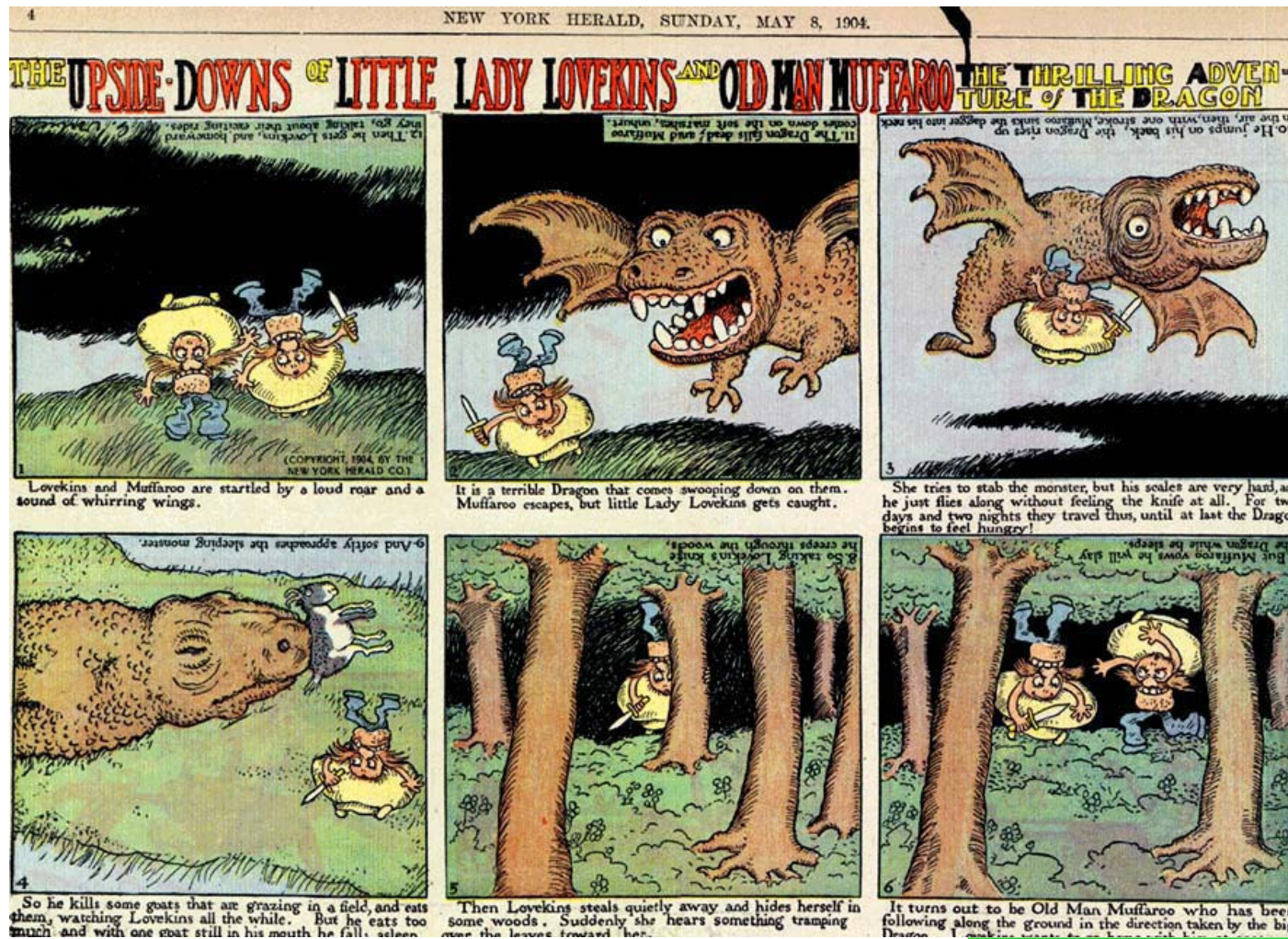
El mayor de los pájaros la
coge por su vestido...

Gustave Verbeck (1867-1937)
"A fish story"



... Justo cuando llega cerca de la isla, otro pez le ataca, golpeándole
furiosamente con su cola...

Figuras reversibles



**Gustave
Verbeck**

*Little lady
Lovekins
and Old man
Muffaroo:
the Thrilling
Adventure of
the Dragon*

<http://www.lambiek.net/verbeck.htm>

Figuras reversibles



**Rex
Whistler
(1905-1944)**

**¿Sherlock
Holmes o
Robin
Hood?**



<http://wwar.com/masters/w/whistler-rex.html>

Salvador Dalí (1904-1989)



***Boca misteriosa
apareciendo en
la espalda de
mi nodriza***



***Rostro
paranoico: la
tarjeta postal
transformada
en Picasso***



René Magritte (1898-1967)



Telescopio

La parte izquierda parece indicar un fondo celeste, pero la parte derecha envía este fondo a primer plano.



Carte blanche

Terapia



Octavio Ocampo (1943-)

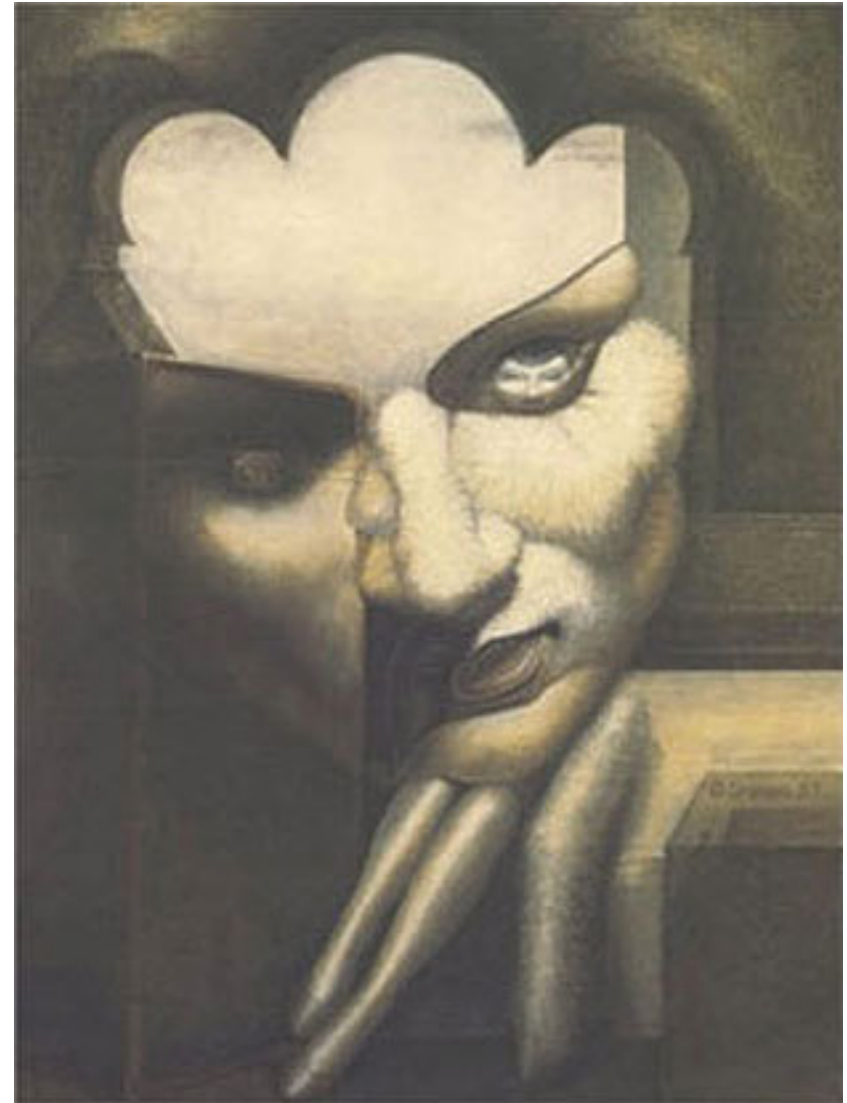


La evolución del hombre



Las visiones del Quijote

Marlena



Guy Billout

Trepando a una nube



Irreverencia

Rob Gonsalves



Planes de vuelo

Luna nueva eclipsada

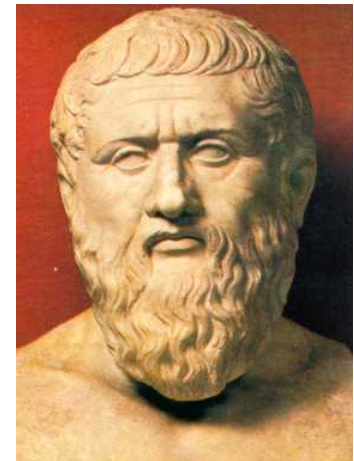


Guión de la charla

- Paradojas visuales
- **Paradojas del infinito**
- Paradojas lógicas
- Paradojas semánticas
- Paradojas de la vaguedad
- Paradojas de la confirmación
- Paradojas de la predicción
- Paradojas de la teoría de la probabilidad
- Paradojas de la teoría de la medida
- Paradojas topológicas

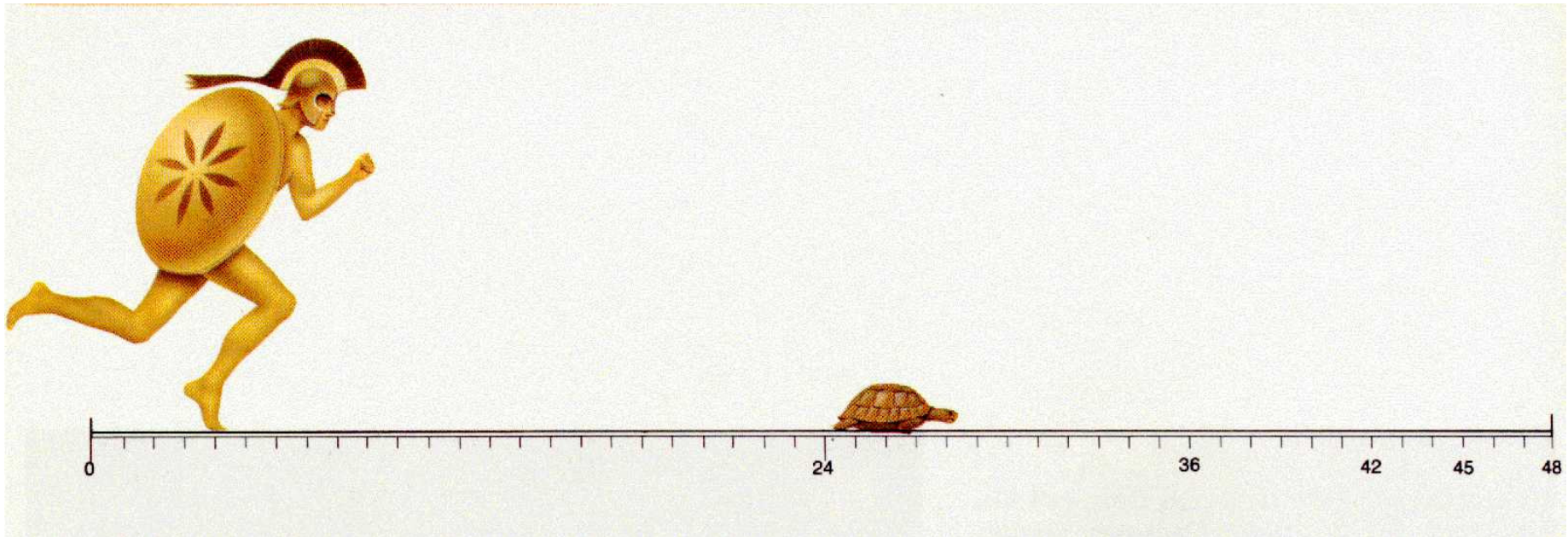
Aquiles y la tortuga

Se arregla una carrera entre Aquiles y la tortuga. Como Aquiles es mucho más veloz que la tortuga, el héroe permite una cierta ventaja al “lentísimo” animal.



Zenón

Paradoja: Aquiles no puede nunca alcanzar a la tortuga, independientemente de lo rápido que corra y de lo larga que sea la carrera: cada vez que el perseguidor alcanza un lugar donde ha estado la perseguida, la tortuga se adelanta un poco...



Algo debe ser falso en el argumento... la falacia que surge es la noción equivocada de que cualquier sucesión infinita de intervalos de tiempo debe sumar toda la eternidad...



Solución: convergencia de la serie

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n + \dots = 1$$

El hotel infinito

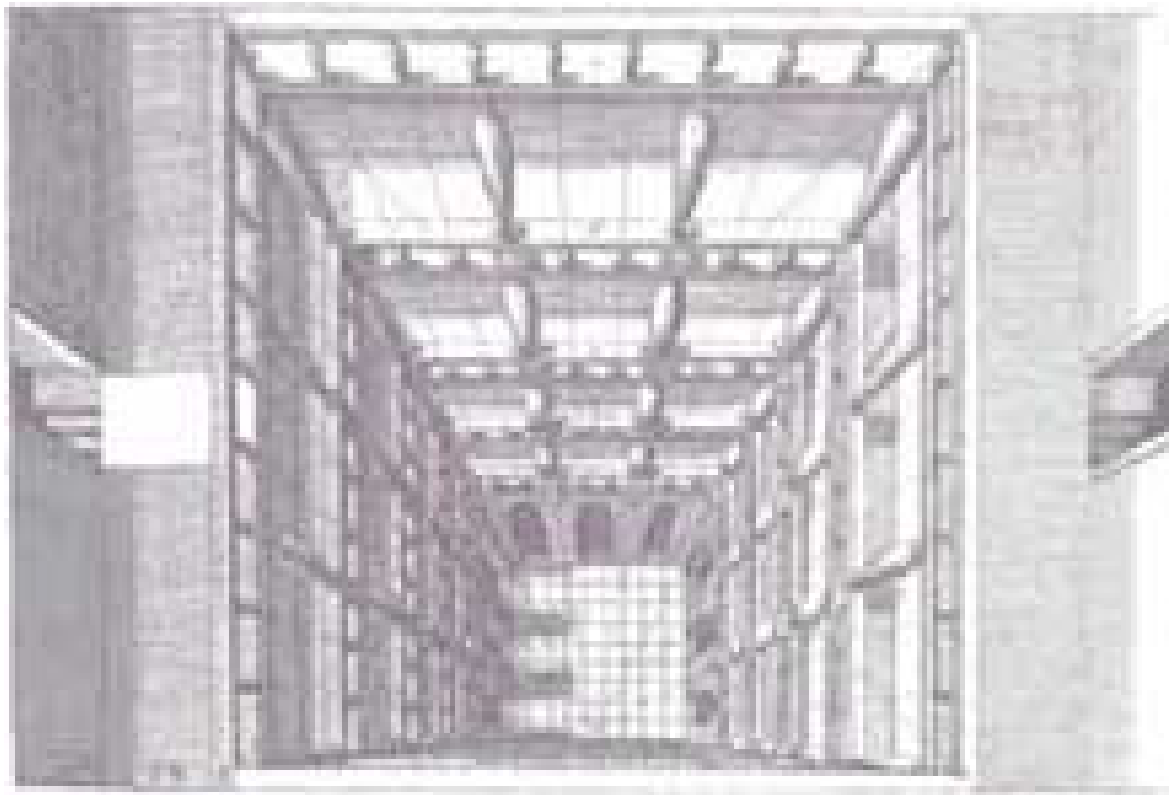
Érase una vez un hotel con infinitas habitaciones (numeradas), con el lema: “*Se garantiza el alojamiento de cualquier nuevo huésped*”.

Primera paradoja: llega un hombre al hotel que se encuentra lleno, ... el recepcionista, fiel al lema del *Hotel Infinito* avisa por megafonía a todos sus clientes, para que se cambien a su número de habitación más uno, con lo que la habitación número 1 queda libre para el nuevo huésped...

Duda: ¿Qué pasa con el huésped que se encontraba en la última habitación?

... No existe la “última habitación”...

Segunda paradoja: llega al ***Hotel Infinito*** (que está lleno) una excursión con infinitos pensionistas... el recepcionista solicita por megafonía a todos sus clientes que se cambien a su número de habitación multiplicado por 2, ... de esa forma todos los huéspedes se mudan a una habitación par, y todas las habitaciones impares quedan libres...



Tercera paradoja: infinitas excursiones de infinitos pensionistas llegan al *Hotel Infinito* (que está lleno)...

El recepcionista, “todo un profesional”, ni se inmuta... y envía un e-mail a las habitaciones con número primo o alguna potencia de un número primo, solicitándoles que eleven el número 2 al número de la habitación h que ocupan y se cambien a la habitación 2^h .

Una vez vaciadas estas habitaciones, el eficaz recepcionista asigna a cada una de las excursiones un número primo y a cada uno de los pensionistas de cada una de las excursiones un número impar... así, la habitación de cada uno de los turistas se calcula tomando el número primo de su excursión p y elevándolo al número impar a él asignado n , lo que da el número p^n .

Existiendo una *cantidad infinita de números primos* y *una cantidad infinita de números impares*, el hospedaje es posible...

Guión de la charla

- Paradojas visuales
- Paradojas del infinito
- **Paradojas lógicas**
- Paradojas semánticas
- Paradojas de la vaguedad
- Paradojas de la confirmación
- Paradojas de la predicción
- Paradojas de la teoría de la probabilidad
- Paradojas de la teoría de la medida
- Paradojas topológicas

Paradoja del barbero

En Barbilandia, hay un único barbero, **Jon**, que afeita a los que no se afeitan a sí mismos.

¿Quién afeita al barbero de Barbilandia?



Si **Jon** no se afeita a sí mismo, será una de las personas de Barbilandia que no se afeitan a sí mismas... con lo cual **Jon** debería de afeitarse, siendo por lo tanto una de las personas que se afeitan a sí mismas... no debiendo por tanto afeitarse.

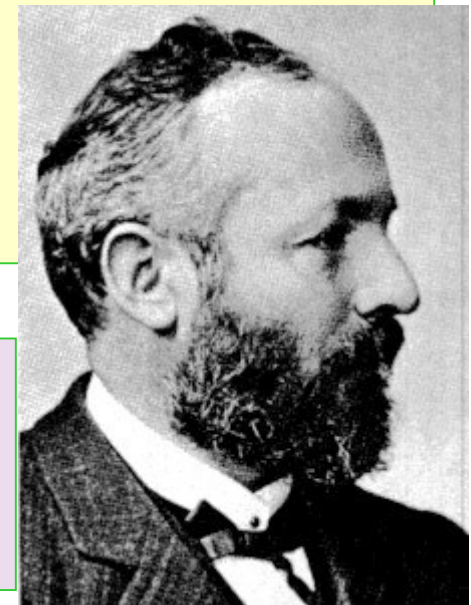
Solución: Russel define su famosa *teoría de tipos*, donde se eliminan los conjuntos auto-contradictorios, así que **Jon**, el barbero de Barbilandia...

¡... no existe!

La paradoja de Russell

Dos conjuntos infinitos son **equipotentes** (tienen el mismo *número cardinal*), si existe de una biyección del uno sobre el otro. El cardinal de un conjunto infinito es la extensión al caso de los conjuntos infinitos del concepto de número finito, y la equipotencia es la extensión de la noción de igualdad. No todos los conjuntos infinitos son “de igual tamaño”:

Teorema de Cantor: Dado un conjunto C , existe otro de mayor cardinalidad, $\wp(C)$ (el conjunto de sus partes).



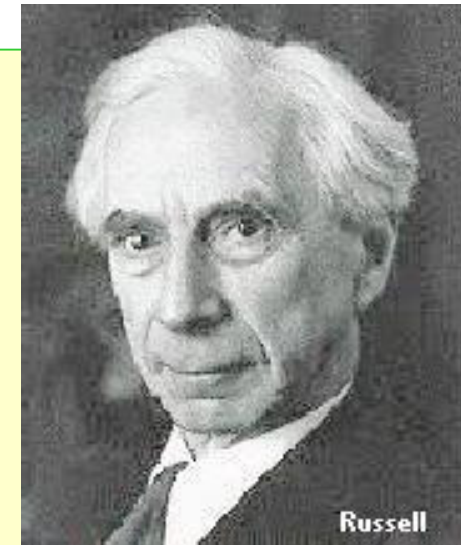
Paradoja: Russell (Nobel Literatura 1930 y Medalla Fields 1966) descubre una contradicción al usar el teorema de Cantor:

El conjunto de todas las cosas U debe tener mayor cardinalidad que cualquier otro, porque todo elemento de un conjunto (todo conjunto) es una cosa.

Así, $\wp(U)$ debe de estar contenido en U , en cuyo caso

$$\text{card}(\wp(U)) \leq \text{card}(U) < \text{card}(\wp(U))$$

y así el resultado cantoriano debía ser erróneo.



Existía en aquella época un postulado (proveniente de la lógica tradicional aristotélica) que se tomaba implícitamente como base para la teoría de conjuntos: el *principio de comprensión*, que afirma “**dame una propiedad y te daré un conjunto**”, es decir, dada $P(x)$, existe $\{x: P(x)\}$. Lo que hace Russell es refutarlo, tomando como proposición

$$P(x) = (x \notin x),$$

y deduciendo una contradicción, que invalida el principio de la comprensión, y así se abandona la llamada *teoría ingenua de conjuntos*.

Propuestas de solución

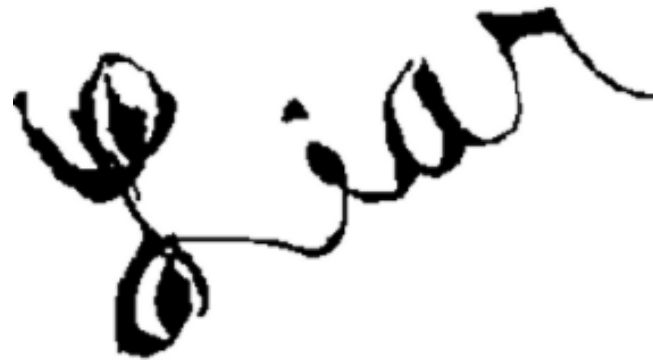
- la complicada y filosófica **teoría de tipos** de Russell: deben arreglarse todas las sentencias en una jerarquía; es entonces posible referirse a todos los objetos para los que un determinado predicado es cierto sólo si están ambos en el mismo nivel o son del mismo tipo. Así, una expresión de la forma $(x \notin x)$ no se considera como válida;
- la elegante axiomatización de Zermelo: se elimina el principio de comprensión y se incluye de manera destacada el llamado **“axioma de elección”**. Se admiten en la teoría de conjuntos sólo aquellas clases de las que no puedan derivarse contradicciones.

Guión de la charla

- Paradojas visuales
- Paradojas del infinito
- Paradojas lógicas
- **Paradojas semánticas**
- Paradojas de la vaguedad
- Paradojas de la confirmación
- Paradojas de la predicción
- Paradojas de la teoría de la probabilidad
- Paradojas de la teoría de la medida
- Paradojas topológicas

La paradoja del mentiroso

L: Lo que estoy diciendo ahora es falso.



L: Lo que estoy diciendo ahora es falso.

Si *L* es verdad, es falsa, y si es falsa, es verdad. ¿Es esto paradójico?

Tenemos dos afirmaciones condicionales:

- 1) si *L* es verdad, entonces es falsa.**
- 2) si *L* es falsa, entonces es verdad.**

Asumiendo que cuando algo es falso no es verdad, y que todo lo que es verdad no es falso, 1) y 2) quedan:

- 1*) si *L* es cierta, entonces es no cierta.**
- 2*) si *L* es falsa, entonces es no falsa.**



Existe un principio de razonamiento llamado ***consequentia mirabilis***: dice que si algo implica su propia negación, se puede inferir su negación.

Ambas 1*) y 2*) dan argumentos para este principio. El primero nos asegura que **L** es cierto, implica su negación, luego el principio nos lleva a inferir que **L** es no cierto.

El segundo, de manera exactamente paralela, nos lleva a inferir que **L** no es falso.

Así que un razonamiento estándar nos garantiza que **L** es no cierto y no falso. Luego **L** no es cierto ni es falso.

¿Es esto paradójico?

No, excepto si se admite un *principio de bivalencia*, que dice que toda sentencia es cierta o falsa.

¿Es todo principio de bivalencia cierto? Las preguntas se expresan en sentencias, pero no toda pregunta es o bien cierta o bien falsa. Supongamos entonces que restringimos el principio a sentencias declarativas. Aún hay contraejemplos... Consideremos la afirmación

Has dejado de fumar.

Si tú nunca has fumado, la sentencia es ciertamente no cierta, pero decir que es falsa sugiere que sigues fumando...

El principio de bivalencia se alcanza debido a la creencia de que toda representación no defectuosa de como las cosas están en el mundo, debe ser o bien correcta o incorrecta, verdadera o falsa.

Solución: Una solución a esta paradoja es la famosa ***“jerarquía de Tarski”***: el concepto ordinario de *verdad* es incoherente y debe ser rechazado y reemplazado por una serie de “conceptos de verdad”, jerárquicamente ordenados, y cada uno expresado en un lenguaje diferente de cada lenguaje natural (es decir, de cada lenguaje que evoluciona de manera natural).

Mucha gente ha pedido una solución menos radical, una respuesta que preserve más de nuestro pensamiento y lenguaje ordinario. Una de estas respuestas, se basa en la anterior noción, pero afirma que esta jerarquía está de hecho implícita en nuestro actual uso de “verdad”, y ***los defectos son una mera apariencia.***

Guión de la charla

- Paradojas visuales
- Paradojas del infinito
- Paradojas lógicas
- Paradojas semánticas
- **Paradojas de la vaguedad**
- Paradojas de la confirmación
- Paradojas de la predicción
- Paradojas de la teoría de la probabilidad
- Paradojas de la teoría de la medida
- Paradojas topológicas

Paradojas de Sorites

“Sorites” es la palabra griega para “montón” o “pila”. Las paradojas “sorites” es el nombre dado a una clase argumentos paradójicos, que se derivan de los límites indeterminados de aplicación de los predicados envueltos. Se trata de una serie de puzzles atribuidos al lógico Eubulides de Mileto, que incluyen:

- **el *hombre calvo***: ¿describirías a un hombre con un pelo en la cabeza como calvo?



- ***el hombre con capucha***: dices que conoces a tu hermano, este hombre con capucha es tu hermano y no le conoces...



- Un ***grano de arena no es un montón***, si 1 grano de arena no es un montón, tampoco 2 granos de arena lo son... Si 9.999 granos de arena no son un montón, tampoco los son 10.000 granos. ¿Cuántos granos tiene un montón?

Algunas respuestas a esta paradoja son:

- el acercamiento a un ***“lenguaje ideal”***, cuyo atributo clave es su precisión: la vaguedad del lenguaje natural es un defecto a eliminar (Frege y Russell);
- lógicas multivaluadas (no clásicas), como la ***“lógica difusa”*** de Goguen y Zadeh (1969) que sustituye a la usual (dos-valuada), que reconocen para un objeto “los grados” de verdad;
- aceptar la paradoja: ninguna cantidad de granos de arena hace un montón... o en otra versión...

¡ la calvicie no existe !

Guión de la charla

- Paradojas visuales
- Paradojas del infinito
- Paradojas lógicas
- Paradojas semánticas
- Paradojas de la vaguedad
- **Paradojas de la confirmación**
- Paradojas de la predicción
- Paradojas de la teoría de la probabilidad
- Paradojas de la teoría de la medida
- Paradojas topológicas

La paradoja del cuervo

Carl Hempel (1905-1997), inventor de esta paradoja, afirma que la existencia de una **vaca de color violeta** incrementa la probabilidad de que los cuervos sean negros.

¿Por qué?



Para responder,
establezcamos la ley:
***“Todos los cuervos son
negros”***, de una manera
diferente, pero lógicamente
equivalente ***“Todos los
objetos no-negros no son
cuervos”***.



***Hempel dice: He encontrado un objeto no-negro - una
vaca violeta. Esto confirma (débilmente) la ley “Todos
los objetos no-negros no son cuervos”. Y así, también
confirma la ley equivalente “Todos los cuervos son
negros”.***

Es fácil encontrar miles de objetos no-negros que no son cuervos, confirmando así de manera más fuerte la ley. El problema es que observando objetos no-negros se confirma la ley ***“Todos los cuervos son negros”***,

pero sólo a un nivel “infinitesimal”.

La clase de objetos que no son cuervos, es tan enormemente grande comparada con las que son cuervos que el grado con el cual un no-cuervo que es no negro confirma la hipótesis es despreciable...

Los detractores de Hempel opinan que la existencia de una **vaca de color violeta** confirma del mismo modo el ***enunciado***

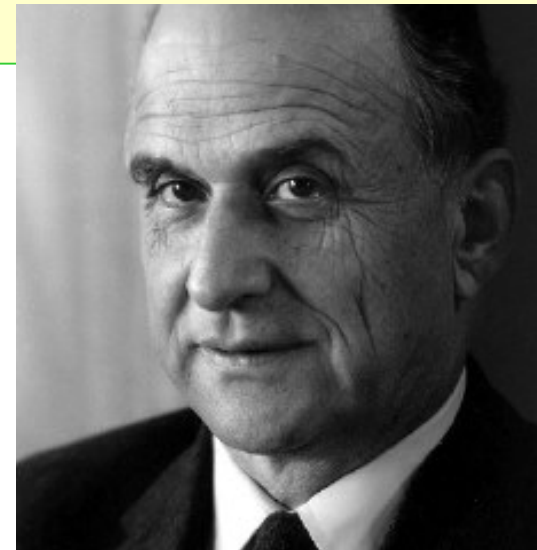
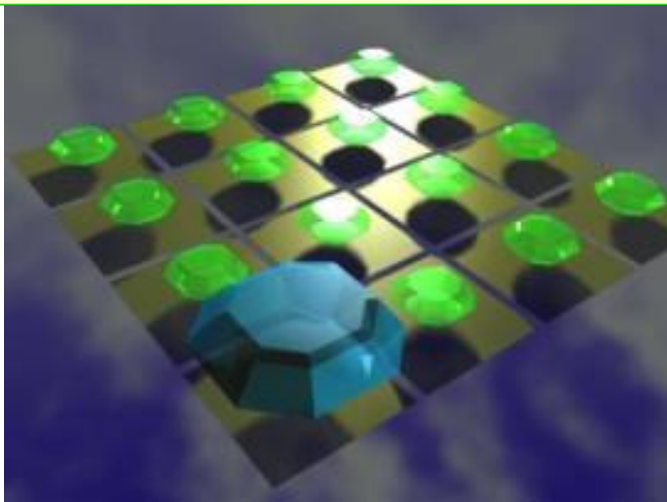
“Todos los cuervos son blancos”...



La paradoja de Goodman

Se define un objeto como **verul**, si observado antes del tiempo t es **verde**, y **azul** después de t .

Si $t = 1$ de abril de 2006, Nelson Goodman (1906-1998) afirma que decir que las esmeraldas son **verdes** o **verules** es igual de consistente... en ambas afirmaciones hay tiempo por medio y ambas se confirman empíricamente...



Guión de la charla

- Paradojas visuales
- Paradojas del infinito
- Paradojas lógicas
- Paradojas semánticas
- Paradojas de la vaguedad
- Paradojas de la confirmación
- **Paradojas de la predicción**
- Paradojas de la teoría de la probabilidad
- Paradojas de la teoría de la medida
- Paradojas topológicas

La paradoja del condenado

En la Edad Media, un rey de reconocida sinceridad, pronuncia su sentencia:



*Una mañana de este mes
serás ejecutado, pero no lo
sabrás hasta esa misma
mañana, de modo que cada
noche te acostarás con la
duda, que presiento
terrible, de si esa será tu
última sobre la Tierra...*

En la soledad de su celda, el reo argumenta:

Si el mes tiene 30 días, es evidente que no podré ser ajusticiado el día 30, ya que el 29 por la noche sabría que a la mañana siguiente habría de morir. Así que el último día posible para cumplir la sentencia es el 29. Pero entonces, el 28 por la noche tendré la certeza de que por la mañana seré ejecutado...

Continuando de este modo, el prisionero concluye triunfalmente que la condena es de ejecución imposible, y comienza a dormir aliviado, aguardando que transcurra el mes para pedir su libertad...



Sin embargo, sorpresa, un día cualquiera, por ejemplo el fatídico día **13 (era martes)**, el verdugo, con el hacha afilada en la mano, despierta al reo... que instantes más tarde es decapitado.

La sentencia se cumple literalmente.

¿Dónde ha fallado el razonamiento del condenado?



Una solución puede pasar por la noción fundamental de que no es lo mismo el día 30, más el día 29, más el día 28, etc., que **el mes**.

Un conjunto es diferente y contiene cualidades distintas de la mera adición de sus partes.

El análisis individual, día por día, por parte del prisionero es tan irreprochable como el análisis paso por paso de la carrera de Aquiles.

El defecto de su argumento aparece cuando atribuye al conjunto **(este mes)** las mismas y exclusivas cualidades que poseían sus partes **(cada día)**, no advirtiéndolo que el conjunto **mes** ha incorporado algunas características: entre otras la de contener...

... días sorpresa.

Hacia el siglo III, el filósofo chino Hui Tzu afirmaba:

Un caballo bayo y una vaca parda son tres: el caballo, la vaca, y el conjunto de caballo y vaca.

El razonamiento no es trivial, y es la esencia de la paradoja del condenado.

1



+



= 3!

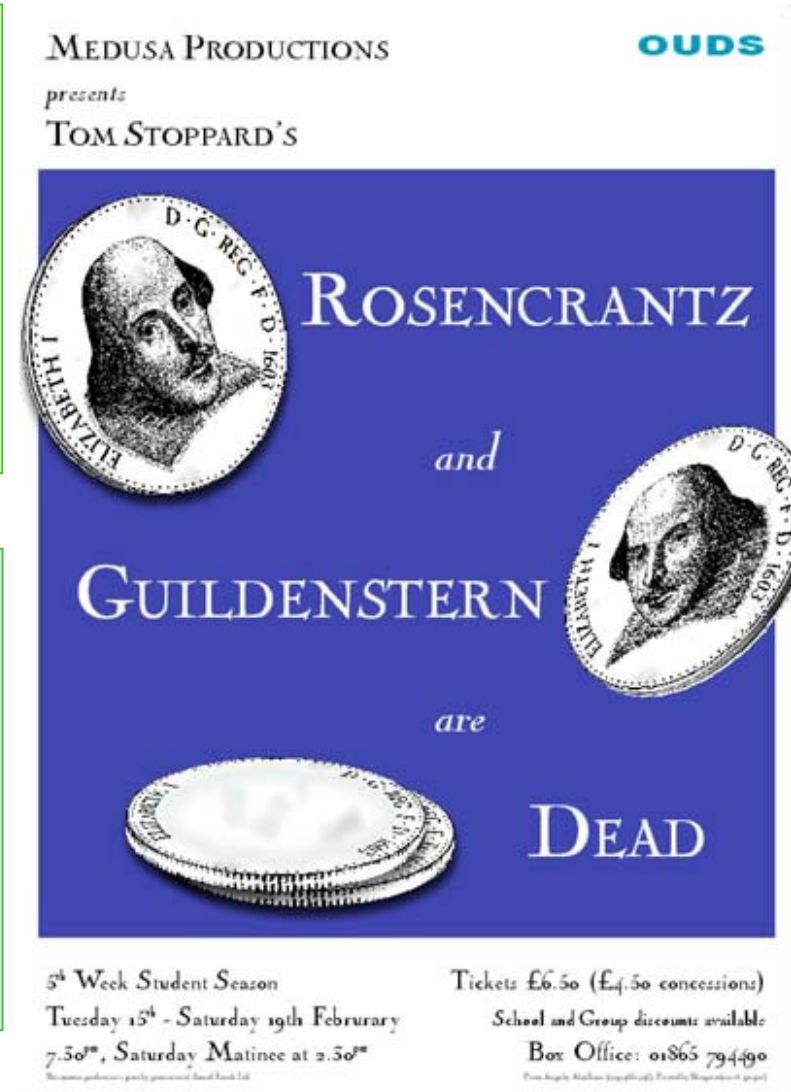
Guión de la charla

- **Paradojas visuales**
- **Paradojas del infinito**
- **Paradojas lógicas**
- **Paradojas semánticas**
- **Paradojas de la vaguedad**
- **Paradojas de la confirmación**
- **Paradojas de la predicción**
- **Paradojas de la teoría de la probabilidad**
- **Paradojas de la teoría de la medida**
- **Paradojas topológicas**

La paradoja de San Petesburgo

Esta paradoja trata sobre el *cálculo de probabilidades* y el concepto abstracto de *esperanza matemática*. Se debe a Nicolás Bernoulli (1695-1726).

La pieza del Tom Stoppard *“Rosencrantz y Guildenstern han muerto”* (1966) se abre con una escena en donde los dos personajes secundarios de *Hamlet* juegan a **cara y cruz**.



G ha lanzado 90 monedas, todas han salido cara y han regresado, como lo manda el juego, a **R**.

A pesar de la gran improbabilidad de una tal serie, saben que es posible.

Cuando los protagonistas están cansados de lanzar simplemente las monedas, **R** propone una variante: lanzará una moneda hasta que salga cara; si sucede en la **primera** tirada, dará **1** moneda a **G**, en la **segunda** tirada, **2** monedas, en la tercera, **4** monedas, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez que la pieza cae en cruz.

*¿Cuánto dinero debe pagar **G** a **R** para que el juego sea equitativo?*



El problema se resuelve en términos de esperanza matemática de ganar: la probabilidad del evento

cara aparece en la tirada n

es de **$1/2^{n-1} (1/2) = 1/2^n$** .

La esperanza de ganar de **G** es pues la suma

$$1/2 + 2(1/2)^2 + 4(1/2)^3 + 8(1/2)^4 + \dots + 2^{n-1}(1/2)^n + \dots =$$

$$1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots + 1/2 + \dots = \infty$$

En honor a la equidad, el juego no debería tener lugar.



La progresión de la ganadas es muy rápida (serie geométrica de razón 2). Se podría reemplazar 2 por un número inferior q y retomar los cálculos: la esperanza de ganada de **G** es entonces de

$$\begin{aligned} &1/2 + q(1/2)^2 + q^2(1/2)^3 + q^3(1/2)^4 + \dots + q^{n-1}(1/2)^n + \dots = \\ &1/2 (1 + q/2 + (q/2)^2 + \dots + (q/2)^n + \dots) = 1/(2 - q). \end{aligned}$$

La ganada infinita de **G** aparece como caso límite cuando q tiende a 2. Haciendo variar q , se puede entonces establecer la lista de las ganadas de **G** y el dinero que deberá ceder a **R** al principio del juego. En todos los casos, y en ausencia de cualquier otra condición, parece preferible renunciar a este juego tan azaroso tanto en el papel de **G** como de **R**.

La paradoja de Condorcet

Tres votantes V_1 , V_2 , y V_3 eligen entre tres alternativas **A** (Alicia), **B** (Benito), **C** (Cecilia), como sigue:

$$V_1 = \{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \}, V_2 = \{ \mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \}, V_3 = \{ \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{A} \}$$

A es preferida a **B** por dos a uno, **B** preferido a **C** por dos a uno y **C** a **A** por dos a uno también.

Una simple comprobación por pares no determina una alternativa preferida entre las tres. Se trata de una situación de *ausencia de ganador o paradoja de Condorcet*, al existir una *mayoría cíclica*.

El procedimiento de elección más usual es la regla de la ***mayoría simple***, donde cada votante elige un candidato, y el que reciba más de la mitad de los votos es el ganador.

Esta regla es válida cuando sólo se tienen dos candidatos, ya que gana el que tiene más votos.

Cuando hay más de dos, puede ser que el candidato con mayor número de votos no tenga la mayoría absoluta de todos los votos emitidos.

La solución más frecuente es recurrir a la regla de la ***pluralidad o mayoría relativa***, por la que se elige al candidato que queda situado en primer lugar por el mayor número de votantes.

Otra solución es aplicar el *criterio de Condorcet* o de comparación por parejas, por el que se elige el candidato que derrota a todos los demás en elecciones entre pares de candidatos, usando la regla de mayoría. Por este método se puede producir una relación no transitiva, la paradoja de Condorcet...



La molestia generada por la posibilidad de mayorías cíclicas está directamente relacionada con la probabilidad de una tal ocurrencia: se puede probar que la probabilidad de una mayoría cíclica se incrementa cuando el número de opciones aumenta, y decrece cuando el número de votantes aumenta.

Guión de la charla

- **Paradojas visuales**
- **Paradojas del infinito**
- **Paradojas lógicas**
- **Paradojas semánticas**
- **Paradojas de la vaguedad**
- **Paradojas de la confirmación**
- **Paradojas de la predicción**
- **Paradojas de la teoría de la probabilidad**
- **Paradojas de la teoría de la medida**
- **Paradojas topológicas**

La paradoja de Banach-Tarski

Es una de las más sorprendentes consecuencias del axioma de elección.

De esta paradoja se deduce que es posible (teóricamente) cortar un guisante en un número finito de trozos y reajustarlos (sólo con rotaciones y traslaciones) hasta obtener una bola de la tamaño del sol.



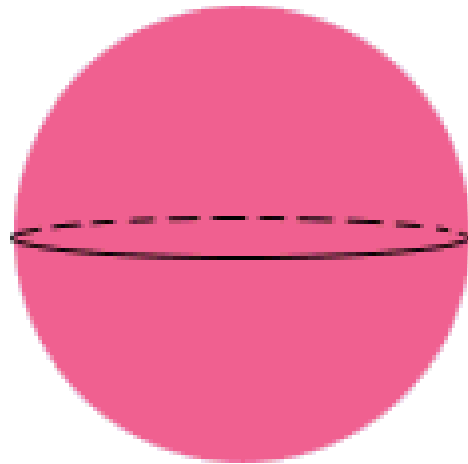
La paradoja de Banach-Tarski afirma que toda bola de dimensión tres puede descomponerse en un número finito de subconjuntos dos a dos disjuntos, que re combinados forman dos bolas del mismo radio que la bola original.

Como los movimientos preservan el volumen, alguna de las piezas en las que se descomponen los conjuntos no puede ser *medible Lebesgue*.

De aquí, se deduce que no existe ninguna extensión positiva y finitamente aditiva de la medida de Lebesgue en el espacio de dimensión tres, que sea invariante respecto al grupo de los movimientos en el espacio.

Es imposible realizar la descomposición paradójica de la bola físicamente, ni siquiera imaginarla...

Sólo con cinco trozos se transforma una bola en dos. Los trozos tienen una forma tan extraña que no se puede ni siquiera hablar de su volumen: son no medibles (las funciones que habría que integrar para determinar su volumen no son medibles ni en el sentido clásico de Riemann, ni en el sentido generalizado de Lebesgue).



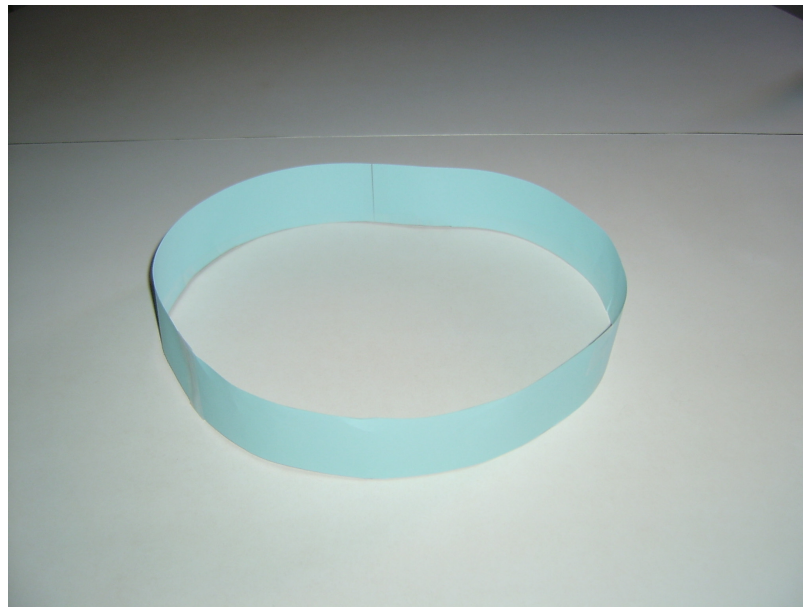
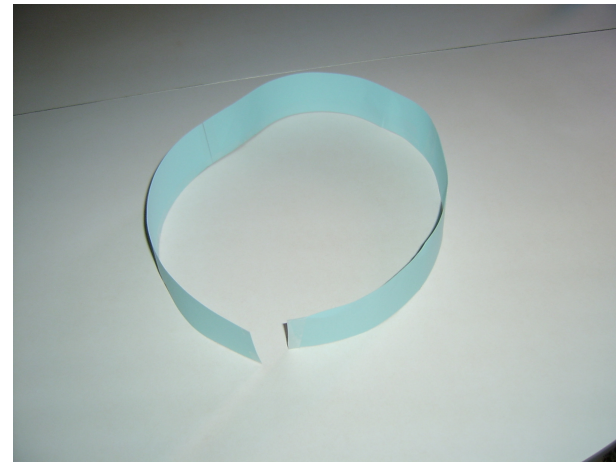
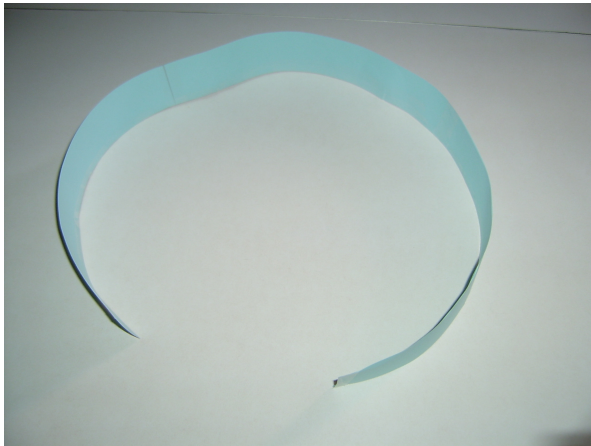
**Mudd
Math Fun Facts**

<http://www.math.hmc.edu/funfacts/ffiles/30001.1-3-8.shtml#>

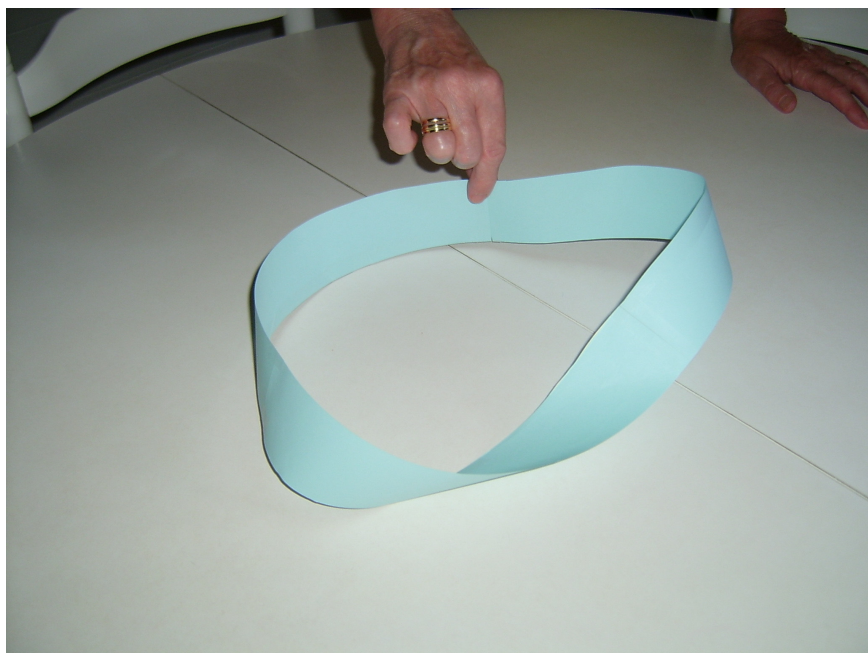
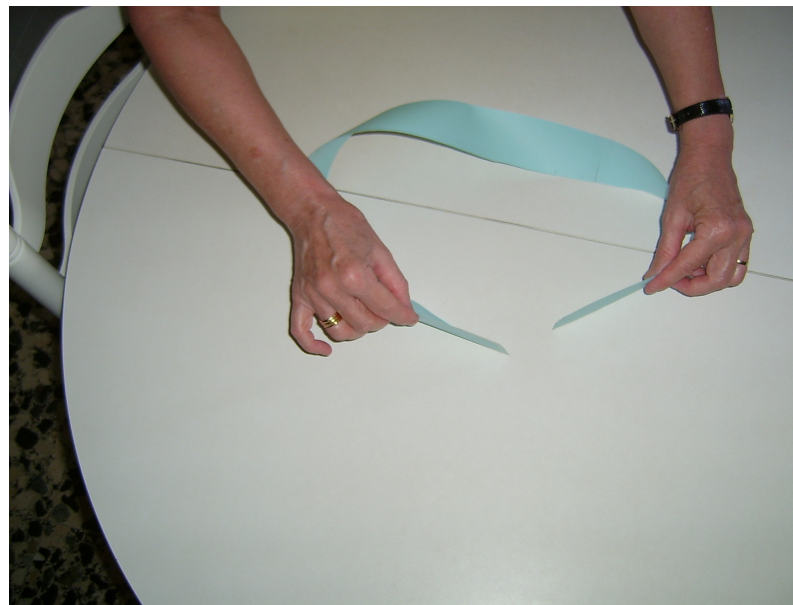
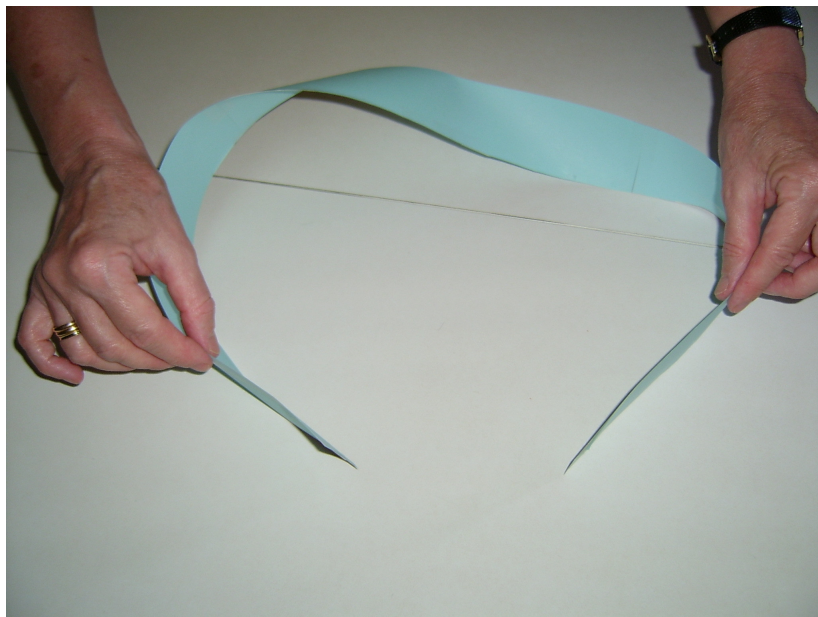
Guión de la charla

- **Paradojas visuales**
- **Paradojas del infinito**
- **Paradojas lógicas**
- **Paradojas semánticas**
- **Paradojas de la vaguedad**
- **Paradojas de la confirmación**
- **Paradojas de la predicción**
- **Paradojas de la teoría de la probabilidad**
- **Paradojas de la teoría de la medida**
- **Paradojas topológicas**

La banda de Möbius

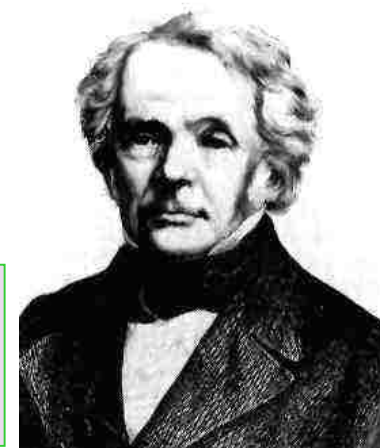


Cilindro

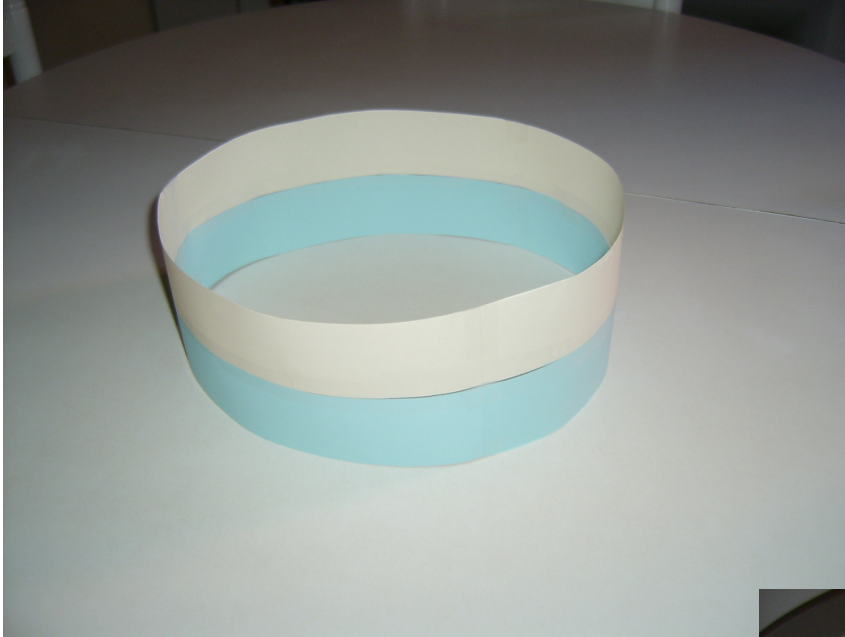


***Banda de
Möbius***

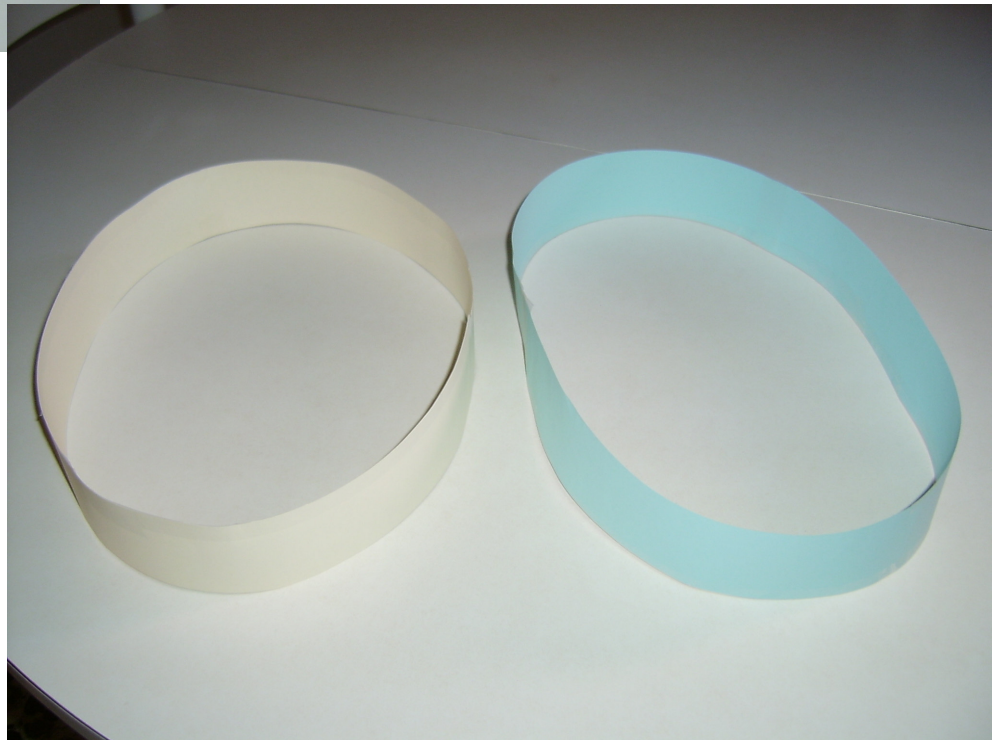
**Agustus Möbius
(1790-1868)**

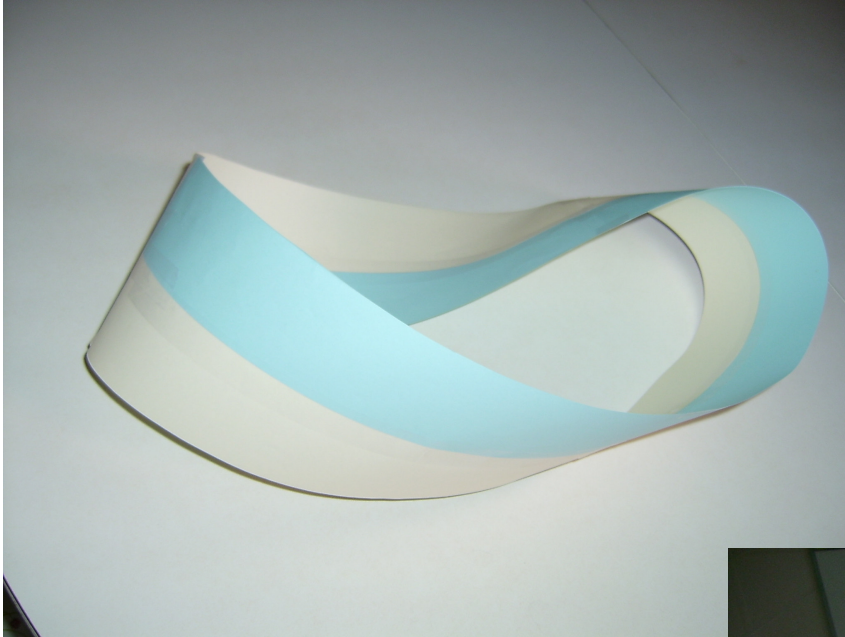


Cilindro	Banda de Möbius
• 2 caras: interior y exterior • 2 bordes (2 circunferencias)	• 1 única cara • 1 borde (circunferencia larga)



Al cortar por la mitad, se obtienen dos cilindros, la mitad de altos que el cilindro original.

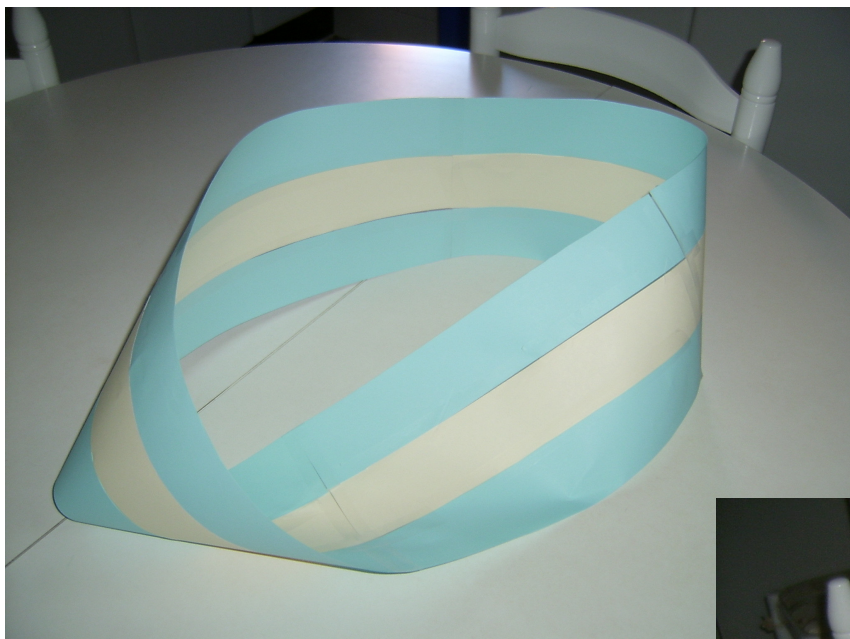




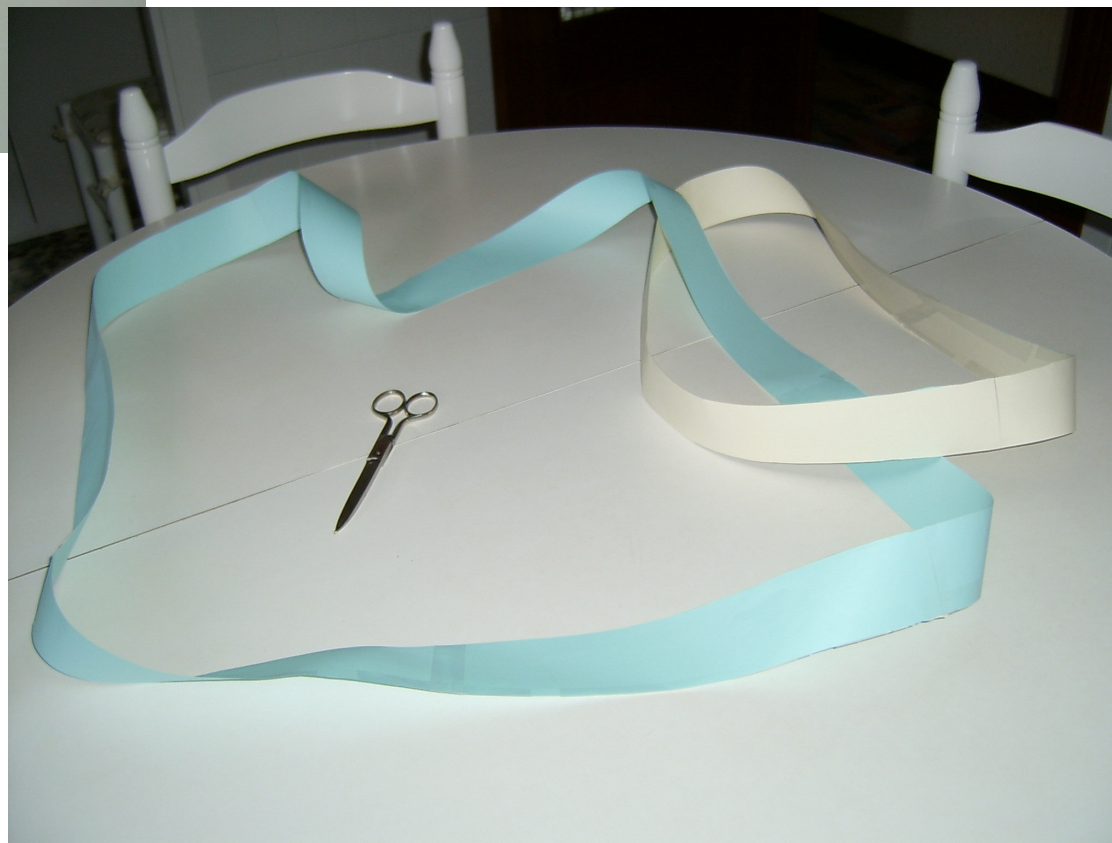
Al cortar por la mitad, se obtiene un cilindro el doble de largo y la mitad de alto que la banda original.



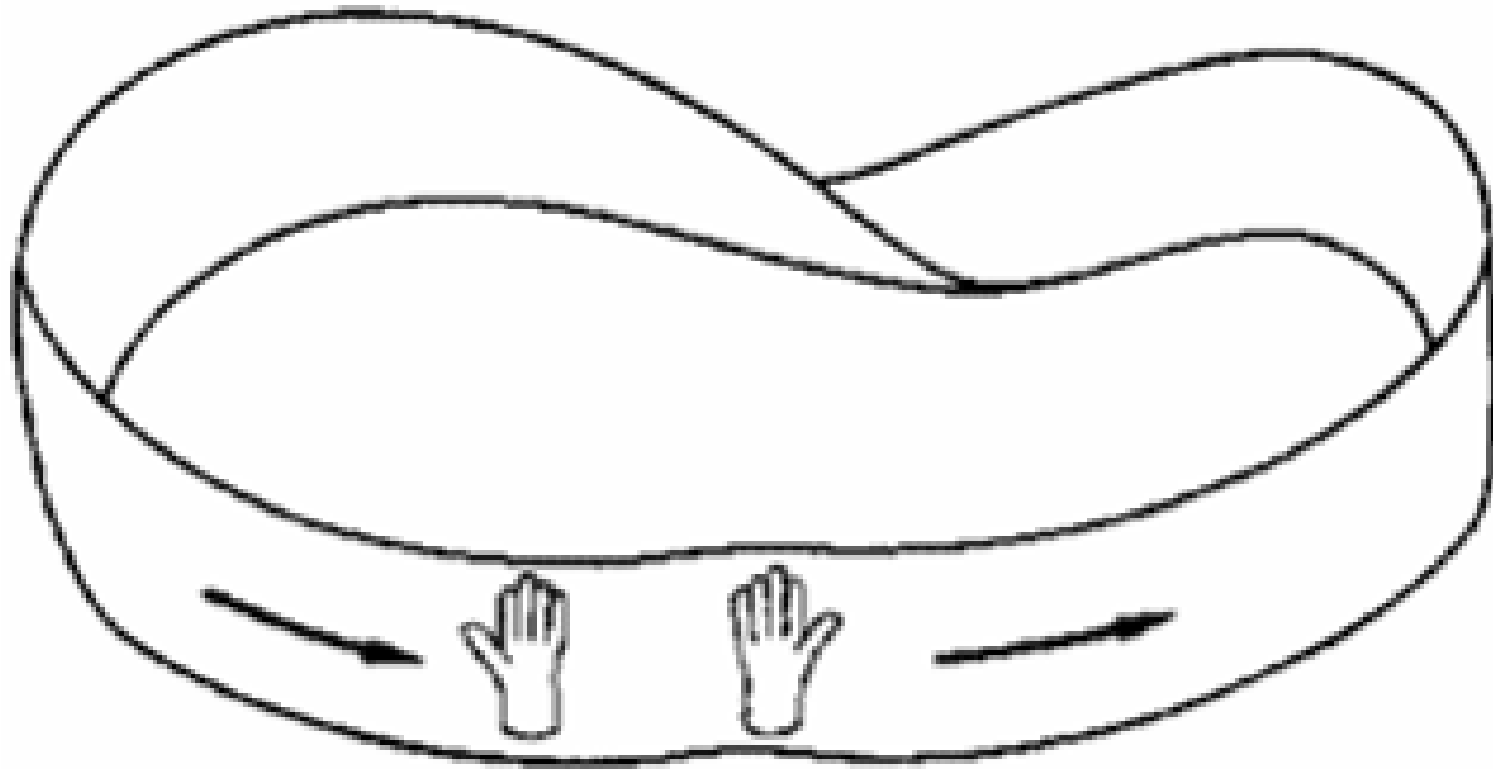
Cilindro	Banda de Möbius
• 2 caras: interior y exterior • 2 bordes (2 circunferencias)	• 1 única cara • 1 borde (circunferencia larga)



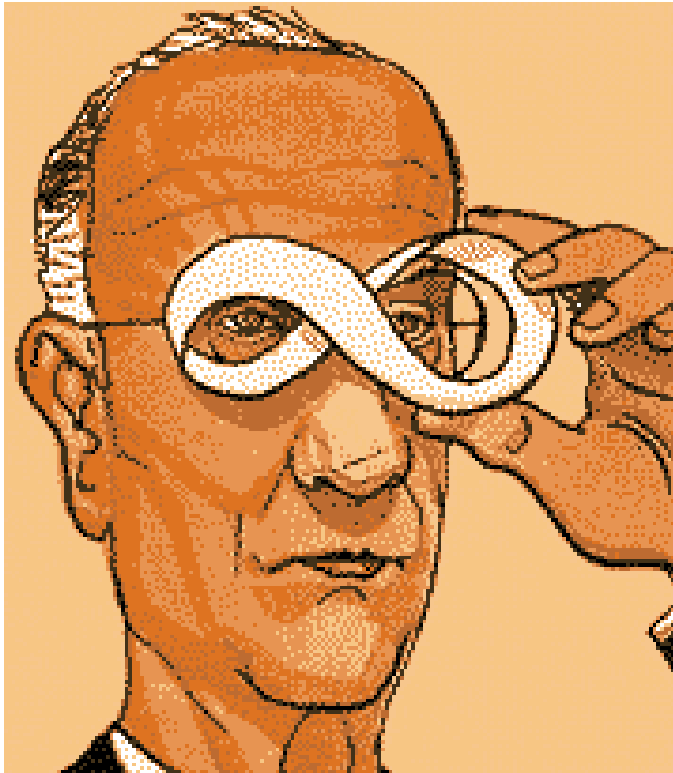
Al cortar por la tercera parte, se obtienen una banda de Möbius (igual de larga y $\frac{1}{3}$ de ancha) y un cilindro (el doble de largo y $\frac{1}{3}$ de ancho) y enlazados...



Estas propiedades extrañas se deben a que la banda de Möbius es **no orientable**.



La banda de Möbius no sólo es importante en matemáticas...



El dibujante e ilustrador **Jean Giraud Möbius** (1938-) con una autocaricatura, portada de su autobiografía *Mi doble y yo*.

Banda de Möbius de LEGO de
Andrew Lipson



<http://web.archive.org/web/20040211064801/www.lipsons.pwp.blueyonder.co.uk/lego.htm>



Elisabeth Zimmermann

Bufanda de Möbius:
La mejor para el frío, 1983



**Fábrica de construcciones
metálicas
Wittenbach (Suiza)**

**Cambio de correas
cilíndricas por
“*correas de Möbius*”
que se desgastan a
menor velocidad...**

**Meister Stahlbau
*Bigen ist eine Kunst***

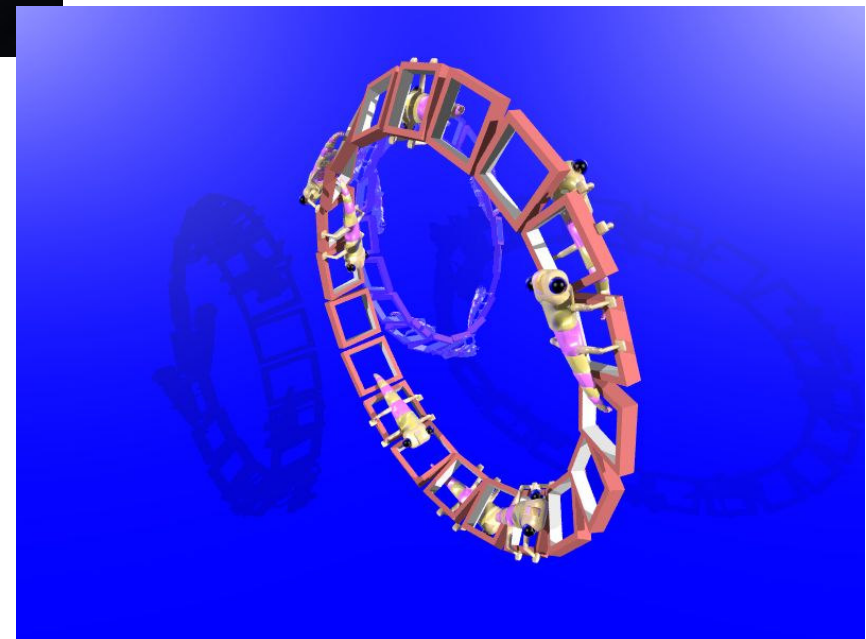




Cliff Long (1931-2002)
hizo una banda de
Möbius de esta
escultura de madera
Bug on a band

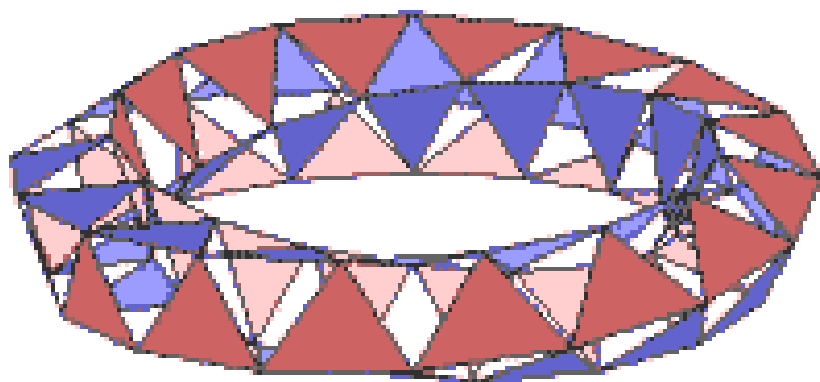
Möbius mit Kriechtief
Rainer Wonisch

http://www.rainerwonisch.de/mathematik_und_kunst_mit_povray.htm

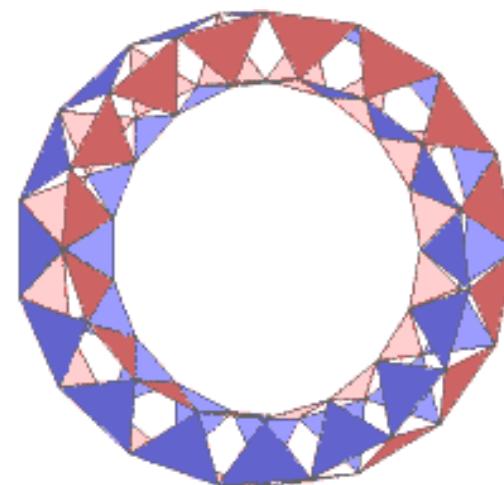




<http://www.wolfram.com/products/mathematica/usersanduses/experience/mobius.html>

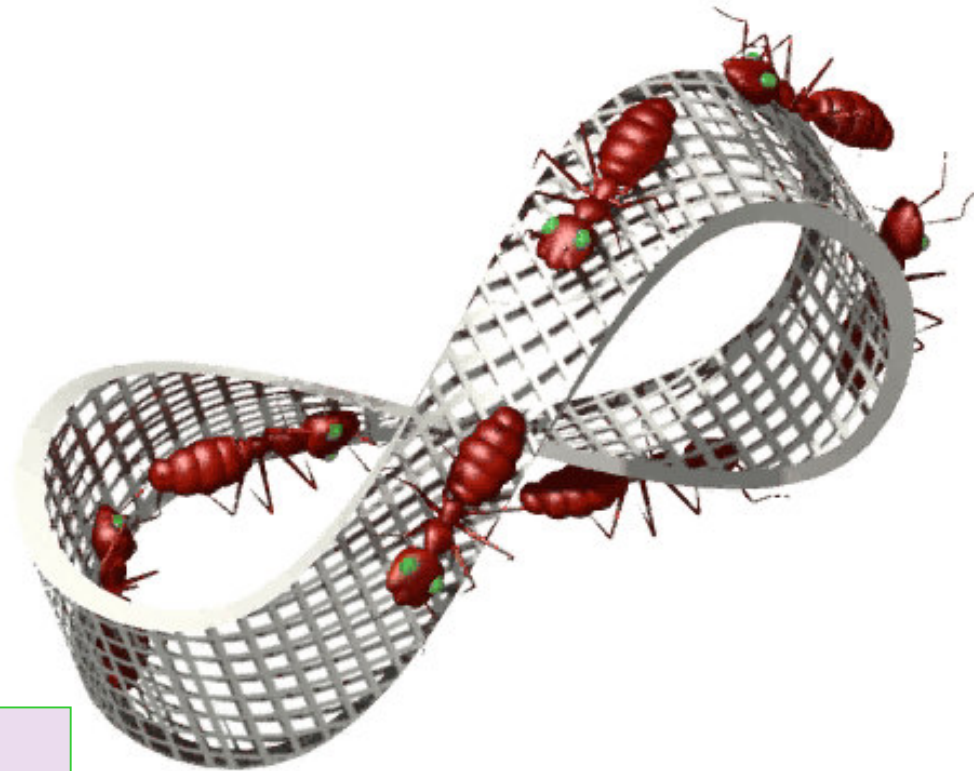


Sugar Sand Science Playground en Boca Ratón (Florida), diseñado por Gerald Harnett.





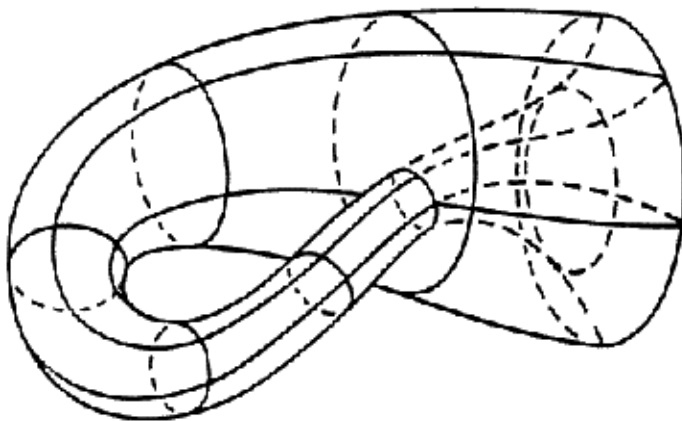
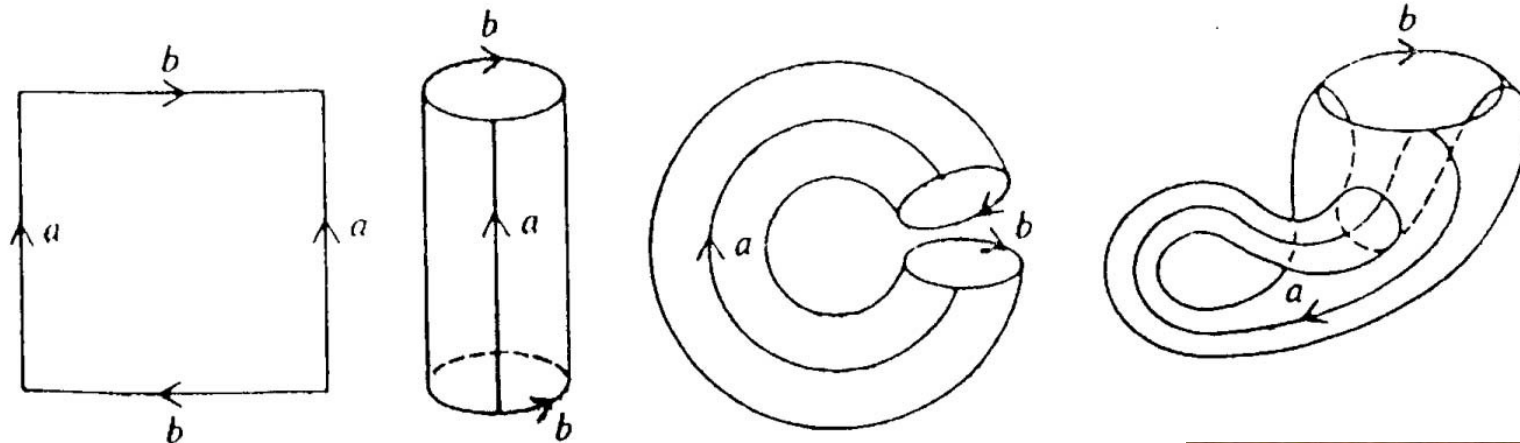
Las *hormigas* de Escher, que nunca llegan...



Banda de Möbius en movimiento de Vlad Holst.

<http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/strip.mov>

La botella de Klein

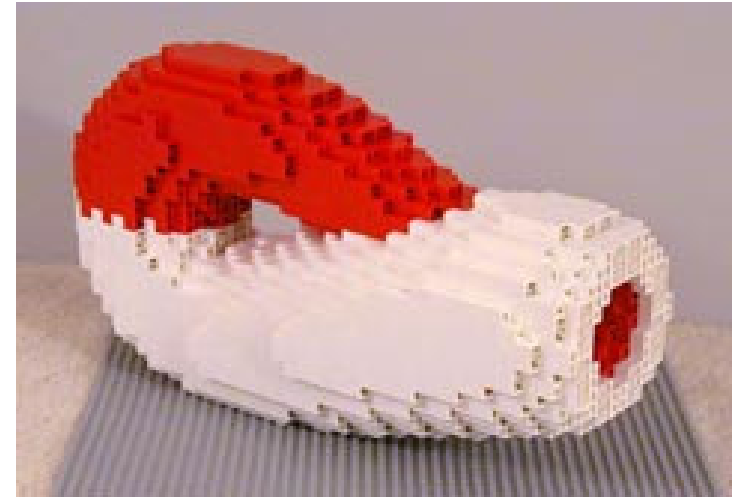


Felix Klein
(1849–1925)





**Botella de
Klein de
LEGO de
Andrew
Lipson**



**Botella de Klein de
Origami de
Robert Lang**



Algunas botellas de Klein de **Cliff Stoll**
“Acme Klein Bottle”

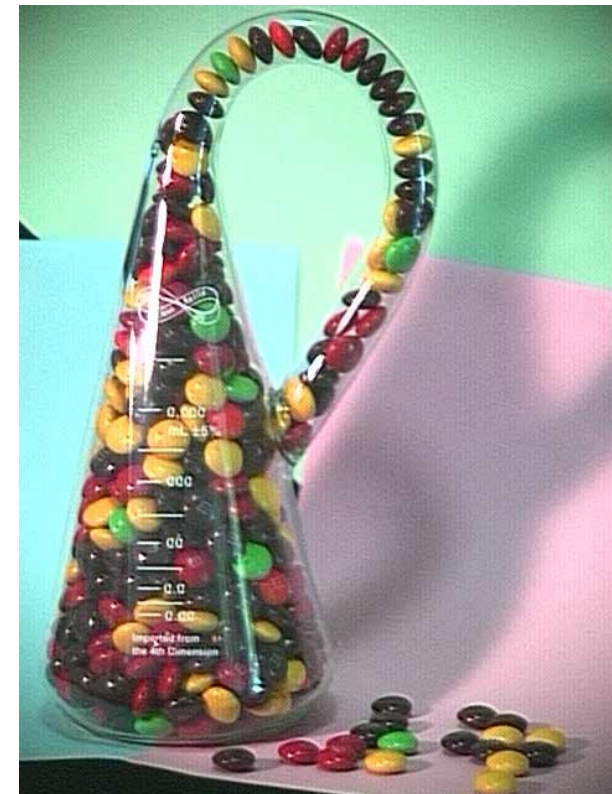
<http://www.kleinbottle.com/classicklein.htm>

Cliff Stoll: Gorro de lana Klein





Cliff Stoll:
Botella de Klein gigante



Cliff Stoll: Botella de Klein de M&M



Saber sin estudiar

***Admiróse un portugués
de ver que en su tierna infancia
todos los niños en Francia
supiesen hablar francés.***

***«Arte diabólica es»,
dijo, torciendo el mostacho,
«que para hablar en gabacho
un fidalgo en Portugal
llega a viejo, y lo habla mal;
y aquí lo parla un muchacho».***

Nicolás Fernández de Moratín (1737-1780)

Bibliografía

- **G.W. Erickson and J.A. Fossa**, *Dictionary of paradox*, Univ. Press of America, 1998.
- **N. Falleta**, *Paradoxicon*, Doubleday and Co., 1983.
- **S. Loyd**, *Cyclopedia of 5000 puzzles, tricks and conundrums (with answers)*, Lamb. Publis. Co. 1914.
- **S. Moretti**, *La “terza via” alla scultura. The “third way” to sculpture*, Comunicare Ed., 2004.
- **A. Seckel**, *Masters of Deception: Escher, Dalí & the Artists of Optical Illusion*, Sterling Publishing Co., 2004.

Enlaces

- *Art of Anamorphosis*, <http://www.anamorphosis.com/>
- *Amazing Art: Illusions, hidden and impossible images*, <http://members.lycos.nl/amazingart/>
- *Masters of Deception*, <http://neuro.caltech.edu/~seckel/mod/>
- *Archimedes laboratory*: <http://www.archimedes-lab.org/>
- *Association Les Chevaliers de l'eau*: <http://jourdain.ifrance.com/sommaire.htm>