Matemáticas y Finanzas

Pablo Fernández Gallardo

Universidad Autónoma de Madrid

"Matemáticas en acción"

Universidad de Cantabria, 18 de enero de 2006

Los primeros tiempos

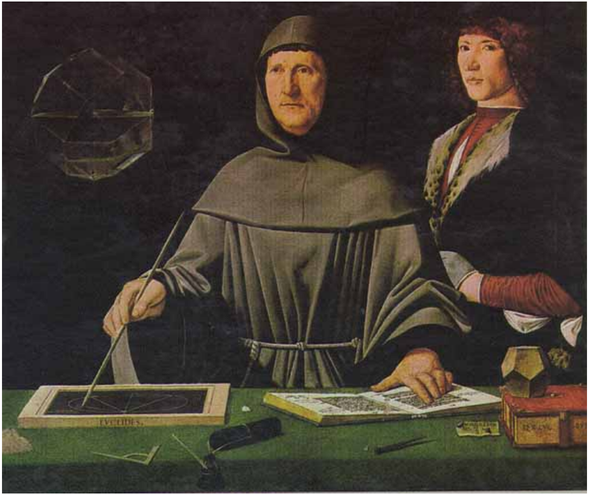
Desde siempre, las técnicas matemáticas han sido aplicadas a cuestiones económicas: números negativos para llevar adecuadamente contabilidad comercial, el ubicuo número e para calcular intereses que se componen continuamente, etc.

En 1494, Fray Luca Pacioli publicó su libro *Summa de Arithmetica*. Entre otras muchas cuestiones, dedicó 36 capítulos al estudio de la partida doble o Contabilidad de doble entrada como mecanismo contable.

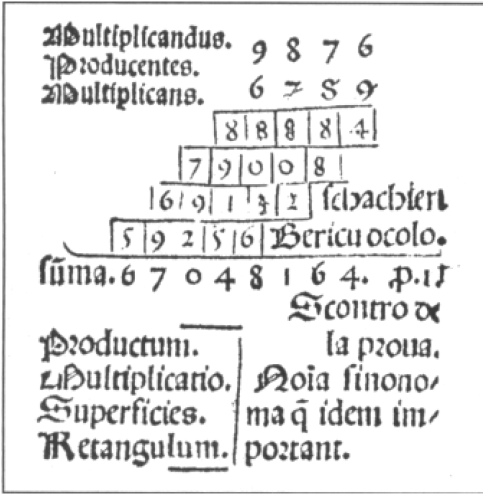
En palabras de Goethe,

> *[. . .] algo de perenne belleza y simplicidad y uno de los mayores logros del intelecto humano.*

Los primeros tiempos



Los primeros tiempos



Multiplicandus. 9 8 7 6
Producentes.
Multiplicans. 6 7 8 9

8	8	8	8	4	
7	9	0	0	8	
6	9	1	3	2	schachieri
5	9	2	5	6	Bericuocolo.

suma. 6 7 0 4 8 1 6 4. p.15

Scontro de la proua.

Productum. Multiplicatio. Superficies. Retangulum. | Noia sinono/ma q̄ idem im/portant.

Las Matemáticas de los seguros

Pero es con el nacimiento del Cálculo de Probabilidades, allá por el siglo XVII, cuando se empieza a disponer de herramientas útiles para modelar instrumentos financieros.

Los padres de la Probabilidad, Fermat, Pascal, y especialmente Huygens, se dedican al análisis y la **valoración** de juegos de azar, y determinan el papel central que la **media** o **esperanza** desempeña en esta cuestión.

Las Matemáticas de los seguros

Fermat

Huygens

Pascal

Las Matemáticas de los seguros

Huygens define el concepto de *expectatio* (al que hoy los matemáticos nos referimos con el nombre, quizás menos afortunado, de esperanza), y que permite abordar el análisis de nuestro primer contrato "financiero".

Ejemplo 1. Se extraerá una carta de una baraja española (40 cartas):

- si sale un as, nos pagan 2 euros;
- si sale figura (sota, caballo o rey) nos pagan 1;
- y en el resto de los casos, no nos pagan nada.

Las Matemáticas de los seguros

Hay tres ingredientes:

- los **pagos futuros** (en este caso, 2, 1 y 0).
- Las **probabilidades** con las que se efectúan estos pagos.

  En nuestro caso, parece razonable la asignación de probabilidades (¿física?) siguiente:

  - $4/40 = 1/10$ al pago de 2;
  - $12/40 = 3/10$ al de 1;
  - y $24/40 = 6/10$ al caso en que no recibimos nada.
- Y, por último, un precio (o **prima**) por participar en el juego.

Las Matemáticas de los seguros

La idea de Huygens es un paradigma universal de **valoración**:

$$\boxed{\text{prima} = \text{promedio}\big(\text{pagos futuros}\big)}$$

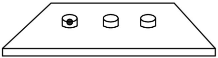
(con, quizás, el ingrediente extra del valor temporal del dinero).

En nuestro caso,

$$\text{prima} = 2 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{6}{10} = \frac{1}{2}\,.$$

Las Matemáticas de los seguros

EJEMPLO 2. El trilero.



Por una apuesta de 1, se nos promete $\begin{cases} 2\,, & \text{si se acierta,} \\ 0\,, & \text{si no.} \end{cases}$

Observemos que tanto la prima como los pagos futuros ya están fijados.

¿Y las probabilidades? Podemos asignar, por ejemplo, *prob*(acierto) $= 1/3$ y *prob*(no acierto) $= 2/3$. Esto es discutible (aunque sin duda cierto si no miramos al trilero).

Las Matemáticas de los seguros

Con esta asignación,

$$\text{prima} = 2 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Esto es, la prima=1 no es justa. Hay un impuesto del 33 %.

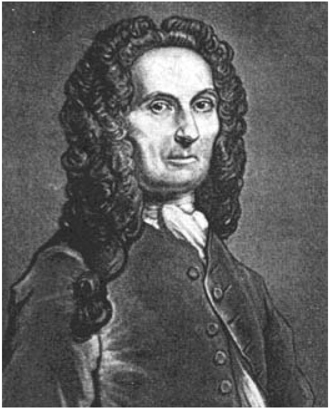
Las Matemáticas de los seguros

Estas ideas dan lugar, inmediatamente, al desarrollo de las técnicas actuariales.

Edmund Halley publicó las primeras tablas de mortalidad de que se tiene noticia.

En 1725, Abraham de Moivre publica el libro *Annuities for life*, con el objetivo fundamental de calcular rentas vitalicias: la prima o primas que en una mutua tiene pagar cada asegurado durante un cierto tiempo para a partir de un cierto tiempo ulterior recibir una renta fija hasta su muerte.

Las Matemáticas de los seguros



De Moivre

Las Matemáticas de los seguros

Este paradigma de valoración (actuarial, de base estadística)

$$\boxed{\text{precio} = \sum_{\text{escenarios } e} \text{flujo}_e \times \text{descuento}_e \times \text{probabilidad}_e}$$

se fundamenta en las leyes de los grandes números.

Es decir, en la repetición del experimento aleatorio en cuestión en (exactamente) las mismas condiciones.

Las Matemáticas de los seguros

Supongamos que tenemos un experimento aleatorio que tiene un resultado que recogemos en una variable aleatoria X; por ejemplo, el premio que se recibe en cada partida de un juego de azar.

Si repetimos el experimento (jugamos partidas sucesivas del juego de azar) un número grande de veces y acumulamos los premios obtenemos una cantidad aleatoria:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

La X_i recoge el premio del experimento i-ésimo. Como las partidas se juegan en igualdad de condiciones, cada X_i tiene la misma distribución que la X de referencia.

Las Matemáticas de los seguros

Las leyes de los grandes números (y el teorema del límite central) nos dicen que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

es, con probabilidad elevada y muy aproximadamente,

$$\mathbf{E}(X)\,.$$

En otros términos, que

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{N} X_i}^{\text{aleatorio}} \quad \simeq \quad \underbrace{N\cdot\mathbf{E}(X)}_{\text{seguro}}$$

Las Matemáticas de los seguros

Obsérvese que el anterior es un argumento de **transferencia de riesgo**.

Si se conoce de manera objetiva que los flujos de un instrumento (juego) son decididamente aleatorios, si se conoce con precisión la distribución de probabilidad de los resultados, y si vamos a invertir en él un número grande de veces en condiciones idénticas (jugar un número grande de partidas), entonces la esperanza es un equivalente (casi cierto) de los flujos a recibir.

Las leyes de los grandes números "eliminan" el riesgo.

Las Matemáticas de los seguros

Son muchas condiciones.

Todas estas condiciones sobre la estructura aleatoria se cumplen (casi) en los juegos de azar, en los contratos de seguros, y en el crédito minorista.

Se cumplen pero (bastante) menos en inversión repetida en periodos (relativamente) cortos en Bolsa.

Y poco o nada en contratos a plazo, derivados o no.

El concepto de riesgo

A finales del siglo XVIII, quizás el más brillante de la fecunda familia de los Bernoulli de Basilea, Daniel, introduce en su artículo *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, la varianza (o la desviación típica) como medida del **riesgo**.

Daniel Bernoulli

El concepto de riesgo

Observemos los dos siguientes juegos (variables aleatorias):

$$X_1 \to \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } 1/3, \\ 0, & \text{con probabilidad } 1/3, \\ -1, & \text{con probabilidad } 1/3, \end{cases} \qquad X_2 \to \begin{cases} 100, & \text{con probabilidad } 1/3, \\ 0, & \text{con probabilidad } 1/3, \\ -100, & \text{con probabilidad } 1/3, \end{cases}$$

En ambos casos, la media es $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_2) = 0$.

Así que, desde el punto de vista de la valoración, ambos contratos son "iguales".

Pero son bien diferentes: ¿mejores, peores? Depende del gusto de cada cual.

El concepto de riesgo

Si calculamos las respectivas desviaciones típicas, por medio de la regla

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2]}$$

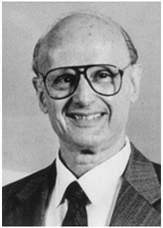
obtenemos

$$\sigma(X_1) = 0,82 \qquad \text{y} \qquad \sigma(X_2) = 81,65.$$

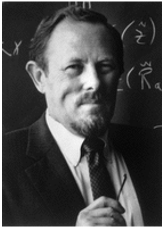
El concepto de riesgo

El propio Daniel Bernoulli, en su análisis de la *paradoja de San Petersburgo*, introduce el concepto de **utilidad**, de importancia fundamental en posteriores teorías económicas.

Un par de siglos después, y extendiendo las ideas de nuestro Bernoulli, Markowitz y Sharpe, entre otros, desarrollan la teoría de carteras.



Markowitz (Nobel 1990)



Sharpe (Nobel 1990)

Instrumentos financieros para transferir riesgo

En Finanzas, riesgo e incertidumbre son casi sinónimos.

Por ejemplo, no sabemos cuál será la rentabilidad de la acción de Telefónica a un año. Es una rentabilidad decididamente aleatoria. A esta incertidumbre nos referimos cuando hablamos de **riesgo de precio**.

Pero hay otros tipos de riesgo:

- **Riesgo de divisas**: tenemos dólares que queremos usar para invertir en euros dentro de un mes; pero el tipo de cambio de dólares a euros es incierto.
- **Riesgo de reinversión**: tenemos Letras del Tesoro que vencen en un año; ¿a qué tipo de interés podremos reinvertir ese dinero?

Instrumentos financieros para transferir riesgo

- **Riesgo de crédito**: Una empresa (o quizás un Estado) que emite obligaciones puede quebrar y no hacer frente a su deuda.
- **Riesgo de liquidez**: puede que el mercado no sea líquido, nadie quiera comprar o vender activos a la cotización establecida. Etc.

Los mercados financieros han creado unos instrumentos para transferir riesgos financieros entre dos partes: una parte elimina su incertidumbre transfiriéndosela a otra.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

Tenemos un cierto **subyacente** (una acción, por ejemplo).

Existen dos tipos fundamentales de opciones:

- **Futuros**: un contrato de compra o venta en el que **hoy** se pacta un precio fijo para una fecha futura.
- **Opciones**: una opción de venta (**put**) es un contrato en el que una parte se hace con el derecho (¡pero no la obligación!) de **vender** a la otra parte a un determinado precio en una fecha futura. En una opción de compra, **call**, el derecho a comprar.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

Estos instrumentos están por todas partes:

- Futuros sobre mercancías (cítricos, cereales, petróleo).
- Y opciones que todos conocemos:
  - Fondos de inversión garantizados.
  - Prima por amortizaciones anticipadas de una hipoteca.
  - Préstamos con techos: pagamos un tipo de interés variable, Euribor a 1 año $+0{,}50\,\%$, pero nunca más de un $6\,\%$ anual.

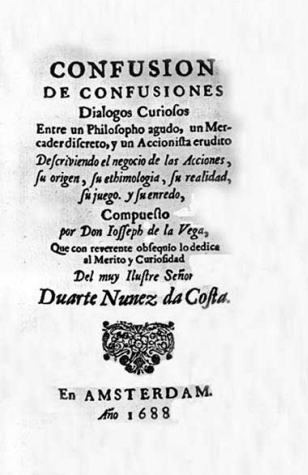
La variedad es enorme y no para de crecer, pues los derivados se diseñan a medida del riesgo específico que se quiere transferir.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

- El libro primero de la *Política* de Aristóteles contiene una definición de una opción como instrumento financiero.
- Se cuenta que Tales de Mileto hizo fortuna negociando con opciones: previó que la cosecha de aceitunas iba a ser especialmente buena y compró opciones (derechos) de uso de los molinos por pequeñas cantidades. Tras la cosecha, esos derechos adquirieron, como había especulado Tales, un valor extraordinario.
- En el siglo XVII, Amsterdam albergaba un mercado de opciones muy activo, que llegaba a incluir opciones en las que el subyacente era otra opción. Se llegó a tal desfase entre valor y precio que su derrumbe produjo una grave crisis financiera.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

El español José de la Vega publicó en 1688 un jugoso libro, *Confusión de confusiones*, en el que se describía el funcionamiento de los mercados financieros de la época.


CONFUSION
DE CONFUSIONES
Dialogos Curioſos
Entre un Philoſopho agudo, un Mercader diſcreto, y un Accioniſta erudito
Deſcriviendo el negocio de las Acciones, ſu origen, ſu ethimologia, ſu realidad, ſu juego. y ſu enredo,
Compueſto
por Don Ioſſeph de la Vega,
Que con reverente obſequio lo dedica al Merito y Curioſidad
Del muy Iluſtre Señor
Duarte Nunez da Coſta.

En AMSTERDAM.
Año 1688

Instrumentos financieros para transferir riesgo

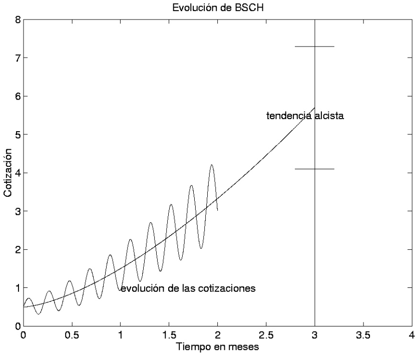
Están las acciones al presente en precio de 580, paréceme que por el gran retorno que se espera de la India, aumento de la Compañía, reputación de los géneros, repartición que se promete, y paz de la Europa, subirán a mucho mayor del que logran. No me delibero sin embargo, a comprar partidas efectivas, porque temo que si me faltaren estos designios, podrá alcanzarme un despeño, o sucederme un desaire: llégome pues a los que me dicen que toman esos Opsies, propóngoles cuánto quieren por quedarme obligados a entregar cada partida a 600 hasta tal plazo, ajusto el premio, escríbolo luego en Banco, y sé que no puedo perder más de lo que desembolso, con que todo lo que suben de 600 gano, y lo que bajan, no me sirve de ansia para el juicio, ni de inquietud para la honra, ni de sobresalto para el sosiego. [...]

Instrumentos financieros para transferir riesgo

Una opción **put** (opción de venta) me da el derecho (¡pero no la obligación!) a vender a un determinado **precio de ejercicio** o **strike** K, una acción, por ejemplo, de BSCH, digamos que dentro de 3 meses (el **vencimiento**).

- Dentro de 3 meses necesitaré liquidez.
- Para ello venderé mi cartera de BSCH esperando que el precio esté por encima de K.
- Podría vender ahora,
- pero creo que su cotización tiene una marcada tendencia alcista y no quiero vender ahora.
- Pero BSCH está muy volátil, es decir, su cotización oscila mucho: ¿y si su cotización baja dentro de 3 meses?

Instrumentos financieros para transferir riesgo



En la evolución de la figura, aunque la tendencia es alcista, al ser tan oscilante (volátil) en el preciso instante de dentro de 3 meses su cotización podría ser muy alta o muy baja.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

La compra de una opción *put* me garantiza un precio mínimo al que podré vender. He comprado un **seguro**. ¿A quién? A un banco o a un particular o a una contrapartida en un mercado organizado.

En esta opción *put*, una parte tiene el derecho a vender al precio K (pero no la obligación: no venderá a ese precio si no le interesa) y la otra tiene la obligación de comprar (si la otra parte lo exige) a ese precio K.

El derecho que he adquirido al comprar una opción *put* no es gratuito, he de pagar una prima. ¿Cuánto debe ser esa prima? Éste es el problema de **valoración**.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

El banco que me ha vendido esa *put* asume mis riesgos, y debe ser capaz de cubrirlos con la prima percibida.

¿Qué ha de hacer para "cubrir" el compromiso que ha adquirido?

Esta es la cuestión de **cobertura**.

Como veremos, valorar y cubrir son esencialmente equivalentes.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

Las opciones pueden utilizarse en estrategias especulativas (apalancamiento).

La prima de una opción es una fracción del precio de la acción sobre la que se basa.

A vencimiento, el comprador puede perder el valor de esa prima, pero puede ganar hasta el precio de ejercicio: una inversión pequeña supone una ganancia potencial grande. Un ejemplo: una *call* con *strike* K paga

$$\max\,(S-K) \equiv (S-K)^{+}\,,$$

donde S es el precio del subyacente a vencimiento.

Instrumentos financieros para transferir riesgo

Supongamos que $S(\mathrm{hoy}) = 100$ y que intuimos que esa acción va a subir. Dos posibilidades:

- Compramos una acción (coste 100) y esperamos a vencimiento.
- Compramos una *call* con *strike* $K = 100$. Digamos que nos cuesta 10.

Supongamos que $S(\mathrm{vencimiento}) = 130$.

Con la primera estrategia, ganamos 30. ¡Pero con la segunda también!

Instrumentos financieros para transferir riesgo

O ya en plan decididamente especulador. Nuestra inversión inicial de 100 nos permite

- comprar una acción;
- comprar 10 calls con strike $K = 100$.

Si la acción vale 130 a vencimiento,

- la primera estrategia nos proporciona un beneficio de 30;
- mientras que la segunda nos garantiza $30 \times 10 = 300$.

Claro que si la acción se sitúa en 90:

- con la primera estrategia hemos perdido 10;
- pero con la segunda perdemos toda nuestra inversión, 100.

Valoración por replicación

La parábola de la porra.

Supongamos que sólo hay dos resultados (por ejemplo, una final de Copa): victoria de X o victoria de Y. Cada apuesta es de 1 euro.

Disponemos de los datos históricos, que nos dicen que:

- victoria de X en un 40 %;
- victoria de Y en un 60 %.

Valoración por replicación

Más aún, tenemos una asignación de probabilidad "divina" (¿información privilegiada?):

- victoria de X en un 20 %;
- victoria de Y en un 80 %.

Por último, observamos el "mercado": hay, hasta el momento, 1 millón de apuestas:

- el 30 % son apuestas por X;
- el 70 %, apuestas por Y.

Nuestra decisión de apostar por uno u otro equipo ya recoge toda nuestra información, análisis técnico o fundamental.

Valoración por replicación

Una apuesta por X supone que

- su precio es $\mathbf{1}$;
- no hay descuento;
- los pagos son $\begin{cases} \text{si gana X}, & \text{pago de } \dfrac{1000000}{300000} = \dfrac{10}{3}; \\ \text{si gana Y}, & \text{pago de } 0. \end{cases}$

Valoración por replicación

Nuestro cálculo habitual nos dice que

$$1 = \underbrace{\frac{10}{3}}_{\text{pago}} \times \underbrace{\mathbf{1}}_{\text{descuento}} \times \mathbf{Prob}(X) + \underbrace{0}_{\text{pago}} \times \underbrace{\mathbf{1}}_{\text{descuento}} \times \mathbf{Prob}(Y)\,.$$

Lo que nos lleva a que $\mathbf{P}(X) = 0,3$ y, claro, también a que $\mathbf{P}(Y) = 0,7$.

Valoración por replicación

Derivados:

Alguien me ofrece

- si gana $X \longrightarrow \quad 5;$
- si gana $Y \longrightarrow \quad 3.$

¿Cómo valorar esta oferta? ¿Cómo obtener su precio (justo de mercado)? (hacemos caso omiso de comisiones).

Queremos aplicar el paradigma de valoración habitual. Esto es, descontar y promediar las expectativas de pagos.

Pero, ¿con qué probabilidad promediamos?

Valoración por replicación

Si con la probabilidad histórica,

$$\text{precio} = 5 \times \underbrace{\mathbf{Prob}(X)}_{=0,4} + 3 \times \underbrace{\mathbf{Prob}(Y)}_{=0,6} = 3,8\,.$$

Si con la probabilidad "divina",

$$\text{precio} = 5 \times \underbrace{\mathbf{Prob}(X)}_{=0,2} + 3 \times \underbrace{\mathbf{Prob}(Y)}_{=0,8} = 3,4\,.$$

Si con la probabilidad de "mercado",

$$\text{precio} = 5 \times \underbrace{\mathbf{Prob}(X)}_{=0,3} + 3 \times \underbrace{\mathbf{Prob}(Y)}_{=0,7} = 3,6\,.$$

Valoración por replicación

Veamos la **justificación** de la tercera valoración.

Formamos una **cartera** que conste de

$$1,5 \text{ de boletos de } A \quad \text{y} \quad 2,1 \text{ boletos de } B.$$

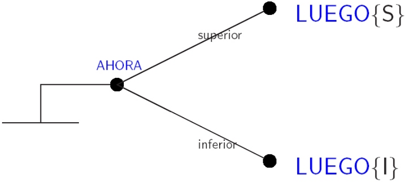
Esta cartera cuesta precisamente $3,6$ euros y **equivale** al contrato que ofrece el revendedor, puesto que

- si gana X, paga $\longrightarrow \quad (1,5) \times \dfrac{10}{3} = 5;$
- y si gana Y, paga $\longrightarrow \quad (2,1) \times \dfrac{10}{7} = 3.$

Valoración por replicación

Vamos a analizar el modelo más sencillo de mundo financiero. No hay dividendos, ni costes de transacción y no hay **oportunidades de arbitraje**.

Disponemos de **tres** activos distintos A, B y C. Cada activo se identifica con su flujo. Sólo analizamos **un** intervalo de tiempo (Δt). Y suponemos que el mundo sólo puede evolucionar del estado actual a **dos** estados futuros.



Valoración por replicación

Representemos los valores de los activos A, B y C en el futuro por $A_s, B_s, C_s, A_i, B_i, C_i$ y resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones (con α y β como incógnitas):

$$\begin{cases} C_s &= \alpha A_s + \beta B_s\,, \\ C_i &= \alpha A_i + \beta B_i\,, \end{cases} \qquad \text{es decir,} \qquad \begin{pmatrix} C_s \\ C_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s & B_s \\ A_i & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Valoración por replicación

Las carteras:

$$\begin{array}{ll} (1) & 1 \text{ unidad del activo } C \\ (2) & \alpha \text{ unidades de } A + \beta \text{ unidades de} B \end{array}$$

tienen los mismos flujos. Por tanto, *si no hay oportunidad de arbitraje*, debe darse además que sus precios en el tiempo presente deben coincidir:

$$C_{\text{ahora}} = \alpha A_{\text{ahora}} + \beta B_{\text{ahora}}$$

Valoración por replicación

Un caso particular del análisis anterior. Consideramos los tres activos siguientes:

A: El activo sin riesgo;

B: Un activo subyacente;

C: Un activo derivado.

El activo sin riesgo tiene un rendimiento seguro R (anual, continuo) para el intervalo de tiempo Δt que estamos considerando:

$$\text{A: } 1 \xrightarrow[\Delta t]{} e^{R\Delta t}$$

Valoración por replicación

Los estados futuros del mundo vendrán determinados por lo único relevante, la **cotización de** B.

De ella supondremos que, si S es su cotización actual, entonces sus valores futuros, como antes, podrán ser sólo dos, que expresamos en términos de rentabilidades:

$$\text{Superior } (up)\text{:} \quad S \longrightarrow Su$$

$$\text{Inferior } (down)\text{:} \quad S \longrightarrow Sd$$

Valoración por replicación

Como "conocemos" A y B podemos valorar C (ahora) en términos de sus contingentes valores futuros. El sistema es:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rl} C_s = & \alpha e^{R\Delta t}\mathbf{1} + \beta S u \\ C_i = & \alpha e^{R\Delta t}\mathbf{1} + \beta S d \end{array}\right.}$$

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (α y β), que podemos resolver. Una vez obtenidos los valores de α y β, valoramos C:

$$C_{\rm ahora} = \alpha\, 1 + \beta\, S\,.$$

Valoración por replicación

La hipótesis de ausencia de oportunidades de arbitraje nos dice que, necesariamente,

$$d < e^{R\Delta t} < u\,.$$

Si, por ejemplo, $e^{R\Delta t}$ fuera menor que d (y que u), entonces seguiríamos la siguiente estrategia:

- Pedimos prestado S euros, con los que compramos una acción de B.
- Tras el paso del intervalo Δt,
  - tenemos que devolver $Se^{R\Delta t}$;
  - pero nuestra acción vale, o bien Su, o bien Sd.

Valoración por replicación

En cualquiera de los dos casos, tenemos dinero suficiente como para hacer frente a nuestras obligaciones (y aún obtenemos beneficio).

Esto sería una oportunidad de arbitraje.

El argumento análogo para el otro caso ($e^{R\Delta t} > u$) nos convence de que, efectivamente, debe darse que

$$d < e^{R\Delta t} < u\,.$$

Esto nos permite valorar de la siguiente manera (alternativa y cómoda).

Valoración por replicación

Primero, como $d < e^{R\Delta t} < u$, podremos encontrar un número $0 < p < 1$ tal que

$$\boxed{e^{R\Delta t} = pu + (1-p)d}$$

Explícitamente:

$$\boxed{p = \frac{e^{R\Delta t} - d}{u - d}}$$

Valoración por replicación

Ahora, multiplicamos la ecuación (1) por p y la (2) por $(1-p)$

$$\begin{cases} (1) & C_s = \alpha e^{R\Delta t}\mathbf{1} + \beta S u \\ (2) & C_i = \alpha e^{R\Delta t}\mathbf{1} + \beta S d \end{cases}$$

para obtener, tras unas manipulaciones, que

$$p\ C_s + (1-p)\ C_i = e^{R\Delta t}\Big(\underbrace{\alpha 1 + \beta S}_{C_{\text{ahora}}}\Big),$$

que reescribimos en la forma:

$$\boxed{\underbrace{C_{\text{ahora}}}_{\text{valor}} = \underbrace{e^{-R\Delta t}}_{\text{descuento}} \times \Big(\underbrace{p\ C_s + (1-p)\ C_i}_{\text{promedio de flujos}}\Big)}$$

Valoración por replicación

Como $0 < p < 1$, *podemos interpretar* a p como una **probabilidad**.

En esta interpretación, p es la probabilidad de pasar al estadio superior y $1 - p$ es la probabilidad de pasar al estadio inferior.

Obsérvese que C_{ahora} **resulta** ser el valor promediado (con p y $1 - p$) actualizado del flujo de C.

Valoración por replicación

La identidad

$$e^{R\Delta t} = pu + (1-p)d$$

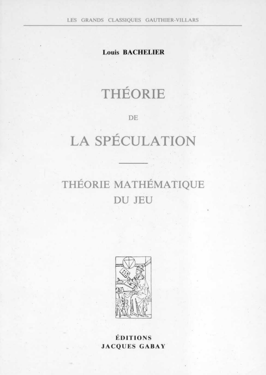
se interpreta de la siguiente manera: la probabilidad p es aquella para la que la capitalización promediada del activo subyacente es justamente la del activo sin riesgo.

Por eso a p se le conoce como la **riesgo-neutro**: es la probabilidad subjetiva que un inversor indiferente al riesgo le adjudicaría a la evolución de B.

La probabilidad p es una manera cómoda de calcular precios, siguiendo el paradigma habitual. Pero el argumento financiero que justifica este manera de valorar, la **eliminación del riesgo**, es la replicación.

Modelización de mercados financieros

El primer intento de modelización matemática de los mercados financieros con el objetivo declarado de valorar opciones y futuros se debe a Louis Bachelier, quien defendió su tesis doctoral *Théorie de la Spéculation* en el año 1900.



Modelización de mercados financieros

El supervisor de su trabajo doctoral fue Henri Poincaré, quien no supo (o no quiso) percibir la innovación conceptual que las ideas expuestas por Bachelier suponían.

La importancia de esta tesis doctoral no fue apreciada hasta los años 60, en que fue rescatada del olvido por Benoit Mandelbrojt, el inventor de los fractales.

La tesis de Bachelier postula que **los precios de los activos siguen un movimiento browniano con deriva**.
Una modelización de mecánica estadística: la información (positiva y negativa) llega aleatoriamente a los mercados tirando en ambas direcciones de los precios.

Modelización de mercados financieros

El intento de Bachelier tropezaba con dos obstaculos:

- Desde el punto de vista técnico, formalizar la fundamentación del movimiento browniano y el desarrollo de un cálculo (integral, diferencial y de variaciones) que permita analizar.
- Desde el punto de vista de la modelización, dos aspectos: por una parte, sus precios siguen un movimiento browniano. Esto hace que éstos puedan ser negativos (de hecho lo serán con probabilidad positiva en cualquier tiempo). Y por otro no incorpora un principio de equilibrio entre precios, como es la ausencia de oportunidad de arbitraje.

Modelización de mercados financieros

Las dificultades técnicas del movimiento browniano fueron resolviéndose con los trabajos de Einstein (mencionados en su Premio Nobel de 1905), y sobre todo Wiener, junto con el desarrollo del "cálculo diferencial" de Itô.

El otro ingrediente lo aporta Paul Samuelson, otro Premio Nobel (1970), quien postula que

> *los rendimientos, y no los precios, de los activos siguen un movimiento browniano con deriva.*

O, en otros términos, los precios de los activos siguen un movimiento browniano geométrico.

Modelización de mercados financieros

Más técnicamente, el modelo postula una evolución estocástica de los precios de las acciones dada por el movimiento browniano geométrico

$$dS_t = S_t\Big(\mu dt + \sigma dW_t\Big)\,,$$

donde

la unidad de tiempo es el año,
S_t denota el precio de la acción en tiempo t,
μ es el rendimiento medio (instantáneo),
σ es la **volatilidad**, la desviación típica (instantánea) del rendimiento,

Modelización de mercados financieros

- Por una parte, tenemos la rentabilidad futura que viene determinada por μ. Este parámetro es muy difícil de aquilatar, claro. Y si este esquema se va a utilizar para valorar contratos se requiere que las partes se pongan de acuerdo en su valor.
- El segundo parámetro, σ, la volatilidad, es menos conflictivo y a la postre mucho más fundamental. Cuanto más grande es σ, mayor es la amplitud de los saltos que da la rentabilidad, es decir, mayor incertidumbre tenemos sobre los movimientos del activo.

Modelización de mercados financieros

A principios de los 70, Black y Scholes, en colaboración, y Merton, completan el marco conceptual que permite analizar en profundidad los mercados financieros modernos.

En el artículo *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, del Journal of Political Economy (1973), uno de los más citados de la literatura científica, Black y Scholes introducen un principio de equilibrio: la hipótesis de **ausencia de oportunidades de arbitraje**.

Merton y Scholes recibieron el Nobel de Economía en 1997 (Black había fallecido dos años antes).

Modelización de mercados financieros

Scholes

Merton

Modelización de mercados financieros

Así consiguen identificar la deriva en el modelo de Samuelson, y sitúan la volatilidad en el papel central que ahora tiene.

En el modelo de Black-Scholes-Merton, se postula que la evolución de los precios viene dada por

$$dS_t = S_t\Big(r\,dt + \sigma\,dW_t\Big)\,,$$

Obsérvese el sutil cambio que supone sustituir μ por r (el rendimiento del activo sin riesgo) en la evolución anterior).

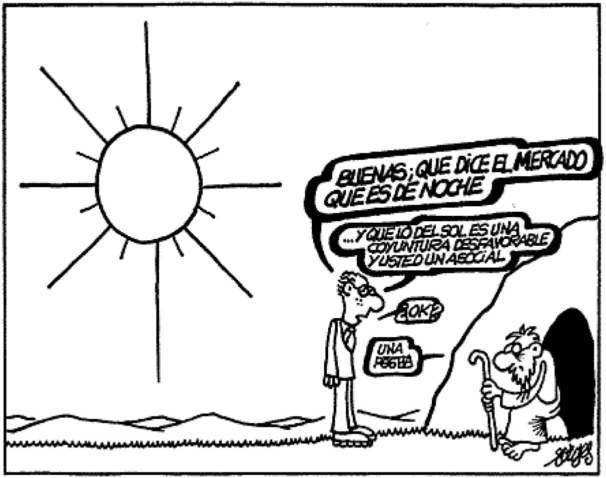
Para **valorar** opciones, debemos suponer (en ausencia de oportunidades de arbitraje) que la rentabilidad media del activo con riesgo coincide con la del activo sin riesgo. Algo ciertamente sorprendente.

Modelización de mercados financieros

En el ejemplo de la porra, o en el sencillo modelo 1-2-3, el "derivado" se valoraba con la probabilidad que se infería a partir de los precios. La valoración equivalía y era consistente con la replicación.

Así que, *para la valoración*, los datos históricos son irrelevantes; sólo cuenta la opinión del mercado, reflejada en los precios.

Modelización de mercados financieros



Modelización de mercados financieros

Los trabajos de Black, Scholes y Merton, cuya aparición coincidió con la creación de los primeros mercados organizados de derivados (Chicago, 1973), fueron sólo el comienzo.

Hoy en día, en la práctica financiera, es necesario conocer y manejar sofisticadas técnicas y conceptos matemáticos

- de la Probabilidad: cálculo estocástico, martingalas, cadenas de Markov, etc.;
- de las Ecuaciones Diferenciales (resolución numérica, problemas de frontera libre);
- cuestiones computacionales (cálculo numérico, simulación Montecarlo);
- Etc.