

PREMIO SĒMA DE DIVULGACIÓN DE LA
MATEMÁTICA APLICADA
2005

**Simulación numérica en
odontología y ortodoncia**

JUAN M. VIAÑO Y SU GRUPO DE INVESTIGACIÓN^{1,2}

Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas
Universidad de Santiago de Compostela, 15782 Santiago de Compostela, España.

`maviano@usc.es`

http://www.usc.es/dmafм/grupo_viano/index.htm

(1) MARGARITA BURGUERA, JOSÉ R. FERNÁNDEZ, ÁNGEL D. RODRÍGUEZ-ARÓS y MARCO A. CAMPO.

(2) Los aspectos médicos y biomecánicos fueron estudiados en colaboración con los siguientes odontólogos de la Facultad de Medicina y Odontología de la misma universidad: DAVID SUÁREZ, TERESA ABELEIRA y MERCEDES GALLAS.

Abstract

En este trabajo se pretende divulgar la aplicación de las matemáticas y, más concretamente, de la simulación numérica a la modelización y mejor conocimiento de ciertos fenómenos mecánicos en odontología y en ortodoncia. Para ello hemos intentado resumir, en un lenguaje asequible, la investigación realizada por los autores desde el año 1997, en colaboración con un grupo de cirujanos ortodoncistas de la Universidad de Santiago de Compostela. El objetivo fundamental de la investigación (financiada durante 3 años por la Xunta de Galicia) es la simulación numérica de diferentes procesos mecánicos en la mandíbula humana y del comportamiento de algunos dispositivos utilizados en su cirugía y ortodoncia (“brackets”, implantes dentales, miniplacas de titanio). Después de la descripción anatómica de la mandíbula, hacemos especial énfasis en las dificultades solventadas para realizar un buen modelo geométrico con elementos finitos tetraédricos tanto de la mandíbula como de las piezas dentales. Construído el modelo, se describe la simulación en ordenador de diferentes problemas de interés para los especialistas médicos: tensiones en una mordida con el primer molar derecho y con un implante dental de titanio, localización de fracturas mandibulares después de un impacto, reducción de fracturas de mandíbula con miniplacas de titanio y comparación del comportamiento de dos modelos de “brackets” ortodóncicos de acero. La formulación matemática de los problemas se basa en las ecuaciones en derivadas parciales que traducen el comportamiento elástico del hueso y de los dispositivos, con distintas condiciones de contacto. Estos problemas se aproximan por el método de los elementos finitos (variable espacial) y el esquema de Newmark (variable temporal) y se resuelven en ordenador con programas de cálculo elaborados por el propio equipo investigador.

Key words: *Simulación numérica, mandíbula humana, ortodoncia, brackets, fracturas de mandíbula, implantes dentales, elementos finitos, elasticidad, contacto.*

AMS subject classifications: *65M60, 65N30, 74G15, 74L15, 92C10, 92C60.*

1 Introducción

La modelización y simulación numérica del cuerpo humano es un área de investigación relativamente reciente que está experimentando un enorme auge en los últimos años. Su principal objetivo es conseguir un mejor conocimiento del comportamiento mecánico y fisiológico del cuerpo humano y diseñar herramientas para su correcta simulación numérica en ordenador con vistas a poder hacer predicciones y tomar decisiones.

Hoy en día los modelos biomecánicos y fisiológicos del cuerpo humano juegan un papel prominente en la prevención, diagnóstico y terapia de muchas enfermedades. La introducción generalizada de tales modelos en la actividad médica contribuirá decisivamente al desarrollo de una medicina más preventiva

y más individualizada. En efecto, el progreso continuo del tratamiento de imágenes médicas durante las pasadas décadas, permite actualmente obtener una cantidad cada vez mayor de información funcional y anatómica de cualquier individuo, con una enorme precisión en tiempo y en espacio. Esta ingente cantidad de datos e imágenes es imposible de analizar directamente y se necesita desarrollar nuevos modelos de cálculo que capturen los parámetros relevantes para el análisis o para la simulación. Hay también un número importante de aplicaciones no estrictamente médicas de estos modelos humanos virtuales en campos diversos como la conducción (vehículos más seguros), el trabajo (puestos más ergonómicos), la actividad física y el deporte (entrenamiento más eficiente),...

Hay básicamente tres niveles de diseño de modelos del cuerpo humano. El primer nivel es geométrico y tiene como objetivo la descripción digital de la anatomía, casi siempre adquirida a través de las imágenes médicas (TAC's, radiografías, ...). El segundo nivel es físico y pretende la modelización bicomecánica de los diferentes tejidos, órganos, vasos sanguíneos, músculos o huesos. El tercer nivel es fisiológico y tiene que ver con la modelización de las funciones de los más importantes sistemas biológicos (cardiovascular, respiratorio, digestivo, muscular,...) o algún metabolismo patológico (evolución de un tumor, de una inflamación, ...).

La investigación en este campo abarca prácticamente todas las partes y funciones del cuerpo humano: simulación numérica del corazón y del sistema circulatorio, del hígado, del ojo, del cerebro, crecimiento de tumores, formación de huesos, ... Especial relevancia tiene toda la investigación relacionada con la cirugía guiada por imagen a distancia y con las consecuencias de los accidentes por impacto (accidentes de tráfico) en diferentes partes del cuerpo (cabeza, rodillas, mandíbulas,...). El lector interesado puede encontrar un resumen del estado del arte en este tema en la referencia [10].

El trabajo que presentamos en estas páginas está relacionado con la simulación de diversos procesos mecánicos que ocurren en la mandíbula humana, considerada como una estructura ósea, y también en las distintas piezas dentales y/o dispositivos utilizados en su cirugía y ortodoncia ("brackets", implantes dentales, miniplacas de titanio,...). Comenzamos haciendo especial énfasis en las dificultades solventadas para realizar un buen modelo geométrico con elementos finitos tetraédricos tanto de la mandíbula como de las piezas dentales. Construido el modelo, mediante digitalización (sección 3) hemos considerado la simulación de diferentes problemas de interés para los especialistas médicos: la simulación de una mordida con el primer molar derecho (sección 4) y de un implante dental de titanio (sección 5), la localización de fracturas mandibulares después de un impacto (sección 6), la reducción de fracturas de mandíbula con miniplacas de titanio (sección 7) y una comparación entre dos modelos de "brackets" ortodóncicos (sección 8). En todos estos estudios, su formulación mecánica da lugar a problemas de contacto entre cuerpos elásticos: contacto con un cuerpo rígido (mordida o localización de fracturas), contacto entre dos cuerpos elásticos (implante dental con la mandíbula y brackets con el alambre) o contacto entre tres cuerpos (las miniplacas con las dos partes de la

mandíbula fracturada). Estos problemas se formulan en términos de ecuaciones en derivadas parciales y se resuelven numéricamente mediante el método de los elementos finitos para la aproximación de la variable espacial y el esquema de Newmark para discretizar las derivadas en tiempo.

La simulación numérica en la mecánica de la mandíbula comienza a principios de los años 90 ([11, 21, 32, 35, 45, 46, 47]) y el número de trabajos no ha parado de crecer hasta hoy. Además de las publicaciones médicas especializadas, es interesante observar el número de presentaciones y publicaciones relacionadas con la simulación en ortodoncia y odontología que aparecen en congresos de ingeniería biomédica y biomecánica. Señalamos como ejemplo la referencia [37]. Los métodos y resultados de nuestra investigación

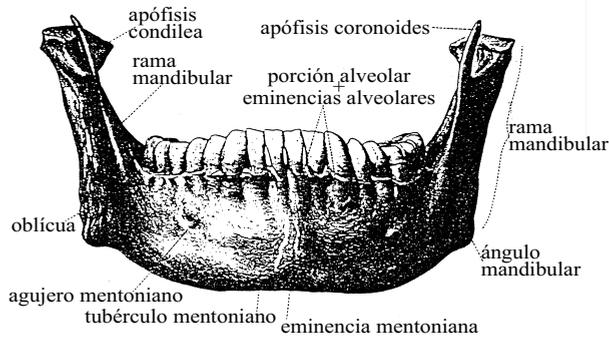


Figure 1: Mandíbula humana: vista frontal.

y otras similares son de indudable interés por sí mismas pero también como paso importante hacia modelos más precisos que, en consonancia con las necesidades médicas actuales, permitan la simulación del movimiento dentario y del proceso de formación de hueso. Estos aspectos no han sido tratados en nuestra investigación, entre otras razones, porque los modelos matemáticos de estos fenómenos están todavía en fase de formulación y validación. En lo que se refiere a los modelos de formación de hueso, varios grupos trabajan en esta dirección (véase [13, 14, 15, 16, 20, 27, 31, 38, 52] y sus referencias) pero son todavía escasos los trabajos sobre modelización del movimiento dentario ([29, 42]).

2 Anatomía de la mandíbula humana

La mandíbula humana es un hueso con forma de U que soporta los dientes inferiores y conforma el esqueleto facial inferior. La mandíbula está suspendida y unida a la boca mediante músculos, ligamentos y otros tejidos blandos que le dan la movilidad necesaria para realizar su función con el maxilar (parte superior de la boca).

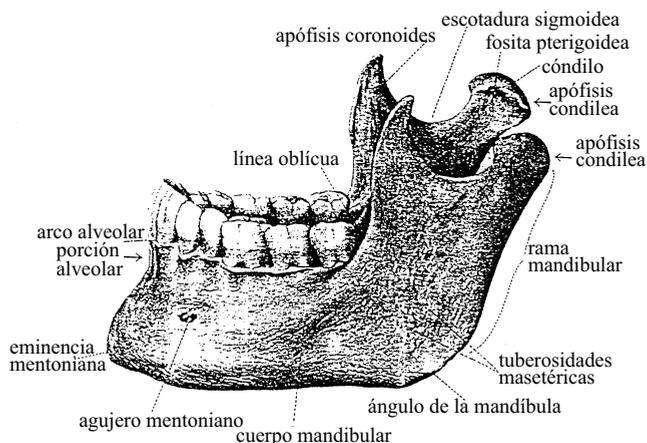


Figure 2: Mandíbula humana: vista lateral.

El espacio alveolar y los dientes están localizados en la parte superior de la mandíbula. El cuerpo mandibular se extiende hacia atrás en dirección descendente desde el ángulo mandibular y formando la rama de la mandíbula en dirección ascendente. La rama se divide en dos partes: la parte coronoidea y, una de las partes más importante de la mandíbula, el cóndilo (véanse las Figuras 1 y 2).

La estructura histológica de la mandíbula, como sucede en la mayoría de los huesos del cuerpo humano, se compone de dos partes muy distintas: una parte exterior de un espesor muy pequeño (1-2 mm) que es muy fibrosa, compacta y dura, llamada *hueso cortical*, y una parte interna que es muy porosa llamada *hueso esponjoso o trabecular* (Figura 3). Supondremos siempre que los desplazamientos y deformaciones que se inducen en el hueso son “pequeñas” y que su comportamiento mecánico es elástico: el cuerpo recupera su forma original una vez cesan las fuerzas que provocan la deformación. Esta hipótesis implica que no se consideran posibles efectos de plastificación (deformaciones permanentes) que eventualmente pudieran producirse, si bien éstas se asocian a esfuerzos muy prolongados en el tiempo, que no son los considerados aquí.

	$E(N/mm^2)$	ν	$\rho(Kg/m^3)$
<i>Hueso cortical</i>	$1,37e + 04$	0,3	1.740
<i>Hueso esponjoso</i>	$7,93e + 03$	0,3	700

Tabla 1: Propiedades elásticas del hueso mandibular.

Las propiedades elásticas de un sólido se caracterizan, en general, por 21 coeficientes de elasticidad que traducen las propiedades mecánicas del material en las diferentes direcciones. Cuando estos 21 coeficientes son distintos el cuerpo

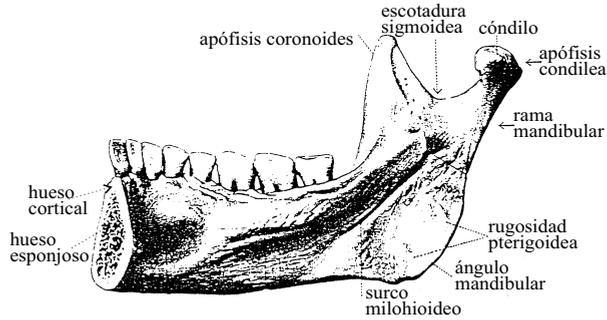


Figure 3: Mandíbula humana: vista de los huesos cortical y esponjoso.

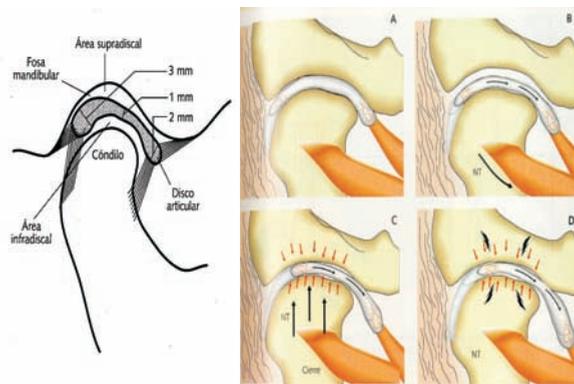


Figure 4: Esquema de la articulación temporo-mandibular (ATM).

se dice *anisotrópico*. La especial estructura macro y microscópica de muchos materiales hace que sus propiedades elásticas se repitan en algunas direcciones, lo que se traduce en la repetición de sus coeficientes de elasticidad. Es el caso, por ejemplo, de un tronco de árbol del que se dice que tiene anisotropía cilíndrica. Un caso muy especial es el de los sólidos cuyas propiedades elásticas son las mismas en todas direcciones. Se llaman *isotrópicos* y todos sus coeficientes de elasticidad pueden definirse a partir de dos constantes: el módulo de Young (E) y el coeficiente de Poisson (ν). Aunque existen algunos estudios en los que se considera que el hueso mandibular es anisotrópico ([32]), en la mayoría de los trabajos publicados se supone que tanto el hueso cortical como esponjoso son isotrópicos, lógicamente con propiedades distintas el uno del otro. En la Tabla 1 reflejamos los valores utilizados para el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y la densidad de ambos (véase, por ejemplo, [5, 12]).

El cóndilo es la parte de la mandíbula que se articula con el cráneo y donde se produce el movimiento de la boca (Figura 4). La longitud mediolateral del cóndilo es de 15-20 mm y el ancho frontal de 8-10 mm. La superficie de la articulación del cóndilo es muy convexa en su dirección frontal pero no en la mediolateral. La zona de unión con el cráneo se llama articulación temporomandibular (ATM) y constituye una de las articulaciones más complejas del cuerpo humano. El movimiento del cóndilo dentro de la fosa glenoidea es muy complejo, como complejos son los movimientos que los músculos pueden imprimir a la mandíbula (en la sección 4 se describen detalladamente los más importantes de estos músculos). Pero es importante destacar que dichos movimientos están restringidos por el disco articular que le separa del maxilar y que nunca puede penetrar (salvo por accidente traumático).

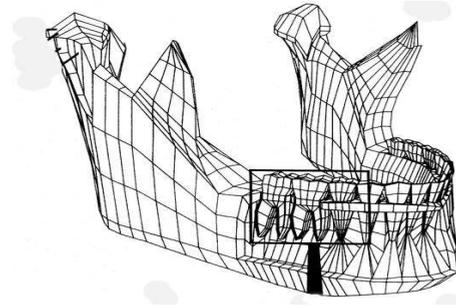


Figure 5: Malla “manual” (Korioth el alt, 1992)

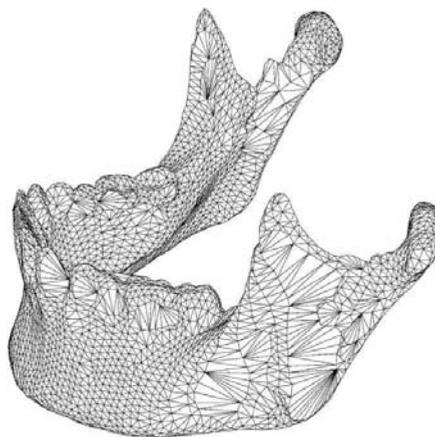


Figure 6: Malla digitalizada inicial (Kappelman y Kirk, 1997).

3 Modelo geométrico de la mandíbula

Tanto para su representación geométrica como para los cálculos previstos es imprescindible contar con una buena representación de la geometría de la mandíbula. El método más utilizado consiste en descomponer la mandíbula (en general, la pieza o dominio que se quiere representar) en subdominios “pequeños” llamados *elementos finitos*. Los elementos finitos más usados son tetraedros y hexaedros. El conjunto de los elementos finitos se llama una *malla* o *mallado*.

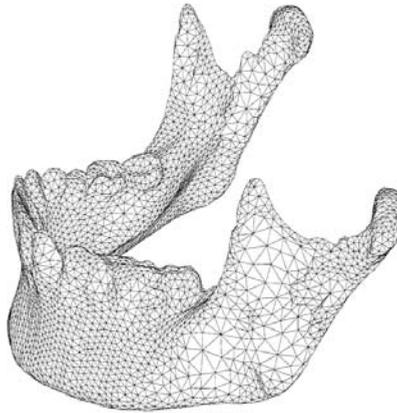


Figure 7: Malla regularizada completa (Viaño et al, 1998).

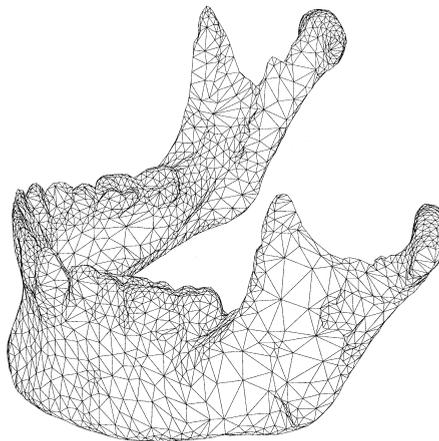


Figure 8: Malla regularizada diezmada (Viaño et al, 1998).

Debido a la complicada geometría de la mandíbula, la generación de un “buen” mallado de elementos finitos tetraédricos no es una tarea sencilla. Un “buen” mallado no sólo debe representar de forma precisa la geometría de la mandíbula sino que debe tener “buenas” propiedades para que los cálculos numéricos posteriores sean fiables. Para ello es imprescindible que los tetraedros no sean degenerados o sea que sus caras sean triángulos “lo más equiláteros posible”.

Es importante también que haya un número suficiente de tetraedros porque de ello depende la calidad de nuestra simulación. Por tanto deben ser suficientemente pequeños, pero, a su vez, debemos mantenernos en un número de nodos (vértices) razonable. En efecto, todas las simulaciones se reducen al final a resolver un número importante de sistemas lineales cuyo número de ecuaciones (e incógnitas) es igual a 3 veces el número de nodos (se calculan los desplazamientos en las tres direcciones de cada nodo). Un número muy elevado de nodos implicaría un tiempo de cálculo excesivo para la resolución de los sistemas lineales (nótese que estamos hablando de decenas o centenas de sistemas con decenas de miles de incógnitas cada uno).

En los trabajos pioneros de simulación en mandíbulas (hace 15 años), los mallados se generaban “manualmente” y, en algunos casos, con el apoyo de imágenes de radiografía y/o de escáner ([11, 21, 32, 35, 45, 46, 47]). En la figura 5 mostramos uno de los mejores mallados “manuales” que hemos encontrado. Aparece en el trabajo [32] de 1992 y tiene 5.580 nodos.

Pocos años más tarde, diferentes técnicas de iluminación con láser han permitido digitalizar la superficie de la mandíbula generando una nube de puntos y sus correspondientes coordenadas. Utilizando algoritmos de geometría computacional se genera una malla de triángulos que representa dicha superficie con enorme precisión. En la etapa inicial de nuestro proyecto, el mallado superficial fue obtenido de los datos proporcionados por J. Kappelman y C. Kirk (Departamento de Antropología, Universidad de Austin, Texas, EEUU). Fue creado usando un escáner con tecnología láser (modelo Digibotics II 3D) y el software Autodesk 3D Studios. Tiene 12.634 triángulos y 6.319 vértices (Figura 6).

Como puede observarse esta malla tiene triángulos “degenerados” (lados de proporciones muy distintas) en la rama y en el ángulo de la mandíbula. Estos triángulos, no deseables para el cálculo, fueron suprimidos mediante un proceso de regularización con sofisticadas técnicas de interpolación, utilizando software desarrollado por M. Castro (Universidad de Málaga, España) (véase [6]). El resultado final es la malla de la Figura 7. Tiene 13.019 triángulos con 6.585 vértices.

Para reducir el tiempo de cálculo, a partir de este mallado final, se ha obtenido otro más pobre o “diezmado”, formado por 7.210 triángulos con 3.819 nodos (Figura 8). El proceso de *decimación* del mallado se basa en la supresión de nodos y triángulos respetando lo más posible la geometría original, en el sentido propio del término “diezmar”: castigar (suprimir) a uno de cada diez soldados (nodos) posibles culpables de una tropa. En los algoritmos prácticos los subconjuntos no son necesariamente de 10 nodos (ver [44]).

El último paso es la generación del mallado en tetraedros del dominio tridimensional encerrado por esta superficie “triangular a trozos”. Se ha utilizado el algoritmo de mallado automático del programa *Simal* (Simulog, Francia). El resultado final es un mallado preciso que proporciona una muy buena representación geométrica de la estructura mandibular. Consta de 30.119 tetraedros con 7.073 vértices. Sin embargo, una de sus mayores desventajas es que en él no se distinguen las diferentes partes de la mandíbula tales como los dientes, el hueso cortical o el trabecular. Para los cálculos iniciales, hemos aproximado la zona de hueso cortical por el conjunto de tetraedros con algún vértice en la superficie.



Figure 9: Nube de puntos obtenida por digitalización (Viaño et al., 1999).

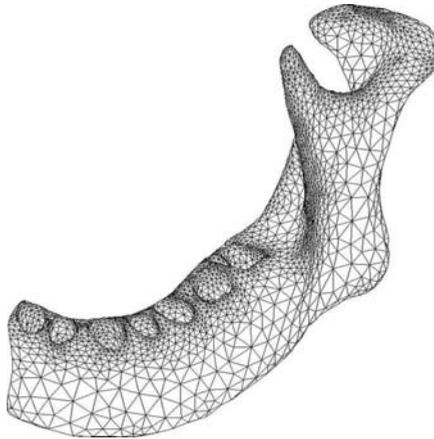


Figure 10: Malla semi-mandíbula edéntula (Viaño et al., 2000).

En las fases siguientes del trabajo, esta malla fue mejorada considerablemente mediante la digitalización láser de una mandíbula humana (edéntula) y todas sus piezas dentales (con raíces y coronas separadamente), reproducidas a gran escala por los odontólogos del equipo. Este trabajo fue realizado por investigadores del Centro de Investigación y Servicios (CIS) (Ferrol, A Coruña, España). En la Figura 9 se puede ver la nube de 52.109 puntos obtenida para la mitad de la mandíbula edéntula.

Una de las mayores dificultades para generar los mallados finales fue “hacer coincidir” las mallas superficiales en las zonas comunes de los dientes (raíces) y la mandíbula (alveolos), así como el *enriquecimiento* con elementos suplementarios en las zonas de mayores curvaturas (zona de encías, por ejemplo). La solución a este problema vino de la mano de los expertos del grupo GAMMA del Institut Nationale de Recherche en Informatique et Automatique, INRIA (París, Francia, <http://www.inria.fr/recherche/equipes/gamma.fr.html>)[24].

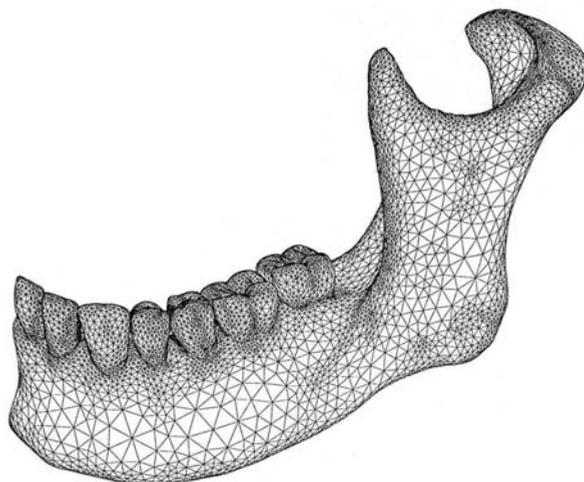


Figure 11: Malla semi-mandíbula con dientes (Viaño et al, 2000).

Tras este excitante proceso de interacción entre dispositivos ópticos, geometría computacional y visualización gráfica concluimos un mallado tridimensional de gran precisión, del conjunto mandíbula-dientes. Las mallas tridimensionales generadas pueden verse en las Figuras 10 y 11. Contienen respectivamente 41.825 tetraedros con 9.958 vértices y 324.782 tetraedros con 61.391 vértices. Por tanto, la mandíbula completa con las 14 piezas dentales tiene 649.564 tetraedros con 122.782 vértices aproximadamente (porque los vértices comunes a ambas mitades sólo se deben contar una vez). En los cálculos habituales hemos utilizado una versión diezmada de la malla que se muestra en la Figura 12. Tiene 122.314 tetraedros con 24.395 vértices (lo que supone resolver sistemas lineales con 73.185 incógnitas).

Para finalizar esta sección, indicamos el sistema de referencia y los planos

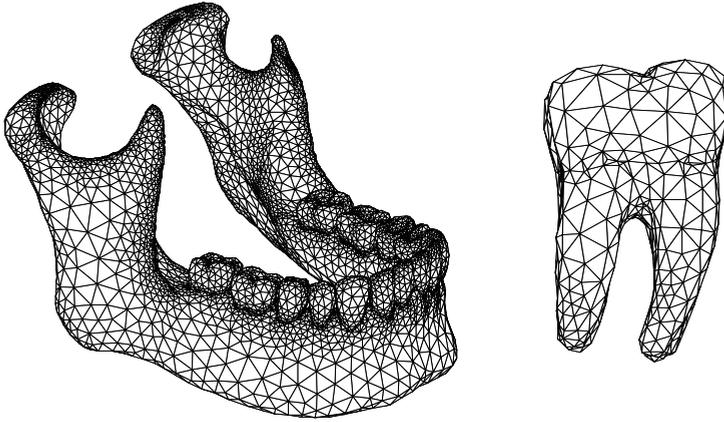


Figure 12: Malla diezmada de la mandíbula con dientes y malla del primer molar derecho (Viaño et al., 2000).

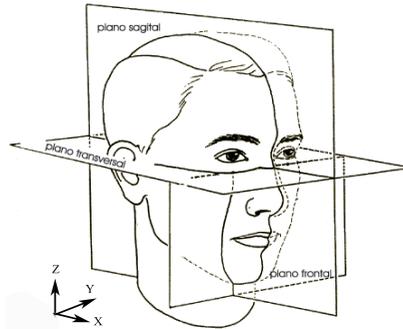


Figure 13: Sistema de coordenadas y planos principales.

principales de la mandíbula que utilizamos para establecer la dirección de las fuerzas que actúan en la mandíbula y en sus piezas (Figura 13).

4 Simulación de una mordida

En esta sección, describimos algunos resultados obtenidos en la simulación numérica de una fase de mordida (véase [50] para más detalles). El objetivo del cálculo es aproximar el estado de tensiones y deformaciones que se producen en el hueso mandibular durante la mordida con el primer molar derecho de un objeto rígido (una avellana, por ejemplo). El equipo médico propone este estudio porque se trata de una situación en la que se somete a la mandíbula a un esfuerzo notablemente superior a otras situaciones de mordida o masticación.

La energía necesaria para mover la mandíbula la proporcionan los músculos

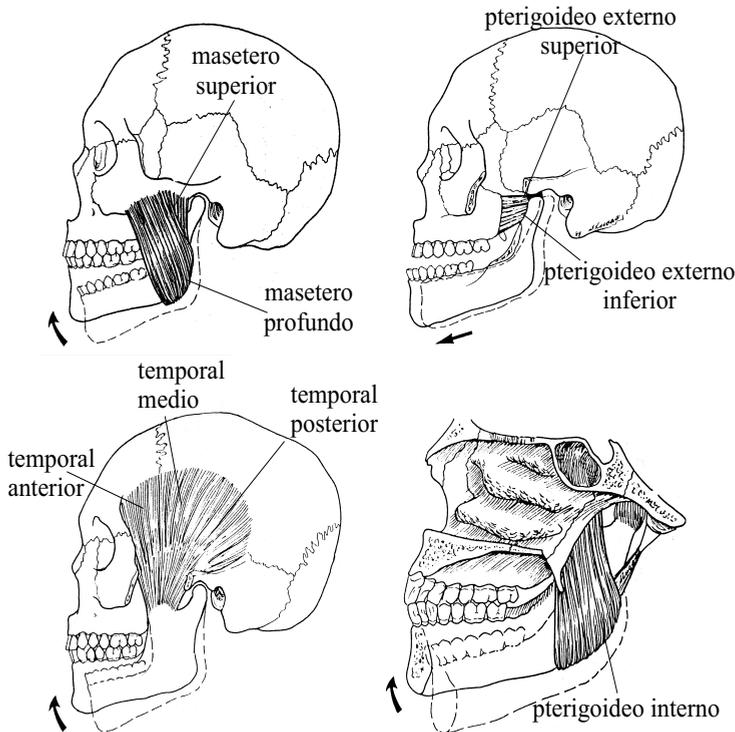


Figure 14: Músculos de la masticación con sus zonas de actuación.

de la masticación. En la Figura 14 se muestran los principales de estos músculos y se ilustra el movimiento que provocan cuando actúan. En la Tabla 2, se describen el vector de dirección (X, Y, Z) y la intensidad de las fuerzas realizadas por los músculos que actúan de forma apreciable en la mordida con el primer molar derecho. Especial importancia para el cálculo tiene la aproximación del área de actuación de dicha fuerza, es decir, el área de inserción del músculo, cuya información es facilitada por el equipo médico.

Músculo	Intensidad(N)	X	Y	Z
Masetero profundo	81.60	-0.546	0.358	0.758
Masetero superior	190.40	-0.207	-0.419	0.885
Pterigoideo interno	174.80	0.486	-0.372	0.791
Pterigoideo externo	66.90	0.630	-0.757	-0.174
Temporal anterior	158.00	-0.149	-0.044	0.988
Temporal medio	95.60	-0.221	0.500	0.837
Temporal posterior	75.60	-0.208	0.855	0.474

Tabla 2: Fuerzas de los músculos en una mordida con el primer molar derecho.

Durante la masticación y la mordida, la boca se deforma siguiendo su eje longitudinal en el área de mordida y se producen diferentes cargas en los cóndilos debido a efectos rotacionales de la rama mandibular. Así, la distribución de tensiones en el cóndilo difiere según la tarea de masticación considerada (y, por tanto, según los músculos que entran en acción). Para determinar dónde se carga el cóndilo en cada tarea, es necesario calcular estas tensiones en la superficie completa. El método de los elementos finitos nos proporciona una solución a este problema en el que intervienen, de manera decisiva, tanto las cargas como las formas y las propiedades elásticas de sus componentes. Hemos utilizado los mismos datos que el ya citado estudio [32], con la malla de la Figura 5, publicado en 1992. Nuestros resultados corroboraron y completaron los de dicha referencia, proporcionando una validación adicional de nuestro programa de cálculo.

Denotamos por $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el dominio ocupado por la mandíbula y por $\Gamma = \partial\Omega$ su superficie exterior. Sea $\Gamma_F \subset \Gamma$ la unión de las partes de la superficie donde actúan los diferentes músculos y $\mathbf{g} = (g_i) = (g_1, g_2, g_3)$ la densidad de las fuerzas ejercidas por dichos músculos en Γ_F (Tabla 2).

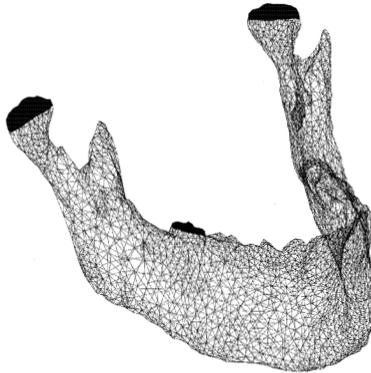


Figure 15: Zonas de contacto en la mordida.

Debido a las características de la ATM y a la rigidez del hueso temporal, hemos utilizado una condición de contacto unilateral sin rozamiento en la parte superior del cóndilo izquierdo (denotada por Γ_C^{cond}). Esto significa que el contacto se puede producir pero no hay penetración (el desplazamiento está restringido por la fosa glenoidea), y que los desplazamientos en las direcciones tangenciales se producen libremente (sin tensiones de rozamiento). Esta es la clásica condición de contacto sin rozamiento en elasticidad conocida como *condición de Signorini*. Suponemos la misma condición de contacto del molar con el objeto mordido y denotamos por Γ_C^{dient} la parte superior de dicho molar que entra o puede entrar en contacto con el objeto. Así pues, $\Gamma_C := \Gamma_C^{cond} \cup \Gamma_C^{dient}$ representa la zona superficial donde el contacto se puede producir, es decir, donde la mandíbula puede presionar o se puede separar del cuerpo rígido (el

objeto mordido o la fosa glenoidea). Por otra parte, denotamos por $\Gamma_D = \Gamma_D^{cond}$ la parte de la frontera de Ω en la que suponemos que no hay desplazamiento: en nuestro caso, Γ_D es la superficie superior del cóndilo derecho, dado que es conocido que, durante la mordida, este permanece en contacto permanente con el maxilar. En la Figura 15 se muestran las 3 zonas de contacto.

En cuanto al modelo, admitimos el echo evidente de que la deformación producida en la mandíbula por efecto de su propio peso es despreciable frente a las deformaciones provocadas por las fuerzas de mordida. Esto es equivalente a decir que el peso de la mandíbula no tiene influencia en la deformación (si así fuese, la fuerza del peso habría que “sumarla” a la de los músculos). Finalmente, ponemos de manifiesto que la mordida se produce tan lentamente que no existen efectos de inercia (relacionados con la aceleración) y el proceso es estacionario: no hay variaciones importantes de las fuerzas en el intervalo de tiempo considerado y se trata de calcular el estado de equilibrio final.

Para cada punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, denotamos por $u_i(\mathbf{x})$ el desplazamiento de este punto en la dirección Ox_i , de modo que $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_i(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^3$ es el vector desplazamiento de este punto. Esto significa que el punto \mathbf{x} antes de la deformación ocupará la posición $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Asimismo, denotamos por $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$, $1 \leq i, j \leq 3$, la (i, j) -ésima componente del tensor de tensiones de Cauchy en el punto \mathbf{x} del sólido $\overline{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\sigma_{ij}(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}_S^9 := \{ \boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij}) \in \mathbb{R}^9 : \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \}.$$

La cantidad $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ representa la j -ésima componente de la fuerza ejercida, en el punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, por el volumen del sólido situado a un lado de un plano perpendicular al eje Ox_i , sobre la otra parte del mismo sólido. Dado que hemos supuesto que el hueso mandibular es elástico, homogéneo e isótropo, se verifica la siguiente ley de Hooke (véase [9]):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) \right) \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}),$$

para $1 \leq i, j \leq 3$, donde $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$ es la (i, j) -ésima componente del tensor de deformaciones linealizado:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y δ_{ij} representa el símbolo de Kronecker.

En estas condiciones, el problema anterior se puede formular en términos del clásico problema de contacto de Signorini en elasticidad, que ha sido estudiado, desde diferentes puntos de vista, en muchos trabajos de mecánica o matemática aplicada (véase por ejemplo [9, 17]). Sea $\mathbf{n} = (n_i) = (n_1, n_2, n_3)$ el vector unitario exterior y normal a Γ . A partir de las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de equilibrio mecánico, el problema descrito se escribe matemáticamente bajo la forma del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas

parciales y condiciones de frontera (utilizamos el convenio de la suma de índices repetidos):

$$-\partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j = g_i \text{ en } \Gamma_F, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u_n = u_i n_i \leq 0, \quad \sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \leq 0, \quad u_n \sigma_n = 0, \\ \sigma_{\tau i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \end{aligned} \right\} \text{ en } \Gamma_C. \quad (4)$$

Sea V el espacio de desplazamientos admisibles, definido por

$$V = \{\mathbf{v} = (v_i) \in [L^2(\Omega)]^3 : \partial_j v_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\},$$

donde $L^2(\Omega)$ designa el conocido espacio de (las clases de) funciones de cuadrado integrable en Ω y las derivadas parciales se consideran en el sentido de las distribuciones introducido en 1944 por el matemático francés Laurent Schwartz (1915-2002).

Denotamos por $a(\cdot, \cdot)$ la siguiente forma bilineal:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \text{para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

y la forma lineal:

$$L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} g_i v_i d\gamma, \quad \text{para todo } \mathbf{v} = (v_i) \in V.$$

La condición (4) implica la siguiente definición del convexo de desplazamientos admisibles:

$$K = \{\mathbf{v} \in V; v_n = v_i n_i \leq 0 \text{ c.p.d. en } \Gamma_C\}. \quad (5)$$

K es un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de V . El problema (1)-(4) admite la siguiente formulación variacional que expresa la igualdad del trabajo de las fuerzas aplicadas y la energía potencial (véase [17] para más detalles):

$$\mathbf{u} \in K, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in K. \quad (6)$$

Puesto que $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal V -elíptica y continua y $L(\cdot)$ es una formula lineal continua, se puede aplicar el Lema de Lax-Milgran para deducir que el problema (6)–de dimensión infinita– tiene una única solución ([17, 25]).

Nuestro objetivo es calcular una aproximación de dicha solución y, de esta manera, simular numéricamente los efectos mecánicos de la mordida. El primer paso consiste en aproximar la inecuación variacional (6) por un problema de dimensión finita, siguiendo las ideas de [25, 26, 28, 48, 49].

El conjunto $\bar{\Omega}$ se aproxima por el conjunto poliédrico $\bar{\Omega}_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$, siendo \mathcal{T}_h una malla tipo elementos finitos compuesta por tetraedros y compatible con la partición $\Gamma = \Gamma_C \cup \Gamma_D \cup \Gamma_F$ (véase [8]).

Definimos el siguiente espacio de funciones continuas y polinómicas en cada tetraedro:

$$V_h = \{ \mathbf{v}_h \in [C^0(\overline{\Omega}_h)]^3; \mathbf{v}_h|_T \in [P_1(T)]^3, \text{ para todo } T \in \mathcal{T}_h, \\ \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D^h \},$$

donde Γ_D^h es la parte de la frontera de Ω_h que aproxima a Γ_D y $P_1(T)$ es el espacio de funciones polinómicas en las variables x_1, x_2 y x_3 con grado total menor o igual que 1 en T .

El convexo de desplazamientos admisibles K se aproxima por

$$K_h = \{ \mathbf{v}_h \in V_h : v_{hn} \leq 0 \text{ en } \Gamma_C^h \},$$

siendo Γ_C^h la parte de la frontera de Ω_h que aproxima a Γ_C . También denotamos por Γ_F^h la aproximación de Γ_F .

Por tanto, el problema variacional (6) se aproxima en la forma:

$$\mathbf{u}_h \in K_h, \quad \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}(\mathbf{u}_h) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega_h} f_i(v_{ih} - u_{ih}) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Gamma_F^h} g_i(v_{ih} - u_{ih}) d\gamma, \quad \text{para todo } \mathbf{v}_h \in K_h. \quad (7)$$

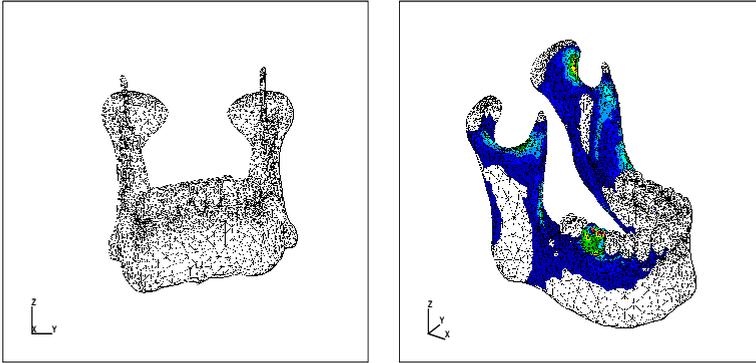


Figure 16: Mordida: deformación y zonas de mayor tensión.

El problema (7) es un problema de dimensión finita (igual a 3 veces el número de nodos del mallado) equivalente a un problema de minimización de un funcional cuadrático sobre un conjunto convexo cerrado. Tiene por tanto una y una sola solución. Para aproximar su solución, se utilizó un algoritmo de optimización (búsqueda de mínimos) de tipo penalización-dualidad introducido en [2] y estudiado en [48, 49].

Los desplazamientos se suelen representar visualmente mostrando la malla deformada, es decir, la malla que se obtiene de la inicial sumando a las coordenadas de sus vértices las de su correspondiente vector de desplazamiento. En este caso, el campo de desplazamientos resultante es un movimiento vertical

de la parte izquierda de la mandíbula y una compresión de su parte derecha, que produce una rotación como puede observarse en la Figura 16 (lado izquierdo). Estos resultados coinciden con los obtenidos en [32].

En ingeniería existen diferentes formas de presentar gráficamente el campo de tensiones $\sigma_{ij}(\mathbf{u}_h)$. Uno de los más utilizados es el criterio de von Mises, introducido en 1913 por Richard von Mises (n. Viena-1883, m. Nueva York-1953). Con este criterio, también conocido como criterio de la máxima energía de distorsión o teoría de Maxwell-Huber-Hencky-von Mises, se representa gráficamente (relleno de color, curvas de nivel,...) la función de la energía de distorsión asociada a los cambios de forma en el material (en contraposición a otros que utilizan la energía asociada a los cambios de volumen). Matemáticamente, la energía de distorsión es el cuadrado de la norma von Mises del tensor de tensiones ([30],[34]):

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\sigma}^D\|_2,$$

donde $\|\cdot\|_2$ designa la norma euclídea en \mathbb{R}^9 y $\boldsymbol{\sigma}^D$ denota el tensor desviador $\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\mathbf{I}$. Por tanto, la energía de distorsión toma la siguiente expresión final:

$$\mathcal{E} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{VM}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{23}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33}.$$

En la Figura 16 (derecha) podemos ver que las principales áreas de acumulación de tensiones están localizadas en el cóndilo izquierdo, debido al movimiento rotacional generado por el contacto con el objeto mordido. Las áreas de tensión restantes se producen debido a la acción directa de la fuerza de los músculos.

5 Simulación de un implante dental

Los implantes endoóseos constituyen, hoy en día, un método de eficacia probada para corregir deficiencias dentarias. El implante, que debe estar compuesto de un material biomédicamente aceptable (esto es, que no provoque problemas de oxidación, infección, ...), se inserta mediante una rosca en el hueso de la mandíbula y se recubre con una corona de material cerámico que hace las funciones de diente (Figura 17). En este caso, nuestro objetivo es determinar los efectos de la transmisión de tensiones al resto de la mandíbula al ejercer diversas fuerzas sobre el implante (simulando, por ejemplo, tareas de mordida).

Dado que se produce rápidamente la oseointegración del implante con la mandíbula, se ha considerado que la unión del implante con el hueso es perfecta y que no existe ningún fenómeno de separación o contacto. Esto nos permite realizar una simulación básica mediante un clásico problema de elasticidad tridimensional, en un dominio que comprende el implante y la porción de hueso de la mandíbula en el entorno del mismo.

En la Figura 18 mostramos los mallados del implante utilizado, que se ha supuesto formado por una aleación de níquel y titanio, y de una porción de

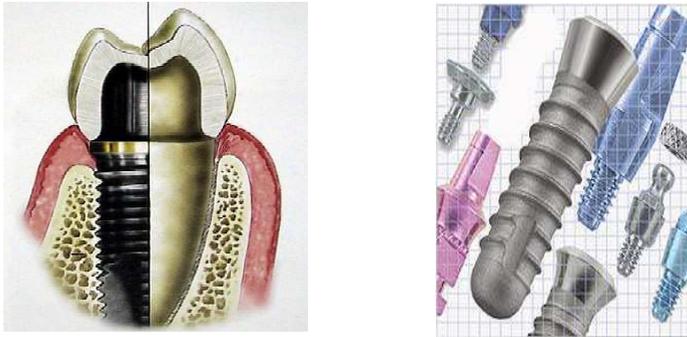


Figure 17: Esquema de un implante dental y tornillo endoóseo con distintas roscas para la corona

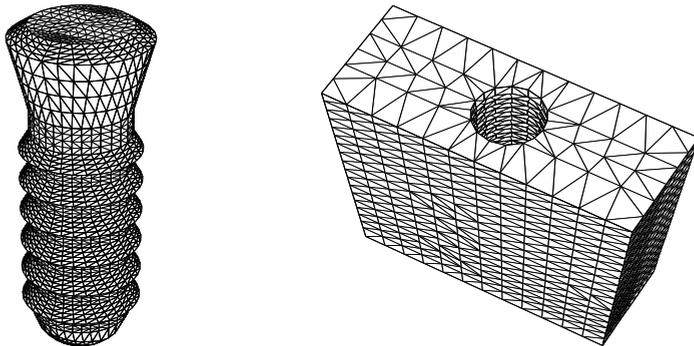


Figure 18: Mallas del tornillo de un implante y la parte del hueso mandibular en el que se inserta.

hueso mandibular en el que se supone insertado. En la Figura 19 se muestra un corte vertical y el campo de tensiones en el complejo implante-mandíbula en el caso de fuerzas verticales (dibujo izquierdo) y oblicuas –actuando de izquierda a derecha– (dibujo derecho), aplicadas en la cara superior del implante (véase [23] para más detalles). En ambos casos, las zonas de mayor tensión están localizadas en la superficie externa del hueso que está en contacto con la cabeza del tornillo. En el primer caso, como es lógico, aparecen distribuidas simétricamente alrededor del implante, mientras que en el segundo la máxima tensión se produce en la parte de hueso presionada por el tornillo.

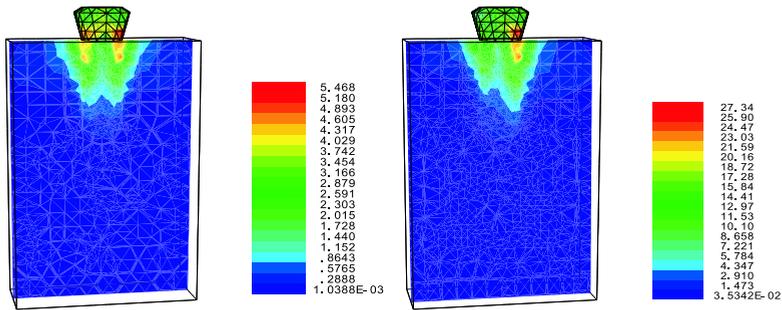


Figure 19: Tensiones en el entorno de un implante.

6 Localización de las fracturas mandibulares

Las fracturas mandibulares son muy usuales, representando un 10-25% de las fracturas faciales. Según su localización, las podemos clasificar en los siguientes grupos ([39], véase la Figura 20): 1. fracturas de la región de la sínfisis, entre los caninos (14%), 2. fracturas de la línea canina (1%), 3. fracturas del cuerpo de la mandíbula, entre el canino y el ángulo de la mandíbula (21%), 4. fracturas de la región alveolar (3%), 5. fracturas del ángulo de la mandíbula en la región del tercer molar (20%), 6. fracturas de la rama mandibular, entre el ángulo de la mandíbula y la fosa sigmoidea (3%), 7. fracturas del proceso coronoideo (2%) y 8. fracturas de cóndilo (36%).

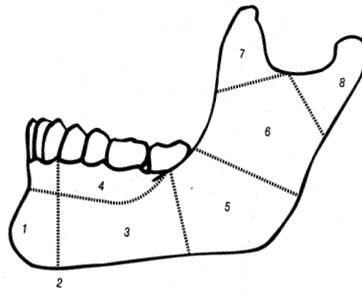


Figure 20: Fracturas de mandíbula más usuales.

Es importante destacar que las fracturas se pueden producir, bien por aplicación directa de la fuerza o bien por las tensiones inducidas en otra área alejada (véase la Figura 21, lado izquierdo). Se llaman *fracturas directas* o *indirectas*, respectivamente.

El objetivo de esta sección es localizar las zonas de máxima tensión (por tanto, susceptibles de fracturarse), asociadas a la deformación producida en la mandíbula al ser impactada en la región Γ_F por un objeto a gran velocidad. La fuerza por unidad de superficie en cada punto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_F$ y en

cada instante t es conocida y denotada por $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = (g_i(\mathbf{x}, t))$. Para simular el impacto, supondremos una densidad de fuerza exponencialmente creciente durante un intervalo de tiempo muy corto, denotado por $[0, T]$, $T > 0$.

En los ejemplos hemos tomado un fuerza de la forma (8), donde $\mathbf{g}_0 \in \mathbb{R}^3$ es la máxima intensidad del impacto alcanzada en el instante $t_0 > 0$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} e^{10(t-t_0)} \mathbf{g}_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t > t_0, \end{cases} \quad (8)$$

No consideraremos la presencia de tejidos blandos (como pueden ser los músculos o ligamentos) y, como en el caso anterior, la mandíbula se supondrá un cuerpo elástico. En este caso, la variación de las cargas es muy rápida en el tiempo y los efectos de inercia asociados a la aceleración deben ser considerados. Por ello, es preciso utilizar un modelo elastodinámico (desplazamientos y tensiones dependen del tiempo t) que, teniendo en cuenta las condiciones de frontera (cóndilos) se escribe en la forma siguiente ([17, 40]):

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \mathbf{u} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_i(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que :} \\ & \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \partial_j \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad 1 \leq i \leq 3, \\ & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Gamma_D \times [0, T], \\ & \sigma_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) n_j(\mathbf{x}) = g_i(\mathbf{x}, t), \quad \text{en } \Gamma_F \times [0, T], \quad 1 \leq i \leq 3, \\ & u_n(\mathbf{x}, t) \leq 0, \sigma_n(\mathbf{x}, t) \leq 0, u_n(\mathbf{x}, t) \sigma_n(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{en } \Gamma_C \times [0, T], \\ & \sigma_\tau(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{en } \Gamma_C \times [0, T], \\ & \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \text{en } \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Aplicando una fórmula de Green y usando las condiciones frontera de (9), se obtiene la siguiente formulación variacional:

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } \mathbf{u} : t \in [0, T] \rightarrow \mathbf{u}(t) \in K \text{ tal que} \\ & \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0) = \mathbf{0}, \\ & \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(t) (v_i - u_i(t)) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}(t)) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) d\mathbf{x} \\ & \geq \int_{\Omega} f_i(t) (v_i - u_i(t)) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} g_i(t) (v_i - u_i(t)) d\gamma := L(t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)), \end{aligned} \quad (10)$$

para todo $\mathbf{v} = (v_i) \in K$ y para casi todo $t \in (0, T)$.

Observamos que la formulación anterior corresponde a una inecuación variacional de segundo orden en tiempo. La existencia y unicidad de solución de (10) permanece como un problema abierto. Sin embargo, se han escrito varios trabajos sobre su resolución numérica. Hemos seguido las ideas presentadas en [41] para obtener un esquema completamente discretizado que nos permitiera realizar diferentes simulaciones numéricas.

La discretización de (10) se realiza en dos pasos. En primer lugar, se aproxima la variable espacial como en la sección anterior. En segundo lugar,

para discretizar las derivadas de orden 2 en tiempo, de acuerdo a [1, 41, 43], se ha propuesto un esquema numérico basado en el método de Newmark. Para simplificar la escritura, hemos eliminado el subíndice h en la descripción del problema. Dada una discretización en tiempo $t_m = m\Delta t$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, y denotando por u^m la aproximación calculada para $u(t_m)$ y $L^m := L(t_m)$, el problema completamente discretizado queda de la forma siguiente:

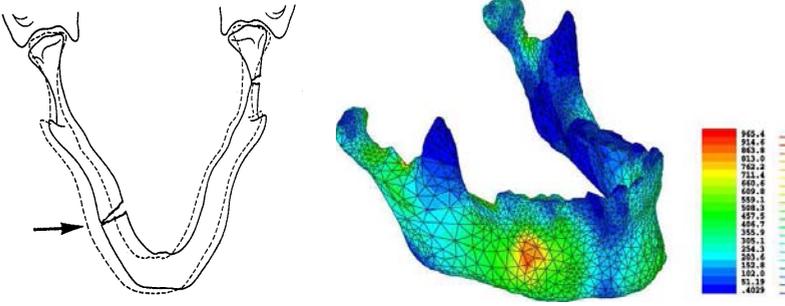


Figure 21: Impacto en el cuerpo mandibular: norma von Mises de las tensiones después de 1 seg.

$$\begin{aligned} & \text{Dados } \mathbf{u}^0, \mathbf{u}^1 \in K, \text{ para } m = 0, 1, \dots, M - 2, \\ & \text{Encontrar } \mathbf{u}^{m+2} \in K \text{ tal que:} \\ & \bar{a}(\mathbf{u}^{m+2}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^{m+2}) \geq \bar{L}(\mathbf{v} - \mathbf{u}^{m+2}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in K, \end{aligned} \quad (11)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \frac{1}{4} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ \bar{L}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2} \langle \sigma_n(\mathbf{u}^{m+1}), v_n \rangle + \frac{1}{4} \langle \sigma_n(\mathbf{u}^m), v_n \rangle + \frac{1}{4} L^{m+2}(\mathbf{v}) \\ &+ \frac{1}{2} L^{m+1}(\mathbf{v}) + \frac{1}{4} L^m(\mathbf{v}) - \frac{1}{2} a(\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v}) - \frac{1}{4} a(\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) \\ &- \left(\frac{\rho}{\Delta t^2} \mathbf{u}^m, \mathbf{v} \right) + \left(\frac{2\rho}{\Delta t^2} \mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v} \right), \quad \mathbf{v} \in V, \end{aligned}$$

donde (\cdot, \cdot) y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotan los productos escalares en $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Gamma_C)$.

Dado que $\rho/\Delta t^2 > 0$ y $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica, la forma bilineal \bar{a} es simétrica y V -elíptica. Por tanto, el problema anterior admite una única solución ([4, 25]).

Notamos que este problema discreto es una inecuación variacional elíptica de primera clase como la que describimos en la sección 4. Por tanto, podemos aplicar el mismo algoritmo de tipo penalización-dualidad en cada paso de tiempo.

El ejemplo que hemos simulado consiste en un impacto lateral en la dirección normal al plano sagital (Figura 21, lado izquierdo). Nuestro objetivo es obtener las zonas de máxima tensión después del impacto ya que éstas son las zonas de posible fractura ([22, 51]).

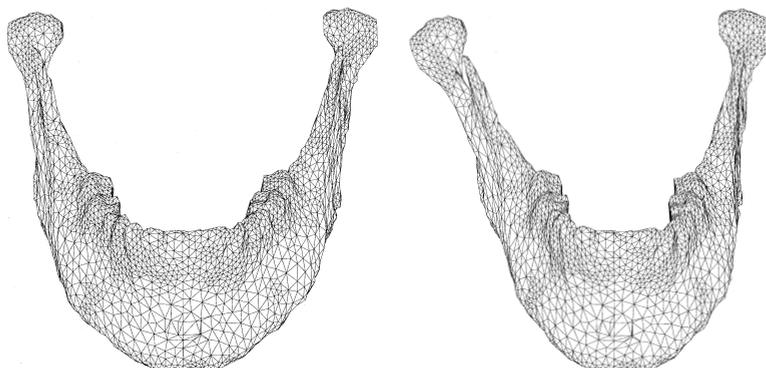


Figure 22: Impacto en el cuerpo mandibular: malla inicial y deformada 1 seg. después del impacto.

Hemos supuesto un área de impacto de tamaño 0.655 cm^2 en el cuerpo mandibular derecho y usado los datos $t_0 = 1$, $|\mathbf{g}_0| = 1000\text{ N/cm}^2$. Para el cálculo hemos elegido $T = 1$ seg. y $\Delta t = 0.01$ seg.

En la Figura 22, se pueden observar el mallado inicial y el deformado en el tiempo final. Además, en la Figura 21 (lado derecho) se muestran las zonas de mayor tensión. Como podemos observar, estas se ajustan a las observaciones experimentales (Figura 21, lado izquierdo) tanto en la zona condilar (fractura indirecta) como en la zona impactada (fractura directa).

7 Reducción de fracturas de mandíbula con miniplacas

Durante la última década el tratamiento de las fracturas mandibulares ha estado influenciado y modificado por diversos estudios experimentales. Tratando de encontrar una técnica de osteosíntesis que garantizara la curación de la fractura (reducción) sin compresión intermaxilar, la técnica de osteosíntesis con miniplacas corticales de [36] fue modificada, mejorada y convertida en un método clínico aplicable por Champy y sus colaboradores ([7]). La idea del método es asegurar la estabilidad de la mandíbula fracturada mediante la aplicación de las llamadas miniplacas de osteosíntesis (miniplacas de titanio muy delgadas que se fijan con tornillos monocorticales, es decir, que se atornillan al hueso cortical y, por tanto, son de muy poca longitud). En la Figura 23 se muestra el proceso de estabilización. En nuestro estudio, suponemos que la fijación de los tornillos a las miniplacas, y de estas a la mandíbula, es perfecta (lo que permite identificar los puntos de engarce respectivos).

Nuevamente, suponemos un comportamiento elástico lineal para las dos partes de la mandíbula fracturada y para las miniplacas. Además, aunque no es del todo realista, hemos supuesto en este primer estudio que no existe rozamiento entre las miniplacas y el hueso cortical ni entre las dos partes de la mandíbula fracturada, que tampoco se pueden interpenetrar mutuamente.

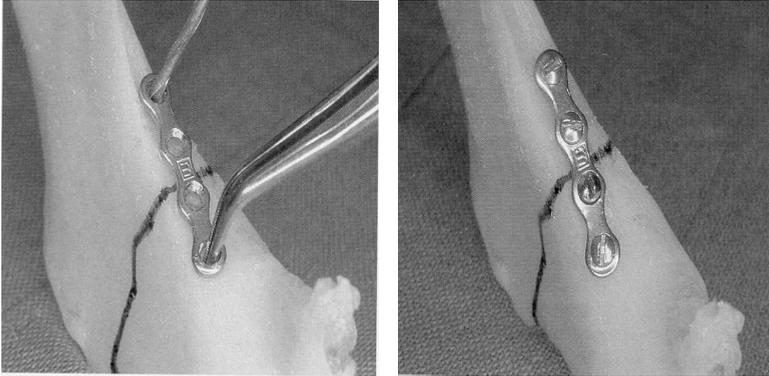


Figure 23: Fijación de una miniplaca con tornillos monocorticales.

Denotamos por Ω^1 y Ω^2 las dos partes de la mandíbula y por Ω^3 las miniplacas (véase la Figura 24). En el caso de dos miniplacas, $\Omega^3 = \Omega^{3,1} \cup \Omega^{3,2}$, donde $\Omega^{3,1}$ y $\Omega^{3,2}$ son los dominios de las dos miniplacas.

Sea Γ^k la frontera de Ω^k que suponemos dividida en cuatro partes disjuntas $\Gamma^k = \Gamma_D^k \cup \Gamma_F^k \cup (\bigcup_{l \neq k} \Gamma_C^{k,l})$, donde $\Gamma_C^{k,l}$ representa la zona de contacto entre los dominios Ω^k y Ω^l . Entonces, $\Gamma_C^{k,l} = \Gamma_C^{l,k}$, y denotamos por $\Gamma_C = \bigcup_{1 \leq k < l \leq 3} \Gamma_C^{k,l}$ la parte común de la frontera de contacto.

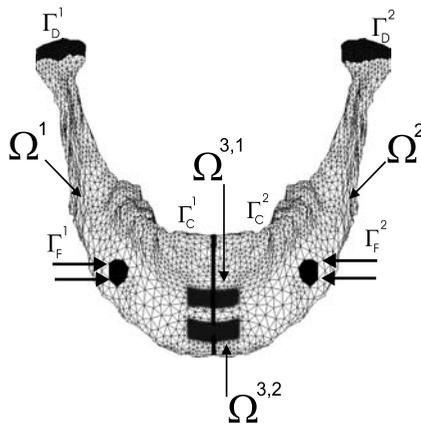


Figure 24: Miniplacas y áreas de acción de las fuerzas.

Sea Γ_D^k la parte de la frontera de Γ^k donde se conocen los desplazamientos. En este caso, el conjunto Γ_D^3 es vacío y los conjuntos Γ_D^1 y Γ_D^2 representan las superficies condilares en contacto con la fosa glenoidea (Figura 24) en las que, por las condiciones de carga, ahora suponemos que no se desplazan en ninguna dirección.

Denotamos por Γ_F^k la parte de la frontera de Γ^k donde las fuerzas externas

actúan en el sólido Ω^k . La densidad de fuerzas superficiales en Γ_F^k se denota por $\mathbf{g}^k = (g_i^k)$. En esta sección, éstas representan una presión constante actuando con la misma intensidad en ambos lados de la mandíbula. Son las únicas fuerzas consideradas, ya que las fuerzas de los músculos en reposo y el peso de la mandíbula son despreciables en cuanto a los efectos de deformación que pueden producir en el hueso.

Para una función $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotamos por ϕ^k su restricción a $\bar{\Omega}^k$, e identificamos ϕ y (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) . Entonces, sea $\mathbf{u}^k = (u_i^k)$ el campo de desplazamientos producido en Ω^k , y $\boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{u}^k) = (\sigma_{ij}^k(\mathbf{u}^k))_{i,j=1}^3$ su tensor de tensiones asociado. Además, denotamos por $\mathbf{n}^k = (n_i^k)$ el vector unitario normal y exterior a Γ^k .

El problema descrito hasta aquí admite una formulación matemática del mismo tipo que (1)-(3) y se escribe de la forma siguiente teniendo en cuenta que está compuesto por 3 materiales distintos: ([28, 3]):

$$\left. \begin{array}{ll} \partial_j \sigma_{ij}^k(\mathbf{u}^k) = 0, & 1 \leq i \leq 3, \quad \text{en } \Omega^k, \\ u_i^k = 0, & 1 \leq i \leq 3, \quad \text{en } \Gamma_D^k, \\ \sigma_{ij}^k(u^k) n_j^k = g_i^k, & 1 \leq i \leq 3, \quad \text{en } \Gamma_F^k, \end{array} \right\} 1 \leq k \leq 3. \quad (12)$$

Sea $\sigma_n^k = \sigma_{ij}^k n_i^k n_j^k$ la tensión normal producida en la dirección del vector normal \mathbf{n}^k , y $u_n^k = u_i^k n_i^k$ la componente normal del desplazamiento en Γ^k . Definimos la tensión tangencial en Γ_C como

$$\sigma_{\tau i}^k = \sigma_{ij}^k n_j^k - \sigma_n^k n_i^k, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Las condiciones de contacto unilateral sin rozamiento en Γ_C y la no interpenetración mutua de las distintas partes se escriben en la forma siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} u_n^k + u_n^l \leq 0; \quad \sigma_n^k(\mathbf{u}^k) = \sigma_n^l(\mathbf{u}^l) \leq 0, \\ \sigma_n^k(\mathbf{u}^k)(u_n^k + u_n^l) = 0, \\ \sigma_{\tau i}^k(\mathbf{u}^k) = \sigma_{\tau i}^l(\mathbf{u}^l) = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \end{array} \right\} \text{en } \Gamma_C^{k,l}, \quad 1 \leq k < l \leq 3. \quad (13)$$

Sea $\boldsymbol{\varepsilon}^k = (\varepsilon_{ij}^k)_{i,j=1}^3$ el tensor de tensiones linealizado asociado con el dominio Ω^k y definido por

$$\varepsilon_{ij}^k(\mathbf{u}^k) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^k + \partial_j u_i^k).$$

Ya que suponemos que los 3 materiales son elásticos, homogéneos e isotrópicos, se verifica la ley de Hooke para cada uno de ellos:

$$\sigma_{ij}^k(\mathbf{u}^k) = \frac{E^k \nu^k}{(1 - 2\nu^k)(1 + \nu^k)} \left(\sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^k(\mathbf{u}^k) \right) \delta_{ij} + \frac{E^k}{1 + \nu^k} \varepsilon_{ij}^k(\mathbf{u}^k), \quad (14)$$

donde E^k y ν^k son el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del material que ocupa el dominio Ω^k , respectivamente.

Aplicando las fórmulas de Green de integración por partes, se prueba, sin demasiada dificultad, que \mathbf{u} es la (única) solución de una inecuación variacional que tiene la forma (6).

La aproximación numérica se realiza de una forma análoga a (7). La diferencia más importante es que necesitamos considerar espacios producto (del tipo $L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2) \times L^2(\Omega^3)$) para calcular la solución y la principal dificultad está en la resolución numérica del problema discreto, es decir, la forma en que se implementan las condiciones de contacto. Para ello, hemos seguido las mismas ideas de [3, 48, 49].

Como primer ejemplo de cálculo hemos considerado una mandíbula fracturada y reducida con dos miniplacas en la zona de la sínfisis (véase [19] para más detalles). Hemos supuesto un fractura en el plano sagital medio (que divide la mandíbula en dos partes iguales) y dos miniplacas transversales fijadas con dos tornillos monocorticales. La fractura se supone “limpia”, es decir, las superficies de fractura son planas, lo que simplifica la construcción de los mallados correspondiente mediante un algoritmo que “corta” en dos la malla de la mandíbula completa. Otros casos de fractura “en sierra” se pueden calcular con el mismo método sin más dificultades que la de obtener las mallas.

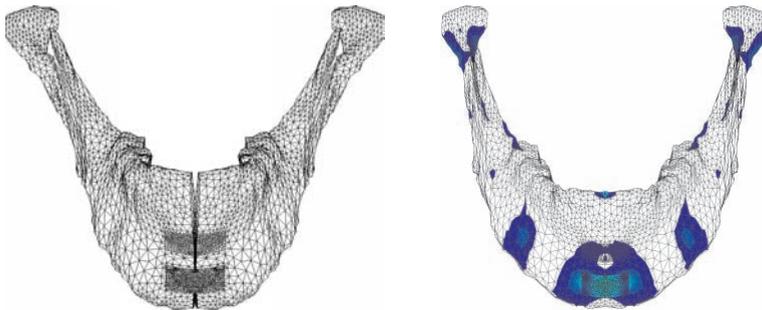


Figure 25: Reducción con 1 miniplaca: deformaciones y zonas de tensión intermedia.

Nuestro objetivo principal, sugerido por el equipo médico, es comparar las tensiones máximas obtenidas con una y dos miniplacas. Es conocido, por resultados experimentales, que las zonas de máxima tensión se localizan en la sínfisis, donde se implantan las miniplacas, y en las propias miniplacas en la zona de los tornillos. En los cálculos hemos supuesto que la presión ejercida en ambos cuerpos de la mandíbula es de 0.5 MPa y que las zonas presionadas tienen un área de 1.087 cm² cada una (véase la Figura 24).

En la Figura 25, podemos ver las deformaciones (amplificadas por un factor 100) en una mandíbula fracturada y reducida con una miniplaca y las zonas coloreadas que corresponden a las de tensión intermedia. El punto de máxima tensión se localiza en la zona de los tornillos y alcanza un valor de la norma von Mises igual a 7.845. En la Figura 26 se pueden observar los mismos resultados pero con 2 miniplacas. Ahora el valor máximo de la norma de von Mises es 6.395. Debemos remarcar que, por comodidad, se ha utilizado en ambos casos

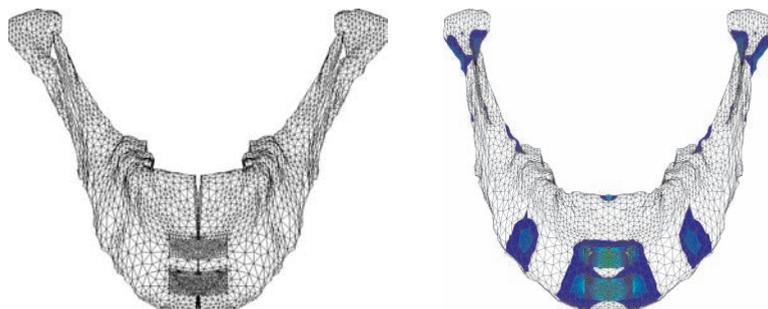


Figure 26: Reducción con 2 miniplacas: deformaciones y zonas de tensión intermedia.

la misma malla de la mandíbula. Esa es la justificación del parecido de las Figuras 25 y 26. Una mirada más atenta permite descubrir que en la malla de la Figura 25 no está presente la miniplaca superior como lo revela la visible separación de ambas partes de la mandíbula en esa zona y que no se produce en la Figura 26.

8 Un estudio comparativo de “brackets”

Los brackets ortodóncicos y los alambres se usan para obtener una correcta distribución de los dientes en el arco mandibular mediante deslizamiento de los mismos. Como ya hemos mencionado, en nuestro trabajo no hemos contemplado la simulación del movimiento dentario, para el que no existen todavía modelos fiables ([29, 42]). El deslizamiento o recolocación de los dientes se consigue mediante la imposición de movimientos adecuados en el alambre que se transmiten por contacto al cuerpo del bracket que a su vez mueve el diente al que está pegado. Los movimientos más usuales que el ortodoncista practica en el alambre son la tracción (para conseguir traslación de los dientes), alabeo y torsión (ambos para conseguir rotación del diente). En las Figuras 27 y 28 se puede ver un esquema simplificado de su funcionamiento. Nuestro interés se ha centrado en el comportamiento mecánico del conjunto bracket-alambre. Su funcionamiento se basa en la presión de contacto que el alambre ejerce sobre el cuerpo del bracket. En un funcionamiento correcto, el bracket debe deslizarse por el alambre sin rozamiento (o con un rozamiento despreciable). Sin embargo, eran, y todavía son, frecuentes los fenómenos mecánicos que provocan resistencia al deslizamiento y pueden causar inhibición en el movimiento de los dientes o la ruptura de alguna parte del bracket (en general, las *alas*). Los más importantes de estos fenómenos son el rozamiento clásico, el *binding* (el alambre se queda pegado al bracket) y el *notching* (el alambre produce muescas en el bracket).

La ortodoncia actual incorpora los últimos avances en el desarrollo de nuevos materiales y formas, para obtener tipos de alambres que están cambiando completamente los tratamientos clínicos. Sin embargo, estos grandes avances en el campo de los alambres u otros elementos elásticos (como las fijaciones o las



Figure 27: Dentadura con un aparato de ortodoncia de brackets-alambres. Detalle de un bracket con alambre actuando en tracción (vista frontal).

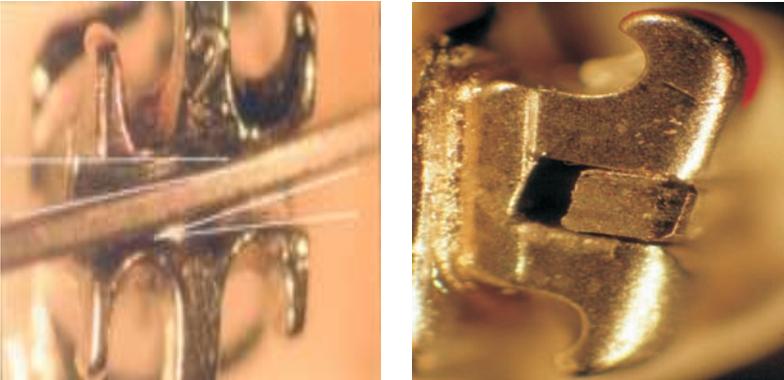


Figure 28: Detalle de un bracket con alambre actuando en alabeo (izquierda) y en torsión –vista de un corte transversal–(derecha).

uniones brackets-alambres) no han estado acompañadas de mejoras en el campo de los brackets, cuyo obsoleto diseño estaría limitando su efectividad.

Una de las mayores novedades en este campo se han alcanzado con los brackets de baja fricción. Su diseño ha mejorado algunas variables mecánicas, en comparación con los brackets clásicos. Un miembro de esta familia es el bracket Sinergy© desarrollado por Rocky Mountain Orthodontic. Fue diseñado para mejorar la efectividad al usar los nuevos alambres superelásticos y termoelásticos y tratar de reducir la fricción. Las principales diferencias entre el bracket Sinergy© y el bracket estandard son las siguientes:

- Tiene tres *alas* en lugar de dos, en cada lado. Esto mejora el trabajo con las gomas que sujetan el alambre.
- Presenta zonas más grandes entre las alas, para prevenir el contacto entre el alambre y las gomas.

- Los extremos de la ranura (“slot”) se han suavizado para reducir las tensiones en los procesos ortodóncicos.
- Las paredes del “slot” no son planas sino biconvexas, para reducir el rozamiento y permitir un mejor deslizamiento.

En colaboración con el grupo de ortodoncistas, hemos estudiado los efectos de las diferencias morfológicas entre estas dos clases de brackets cuando son sometidos a diversos test de desplazamientos impuestos en el alambre, típicos en ortodoncia (alabeo y torsión, esencialmente).

Para realizar las simulaciones numéricas, se decidió escoger dos brackets, uno estandard y el otro de baja fricción, para un diente incisivo izquierdo superior. Las empresas fabricantes, tras los análisis morfológicos y de composición necesarios, proporcionaron los siguientes valores para los coeficientes elásticos que fueron usados en las simulaciones: módulo de Young= 2×10^5 MPa, coeficiente de Poisson= 0.27.

Hemos supuesto que el bracket y el alambre son dos sólidos tridimensionales que pueden entrar en contacto en su superficie común, esto es, la ranura o slot. Hemos supuesto un funcionamiento correcto del mismo, de modo que se admite que el rozamiento es despreciable en el proceso.

Supongamos que Ω^1 y Ω^2 son los dominios de \mathbb{R}^3 que representan el espacio ocupado por el bracket y el alambre antes del experimento, respectivamente. Utilizaremos el superíndice m para indicar que una variable o subconjunto está relacionado con el dominio Ω^m , $m = 1, 2$.

Para cada dominio Ω^m , suponemos que su frontera Γ^m está dividida en tres partes disjuntas Γ_D^m , Γ_F^m y Γ_C^m , siendo Γ_D^m de medida positiva y denotamos $\mathbf{n}^m = (n_i^m)$ el vector normal unitario exterior a Γ^m . Estamos interesados en el estudio del problema de deformación de ambos cuerpos bajo los efectos de desplazamientos impuestos \mathbf{u}^m en Γ_D^m de tipo alabeo. Se ha supuesto que no hay fuerzas externas actuando en el proceso y que los cuerpos pueden entrar en contacto en su zona común $\Gamma_C^1 = \Gamma_C^2 = \Gamma_C$, que corresponde al surco del bracket y a la frontera exterior del alambre. El contacto es, pues, sin rozamiento y modelado según las condiciones de no penetración que hemos descrito en las secciones previas.

En estas condiciones, el problema mecánico se escribe matemáticamente de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \partial_j \sigma_{ij}^m &= 0, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Omega^m, \\
 u_i^m &= \bar{u}_i^m, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Gamma_D^m, \\
 \sigma_{ij}^m n_j^m &= 0, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Gamma_F^m, \\
 u_n^1 + u_n^2 &\leq 0, \quad \sigma_n = \sigma_n^1 = \sigma_n^2 \leq 0, && \text{en } \Gamma_C, \\
 \sigma_n(u_n^1 + u_n^2) &= 0, \quad \sigma_{\tau i}^m = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, && \text{en } \Gamma_C.
 \end{aligned}$$

El problema anterior da lugar a una inecuación variacional análoga a la presentada en las secciones anteriores y, por tanto, se ha utilizado el

método de elementos finitos para su aproximación y el mismo algoritmo de tipo penalización-dualidad para su resolución. Nuestro interés se concentró en la realización de diferentes simulaciones numéricas, su interpretación y su comparación.

A partir de las medidas reales, se describe la geometría y se realizan los correspondientes mallados del alambre y del bracket usando el programa *Smail 6.4* (Simulog, Francia). Los mallados finales tienen 31.276 tetraedros para el conjunto alambre-bracket standard y 58.616 tetraedros para el alambre-bracket de baja fricción.

En todos los experimentos el alabeo se ha impuesto en base a un desplazamiento de d mm. en la dirección del eje X en un extremo y $-d$ mm. en el sentido opuesto en el otro extremo del alambre. Las simulaciones numéricas se realizaron tomando $d = 0.2, 0.4, \text{ y } 0.8$ mm.

En las Figuras 29 y 30 se puede observar la distribución de tensiones en el alambre y en el cuerpo del bracket. Se observa que las tensiones en los extremos del slot son mucho mayores en el caso del bracket standard que en el de baja fricción, lo que justificaría el uso de éste.

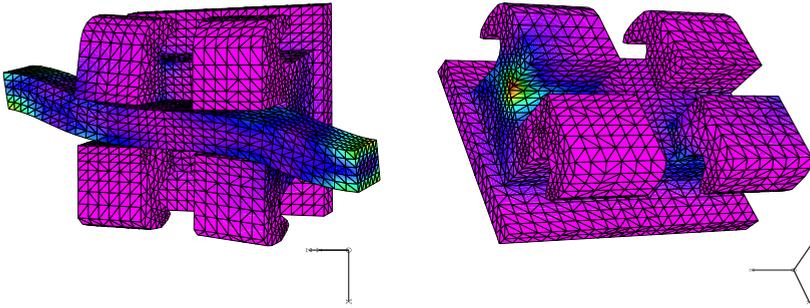


Figure 29: Deformaciones y tensiones en un bracket standard.

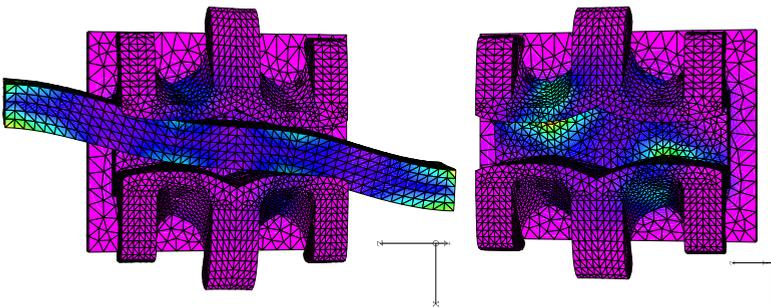


Figure 30: Deformaciones y tensiones en un bracket de baja fricción.

9 Conclusiones

Se ha presentado de manera sucinta varios ejemplos de simulación numérica (con programas de cálculo propios) en procesos mecánicos en odontología y ortodoncia: efectos de mordida, implantes dentales, localización de zonas susceptibles de fracturas mandibulares y su reducción con miniplacas de titanio, y conjuntos brackets-alambres ortodóncicos. Se han descrito también, de manera resumida, las dificultades técnicas y matemáticas para obtener modelos y geometrías precisas (elementos finitos) e imponer las condiciones físicas más apropiadas dentro de las posibilidades que el cálculo nos permite. Aunque los modelos utilizados son, en algunos casos, muy básicos, los resultados obtenidos han sido de gran valor desde el punto de vista médico. De hecho, podemos afirmar que la interacción con los técnicos informáticos y con los médicos dentistas para la realización de las mallas, la discusión de las hipótesis, de los modelos y las conclusiones de los resultados, constituyen uno de los aspectos más importantes de esta investigación en la que, una vez más, la simulación numérica muestra su enorme potencial.

References

- [1] K. J. Bathe. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [2] A. Bermúdez y C. Moreno. Duality methods for solving variational inequalities. *Computers and Mathematics with Applications*, 7: 43–58, 1984.
- [3] M. Burguera y J.M. Viaño. Numerical solving of frictionless contact problems in perfectly plastic bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 121:303–322, 1995.
- [4] H. Brezis y G. Stampachhia. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 96:153-180, 1968.
- [5] D.R. Carter y W.C. Hayes. The compressive behaviour of bone as a two-phase porous structure. *Journal Bone Joint Surgery*, 591:954-962, 1977.
- [6] M. Castro. *Generación y adaptación anisótropa de mallados de elementos finitos para la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales. Aplicaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga, 1996.
- [7] M. Champy, H.D. Pape, K.L. Gerlach y J.P. Lodde. The Strasbourg miniplaque osteosynthesis. *Oral and Maxillofacial Traumatology*, 2, Quintessence Books, 1986.
- [8] P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.

- [9] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volume I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [10] P.G. Ciarlet y J.L. Lions, Edts: *Handbook of Numerical Analysis, Vol. XII: Computational Models for the Human Body*, North Holland, 2004.
- [11] J. Cobo, A. Sicilia, J. Argüelles, D. Suárez y M. Vijande. Initial stress induced in periodontal tissue with diverse degree of bone loss by an orthodontic force. Three-dimensional analysis by means of the finite element method. *American Journal Orthodontics Dentofacial Orthopedics*, 104:448-454, 1993.
- [12] S.D. Cook, A.M. Weinstein y J.J. Klaswitter. Parameter affecting the stress distribution around LTI carbon and aluminium oxide dental implants. *Journal of Biomedical and Material Research*, 16:875-885, 1982.
- [13] S.C. Cowin. Structural adaptation of bones. *Applied Mechanics Reviews*, 43(5): 126-133, 1990.
- [14] S.C. Cowin y D.H. Hegedus. Bone remodelling I: theory of adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 6:313-326, 1976.
- [15] S.C. Cowin y R.R. Nachlinger. Bone remodeling III: uniqueness and stability. *Journal of Elasticity*, 8:285-295, 1978.
- [16] M. Doblare, J.M. García y L. Gracia. Un modelo de remodelación ósea interna basado en los principios de la mecánica del daño. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 16:513-551, 2000.
- [17] G. Duvaut y J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [18] J.R. Fdez-García, M. Burguera y J.M. Viaño: FEM simulation of location and reduction of mandibular fractures. En *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering-3*, J. Middleton, M.L. Jones, N.G. Shrive y G.N Pande Edts. Gordon and Breach Science Publishers, pp. 649-654, 2001.
- [19] J.R. Fernández, M. Gallas, M. Burguera y J. M. Viaño. A three-dimensional numerical simulation of mandible fracture reduction with screwed miniplates. *Journal of Biomechanics*, 36:329-337, 2003.
- [20] M.A. Fernández. *Resolución numérica de modelos de elasticidad adaptativa en formación de huesos*. Tesina de Licenciatura. Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Santiago de Compostela. 1999.
- [21] J.C. Ferre, L. Legoux, J.L. Helary, F. Albugues, C. Lefloch, J. Boutheyre, J.P. Lumineau, C. Chevalier, A. Y. Le Cloarec, E. Orio, F. Marquet y J.Y. Barbin. Study of the deformations of the isolated mandible under

- static constraints by simulation on a physics mathematical model. *Anatomy Clinical*, 7:183-192, 1985.
- [22] M. Gallas y J.R. Fernández, A 3d numerical simulation of the human mandible in standard trauma situations, *Journal of Craneo Maxillofacial Surgery*, 32(5):303-307, 2004.
- [23] M. Gallas, M.T. Abeleira, J.R. Fernández y M. Burguera. A three-dimensional numerical simulation of dental implants as orthodontic anchorage. *European Journal of Orthodontics*, 27:12-16, 2005.
- [24] P.-L. Georges. *Automatic mesh generation: applications to finite element methods*. John Wiley, 1991.
- [25] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [26] R. Glowinski, J. L. Lions y R. Tremolières. *Analyse numerique des inequations variationnelles*. Dunod-Bordas, Paris, 1976.
- [27] D.H. Hegedus y S.C. Cowin. Bone remodeling II: small strain adaptive elasticity. *Journal of Elasticity*, 6:337-352, 1976.
- [28] J. Haslinger, I. Hlavacek y J. Necas. Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. En *Handbook of Numerical Analysis*. IV:313-477, North Holland, Elsevier Science, 1996.
- [29] M.L. Jones, J. Hickman, J. Middleton, J. Knox y C. Volp. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject. *Journal of Orthodontics*. Vol.28, 29-38, 2001.
- [30] L. Kachanov. *Foundations of the theory of plasticity*. North-Holland, 1971.
- [31] J.H. Keyak y H.B. Skinner. Three-dimensional finite element modelling of bone: effects of element size. *Journal of Biomedical Engineering*, 14:483-489, 1992.
- [32] T.W.P. Koriath, D.P. Romilly y A.G. Hanna. Three dimensional finite element stress analysis of the dentate human mandible. *American Journal Physics Anthropology*, 80:429-445, 1992.
- [33] E. Krüger. Mandibular fractures, 1. Classification, Diagnosis, and Fundamentals of Treatment. *Oral and Maxillofacial Traumatology*, 1, Quintessence Books, 1986.
- [34] J. Lemaitre y J.L. Chaboche. *Mechanics of materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [35] N.J.P. MacGuinnes, A.W. Wilson, M.L. Jones y J. Middleton. A stress analysis of the periodontal ligament under various orthodontic loadings. *European Journal of Orthodontics*, 13:231-242, 1991.

- [36] F. X. Michelet, J. Deymes y B. Dessus. Osteosynthesis with miniaturized screwed plates in maxillofacial surgery. *Journal of Maxillo Facial Surgery*, 1-79, 1973.
- [37] J. Middleton, M.L. Jones, N.G. Shrive y G.N Pande Edts: *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering-3*. Gordon and Breach Science Publishers, 2001.
- [38] J. Monnier y L. Trabucho. An existence and uniqueness result in bone remodeling theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 151:539-544, 1998.
- [39] V. J. Oikarinen y M. Malmström. Jaw fractures. A roentgenological and statistical analysis of 1284 cases including a special study of the fracture lines in the mandible drawn from orthopantomograms in 660 cases. *Suom Hammaslääk*, Toim, 65-95, 1969.
- [40] P.D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in mechanics and applications*. Birkhäuser. London, 1985.
- [41] P.D. Panagiotopoulos y D. Talaslidis. A linear finite element approach to the solution of the variational inequalities arising in contact problems of structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:1505-1520, 1982.
- [42] C.G. Provatidis. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament. *Medical Engineering and Physics*, 22:359-370, 2000.
- [43] P. Raviart y J. M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.
- [44] W. Schroeder, J. Zarge y W. Lorenzen. Decimation of triangle meshes. *Computer Graphics*, 25(3), 1992.
- [45] K. Tanne, Lu Chieh-li, E. Tanaka y M. Sakodu. Biomechanical changes of the mandible from orthopaedic chin cup force studied in a three-dimensional finite element model. *European Journal of Orthodontics*, 15:527-533, 1993.
- [46] K. Tanne, M. Sakuda y C. Burstone. Three-dimensional finite element analysis for stress in the periodontal tissue by orthodontic forces. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 92:499-505, 1987.
- [47] K. Tanne, T. Nagataki, Y. Inoue, M. Sakuda y C. Burstone. Patterns of the initial tooth displacements associated with various root lengths and alveolar bone heights. *Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 100:66-71, 1991.

- [48] J. M. Viaño. Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Formulación física y matemática de los problemas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 1:79-93, 1985.
- [49] J. M. Viaño. Análisis de un método numérico con elementos finitos para problemas de contacto unilateral sin rozamiento en elasticidad: Aproximación y resolución de los problemas discretos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 2:63-86, 1986.
- [50] J. M. Viaño, M. Burguera y J.R. Fernández. Three-dimensional finite element simulation of some mechanical processes in the human mandible. *Publicaciones del Centro Internacional de Matemática*, 6, Coimbra, 1999.
- [51] J. M. Viaño, M. Burguera y J.R. Fernández. A 3d-fem simulation of highest stress lines in mandible fractures by elastic impact. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 3:273-285, 1999.
- [52] H. Weinans, R. Huiskes y H.J. Grootenboer. The behavior of adaptive bone-remodeling simulation models. *Journal of Biomechanics*, 25: 1425-1441, 1992.