

TALLERES DE MATEMÁTICAS

Simulación numérica del proceso de colocación de un emisario submarino mediante flotación y hundimiento

Avelino Samartín Quiroga

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y
Teoría de Estructuras. UPM.

CONTENIDO (I)

- Introducción
 - Papel de la Matemática
 - Importancia del tema
- La Obra Pública
 - Planteamiento
 - El Análisis. Fases y clasificación
 - El Cálculo. Tipos
- Emisarios submarinos
 - Introducción
 - Variables de proyecto
 - Estado del arte de los modelos de cálculo

CONTENIDO (II)

- Modelo desarrollado
 - Objetivos
 - Hipótesis de colocación de la tubería
 - Modelo estructural
 - Ecuaciones fundamentales del cálculo estructural
 - Acciones. Matriz de rigidez de cargas
 - Modelo hidrodinámico
 - Ecuaciones fundamentales
 - Determinación de las acciones
- Ejemplos de aplicación
- Comentarios finales

Papel de la Matemática

- La anécdota de Thales de Mileto y la vieja
- El comercio en el XVIII y la teoría de la Relatividad. (Riemann-Gauss y Einstein)
- Los Elementos Finitos y las alas tipo delta. Rayleigh-Ritz, Hilbert y Clough.
- Interacción ciencia matemática y técnica.
- Dentro de su concepción de la Ingeniería algunos ingenieros no carecen de razón en sus críticas respecto a la Matemática. Pero si carecen de perspectiva.

IMPORTANCIA DEL TEMA

● ENTORNO AMBIENTAL

- Costa española de 8,000 km.
- 2,000 km. playa+6,000 km. acantilado

● POBLACIÓN

- 35 % vive en la costa y alcanza el 80% en el verano

● TURISMO

- Importancia económica fundamental
- Mediterráneo problemática especial
 - Mar cerrado, recorrido mareas, población.

● POLÍTICA DE MEDIO AMBIENTE DE LA EU

POLÍTICA DE MEDIO AMBIENTE DE LA EU

Directiva EU aconseja que las aguas residuales depuradas y tratadas sean enviadas mediante tubos emisarios a alta mar.

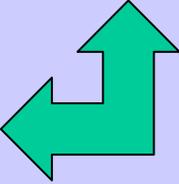
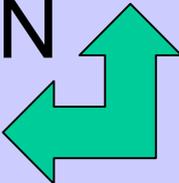
Por consiguiente se hace preciso la construcción de emisarios submarinos

MOTIVACIONES DE LA SELECCIÓN

- Tema de interés de aplicación creciente
 - Medio ambiente (emisarios)
 - Industria petrolífera (risers)
- Investigación intensiva
 - Tesis doctoral reciente premiada (ANCI, premio extraordinario)
- Ejemplo de aplicación de la matemática a un problema multi-físico y no lineal

LA OBRA PÚBLICA

PLANTEAMIENTO DE LA OBRA PÚBLICA

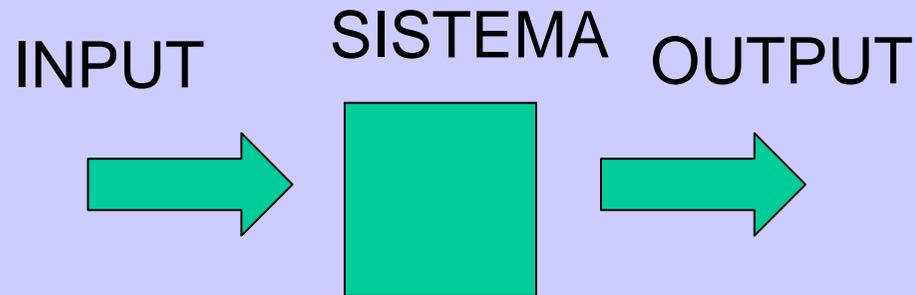
- DISEÑO
- PROYECTO
 - **ANÁLISIS** 
- CONSTRUCCIÓN
 - **ANÁLISIS** 
 - **CONTROL**
 - **IDENTIFICACIÓN**
- MANTENIMIENTO
 - **CONTROL DE DAÑO (HEALTH MONITORING)**

ANÁLISIS

- El objetivo de un análisis es comprobar la estabilidad de la obra pública durante toda su vida.
- Este objetivo se alcanza con el análisis
- Existen tres fases en el análisis
 - Idealización (Modelo físico-matemático)
 - Cálculo (Estudio input-output en el modelo)
 - Interpretación (output del modelo a la obra pública)

CLASIFICACIÓN DEL ANÁLISIS

Una estructura puede ser considerada como un sistema con una entrada (input) y una salida (output) como se indica:

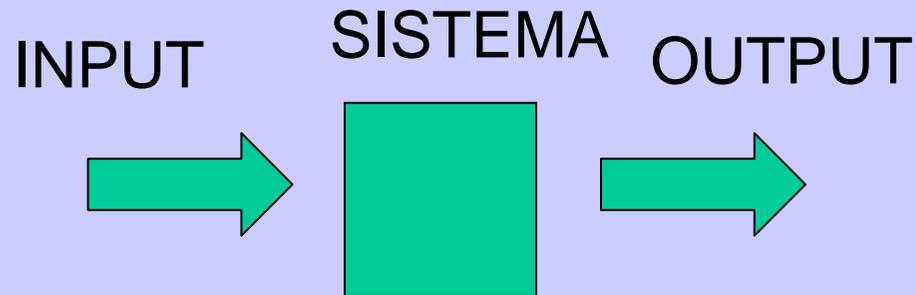


En el caso de estructuras se tiene

- INPUT Acciones que excitan la estructura
- OUTPUT Respuesta de la estructura
- SISTEMA Estructura definida por su geometría, propiedades del material y apoyos

CLASIFICACIÓN DEL ANÁLISIS

Una estructura puede ser considerada como un sistema con una entrada (input) y una salida (output) como se indica:



Bajo esta hipótesis se puede clasificar el análisis como sigue:

- Análisis estructural o cálculo
- Optimización estructural
- Identificación estructural
- Control estructural

ANÁLISIS ESTRUCTURAL O CÁLCULO

- Definición.
 - Los datos son las acciones (el input) y las características de la estructura (el sistema).
 - Los resultados es el objetivo del cálculo estructural, es decir, encontrar la respuesta de la estructura a las acciones (el output).
- Es el procedimiento más simple para proyectar estructuras y ha sido el más usado en la actividad profesional antes de la llegada del computador.
- En un proyecto estructural se pueden llevar a cabo varios tipos de cálculos.
- El proyecto obtenido a partir del cálculo representa normalmente realimentación.

OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

● Definición.

- Los datos son las acciones (el input) y ciertas características de la estructura (el sistema) y las restricciones existentes entre los resultados del cálculo (el output).
- Los resultados consisten en encontrar las características incógnitas de la estructura de forma que una función objetivo OF, es decir, el objetivo del proyecto se optimice.
- Típicamente OF es una función escalar, pero a veces puede ser una función vectorial (Optimización Pareto).

● Proceso en paralelo es conveniente en la optimización.

● La búsqueda de óptimos globales es difícil contrariamente a la de los óptimos locales.

IDENTIFICACIÓN ESTRUCTURAL

- Definición.
 - Los datos son los resultados de un ensayo experimental, es decir, el input, algunas características del sistema y el output.
 - Los resultados consisten en encontrar las características de la estructura, es decir, identificar la estructura
- En algunos casos el input es incógnita (*output only dynamic tests or tests bajo cargas medioambientales*).
- La identificación es en efecto un problema de optimización definido por una función objetivo OF específica, es concreto, la diferencia entre los resultados experimentales y analíticos.

CONTROL ESTRUCTURAL

● Definición

- Los datos son el input y el output de la estructura y algunos criterios de funcionamiento (función objetivo).
- Los resultados son los inputs a ser introducidos en el sistema con objeto de satisfacer el criterio de control.
- In algunos casos el propio sistema es incógnita, únicamente se conoce funcionamiento corriente del sistema.

CLASIFICACIÓN DEL CÁLCULO

- Lineal elástico lineal, geoméricamente no lineal y de material no lineal
- Estático y dinámico
- Continuo y discreto
- Multi-físicos: una o más escalas temporales o espaciales
- Multi-físicos (interacción suelo-estructura o fluido-estructura)

EMISARIOS SUBMARINOS

EMISARIOS SUBMARINOS

● INTRODUCCIÓN

- Historia

- Ejemplos de emisarios construidos

● VARIABLES DE PROYECTO

- Materiales

- Sistemas constructivos

- Arrastrado, flotación y hundimiento

● ESTADO DEL ARTE DE LOS MODELOS

- Influencia de la industria del petróleo

INTRODUCCIÓN

● Breve historia

- (1894) Hiperion. California. $D=200\text{mm}$, $L=600\text{m}$

- (1969) Premiá de Mar. $D=400\text{mm}$, $L=200\text{m}$

 - Fallo en el primer año

 - Reconstruido y todavía en uso

- Diámetros mayores de 3.0 m y longitudes de 2.0 a 3.0 km.

- Ejemplos de emisarios en España: Zarauz, Bayona, Figueira da Foz (en los 80); Peñarrubia (Gijón), Santander, Monpás (San Sebastian), Llobregat (Barcelona) en los 90.

En Túnel

Lugar	Longitud (<i>km</i>)	Diámetro (<i>m</i>)	Difusores
Edinburgh	2.80	3.66	20
Brighton	1.83	2.13	9
Weymouth	2.70	1.68	10
Aberdeen	2.20	2.00	10
Helsinki	4.00	3.00	–
Malabar (Sydney)	4.00	3.48	38
North Head (Sydney)	3.80	3.48	38
Worli (Bombay)	3.00	3.00	10
Bandra (Bombay)	3.00	3.00	10
Bondi (Sydney)	2.00	2.25	28
San Sebastián	0.44+0.90	2.00	8

VARIABLES DE PROYECTO

CONSTRUCCIÓN DE UN EMISARIO SUBMARINO

● GEOMÉTRICAS Y AMBIENTALES

- Longitud y diámetro
- Vida de servicio (25-50 años)

Estas variables dependen de la normativa (concentración de pululante, importancia de la obra, condiciones del mar etc.

● MATERIALES

- Material rígido y con alta resistencia a las acciones químicas (hormigón)
- Material flexible (polietileno de alta densidad)
- Material intermedio (acero, tubería de hormigón con camisa de acero)

MATERIALES

- FIBROCEMENTO

- Frágil, rígido, no homogéneo, diámetro pequeño

- ACERO

- Homogéneo, flexible, problemas de corrosión

- HORMIGÓN con y sin camisa de acero

- Rígido, durable, pesado, grandes diámetros

- MATERIALES PLÁSTICOS (poliester, poliester reforzado con fibra de cristal. Polietileno de alta densidad)

- Flexible, colocación rápida, ligero

● VARIABLES DEL PROYECTO

● MÉTODOS CONSTRUCTIVOS

- Arrastrado
- En túnel
- Empujado
- Tubo a tubo
- Inundación

● CONDICIONANTES DE LA CONSTRUCCIÓN

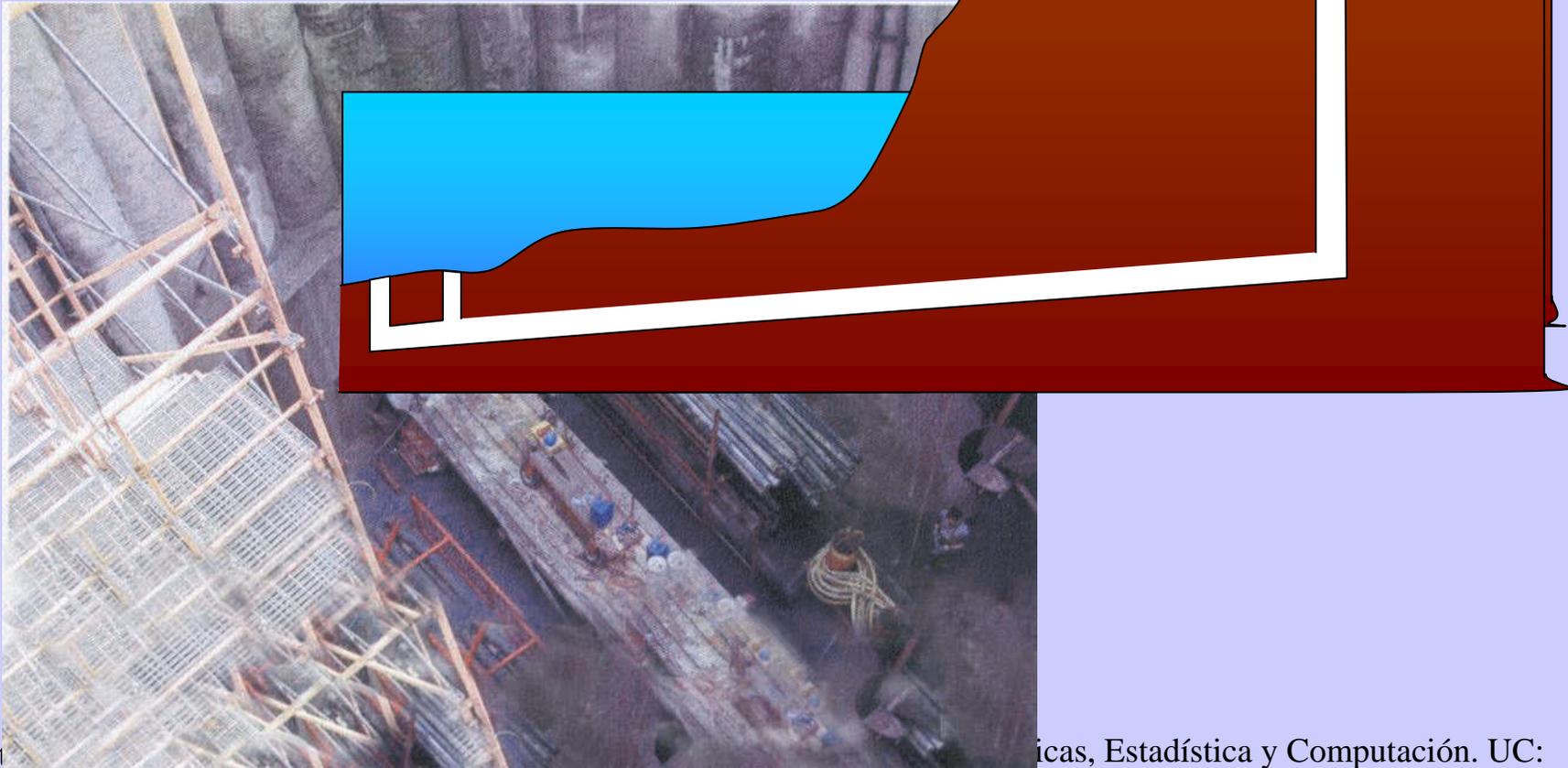
- Material del tubo
- Diámetro del tubo
- Morfodinámica costera y de fondo

● FABRICACIÓN

- Tubo a tubo
- Tramos de varios tubos
- Tramo único

En túnel

- Pozo de acceso
- Túnel bajo el nivel freático



Arrastrado (requerimientos)

- Grandes diámetros en hormigón
- Área de construcción y rampa de lanzamiento
- Excavación de zanja
- Posicionamiento de tubos en la rampa
- Unión al tubo lanzado
- Tiro desde pontona

Arrastrado

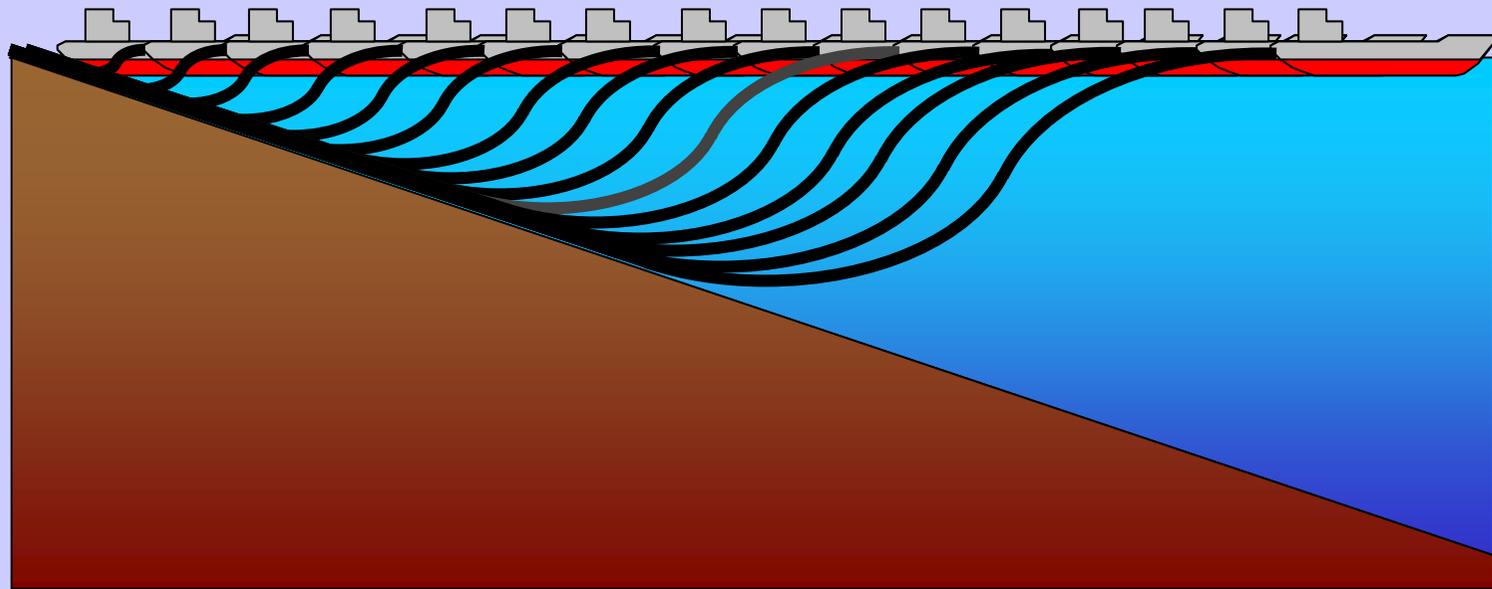


Colocación de tubería
en plataforma de trabajo

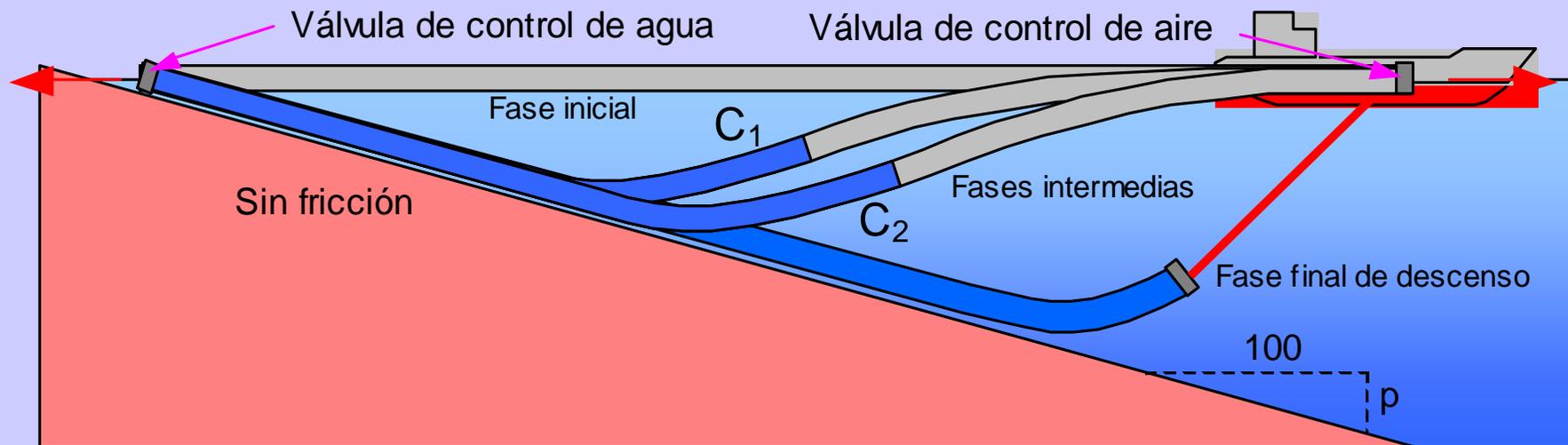


Santander 23-01-08

Proceso de colocación



Proceso de colocación

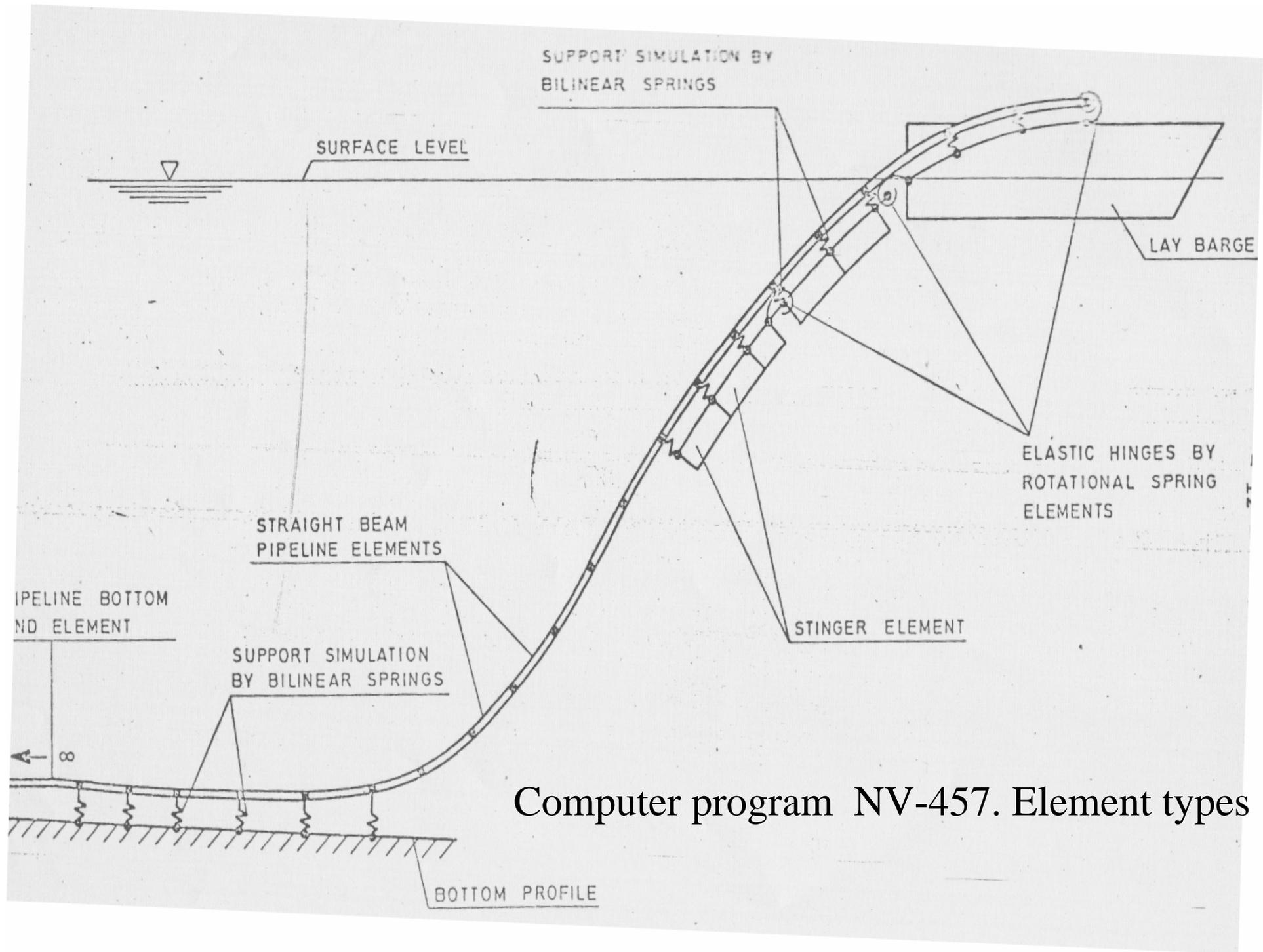


ESTADO DE ARTE DE LOS MODELOS

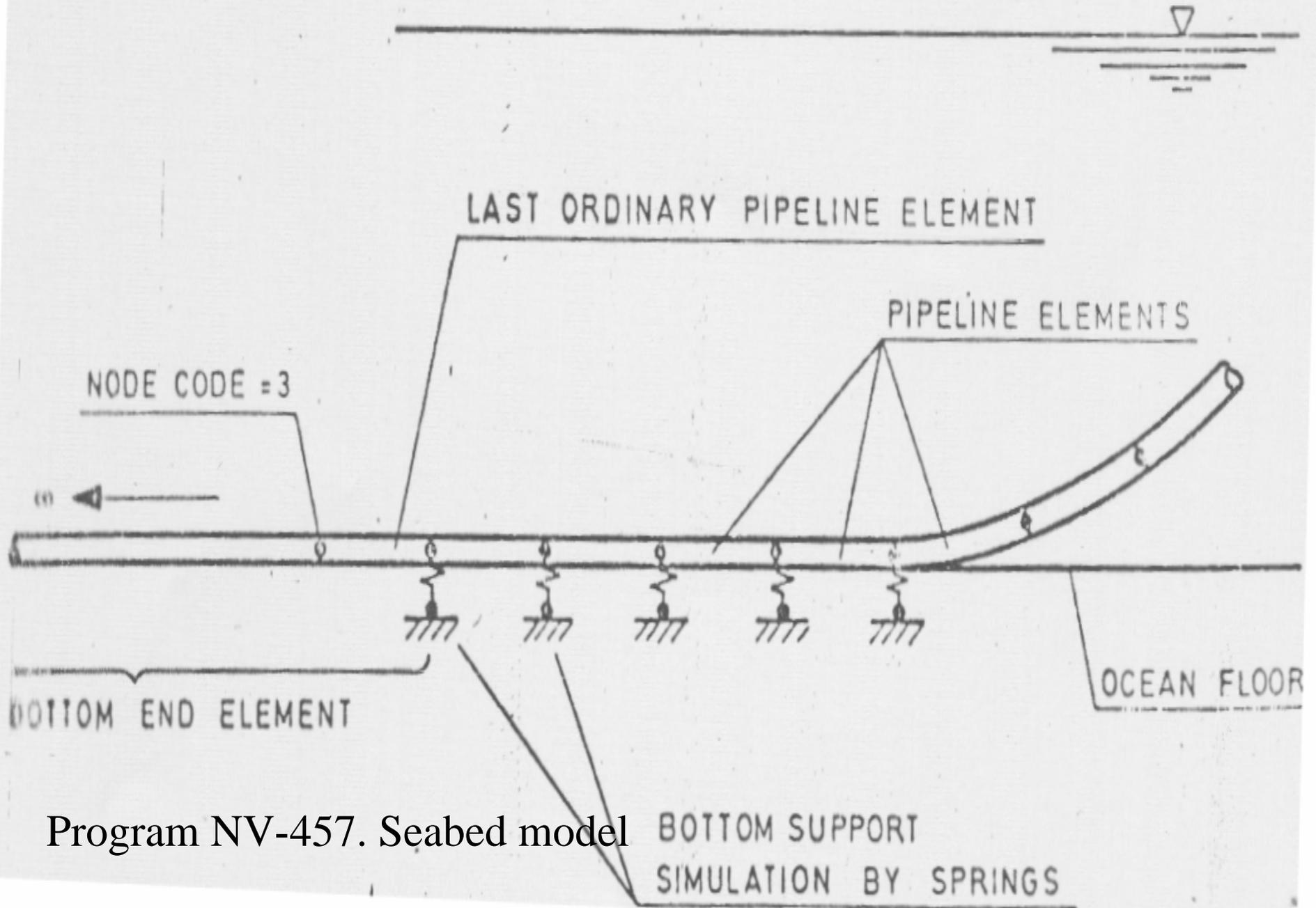
- Influencia de la industria del petroleo (risers)
 - Diferencias: rigidez a flexión, no ovalización, juntas, aguas someras, etc.
- Primeros cálculos
 - Catenaria, con y sin rigidez (cálculo iterativo)
 - Soluciones semi analíticas
- Programas de objetivo general
 - SAP, ABAQUS, ANSYS
- Recomendaciones
 - CIRIA
- Software específico en la práctica profesional
 - Det Norske Veritas, Técnicas Reunidas, Pellón-Oliver, J.G. Palacios etc.

Emisarios versus Risers

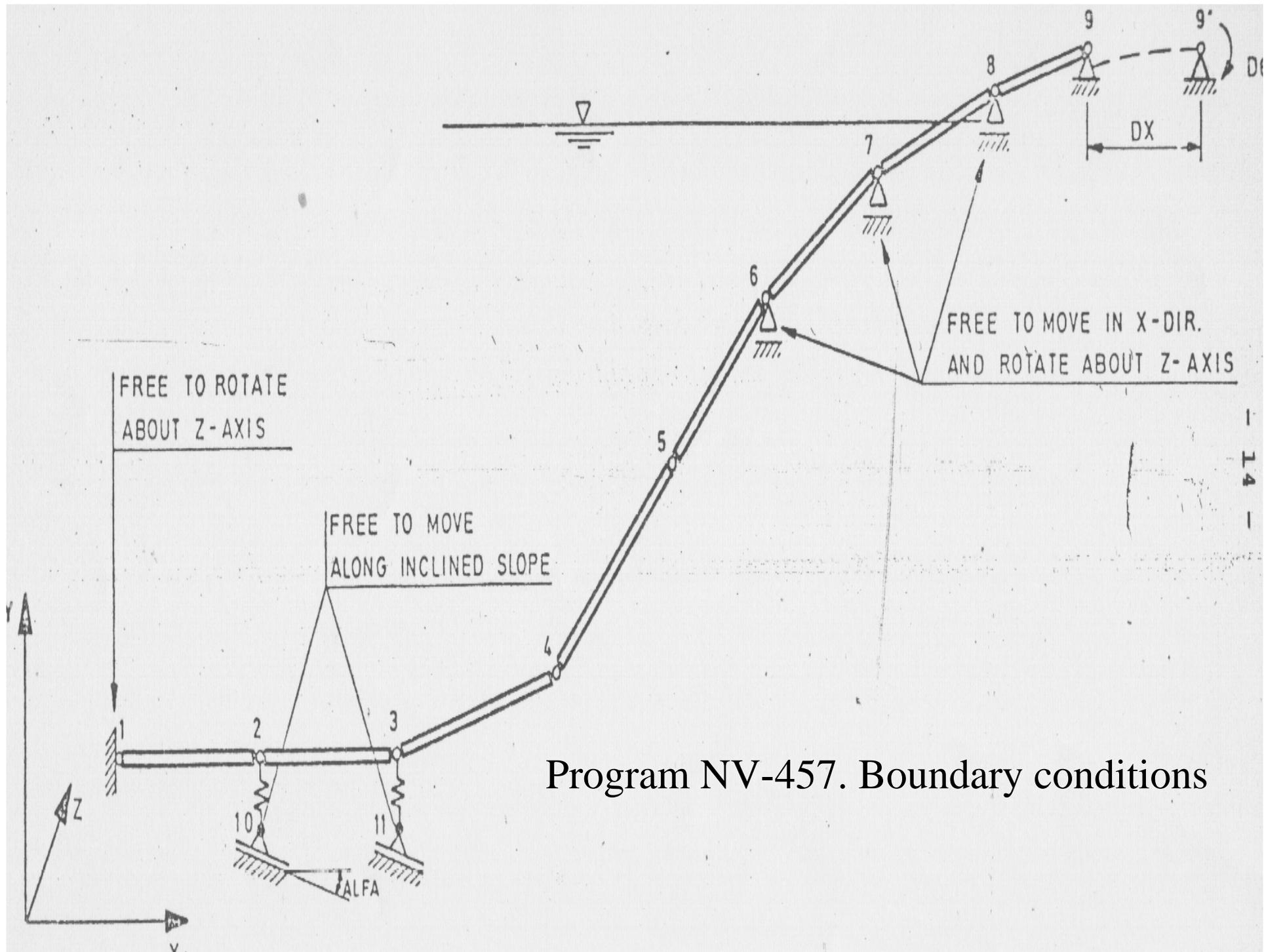
- **El comportamiento estructural de una construcción de un emisario durante su colocación representa un problema complejo**
 - El tubo es flexible y de gran longitud (material polietileno de alta densidad)
 - El tubo flotante está alineado por un cable a la costa y a la barcaza de control por el otro extremo
- **Desde la barcaza se controlan tres variables**
 - La fuerza axial T impuesta a la estructura
 - La distancia de la barcaza a la costa
 - La velocidad de llenado con agua del tubo desde el extremo de la costa
- **Cálculo dinámico no lineal**
 - Grandes desplazamientos y rotaciones
 - Interacción agua-estructura
 - Acciones no lineales hidrodinámicas
 - Condiciones de contorno de contacto



Computer program NV-457. Element types

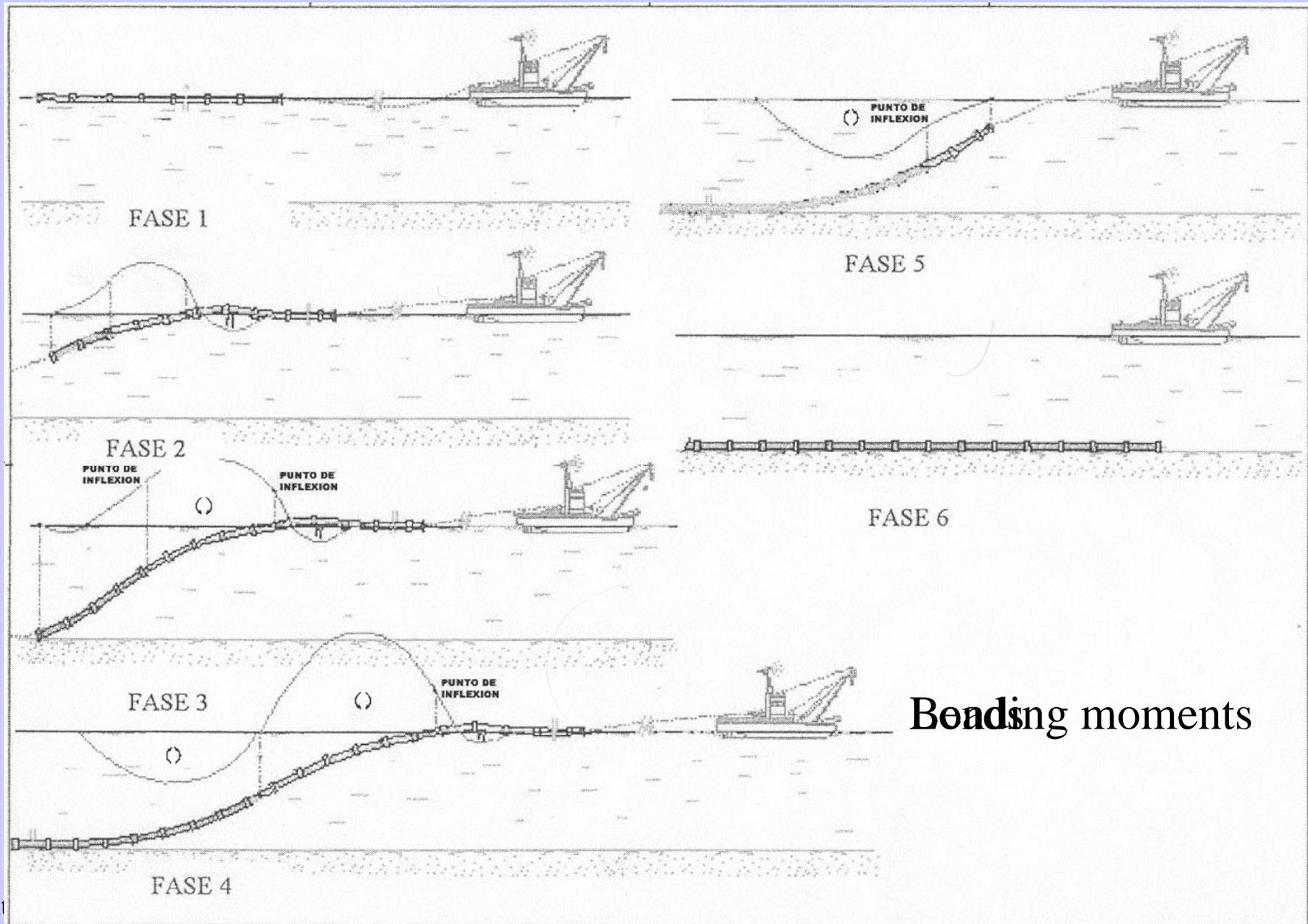


Program NV-457. Seabed model



Program NV-457. Boundary conditions

Cálculo típico



MODELO DESARROLLADO

MODELO DE CÁLCULO

1. Objetivos
2. Elementos del modelo
3. Hipótesis de colocación del tubo
4. Modelo estructural
5. Ecuaciones fundamentales del cálculo estructural
6. Acciones. Matriz de cargas
7. Modelo hidrodinámico
8. Ecuaciones fundamentales. Determinación de las acciones
9. Aplicación en computador

OBJETIVOS

OBJETIVOS

- Desarrollo de un modelo para simular el proceso de construcción mediante flotación y hundimiento de un emisario con objeto de calcular:
 - Tensiones
 - Curvaturas
 - Esfuerzo
 - Desplazamiento
- Variables
 - Longitud
 - Posición
 - Fuerza de tiro desde la barcaza
- Optimización del proceso de construcción

Optimización consiste en encontrar automáticamente las historias temporales de las variables de control de forma que una función objetiva sea optimizada

ELEMENTOS DEL MODELO

ELEMENTOS DEL MODELO

- Modelo estructural
 - **EF 1-D (vigas)**, EF 2-D (láminas) y EF-3D (bricks)
- Procedimiento de cálculo
 - Lineal, **geométricamente no lineal**, material no lineal
 - Estático, **casi-estático** y dinámico
 - **Comprobación**, proyecto, optimización
- Modelo hidrodinámico
 - **Campo de velocidades y aceleraciones**
 - Obtención de las acciones
 - **Fórmulas de Morison *et alia*.**

HIPÓTESIS DE COLOCACIÓN DEL TUBO

- La tubería se sitúa sobre el mar mediante un stinger a la cota nivel medio del mar (NMM). Este stinger puede ser modelado bien como una rampa recta con un ángulo fijo con la horizontal o como una rampa de curvatura constante.
- El proceso no puede retroceder, es decir, si una parte de la tubería reposa sobre el fondo marino, ella no puede levantarse de nuevo.
- El fondo del mar ha sido considerado como una línea recta continua, que puede tener diferentes ángulos. Esta línea se encuentra en el mismo plano vertical que el del eje de la tubería.
- No existen movimientos de la tubería fuera de su plano.
- Los efectos dinámicos del contacto entre la tubería y el stinger se desprecian.
- No se consideran los movimientos dinámicos de la barcaza, incluso los debidos a la deformación axial de la tubería.
- El coeficiente de rozamiento entre la tubería y el stinger es nulo

MODELO ESTRUCTURAL

HIPÓTESIS ESTRUCTURALES

- El comportamiento de la tubería es modelado como una viga 2-D con su sección sometida a deformaciones de flexión y extensión.
- Se considera la interacción entre esfuerzos axiales y flectores
- El modelo se desarrolla en el marco del MEF. La longitud total de la tubería (L) se divide en N elementos finitos de dos nudos de igual longitud y tres grados de libertad por nudo (dos desplazamientos y una rotación).
- El cálculo se formula según la teoría de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones.
- El material de la tubería es elástico y lineal.
- No se tiene en cuenta las deformaciones de torsión y de cortante.
- Se desprecian las fuerzas de inercia rotacionales.
- No existe rozamiento en el lecho marino.

HIPÓTESIS DE CÁLCULO

- Cálculo con material elástico y lineal (que sigue la ley de Hooke)
- Cálculo no lineal en grandes desplazamientos
- Cálculo casi estático.
 - En las acciones es dinámico. Las fuerzas de inercia de la masa del mar que acompaña a la tubería en su movimiento es tomada en cuenta.
 - Las fuerzas de inercia del propio tubo debidas a su masa en los tramos vacíos y en los inundados no son tomadas en cuenta.
- Por simplicidad se considera un cálculo 2-D, es decir, la tubería se desplaza en un plano vertical

FORMULACIÓN LAGRANGIANA

En la formulación lagrangiana el cálculo se lleva a cabo suponiendo que la carga se aplica sobre el sólido como suma de un conjunto de incrementos para cada uno de los cuales se obtiene una configuración de equilibrio. Una configuración de equilibrio, representa un estado del sólido, en el que los resultados son **compatibles**, se encuentran en **equilibrio** y satisfacen las ecuaciones **constitutivas o de comportamiento** del material del sólido.

RELACIONES FUNDAMENTALES

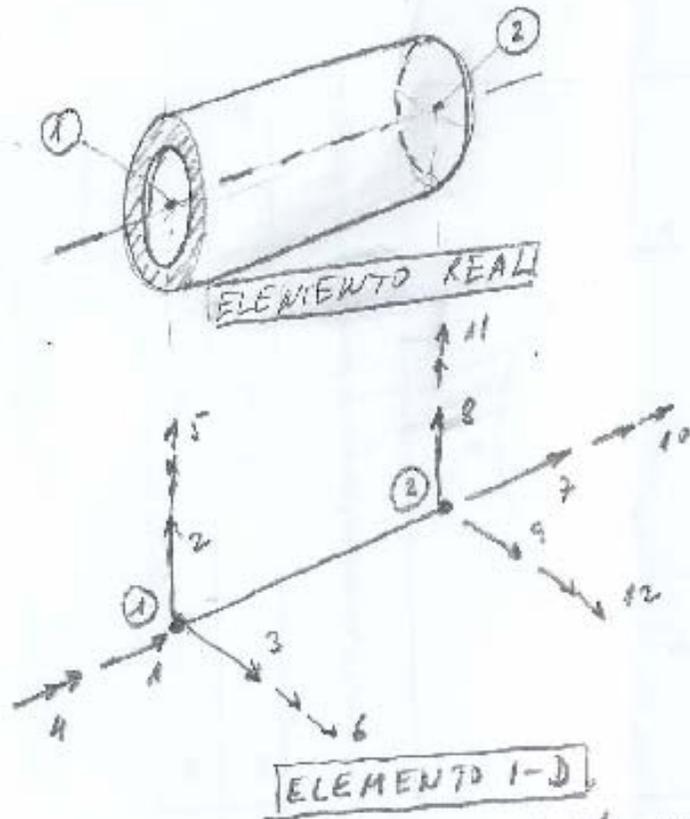
- Ecuaciones de equilibrio
 - Tensiones con las acciones
- Ecuaciones de compatibilidad
 - Deformaciones con desplazamientos
- Ecuaciones constitutivas
 - Tensiones con deformaciones

FORMULACIÓN LAGRANGIANA

● Análisis iterativo-incremental

- Se dividen las cargas en suma de cargas incrementales
- En cada estado de carga incremental se plantean las ecuaciones de equilibrio en una supuesta deformada final de la estructura
- Se itera hasta que la geometría supuesta final y la alcanzada coincidan
- Los resultados del estado incremental se suman al estado anterior para proceder al siguiente incremento de carga

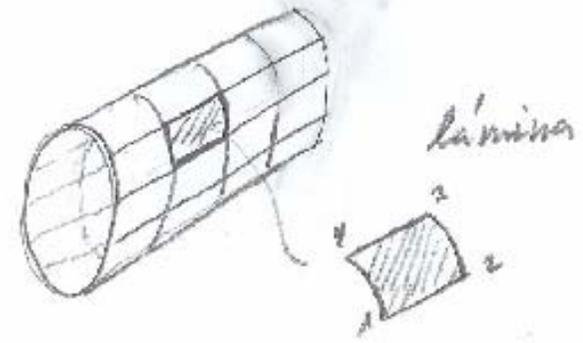
Tipos de EF para tuberías



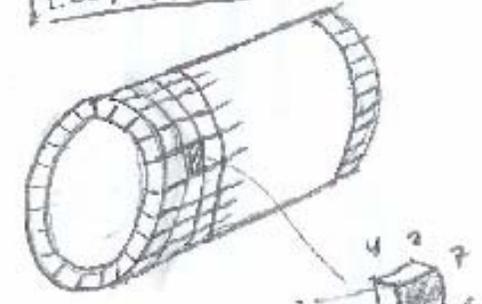
p_i y u_i acciones y desplazamientos
($i=1, 2, \dots, 12$)

$p_i = k_{ij} u_j$ ecuaciones constitutivas

$\underline{p} = \underline{k} \underline{u}$ matriz de rigidez \underline{k}

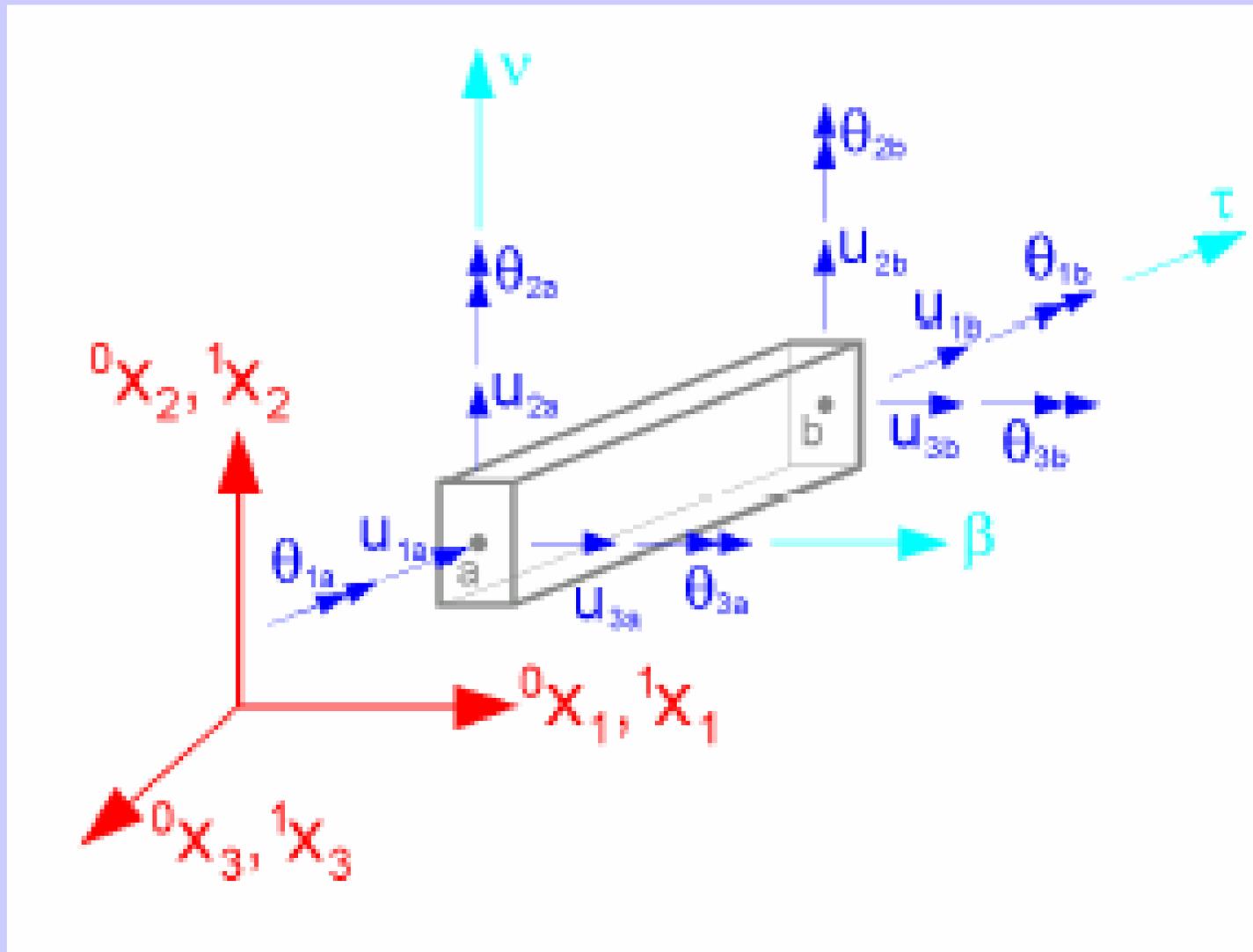


ELEMENTO 2-D

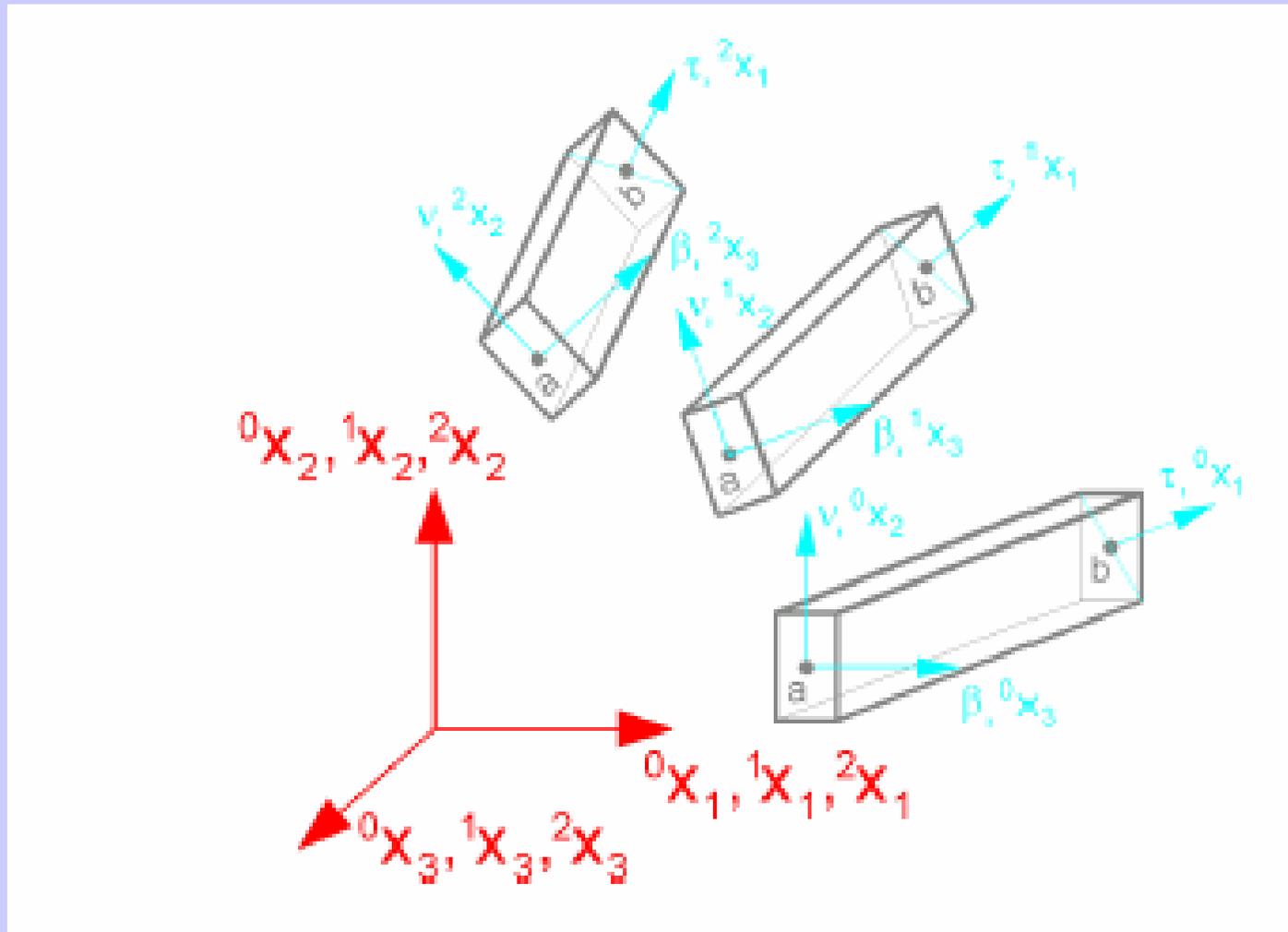


ELEMENTO 3-D

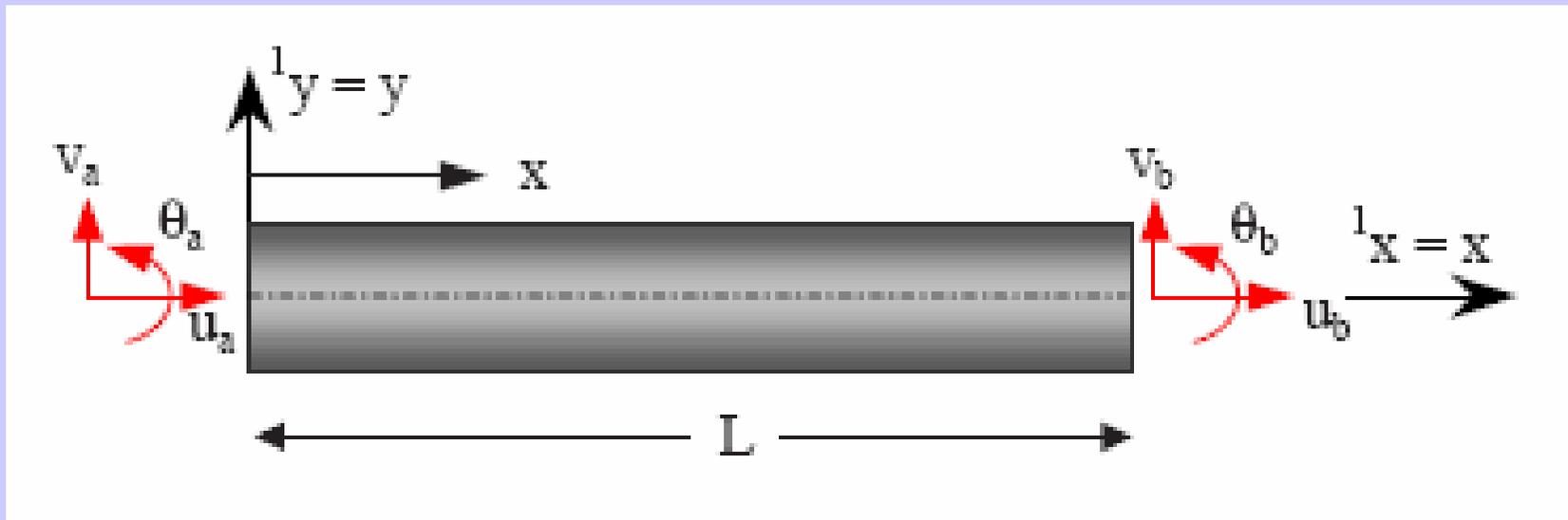
ELEMENTO VIGA 3-D



ELEMENTO VIGA 3-D



ELEMENTO VIGA 2-D



Descripción de situación de un elemento: Descripción material o lagrangiana y descripción espacial o euleriana.

(a) La descripción lagrangiana se plantea en función de la posición inicial del elemento.

(b) La descripción euleriana se plantea en función de la posición corriente del elemento en el espacio.

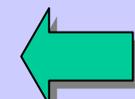
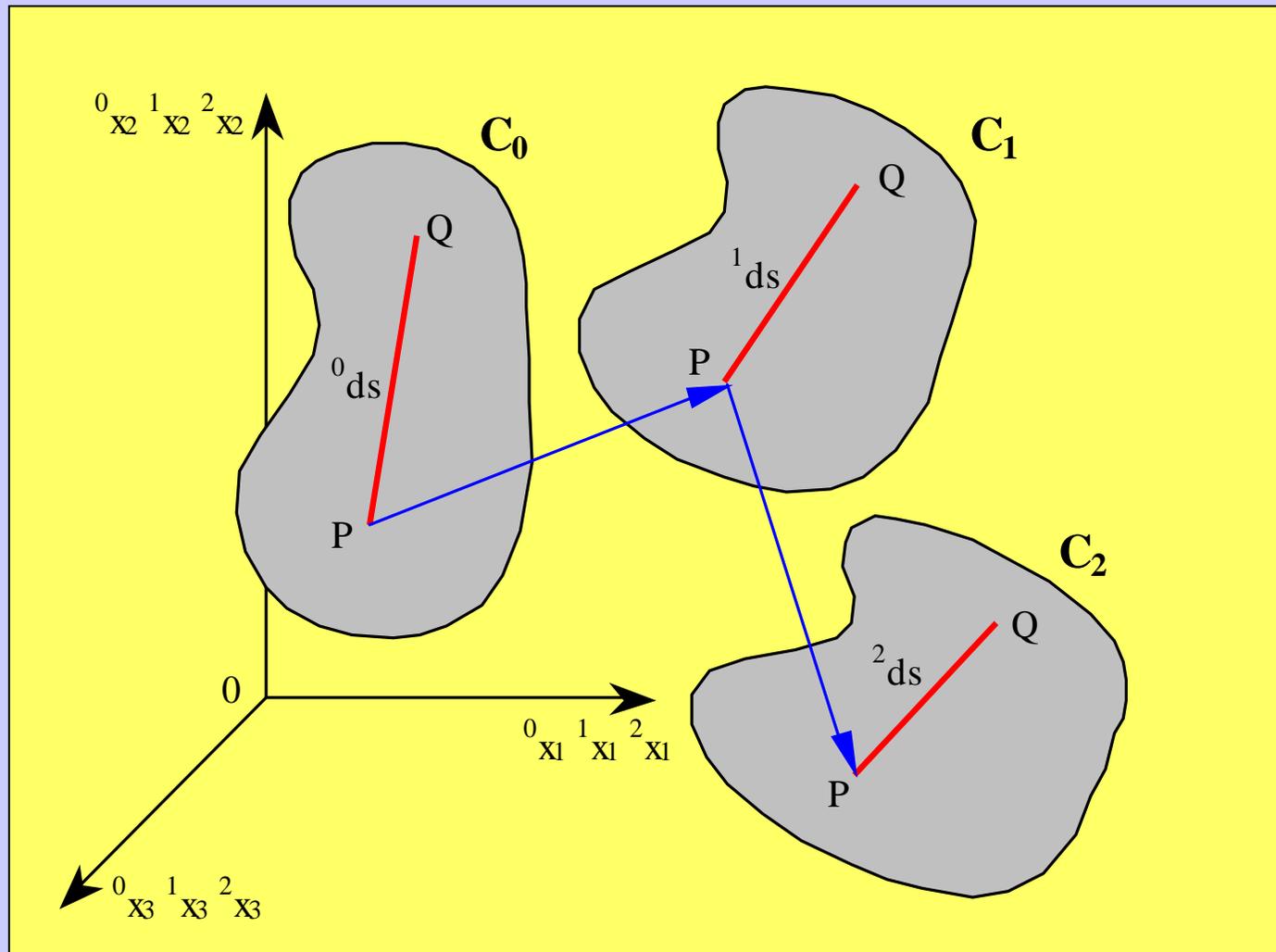
La formulación es lagrangiana, es decir, considera coordenadas materiales asociadas con la viga antes de su deformación.

DEFINICIONES

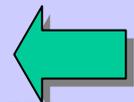
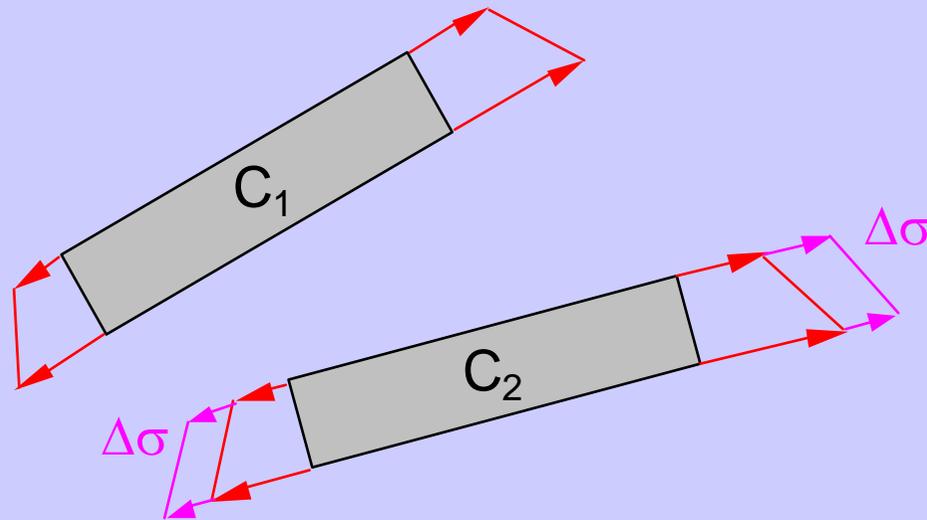
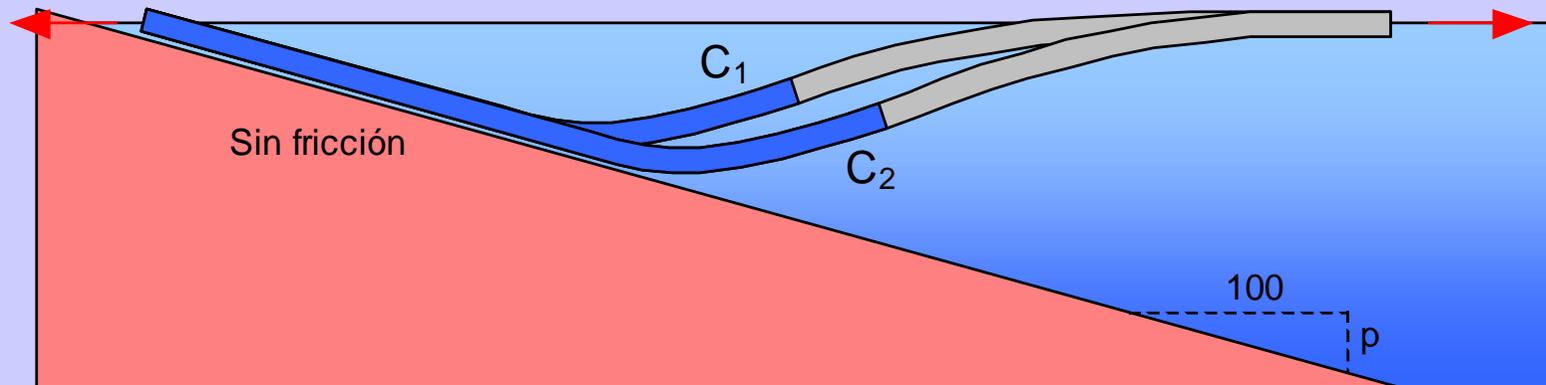
- C_0 = Configuración inicial del elemento no deformado.
- C_1 = Configuración última conocida del elemento.
- C_2 = Configuración de equilibrio actual, cuyos resultados consecuencia del incremento de cargas es desconocido.

Formulación lagrangiana total (LT), lagrangiana actualizada (LA) y lagrangiana generalizada (LG) según la configuración de referencia sea C_0 , C_1 o C_k (intermedia entre las dos anteriores)

PLANTEAMIENTO LAGRANGIANO ACTUALIZADO

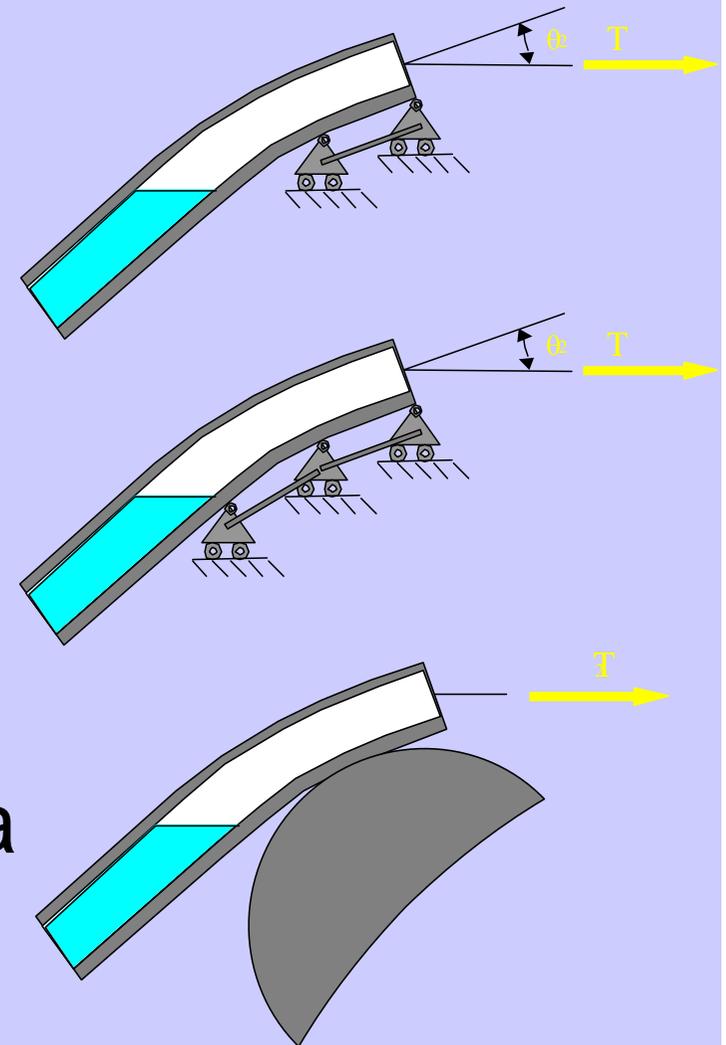


PLANTEAMIENTO LAGRANGIANO



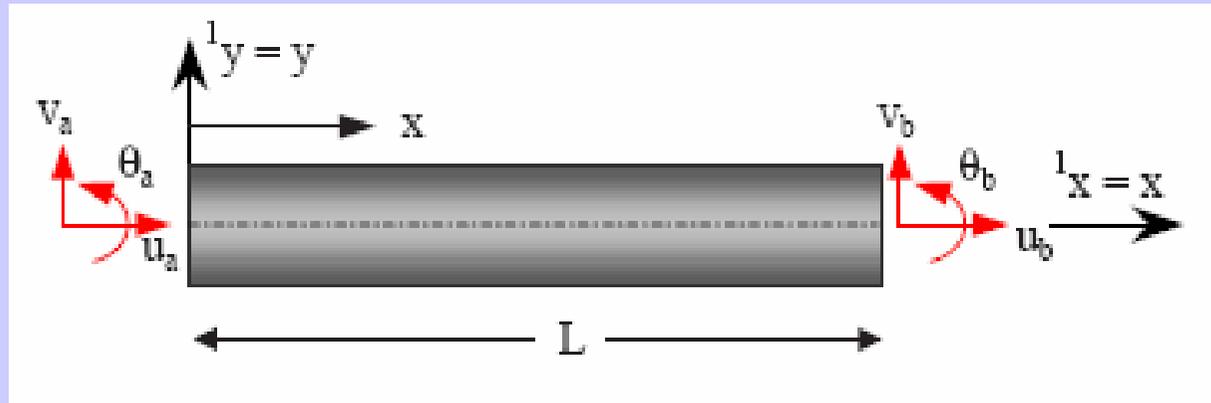
CONDICIONES DE CONTORNO

- Contacto con el fondo
 - Sin penetración
 - Sin fricción
- Contacto con el stinger
 - Ángulo constante
 - Curvatura constante
 - Elementos contacto
- Fuerza de tiro T desde la barcaza



ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO ESTRUCTURAL

TRABAJO VIRTUAL EN UN ELEMENTO DE VIGA



Trabajo virtual de las fuerzas exteriores en formulación LA

$${}^k_1 R = \mathbf{u}^{*T} {}^k \mathbf{f}$$

siendo el vector de fuerzas en los extremos a y b y el de movimientos

$${}^k \mathbf{f} = \left[{}^k F_{xa}, \quad {}^k F_{ya}, \quad {}^k M_{za}, \quad {}^k F_{xb}, \quad {}^k F_{yb}, \quad {}^k M_{zb} \right]^T \quad (k = 1, 2)$$

$$\mathbf{u}^T = [u_a, \quad v_a, \quad \theta_a, \quad u_b, \quad v_b, \quad \theta_b]$$

Notación: * virtual Superíndice k configuración Subíndice referencia

Aplicando la hipótesis cinemática de Navier-Bernoulli a la viga, el movimiento (u_x, v_x) de un punto de coordenadas (x, y) del sólido viga, puede expresarse en función de los movimientos (u, v) del punto $(x, 0)$ de la directriz como sigue:

$$u_x = u - yv' \quad u_y = v \quad (6.4)$$

donde ' expresa $\frac{d}{dx}$, y u y v son funciones únicamente de x .

Las componentes lineales y no lineales del tensor de tensiones incrementales de Green son:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] & \eta_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Introduciendo (6.4) en cada una de las componentes de (6.5) se tiene

- Componentes lineales:

$$e_{xx} = u' - yv'' \quad e_{xy} = 0 \quad (6.6)$$

- Componentes no lineales:

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left(u'^2 + v'^2 + y^2 v''^2 - 2yu'v'' \right) \\ \eta_{xy} &= \frac{1}{2} \left(-u'v' + yv'v'' \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

La estática de la viga relaciona los esfuerzos con las tensiones en una sección, resultando:

$${}^1F_x = \int_A {}^1\sigma_{xx}dA \quad (6.8)$$

$${}^1F_y = \int_A {}^1\sigma_{xy}dA \quad (6.9)$$

$${}^1M_z = - \int_A {}^1\sigma_{xx}ydA \quad (6.10)$$

donde A es el área de la sección recta de la viga.

La ecuación inversa a las (6.8) y (6.10) es

$$\sigma_{xx} = \frac{{}^1F_x}{A} - \frac{{}^1M_z y}{I_z} \quad (6.11)$$

con $I_y = \int_A y^2 dA$ el momento de inercia de la sección de la viga.

Al sustituir las relaciones estáticas y cinemáticas de la viga en la expresión del trabajo virtual incrementado en formulación lagrangiana actualizada (LA), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_A E (u' - yv'') (u^{*'} - yv^{*''}) dA dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A {}^1\sigma_{xx} (u^{*'}{}^2 + v^{*'}{}^2 + y^2 v^{*''}{}^2 - 2yu^{*'}v^{*''}) dA dx + \\ & \int_0^L \int_A {}^1\sigma_{xy} (-u^{*'}v^{*'} + yv^{*'}v^{*''}) dA dx = \mathbf{u}^{*T} [{}^2\mathbf{f} - {}^1\mathbf{f}] \end{aligned} \quad (6.12)$$

La formulación local o fuerte de (6.12) se escribe como sigue:

$$EAu'' + {}^1F_x u'' + ({}^1M_z v'')' - {}^1F_y v'' = 0 \quad \text{en } (0, L) \quad (6.15)$$

$$EI_z v'''' - {}^1F_x v'' + {}^1F_x \frac{I_z}{A} v'''' + ({}^1M_z u')'' - {}^1F_y u'' = 0 \quad \text{en } (0, L) \quad (6.16)$$

con las condiciones naturales de los bordes $x = 0$ y $x = L$.

$$EAu' + {}^1F_x u' + {}^1M_z v'' - {}^1F_y v' = {}^2F_x - {}^1F_x \quad (6.17)$$

$$-EI_z v''' + {}^1F_x v' - {}^1F_x \frac{I_z}{A} v''' - ({}^1M_z u')' - {}^1F_y u' = {}^2F_y - {}^1F_y \quad (6.18)$$

$$EI_z v'' + {}^1F_x \frac{I_z}{A} v'' - {}^1M_z u' = {}^2M_z - {}^1M_z \quad (6.19)$$

y las esenciales de dichos bordes son (\bar{u} , \bar{v} y $\bar{\theta}$ datos):

$$u^* = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \bar{u} \quad (6.20)$$

$$v^* = 0 \quad \longrightarrow \quad v = \bar{v} \quad (6.21)$$

$$v^{*'} = \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad v' = \bar{\theta} \quad (6.22)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Discretización en Elementos Finitos} & u = \mathbf{N}_1 \bar{u} \quad u^* = \mathbf{N}_1 \bar{u}^* \\ & v = \mathbf{N}_3 \bar{v} \quad v^* = \mathbf{N}_3 \bar{v}^* \\ & \theta = \mathbf{N}'_3 \bar{\theta} \quad \theta^* = \mathbf{N}'_3 \bar{\theta}^* \end{array} \quad (6.23)$$

donde \mathbf{N}'_3 representa $\frac{\mathbf{N}_3}{d\xi}$ con $\xi = \frac{x}{L}$

La matriz de rigidez del elemento viga 2D se expresa

$$[{}^1\mathbf{k} + {}^1\mathbf{k}_g] \bar{\mathbf{u}} = {}^2\mathbf{f} - {}^1\mathbf{f}$$

Matriz de rigidez lineal:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} & 4\frac{EI_z}{L} & 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} & 2\frac{EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & -6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & -6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} & 2\frac{EI_z}{L} & 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} & 4\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

Matriz de rigidez geométrica:

$$\mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} \frac{F_{xb}}{L} & 0 & -\frac{M_{za}}{L} & -\frac{F_{xb}}{L} & 0 & -\frac{M_{zb}}{L} \\ 0 & \frac{6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & 0 & -\frac{6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} \\ -\frac{M_{za}}{L} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{2}{15} \frac{F_{xb}(AL^2+30I_z)}{AL} & \frac{M_{za}}{L} & -\frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{1}{30} \frac{F_{xb}(-AL^2+60I_z)}{AL} \\ -\frac{F_{xb}}{L} & 0 & \frac{M_{za}}{L} & \frac{F_{xb}}{L} & 0 & \frac{M_{zb}}{L} \\ 0 & -\frac{6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & -\frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & 0 & \frac{6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & -\frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} \\ -\frac{M_{zb}}{L} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{1}{30} \frac{F_{xb}(-AL^2+60I_z)}{AL} & \frac{M_{zb}}{L} & -\frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{2}{15} \frac{F_{xb}(AL^2+30I_z)}{AL} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

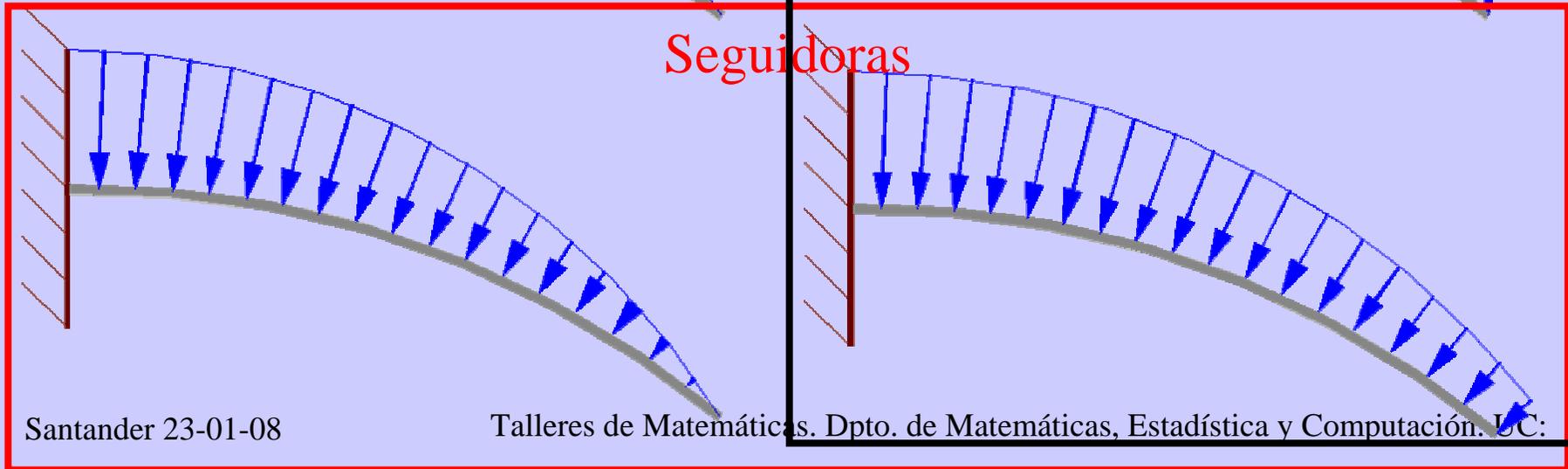
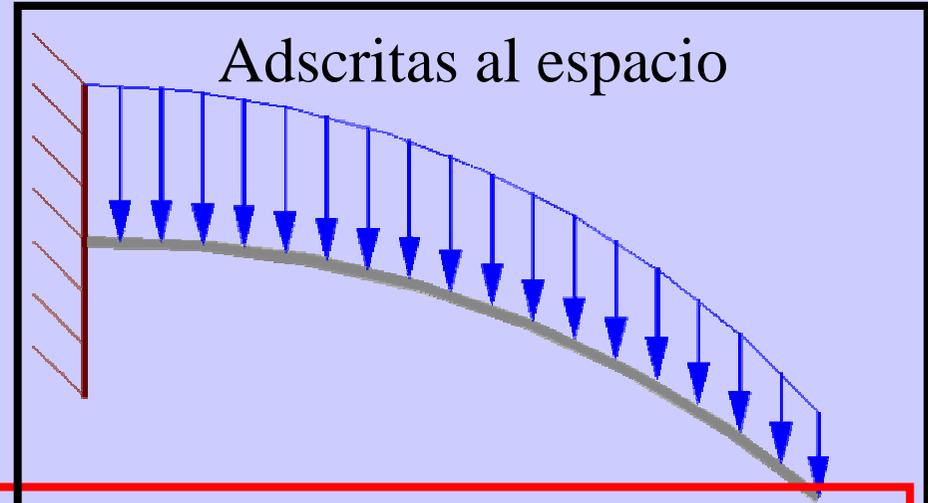
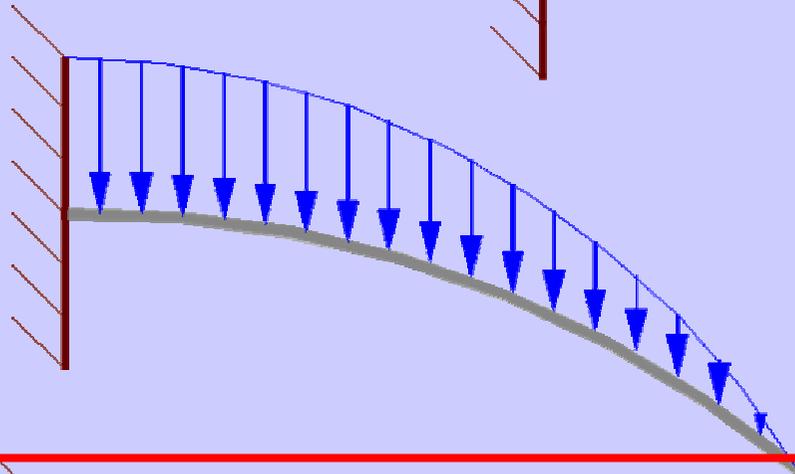
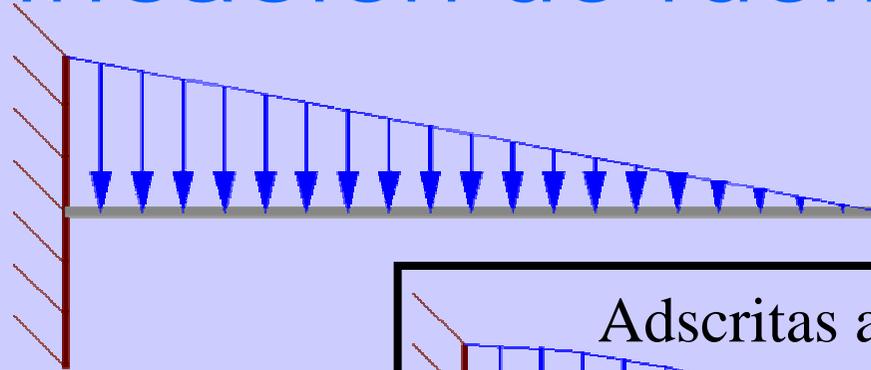
Se observa que las matrices de rigidez anteriores son simétricas como corresponde a un problema conservativo (autoadjunto).

ACCIONES. MATRIZ DE RIGIDEZ DE CARGAS

ACCIONES

- Peso del tubo más lastres
- Peso del lastre interior de agua
- Empuje de Arquímedes
 - Simulación como peso sumergido
 - Simulación mediante muelles elásticos no lineales
 - Simulación mediante matrices de carga de persecución
- Acción de la corriente
 - Perfil parabólico. Únicamente velocidad horizontal
- Análisis del oleaje
 - Análisis dinámico. Movimiento orbital función de x , y , t

Clasificación de fuerzas



Fuerzas de dirección constante

Fuerzas equivalentes en los nudos del elemento se deducen usando el PTV entre las configuraciones C_1 y C_2

$${}^2_1R = \int_{{}^1L} \mathbf{u}^{*T} {}^2_1\mathbf{p} {}^1ds \rightarrow \bar{\mathbf{u}}^{*T} {}^2_1\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{u}}^{*T} \int_{{}^1L} \bar{\mathbf{N}}^T {}^2_1\mathbf{p} {}^1ds \quad (6.53)$$

con $\mathbf{u}^* = (u^*, v^*, \theta^*)^T$ los movimientos virtuales de un punto de la directriz definido por la coordenada 1s y $\bar{\mathbf{u}}^*$ el vector de los desplazamientos virtuales en los nudos extremos a y b definido de acuerdo con la expresión (6.34). Ambos están relacionados por la ecuación $\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{u}}^*$.

Por consiguiente, las cargas equivalentes en los nudos se obtiene a partir de la expresión

$${}^2_1\bar{\mathbf{p}} = \int_{{}^1L} \bar{\mathbf{N}}^T {}^2_1\mathbf{p} {}^1ds \quad (6.54)$$

siendo las fuerzas distribuidas y las equivalentes en los nudos

$${}^2_1\mathbf{p} = \begin{bmatrix} {}^2_1p_x \\ {}^2_1p_y \\ {}^2_1m_z \end{bmatrix}, \quad {}^2_1\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} {}^2_1p_{xa} \\ {}^2_1p_{ya} \\ {}^2_1m_{za} \\ {}^2_1p_{xb} \\ {}^2_1p_{yb} \\ {}^2_1m_{zb} \end{bmatrix}$$

con ${}^2_1\bar{\mathbf{p}} = {}^2_1\mathbf{p}({}^1\mathbf{x}_1, {}^1\mathbf{x}_2)$.

Fuerzas seguidoras

Estas fuerzas se expresan como ${}^2_1\mathbf{P} = {}^2_1\mathbf{P}(\mathbf{u}, {}^2\mathbf{x}_1, {}^2\mathbf{x}_2) = {}^2_1\mathbf{P}(\mathbf{u}, {}^2\mathbf{x}_i)$ con $i = 1, 2$.
Desarrollo en serie de Taylor en los desplazamientos conduce ($i=1,2$):

$${}^2_1\mathbf{P}(\mathbf{u}, {}^2\mathbf{x}_i) = {}^2_1\mathbf{P}(\mathbf{0}, {}^1\mathbf{x}_i) + \left[\frac{\partial {}^2_1\mathbf{P}(\mathbf{u}, {}^1\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \right] \mathbf{u} + \left[\frac{\partial {}^2_1\mathbf{P}(\mathbf{u}, {}^1\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} \right] \mathbf{u}$$

Aplicando el PTV y la discretización en EF como en el caso anterior:

$${}^2_1\bar{\mathbf{P}} = \int_{^1L} \bar{\mathbf{N}}^T {}^2_1\mathbf{P}|_0 {}^1ds + \left[\int_{^1L} \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial {}^2_1\mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_0 \bar{\mathbf{N}} {}^1ds \right] \bar{\mathbf{u}} + \left[\int_{^1L} \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial {}^2_1\mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{u}} \Big|_0 \bar{\mathbf{N}} {}^1ds \right] \bar{\mathbf{u}}$$

es decir ${}^2_1\bar{\mathbf{P}} = {}^2_1\bar{\mathbf{P}}_0 + \mathbf{k}_{L1}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{k}_{L2}\bar{\mathbf{u}}$

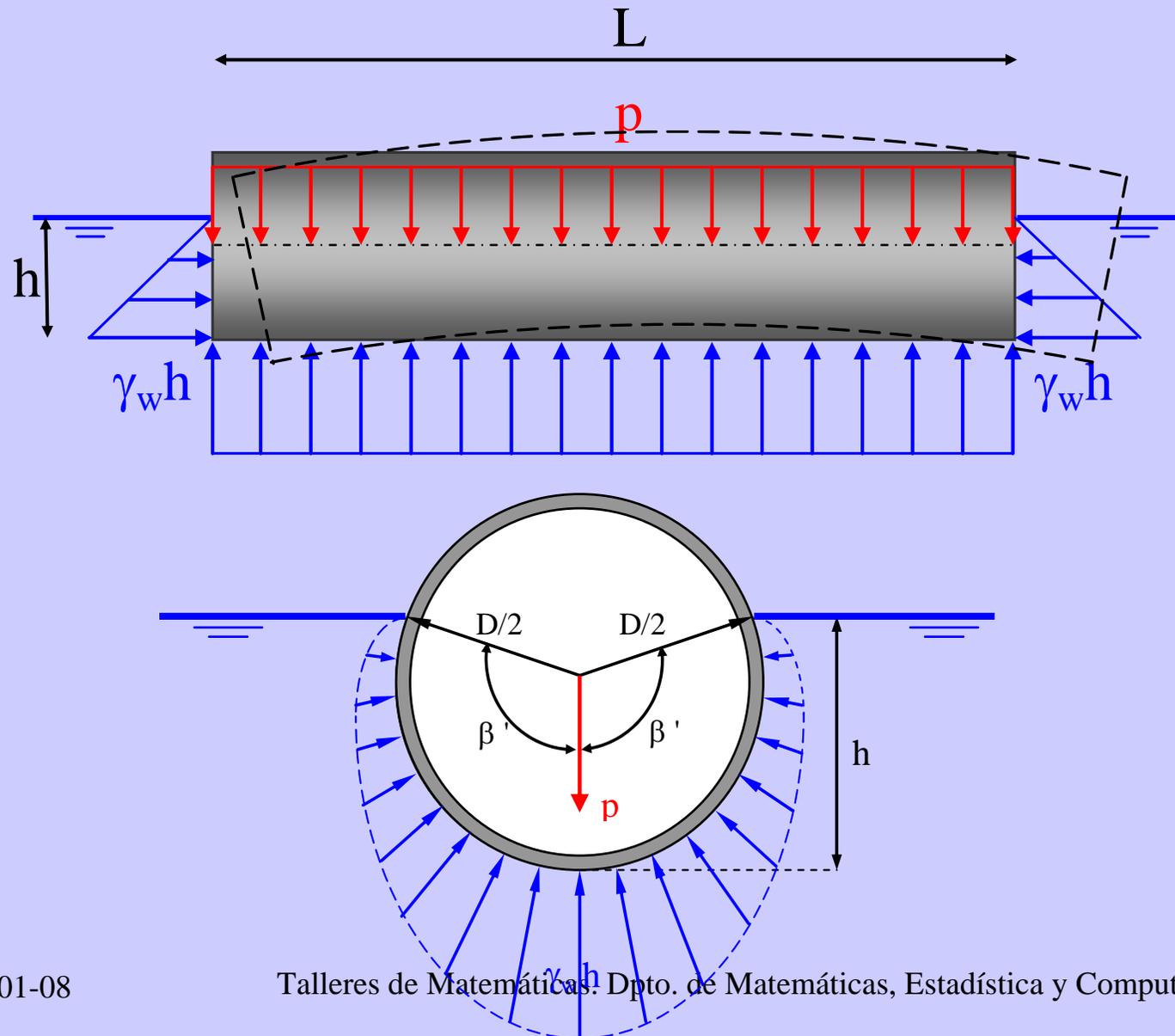
$${}^2_1\bar{\mathbf{P}}_0 = {}^2_1\bar{\mathbf{P}} = \int_{^1L} \bar{\mathbf{N}}^T {}^2_1\mathbf{P}|_0 {}^1ds$$

$$\mathbf{k}_{L1} = \int_{^1L} \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial {}^2_1\mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_0 \bar{\mathbf{N}} {}^1ds$$

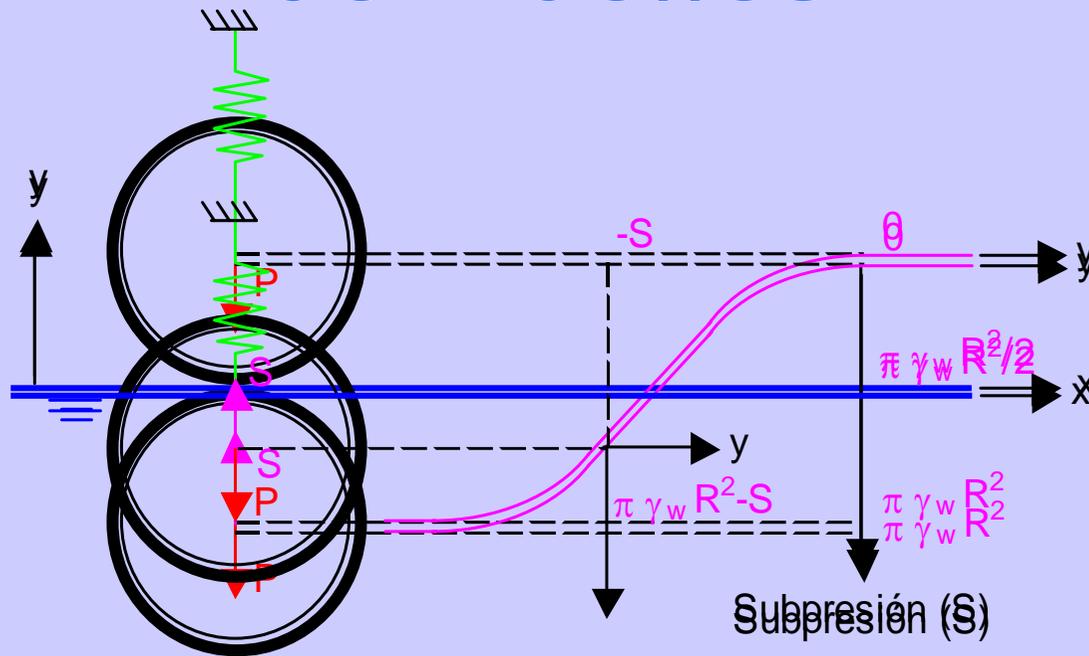
$$\mathbf{k}_{L2} = \int_{^1L} \bar{\mathbf{N}}^T \frac{\partial {}^2_1\mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{u}} \Big|_0 \bar{\mathbf{N}} {}^1ds$$

Entonces las matrices de carga son

Acciones sobre el elemento



Acción hidrostática. Modelo de muelles



$$S = 0$$

$$S = \gamma_w R_e^2 \left[\arccos\left(\frac{y_c}{R_e}\right) - \frac{y_c}{R_e} \sqrt{1 - \left(\frac{y_c}{R_e}\right)^2} \right]$$

$$S = \gamma_w \pi R_e^2$$

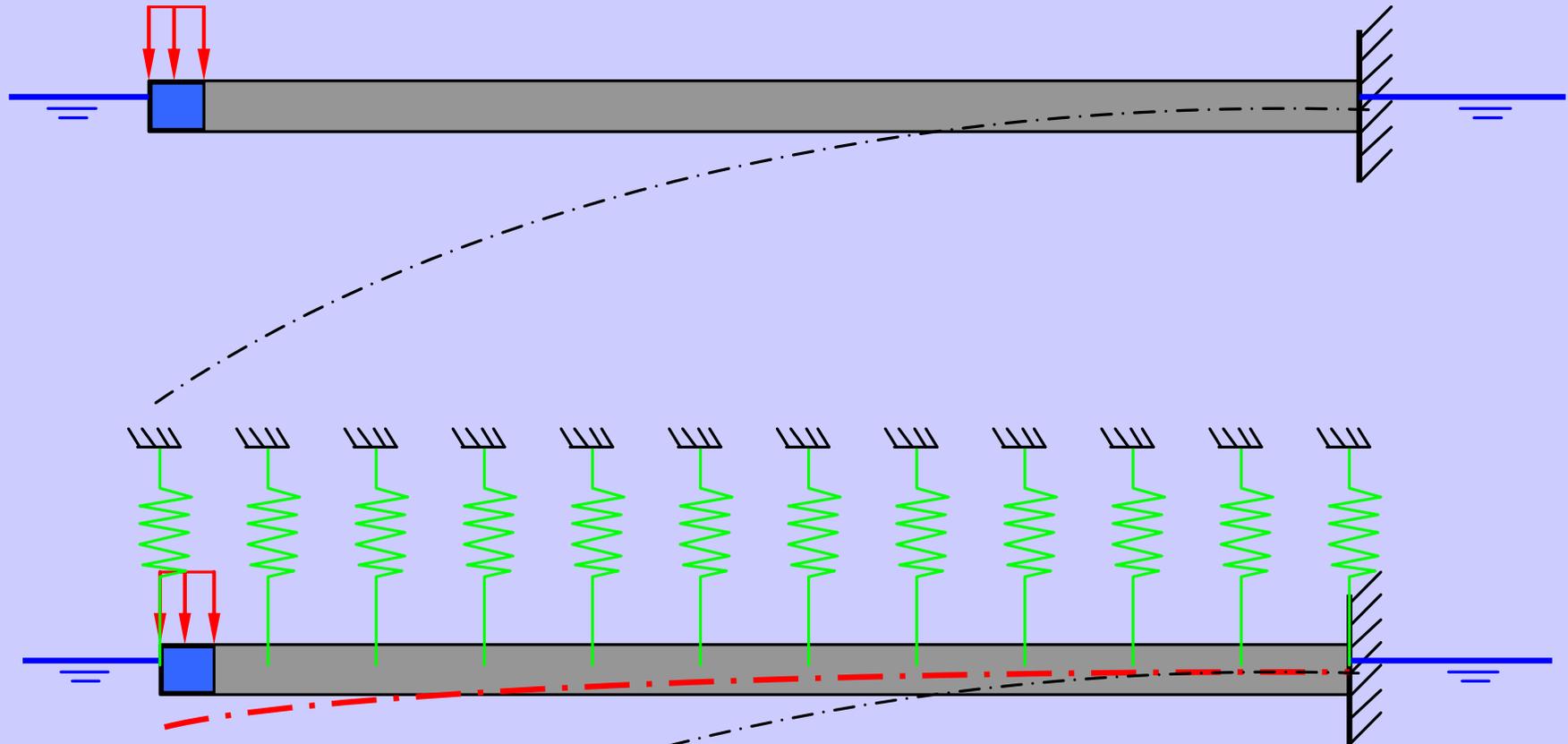
$S = \text{Subpresión} = P(y_c)$ S corresponde a la resultante de la subpresión

$\gamma_w = \text{Peso específico del agua del mar}$

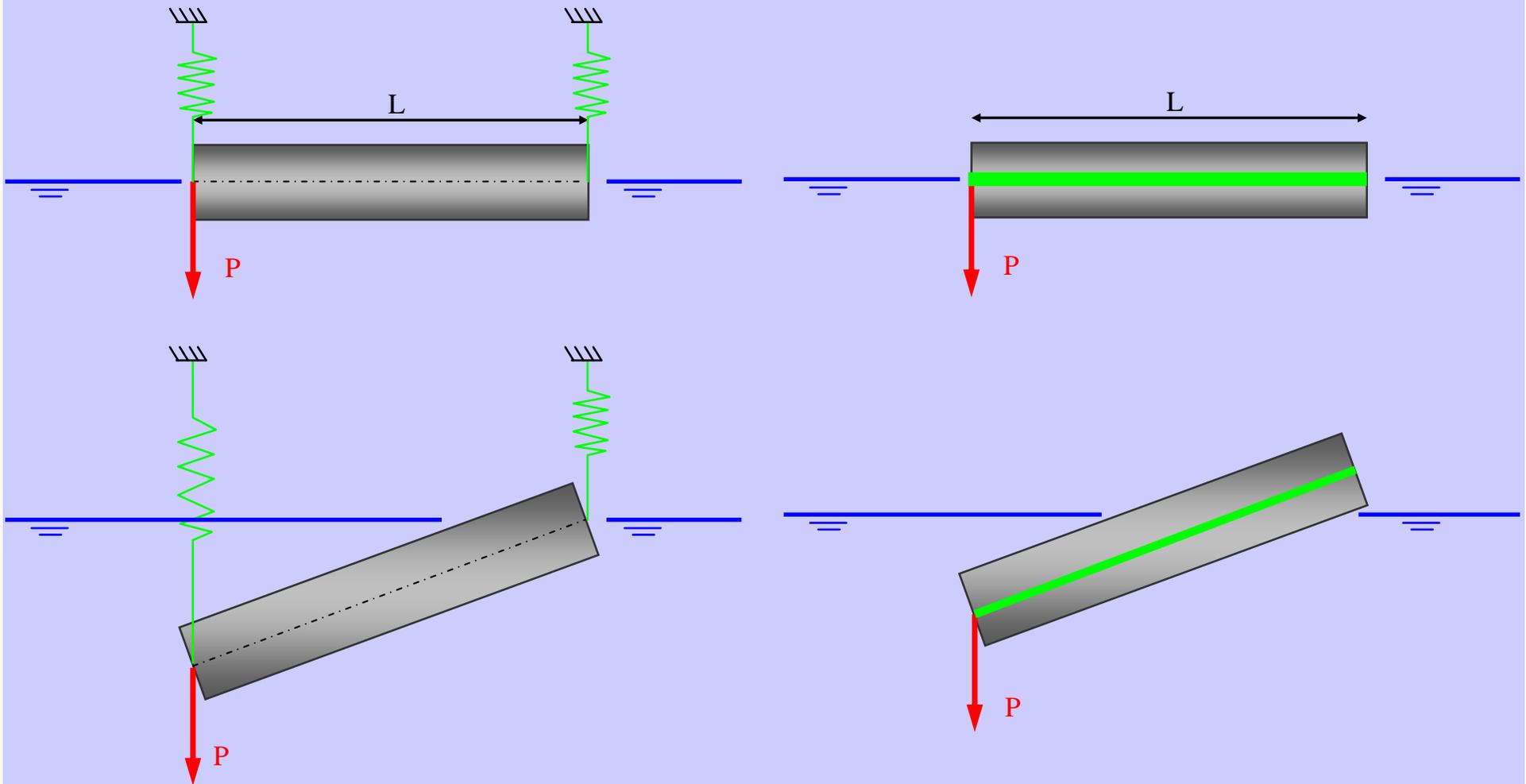
$R_e^2 = \text{Radio exterior del tubo}$

$y_c = \text{Coordenada del centro del tubo}$

Sección transversal. Modelo de muelles

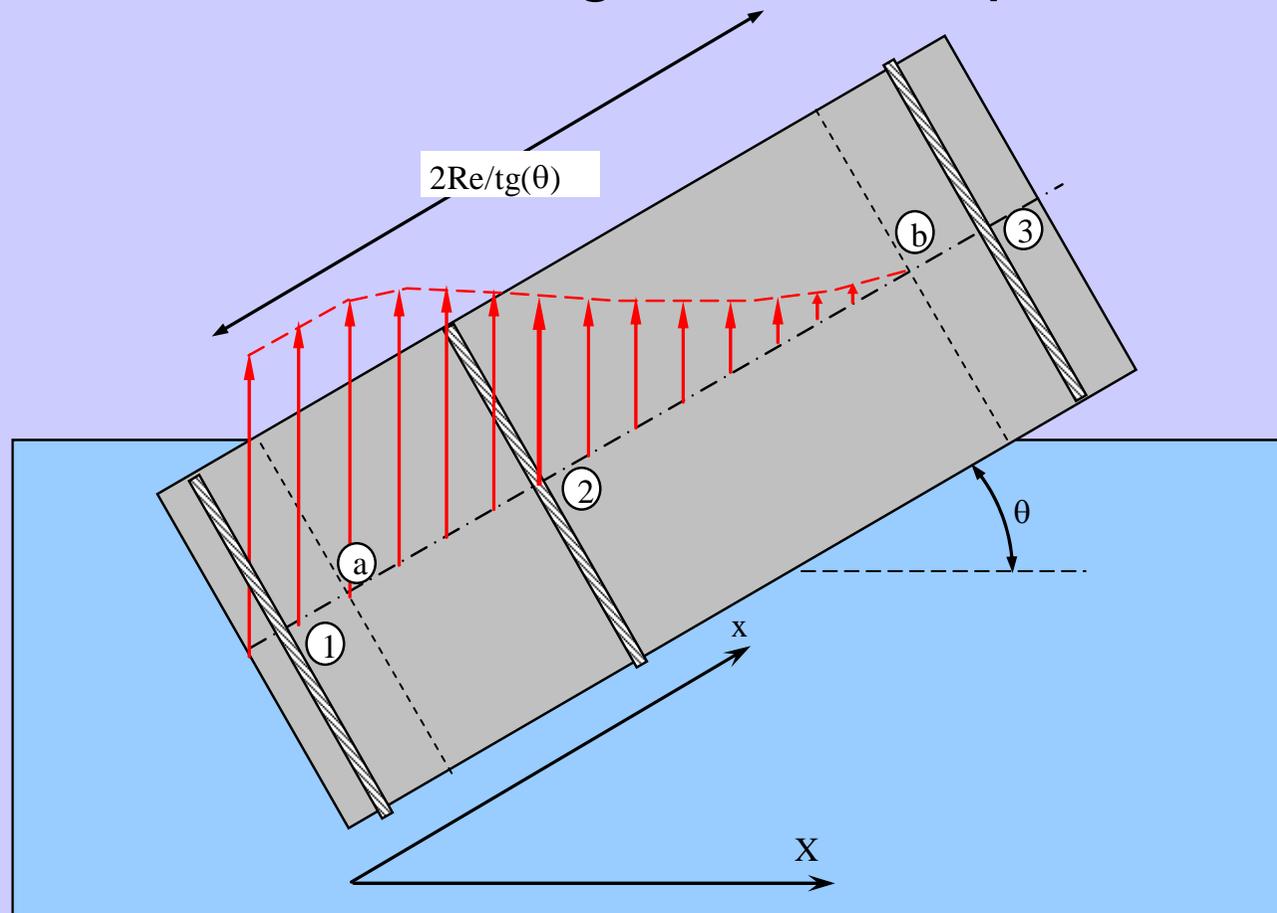


Elemento con fuerzas de persecución



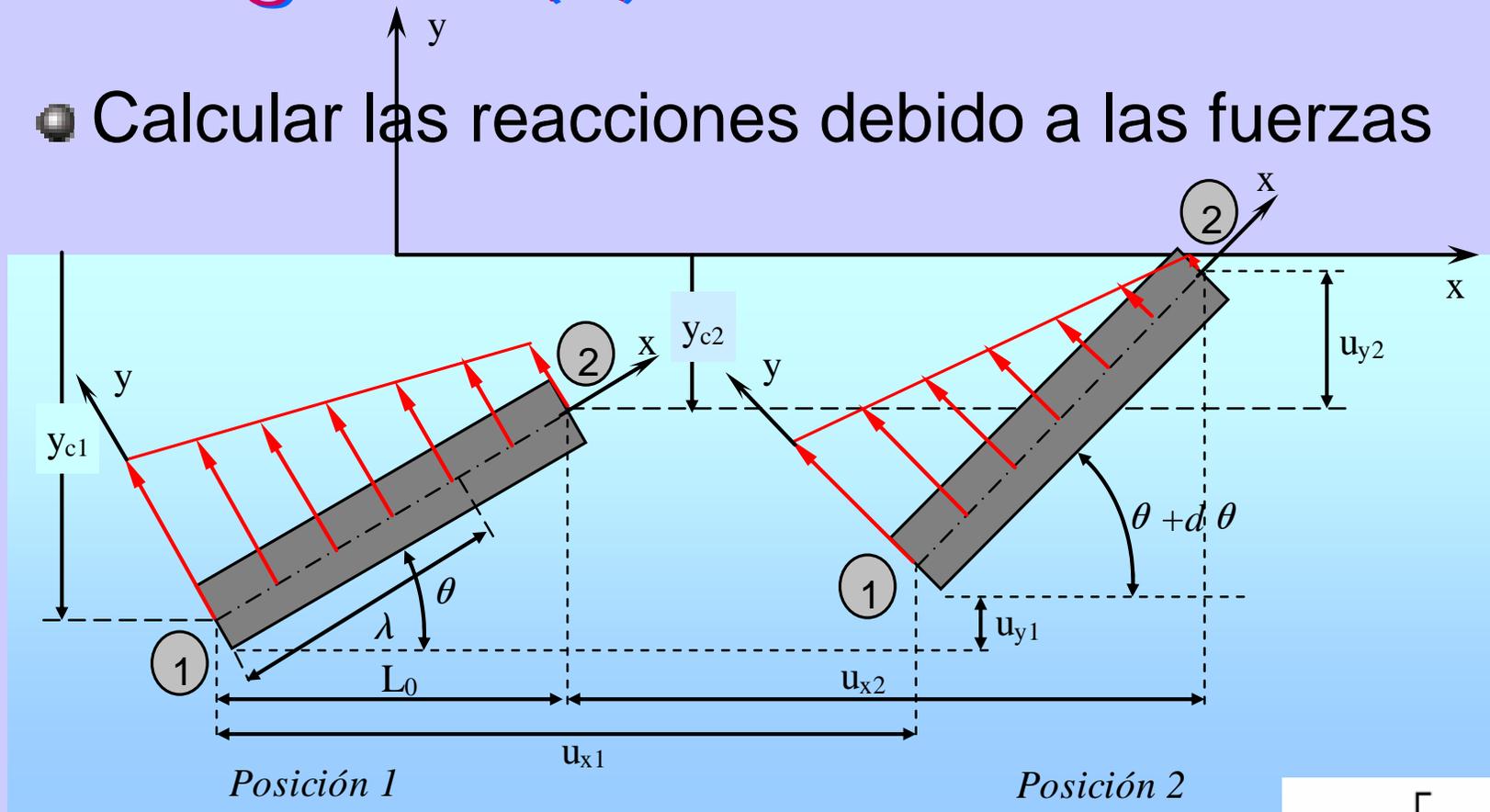
Obtención de la matriz de rigidez (1)

- Expresar las fuerzas actuantes sobre el elemento en la configuración de partida



Obtención de la matriz de rigidez (2)

- Calcular las reacciones debido a las fuerzas



$$p^1 = L \int_0^1 p_h(\lambda) (1 - \lambda) d\lambda = (2p_{h1} + p_{h2}) \frac{L}{6}$$

$$p^2 = L \int_0^1 p_h(\lambda) \lambda d\lambda = (p_{h1} + 2p_{h2}) \frac{L}{6}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -p^1 s \\ p^1 c \\ -p^2 s \\ p^2 c \end{bmatrix}$$

Obtención de la matriz de rigidez (3)

- Expresar la matriz de rigidez seguidora como la variación negativa de las cargas en función de los desplazamientos

$$-\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \begin{bmatrix} -p^1 s \\ p^1 c \\ -p^2 s \\ p^2 c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{\partial p^1}{\partial \mathbf{u}} s \\ \frac{\partial p^1}{\partial \mathbf{u}} c \\ -\frac{\partial p^2}{\partial \mathbf{u}} s \\ \frac{\partial p^2}{\partial \mathbf{u}} c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -p^1 \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}} \\ p^1 \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}} \\ -p^2 \frac{\partial s}{\partial \mathbf{u}} \\ p^2 \frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{L1} + \mathbf{k}_{L2}$$

$$c = \cos \theta = \frac{L_0 + u_{21}}{L}$$

$$s = \sin \theta = \frac{v_{21}}{L}$$

$$L^2 = (L_0 + u_{21})^2 + v_{21}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{21}} = c,$$

$$\frac{\partial s}{\partial u_{21}} = -\frac{1}{L} s c = \frac{1}{L} \bar{k}_{L1},$$

$$\frac{\partial c}{\partial u_{21}} = \frac{1}{L} s^2 = \frac{1}{L} \bar{k}_{L3},$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_{21}} = s$$

$$\frac{\partial s}{\partial v_{21}} = \frac{1}{L} c^2 = \frac{1}{L} \bar{k}_{L2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial v_{21}} = -\frac{1}{L} s c = \frac{1}{L} \bar{k}_{L4}$$

Obtención de la matriz de rigidez (4)

$$\frac{\partial p^\alpha}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} = \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial p^\alpha}{\partial y_1} v_1 + \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_2} u_2 + \frac{\partial p^\alpha}{\partial y_2} v_2$$

$$\alpha = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_1} &= \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial p^\alpha}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial u_{21}} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_1} = -p_\theta^\alpha \frac{1}{L} s^2 \\ \frac{\partial p^\alpha}{\partial y_1} &= \frac{\partial p^\alpha}{\partial y_1} + \frac{\partial p^\alpha}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial v_{21}} \frac{\partial v_{21}}{\partial y_1} = p_t^\alpha + p_\theta^\alpha \frac{1}{L} sc \\ \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_2} &= \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_2} + \frac{\partial p^\alpha}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial u_{21}} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_2} = p_\theta^\alpha \frac{1}{L} s^2 \\ \frac{\partial p^\alpha}{\partial y_2} &= \frac{\partial p^\alpha}{\partial y_2} + \frac{\partial p^\alpha}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial v_{21}} \frac{\partial v_{21}}{\partial y_2} = p_t^\alpha - p_\theta^\alpha \frac{1}{L} sc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_\theta^1 &= \frac{L}{6} [2p_{\theta_1} + p_{\theta_2}] \\ p_\theta^2 &= \frac{L}{6} [p_{\theta_1} + 2p_{\theta_2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_t^1 &= \frac{L}{6} [2p_{t_1} + p_{t_2}] \\ p_t^2 &= \frac{L}{6} [p_{t_1} + 2p_{t_2}] \end{aligned}$$

Obtención de la matriz de rigidez (5)

$$\mathbf{k}_{L1} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{L}p_{\theta}^1s^3 & \frac{L}{3}p_{t_1}s - \frac{1}{L}p_{\theta}^1s^2c & 0 & -\frac{1}{L}p_{\theta}^1s^3 & \frac{L}{6}p_{t_1}s + \frac{1}{L}p_{\theta}^2s^2c & 0 \\ -\frac{1}{L}p_{\theta}^1s^2c & \frac{L}{3}p_{t_1}c + \frac{1}{L}p_{\theta}^1sc^2 & 0 & \frac{1}{L}p_{\theta}^1s^2c & \frac{L}{6}p_{t_1}c - \frac{1}{L}p_{\theta}^2sc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L}p_{\theta}^2s^3 & \frac{L}{6}p_{t_2}s - \frac{1}{L}p_{\theta}^1s^2c & 0 & -\frac{1}{L}p_{\theta}^2s^3 & \frac{L}{3}p_{t_2}s + \frac{1}{L}p_{\theta}^2s^2c & 0 \\ -\frac{1}{L}p_{\theta}^2s^2c & \frac{L}{6}p_{t_2}c + \frac{1}{L}p_{\theta}^1sc^2 & 0 & \frac{1}{L}p_{\theta}^2s^2c & \frac{L}{3}p_{t_2}c - \frac{1}{L}p_{\theta}^2sc^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{L2} = -\frac{1}{L} \begin{bmatrix} p^1\bar{k}_{L1} & p^1\bar{k}_{L2} & 0 & -p^1\bar{k}_{L1} & -p^1\bar{k}_{L2} & 0 \\ -p^1\bar{k}_{L3} & -p^1\bar{k}_{L4} & 0 & p^1\bar{k}_{L3} & -p^1\bar{k}_{L4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^2\bar{k}_{L1} & p^2\bar{k}_{L2} & 0 & -p^2\bar{k}_{L1} & -p^2\bar{k}_{L2} & 0 \\ -p^2\bar{k}_{L3} & -p^2\bar{k}_{L4} & 0 & p^2\bar{k}_{L3} & -p^2\bar{k}_{L4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideraciones

- El cálculo es válido para deformaciones infinitesimales (pequeñas deformaciones)
- Por lo tanto se procede a un cálculo incremental
- Es necesario comprobar el equilibrio del estado deformado y limitar el error admisible \Rightarrow iteración
- Se disminuye mucho el número de iteraciones necesarias
- El cálculo es compatible con grandes movimientos

MODELO HIDRODINÁMICO

HIPÓTESIS HIDRODINÁMICAS

- El fluido se considera incomprensible.
- La teoría de la onda lineal se aplica al estudio de los movimientos del mar.
- El estado del mar se representa por el período T y el número de onda k .
- Los campos de velocidades y de aceleraciones generados por las ondas no se modifican por la existencia de la tubería.
- Las características de los campos de las velocidades y aceleraciones se obtienen suponiendo que el fondo marino es horizontal. En el caso de fondo marino inclinado, éste se divide en un número dado de divisiones. Dentro de cada división el fondo se considera horizontal.
- La propagación de las ondas marinas desde el mar hasta la costa se supone ocurre dentro del plano de la tubería.
- Las cargas se obtienen mediante la aplicación de las fórmula de Morison.

CONCEPTOS BÁSICOS

En el modelo hidrodinámico se considera el *fluido* como un medio material continuo deformable, incapaz de resistir tracciones y con escasa rigidez transversal. Los fluidos se denominan *perfectos* si se supone que las tensiones tangenciales viscosas son nulas y *reales* cuando se consideran estas tensiones.

El movimiento de un fluido puede ser *laminar* si está ordenado por capas y *turbulento* si se permite que el movimiento de las partículas abandonar su alineación dentro de una capa y saltar en sentido transversal al movimiento principal.

Las propiedades que definen un fluido newtoniano se resumen en las dos diapositivas siguientes.

Propiedades de los fluidos newtonianos (I)

1. Las tensiones son proporcionales a las velocidades de deformación.
2. El cociente entre tensiones tangenciales y velocidades de deformación es constante a través del fluido e igual en todas direcciones. Este cociente se denomina viscosidad dinámica:

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{dv_f}{dr}} \quad (3.17)$$

siendo r el recorrido de las partículas, τ la tensión tangencial y v_f la velocidad tangencial del fluido.

Como consecuencia, se admite en el fluido newtoniano, la igualdad de sus propiedades en cualquier dirección y el principio de superposición, expresados ambos como sigue:

- El medio es isótropo
- El fluido es de Boltzman, es decir, admite el principio de superposición.

Propiedades de los fluidos newtonianos (II)

3. Las tensiones normales se transmiten hidrostáticamente, es decir, el tensor de tensiones normales, presiones, es esférico:
- El fluido es pascaliano.
 - El tensor de tensiones se puede expresar como suma del tensor de tensiones normales más el desviador de tensiones tangenciales de la forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.18)$$

siendo:

δ_{ij} Delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$)

τ_{ij} Componentes del desviador de tensiones tangenciales

Las ecuaciones constitutivas del fluido son:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (3.19)$$

expresando, cada una de las componentes del tensor de deformación e_{ij} como sigue:

$$e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (3.20)$$

Ecuación de la continuidad (3.27)

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho_w u_f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w v_f)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_w w_f)}{\partial z} \right] = 0 \quad u_f = \frac{du}{dt}; \quad v_f = \frac{dv}{dt}; \quad w_f = \frac{dw}{dt}$$

Si se adopta la hipótesis de que el agua puede considerarse un fluido incompresible ($\rho_w = cte$), y se expresa la variación de la masa como función de la variación de presión (p) mediante el módulo de elasticidad volumétrico, se escribe como:

$$E = \rho_w \frac{dp}{d\rho_w} \quad (3.30)$$

y la ecuación (3.27) se convierte en:

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} = 0 \quad (3.31)$$

Ecuación de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \frac{Du_f}{Dt} &= \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial u_f}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dv_f}{Dt} &= \frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial v_f}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial z^2} \right) \\ \frac{Dw_f}{Dt} &= \frac{\partial w_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial w_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial w_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial w_f}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_f}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

La ecuación de Navier-Stokes en el caso de fluidos irrotacionales y perfectos (no viscosos) se puede modificar introduciendo la función de tensión Φ e integrando respecto a la coordenada espacial y obtener la forma no estacionaria de la ecuación de Bernoulli

Ecuación de Bernoulli:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = f(t) \quad (3.47)$$

en donde p es la presión, g la aceleración de la gravedad, y la coordenada vertical y $f(t)$ una función arbitraria en el tiempo. Si el flujo se considera estacionario ($\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$) entonces se llega a la expresión usual del teorema de Bernoulli

$$p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho (u_f^2 + v_f^2 + w_f^2) = \text{constante} \quad (3.48)$$

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL OLEAJE

En general se suele suponer el problema bi-dimensional y se introduce la función de corriente (3.49) que satisface automáticamente las ecuaciones de continuidad

$$u_f = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_f = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.49)$$

La función de corriente debe satisfacer las ecuaciones 2-D de Navier-Stokes así como las condiciones de contorno. Estas para el caso simple de fondo del mar plano $y=-d$ con origen de coordenadas en el NMM, eje OX horizontal y eje OY vertical ascendente se escriben como sigue:

CONDICIONES DE BORDE

- Borde del fondo:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = -d \quad (3.50)$$

- Si existe un sólido rígido que se mueve a velocidad normal u_{fn} a su superficie:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_{fn} \quad \text{en la superficie del sólido} \quad (3.51)$$

- Condición cinemática en la superficie libre:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } y = \eta \quad (3.52)$$

con $y = \eta(x, y, t)$ la superficie libre.

- Condición dinámica en la superficie libre:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \rho g \eta = f(t) \quad (3.53)$$

que expresa la presión nula (atmosférica) en la superficie libre mediante la aplicación del teorema de Bernoulli.

Acc

$$\frac{d}{L} = \frac{1}{25}$$
$$\frac{d}{T^2} = 0,050$$
$$\frac{d}{gT^2} = 0,0155$$

$$\frac{d}{L} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d}{T^2} = 2,550$$
$$\frac{d}{gT^2} = 0,0792$$

Prof reducida Zona de transición Prof. indefinida

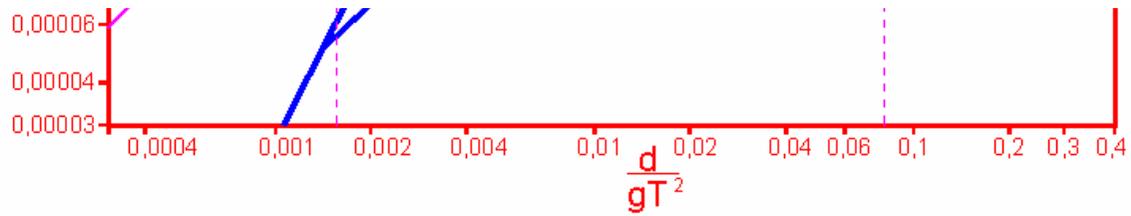
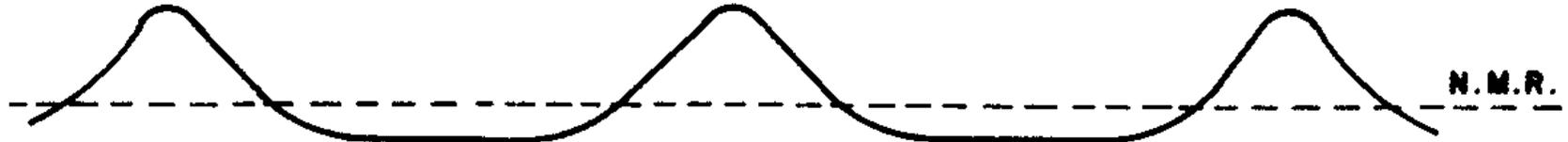
Sinusoidal



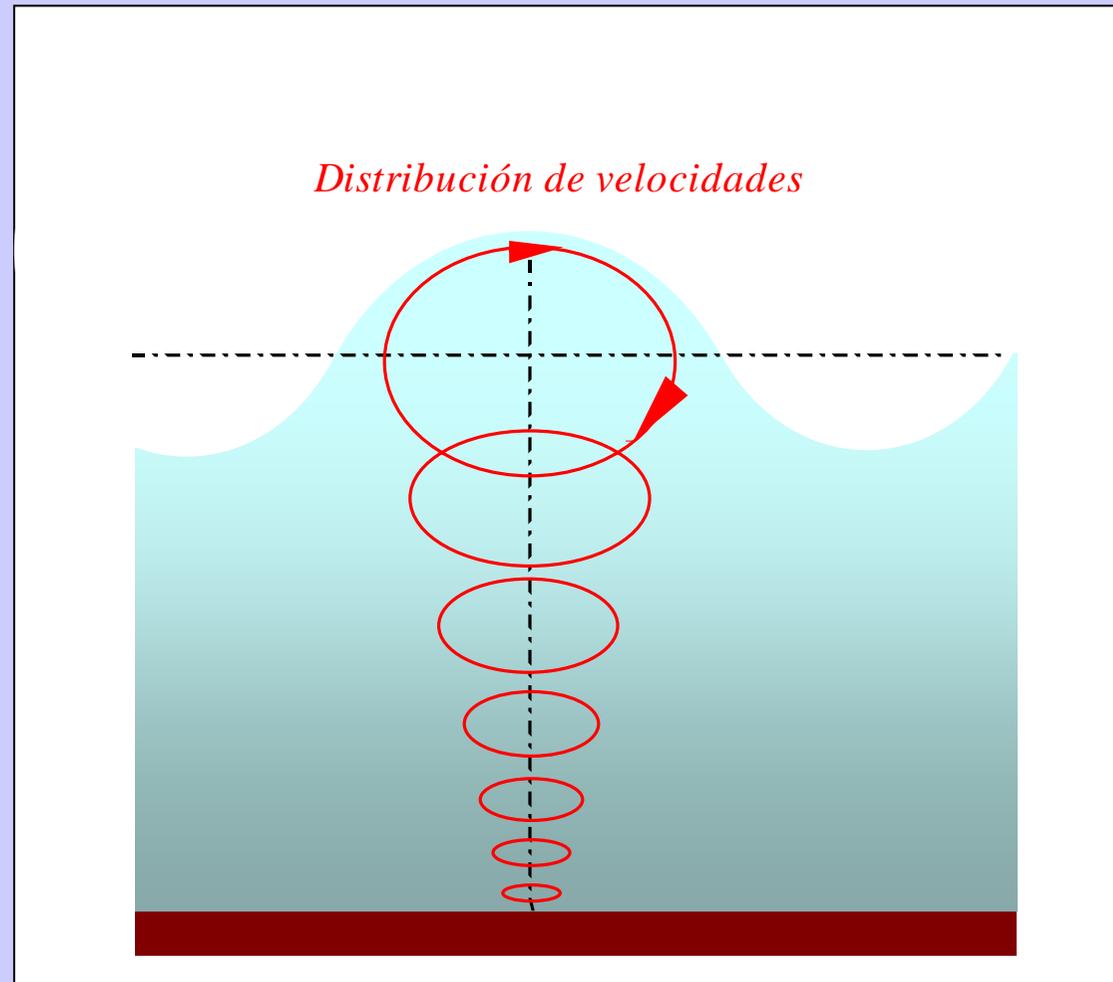
Trocoidal



Cnoidal



Teoría lineal de ondas

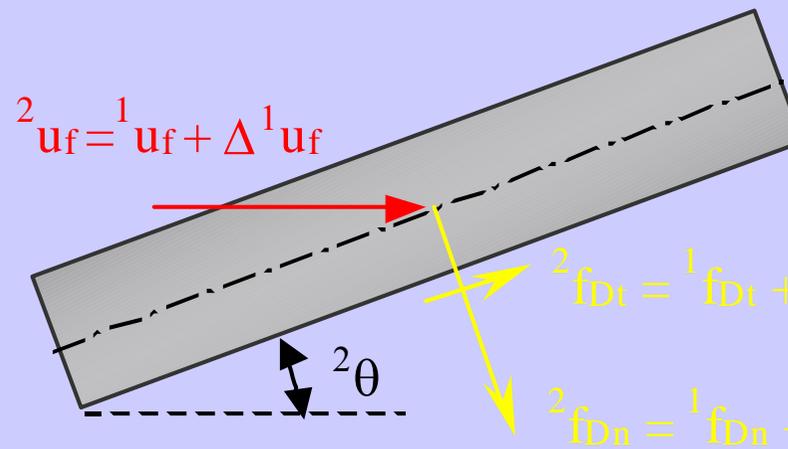
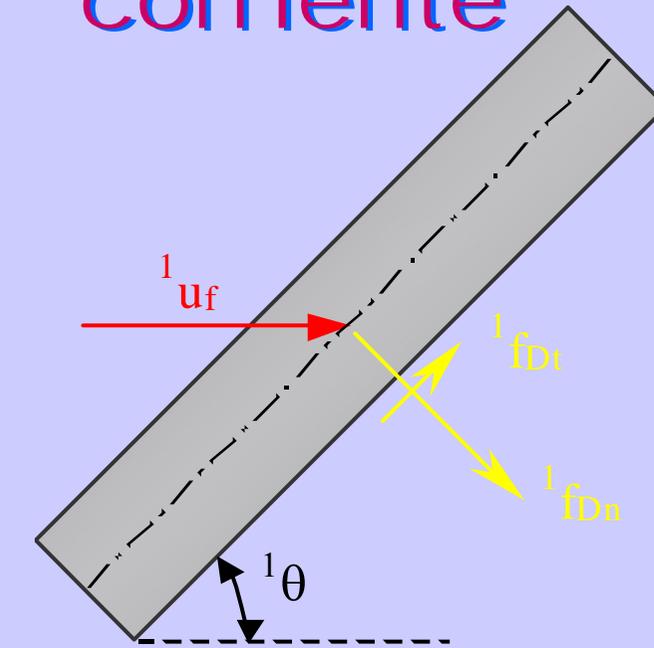
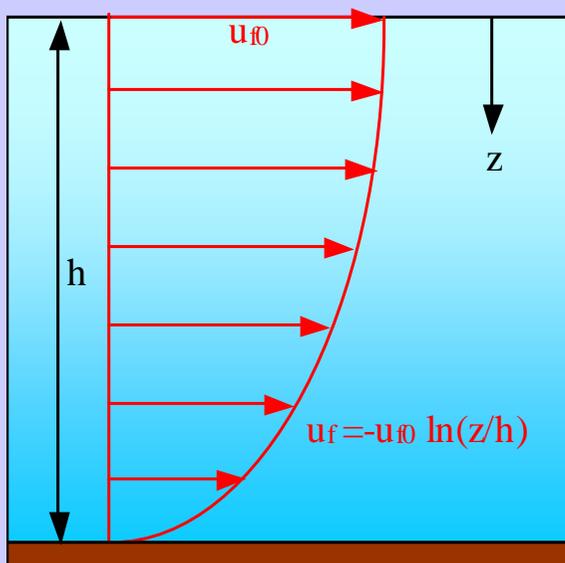


TEORÍA LINEAL DE AIRY

Profundidad relativa	Aguas poco profundas $\frac{d}{L} < \frac{1}{25}$	Zona de transición $\frac{1}{25} \leq \frac{d}{L} \leq \frac{1}{2}$	Profundidad indefinida $\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$
Superficie libre	$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right] = \frac{H}{2} \cos \theta_f$	$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right] = \frac{H}{2} \cos \theta_f$	$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right] = \frac{H}{2} \cos \theta_f$
Celeridad de la onda	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gd}$	$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$	$C = C_0 = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}$
Longitud de onda	$L = T\sqrt{gd} = CT$	$L = L_0 \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$	$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = C_0T$
Celeridad del grupo de ondas	$c_g = C = \sqrt{gd}$	$c_g = nC = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{4\pi d}{L \sinh \left(\frac{4\pi d}{L} \right)} \right]$	$c_g = \frac{1}{2} C = \frac{gT}{4\pi}$
Velocidad horizontal	$u_f = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \cos \theta_f$	$u_f = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\cosh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\cosh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \cos \theta_f$	$u_f = \frac{\pi H}{T} e^{\frac{2\pi z}{L}} \cos \theta_f$
Velocidad vertical	$v_f = \frac{H\pi}{T} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \sin \theta_f$	$v_f = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\cosh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \sin \theta_f$	$v_f = \frac{\pi H}{T} e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \theta_f$
Aceleración horizontal	$\dot{u}_f = \frac{H\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin \theta_f$	$\dot{u}_f = \frac{g\pi H}{L} \frac{\cosh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\cosh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \sin \theta_f$	$\dot{u}_f = 2H \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \theta_f$
Aceleración vertical	$\dot{v}_f = -\frac{H\pi}{T} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \sin \theta_f$	$\dot{v}_f = -\frac{g\pi H}{L} \frac{\sinh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\cosh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \cos \theta_f$	$\dot{v}_f = -2H \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \theta_f$
Desplazamiento horizontal	$u = -\frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin \theta_f$	$u = -\frac{H}{2} \frac{\cosh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\sinh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \sin \theta_f$	$u = -\frac{H}{2} e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \theta_f$
Desplazamiento vertical	$v = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \sin \theta_f$	$v = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\cosh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} \sin \theta_f$	$v = \frac{H}{2} e^{\frac{2\pi z}{L}} \sin \theta_f$
Presión subsuperficial	$\zeta = \rho_w g (\eta - z)$	$\zeta = \rho_w g \eta \frac{\cosh \left[\frac{2\pi(z+d)}{L} \right]}{\cosh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)} - \rho_g z$	$\zeta = \rho_w g \eta e^{\frac{2\pi z}{L}} - \rho_g z$

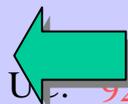
Profundidad relativa	Zona de transición $\frac{1}{25} \leq \frac{d}{L} \leq \frac{1}{2}$
Superficie libre	$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right] = \frac{H}{2} \cos(\theta)$
Celeridad de la onda	$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$
Longitud de onda	$L = L_0 \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$
Celeridad del grupo de ondas	$c_g = nC = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\frac{4\pi d}{L}}{\sinh\left(\frac{4\pi d}{L}\right)} \right]$
Velocidad horizontal	$u_f = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\cosh\left[\frac{2\pi(z+d)}{L}\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \cos \theta$
Velocidad vertical	$v_f = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh\left[\frac{2\pi(z+d)}{L}\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \sin \theta$
Aceleración horizontal	$\dot{u}_f = \frac{g\pi H}{L} \frac{\cosh\left[\frac{2\pi(z+d)}{L}\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \sin \theta$
Aceleración vertical	$\dot{v}_f = -\frac{g\pi H}{L} \frac{\sinh\left[\frac{2\pi(z+d)}{L}\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \cos \theta$

Campo de velocidades debidas a la corriente



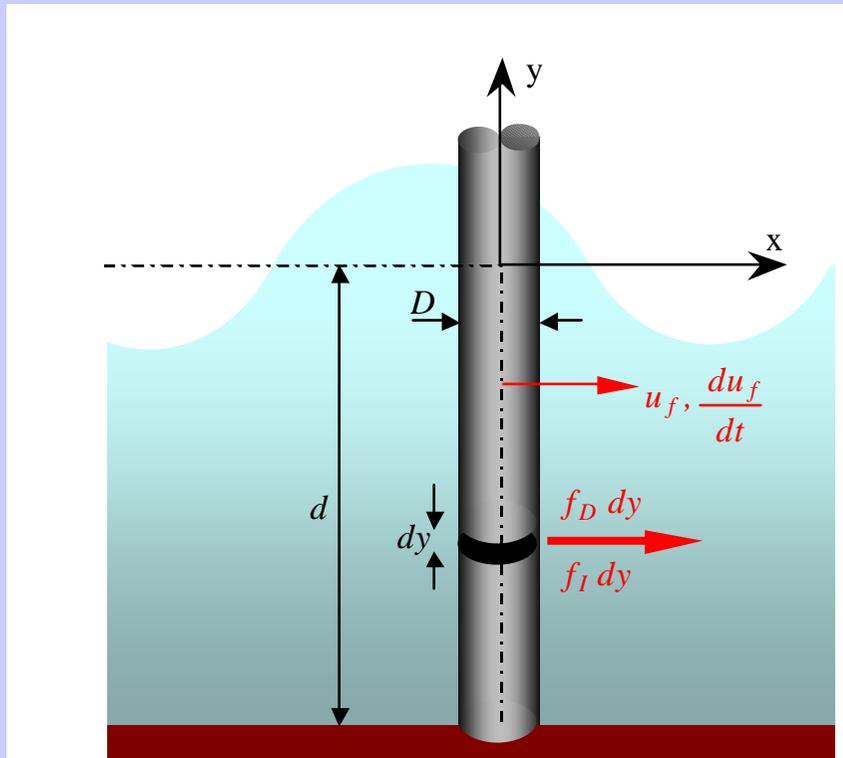
$${}^2f_{Dt} = {}^1f_{Dt} + \Delta {}^1f_{Dt\theta} + \Delta {}^1f_{Dtuf}$$

$${}^2f_{Dn} = {}^1f_{Dn} + \Delta {}^1f_{Dn\theta} + \Delta {}^1f_{Dnuf}$$



Ecuación de Morison (1)

$$f = f_D + f_I$$

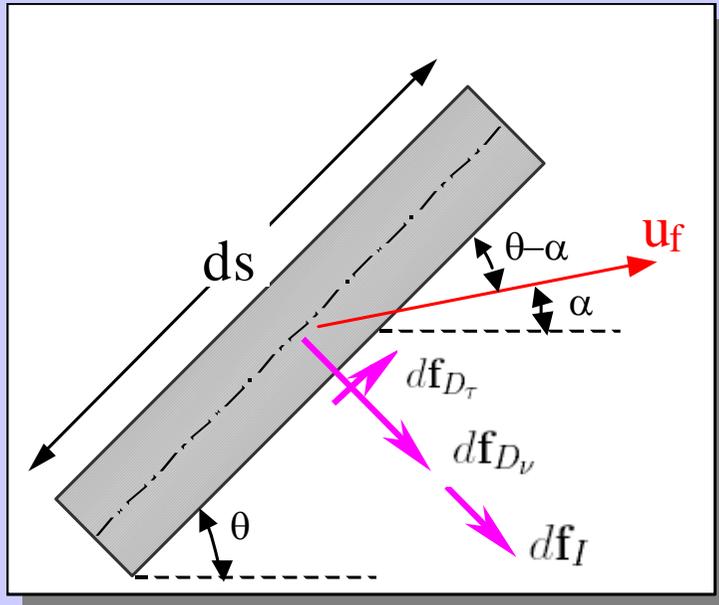


$$df_{D\nu} = \frac{1}{2} C_D \rho_w u_f^2 D ds$$

$$df_{D\tau} = C_t \rho_w \frac{D}{2} u_f^2 ds$$

$$df_I = C_M \rho_w \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial u_f}{\partial t} ds$$

Ecuación de Morison (2)

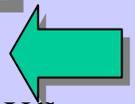


$$f = f_D + f_I$$

$$df_I = C_M \rho_w \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial u_f}{\partial t} \nu ds$$

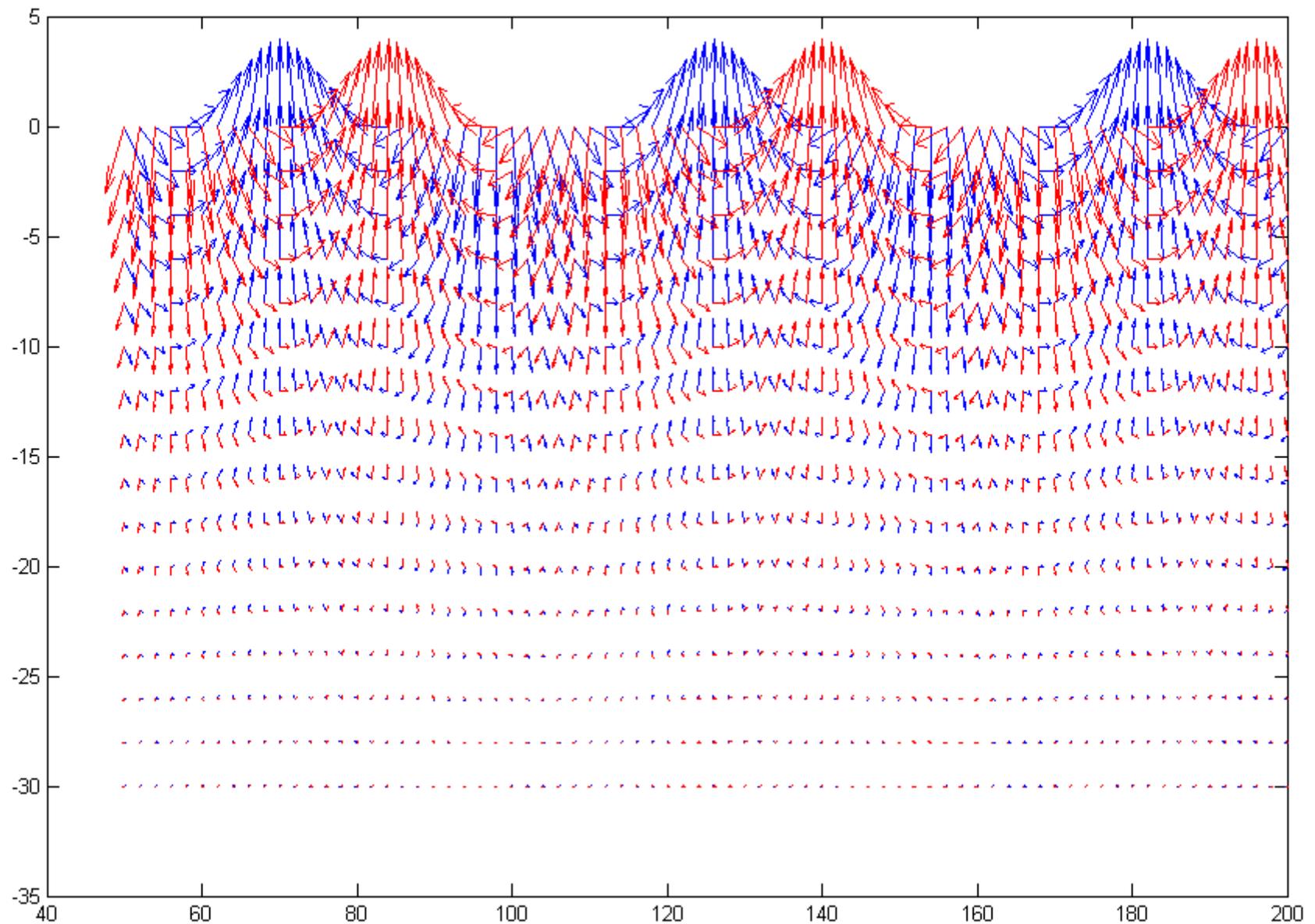
$$df_{D_v} = \frac{1}{2} C_D \rho_w u_f^2 D |\sin(\alpha - \theta)| \sin(\alpha - \theta) \nu ds$$

$$df_{D_\tau} = C_t \rho_w \frac{D}{2} u_f^2 \cos(\alpha - \theta) \tau ds$$

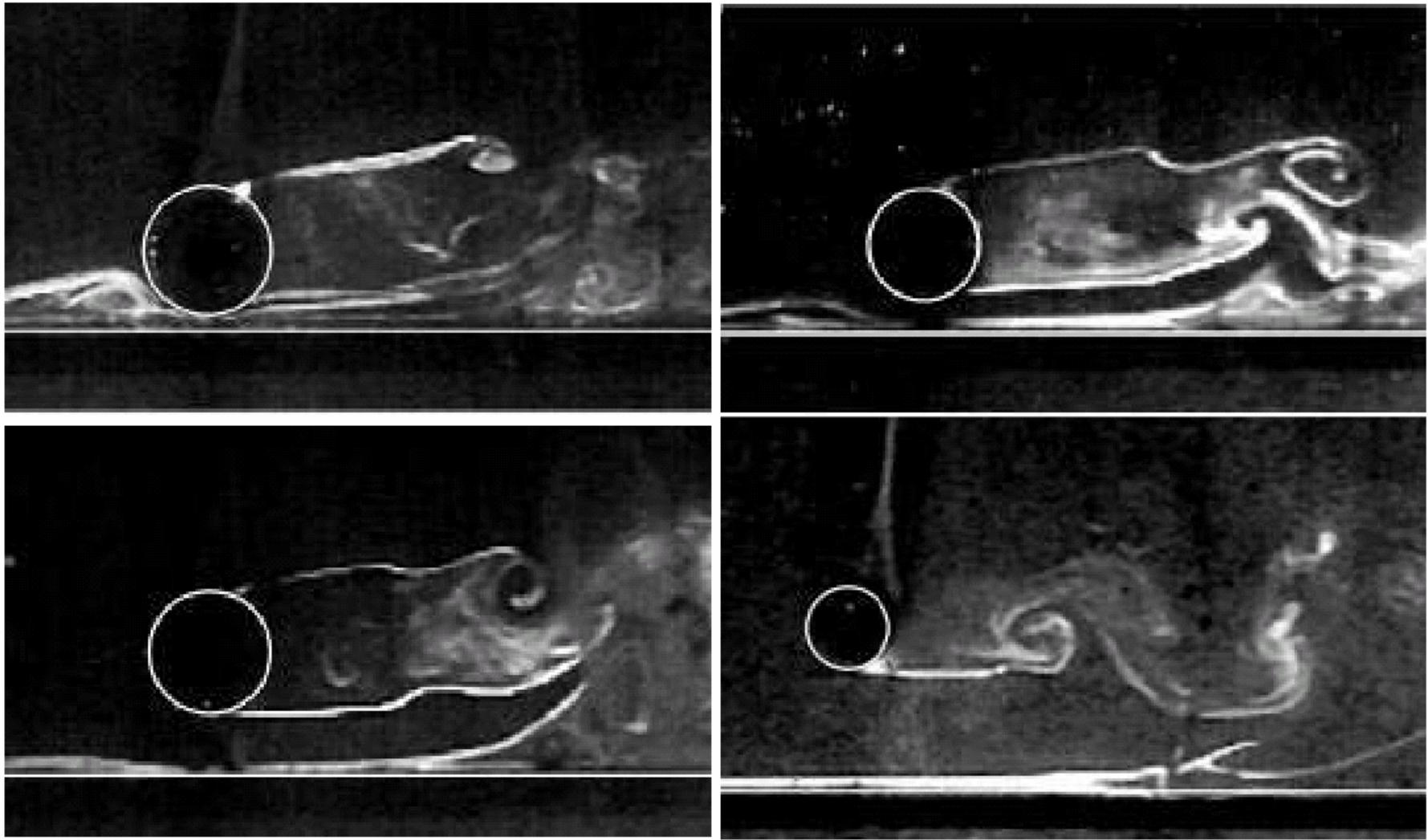


$H = 1 \text{ m}$

$T = 6 \text{ s}$



Trabajos posteriores

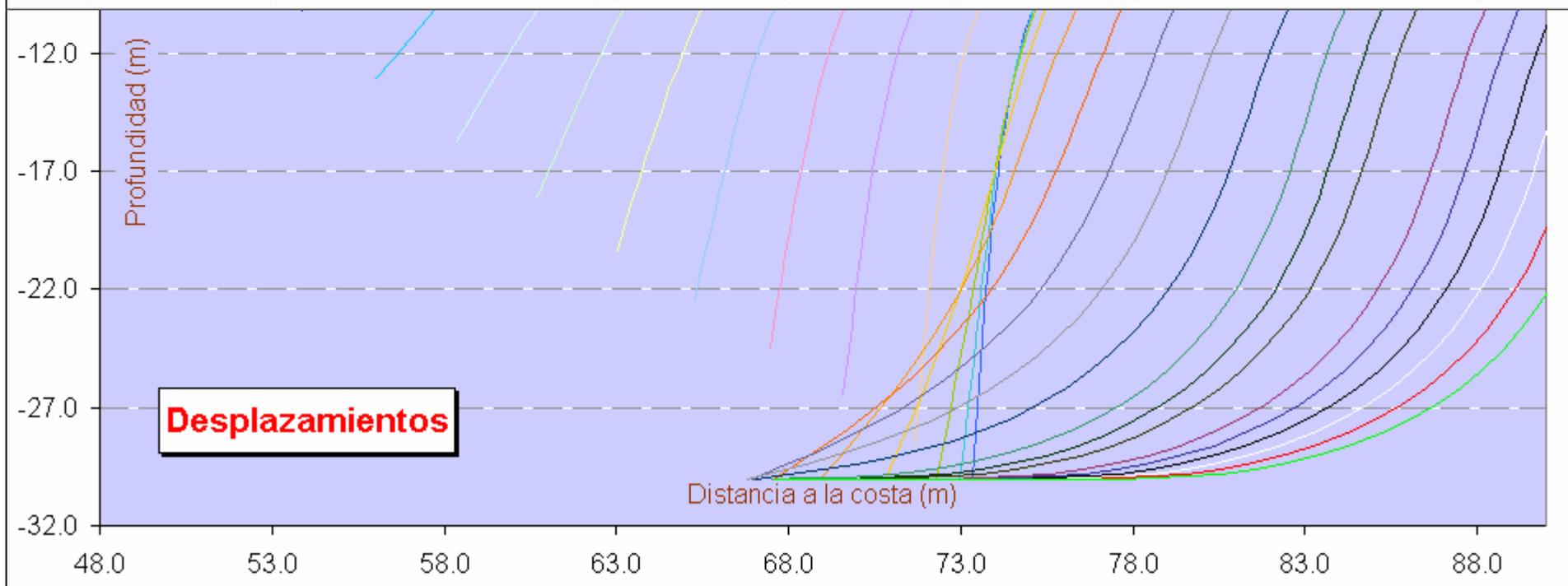
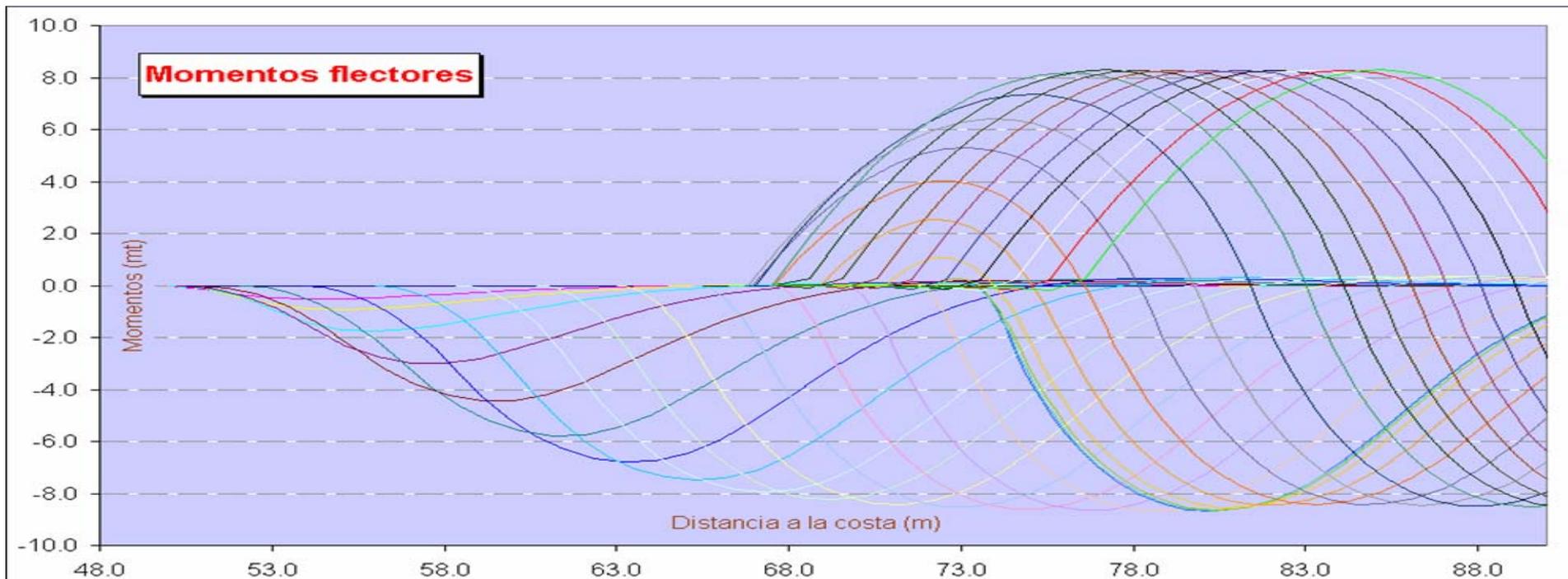


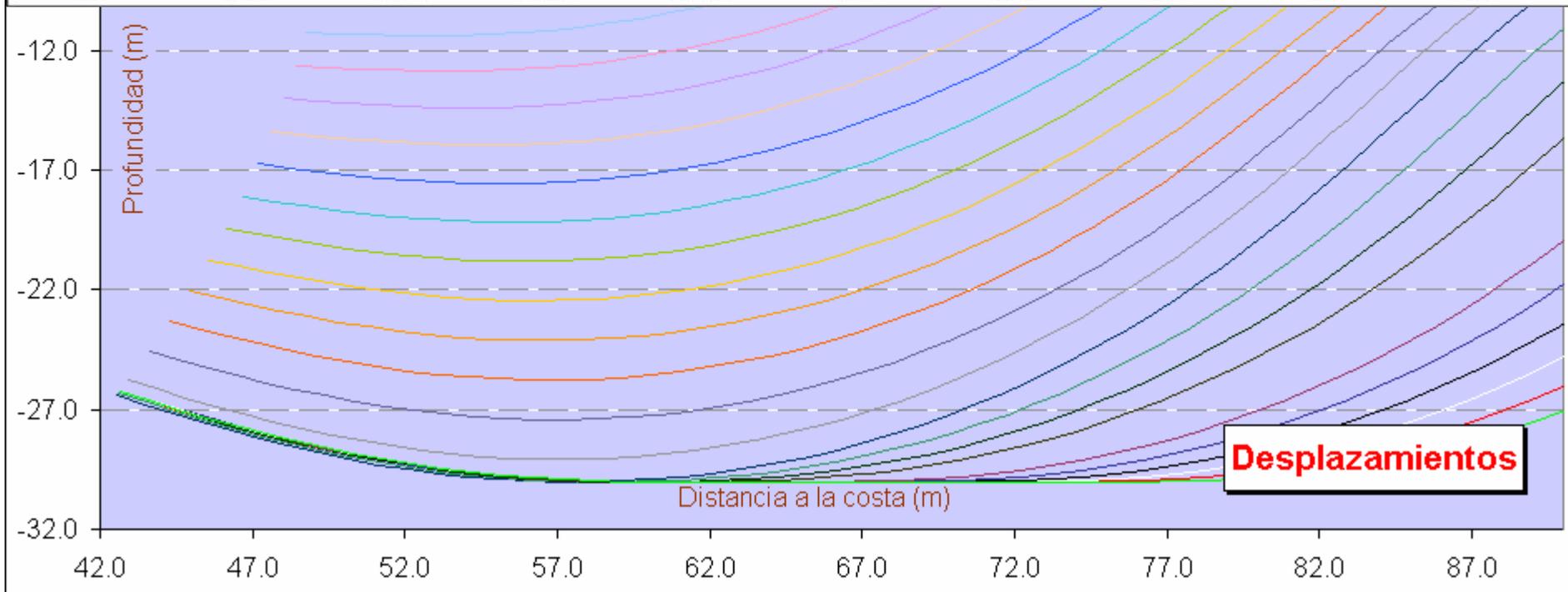
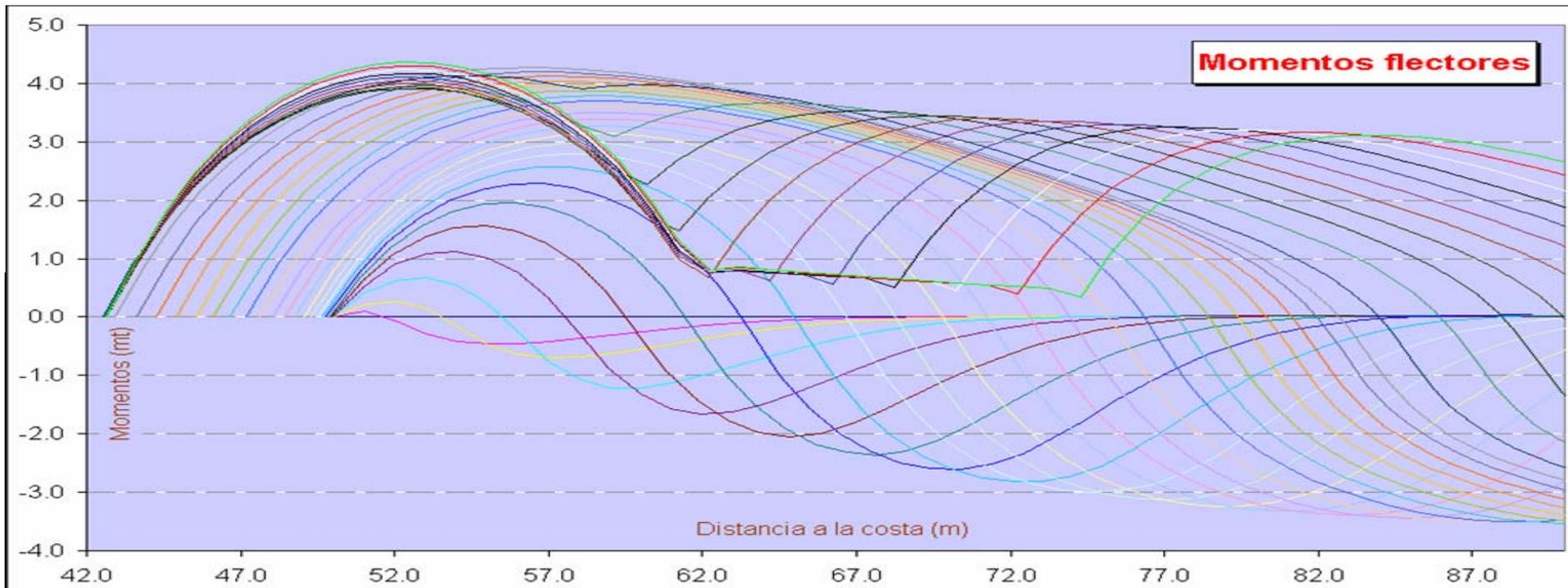
Resultados

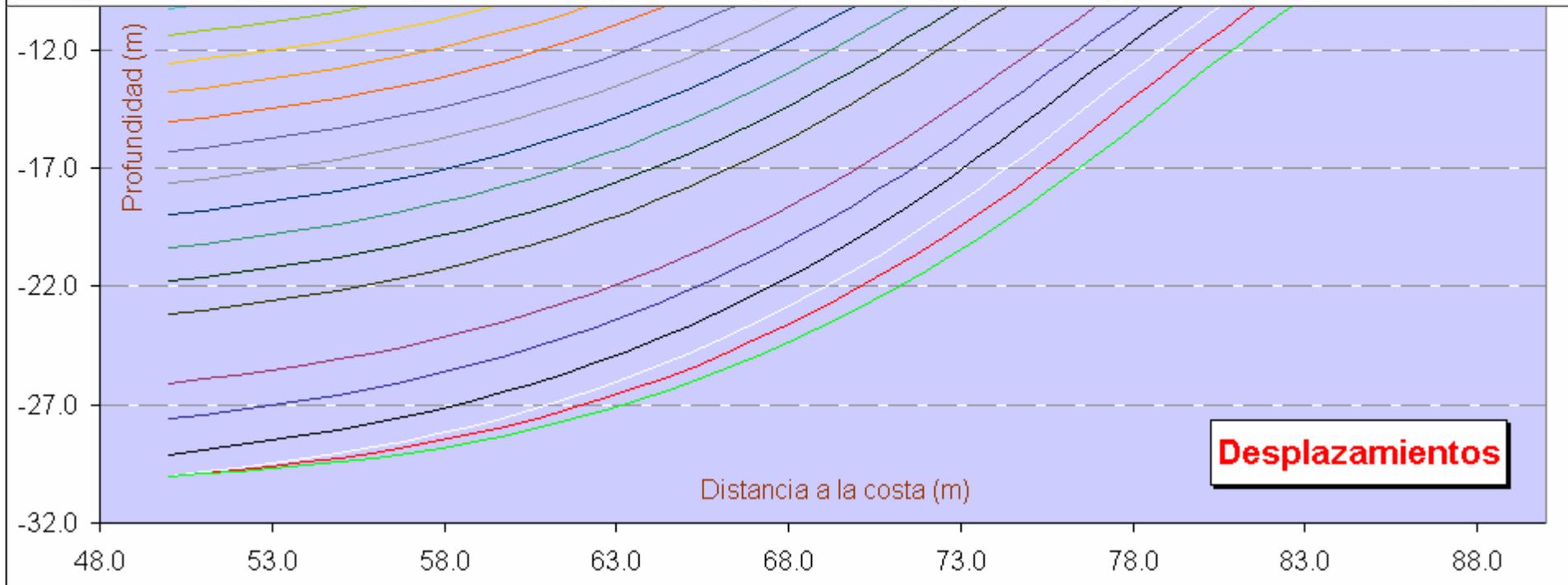
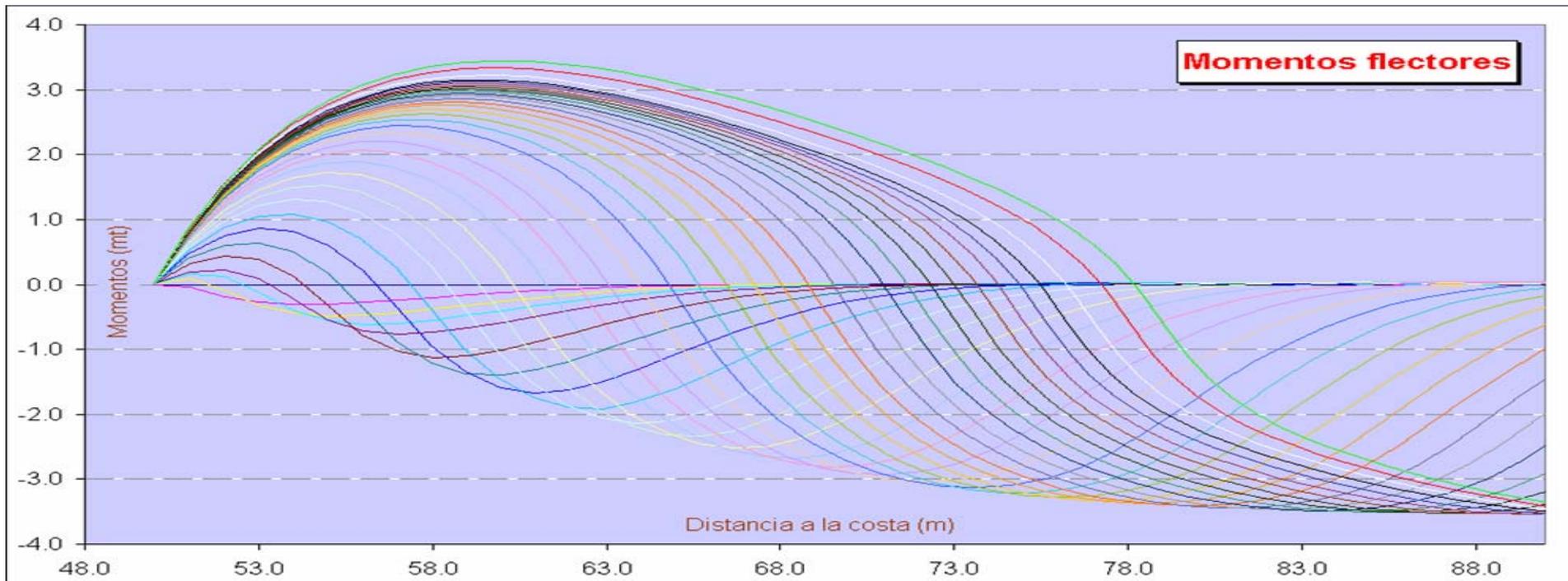
Ejemplo de aplicación

(Datos del problema)

Radio interior del tubo	0.375 m
Radio exterior del tubo	0.400 m
Peso en seco del tubo + lastres	0.26833 t/m
Longitud total del emisario	120 m
Longitud de cada elemento	1 m
Profundidad del fondo marino	30.00 m
Pendiente del fondo	0.000 %
Módulo de elasticidad del tubo	20000 t/m ²
Tensión admisible de diseño	500 t/m ²
Límite elástico	2500 t/m ²
Peso específico del agua del mar	1.026 t/m ³

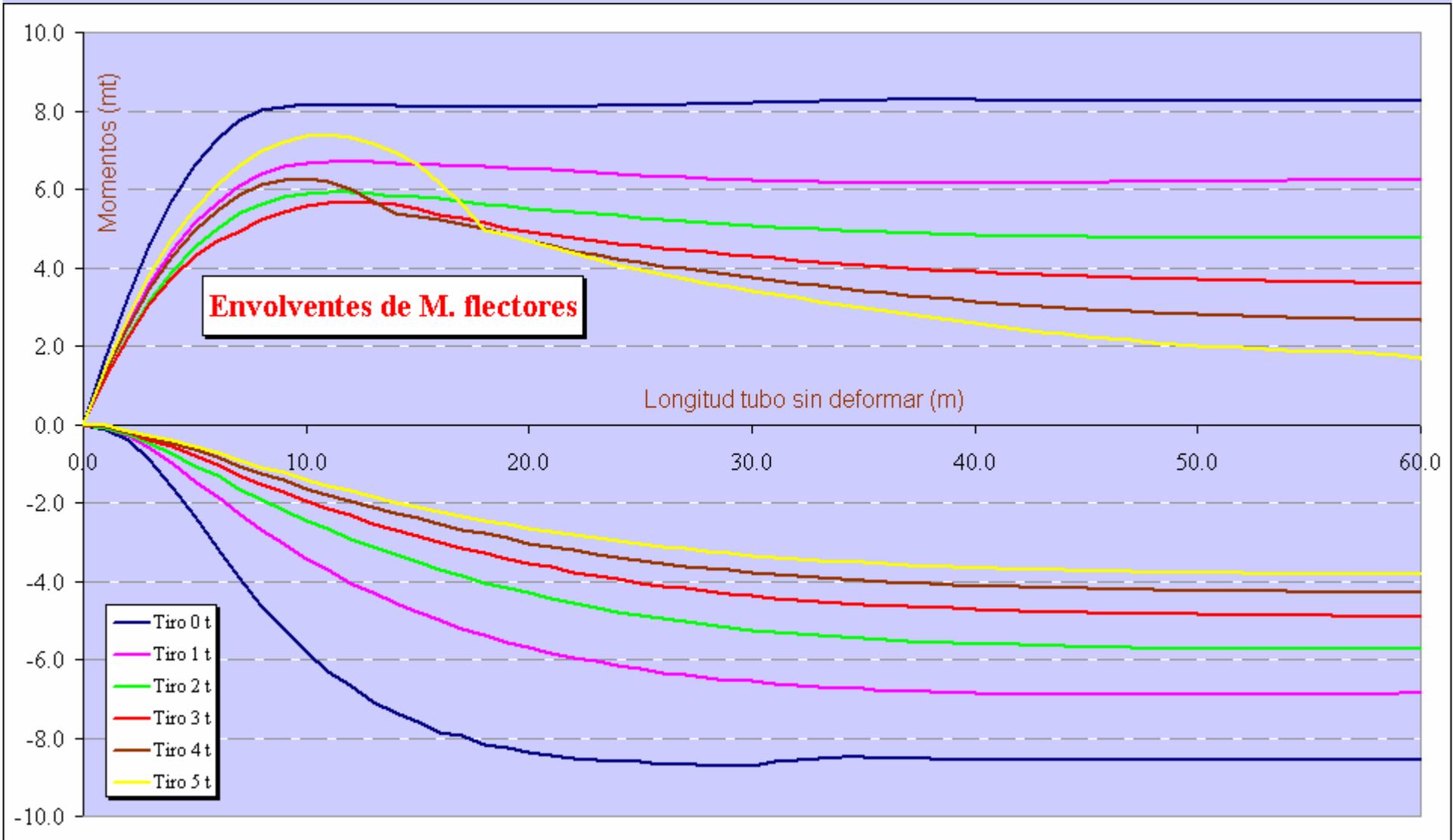






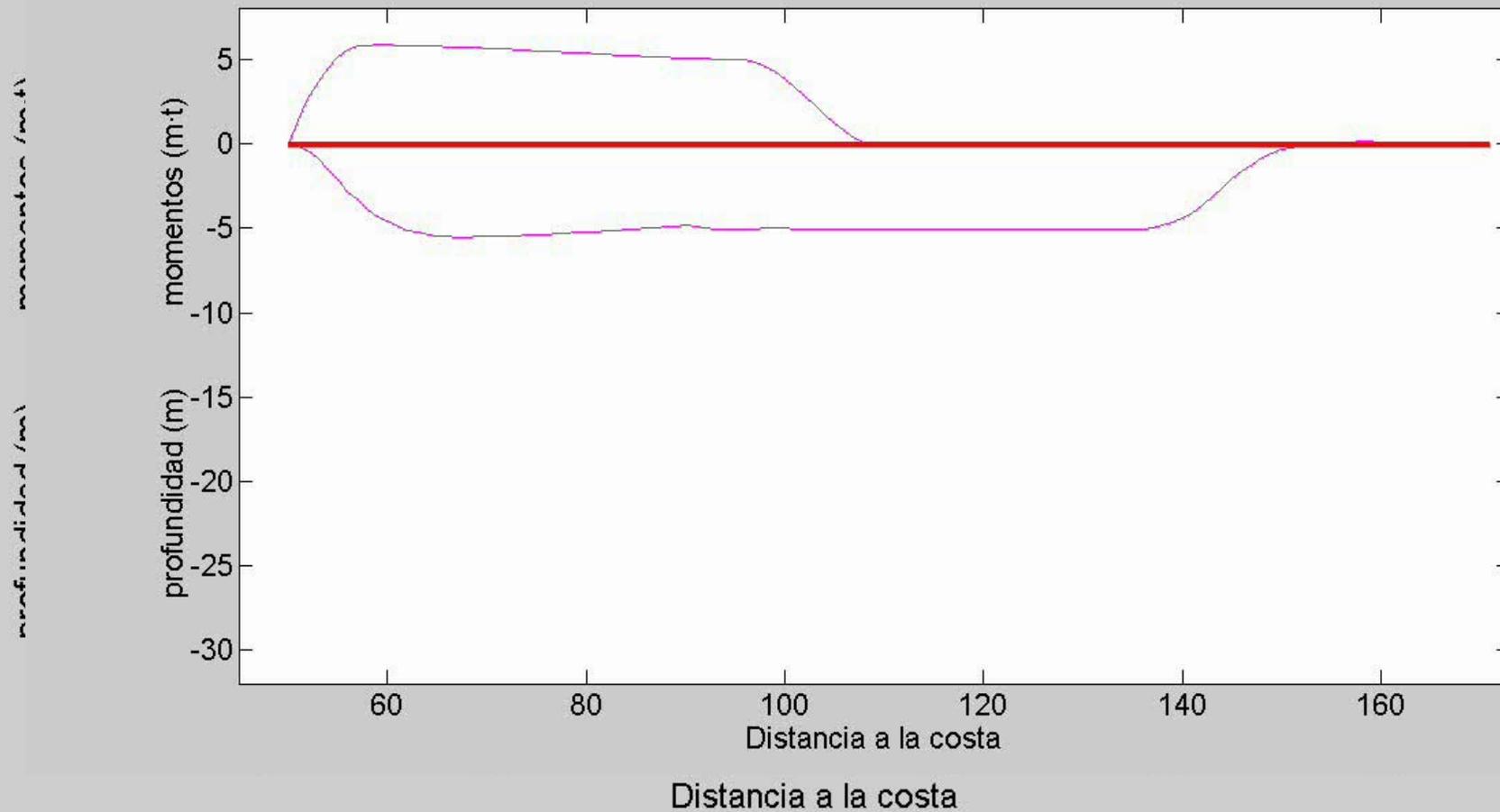
Resultados

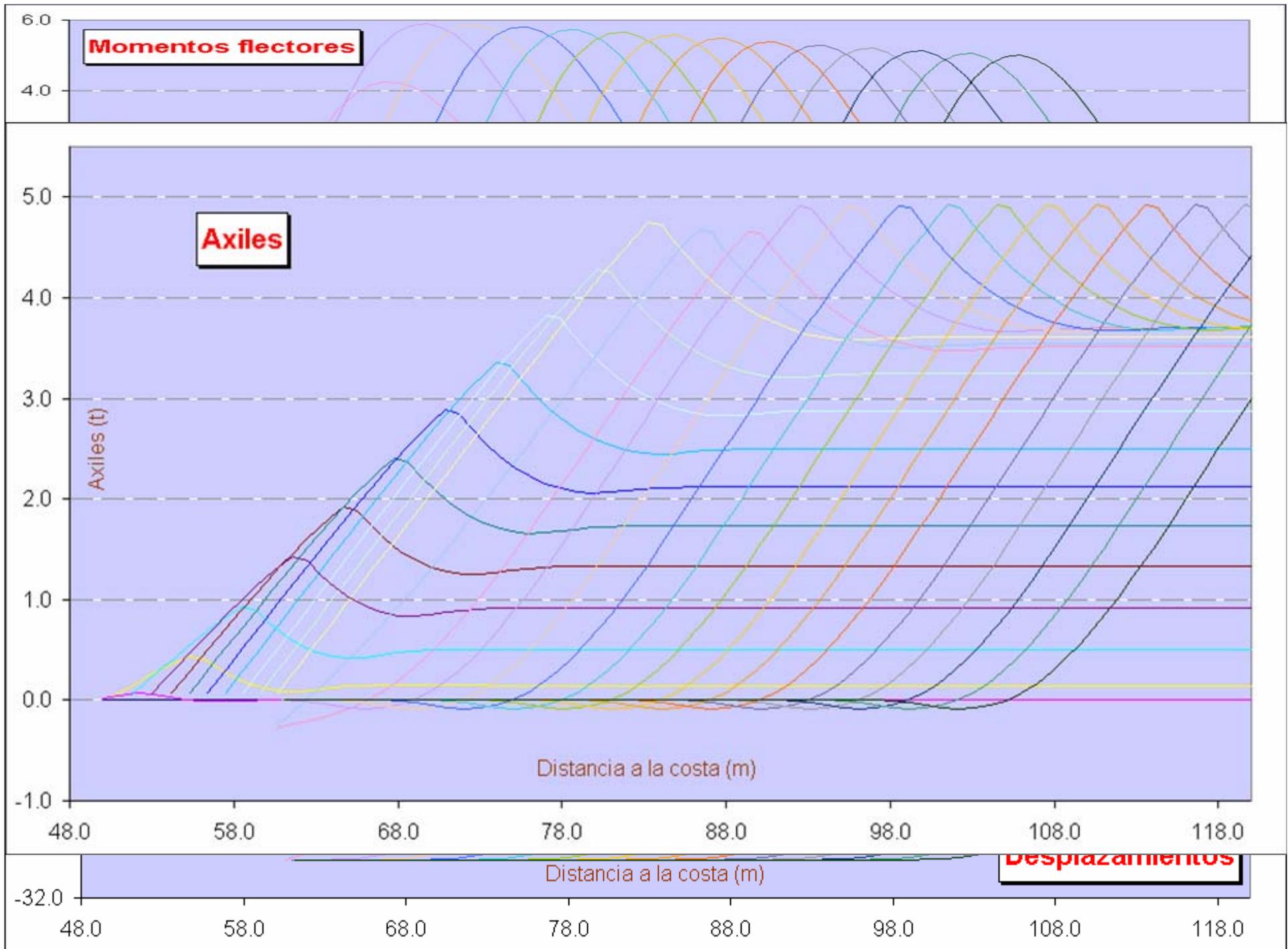
Tiro 0 - 5t con cable a costa

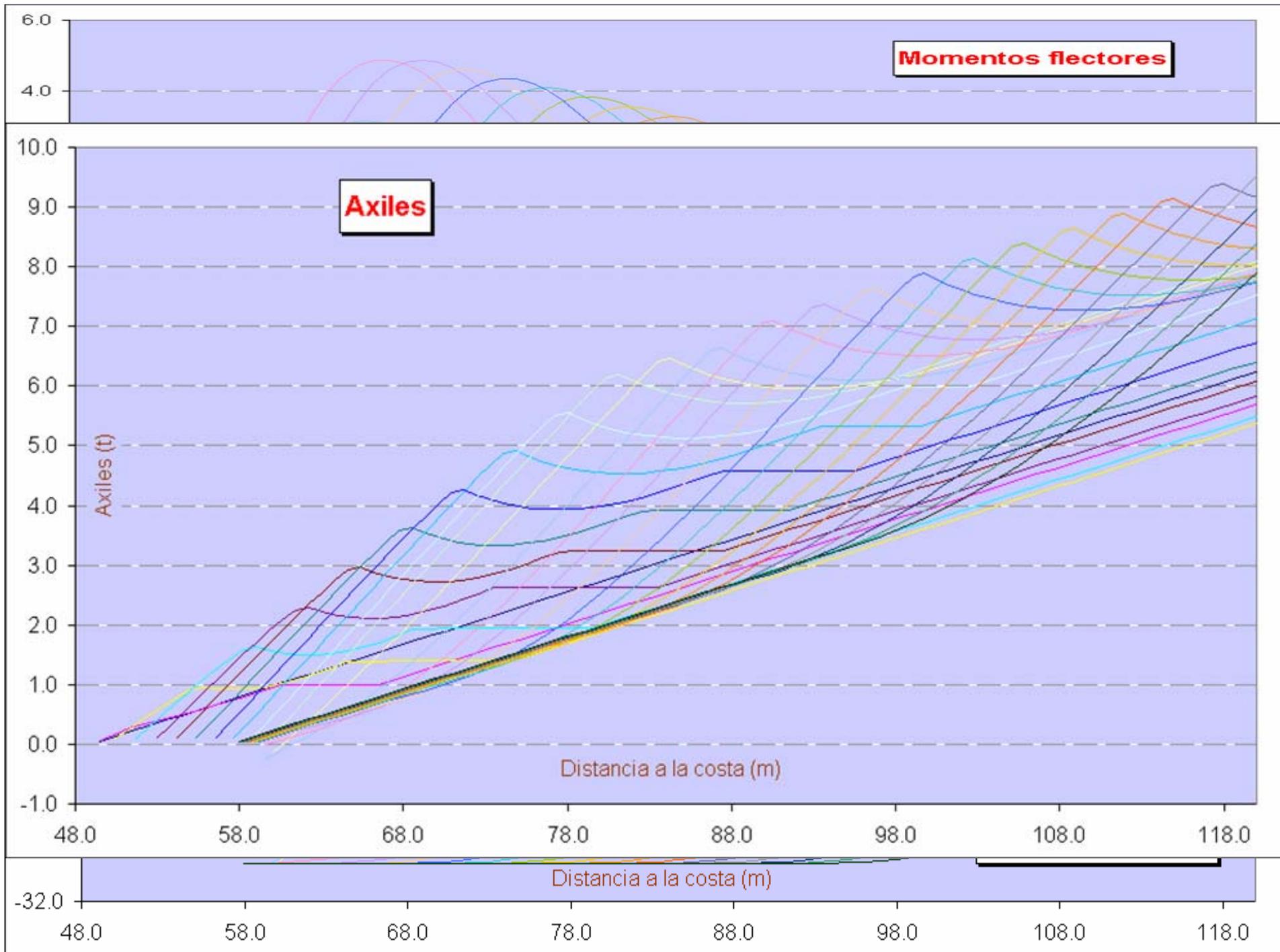


Resultados

Tiro de 3.0t

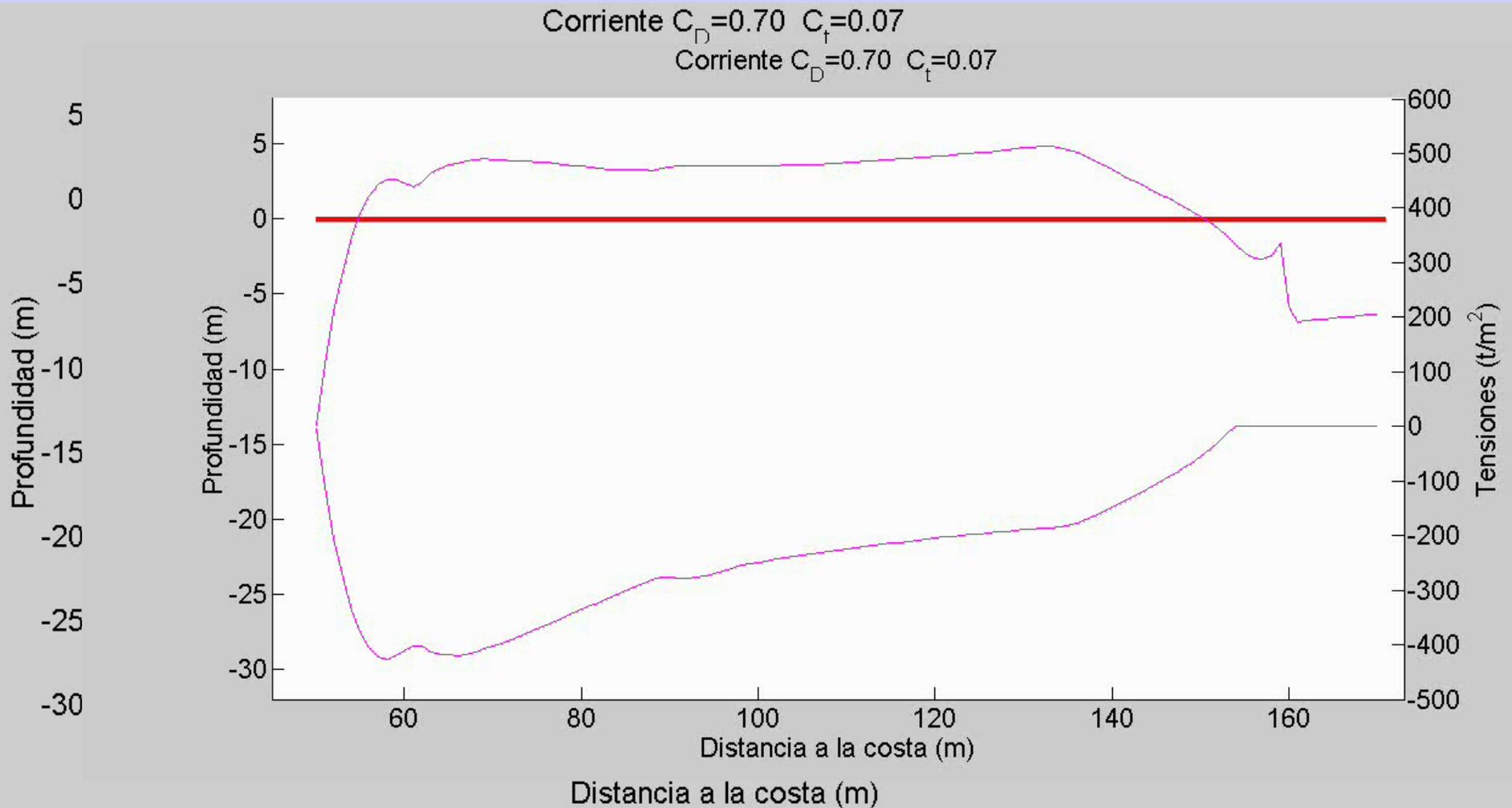


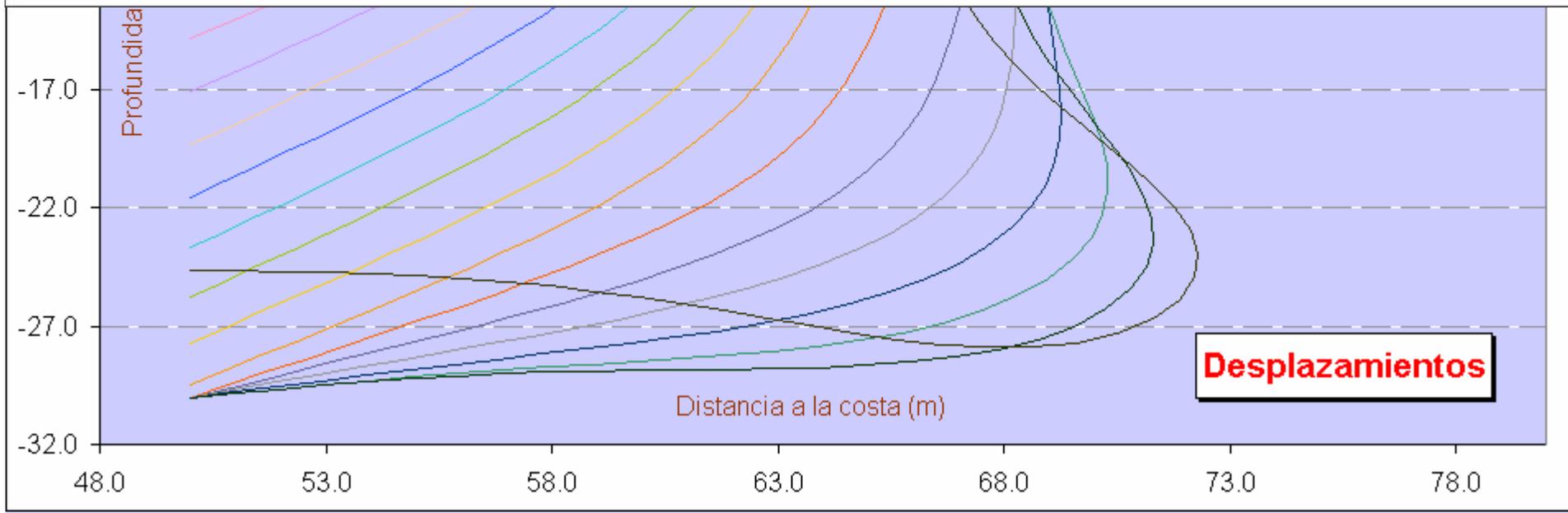
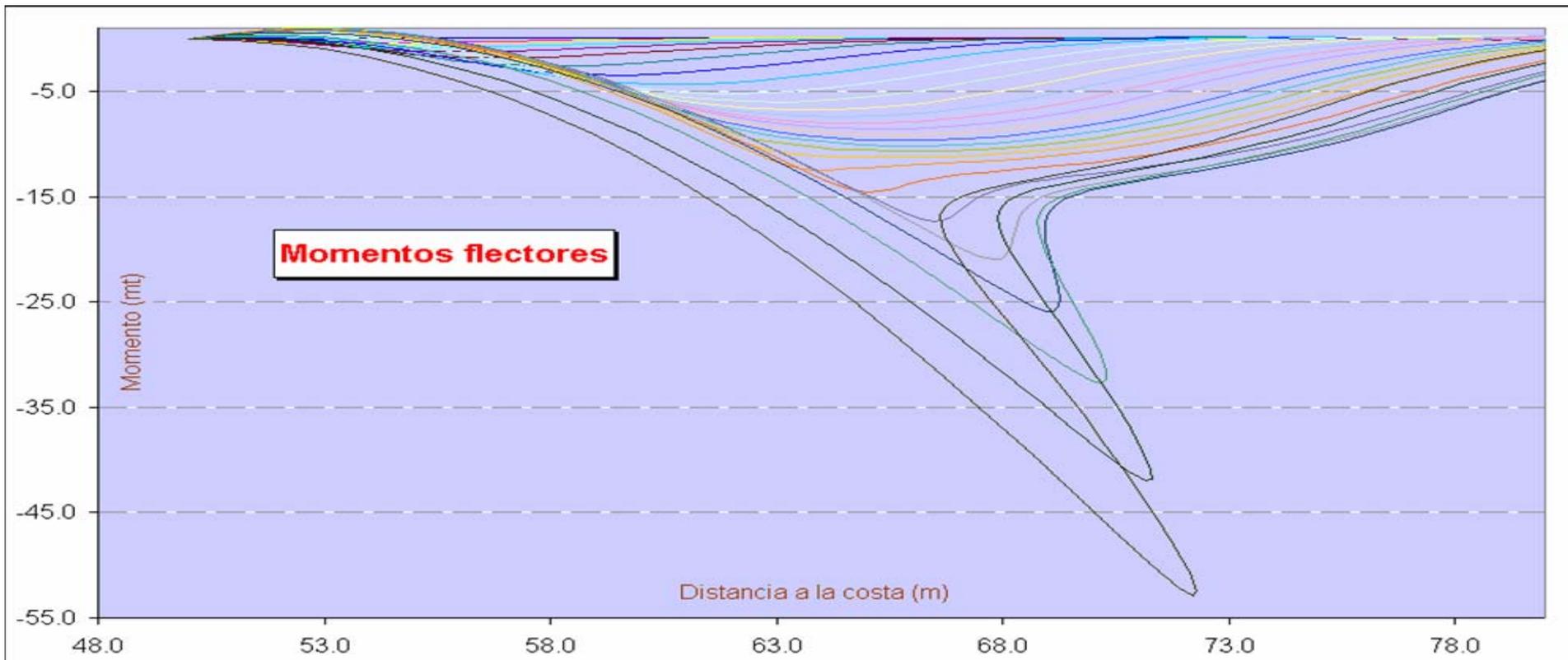




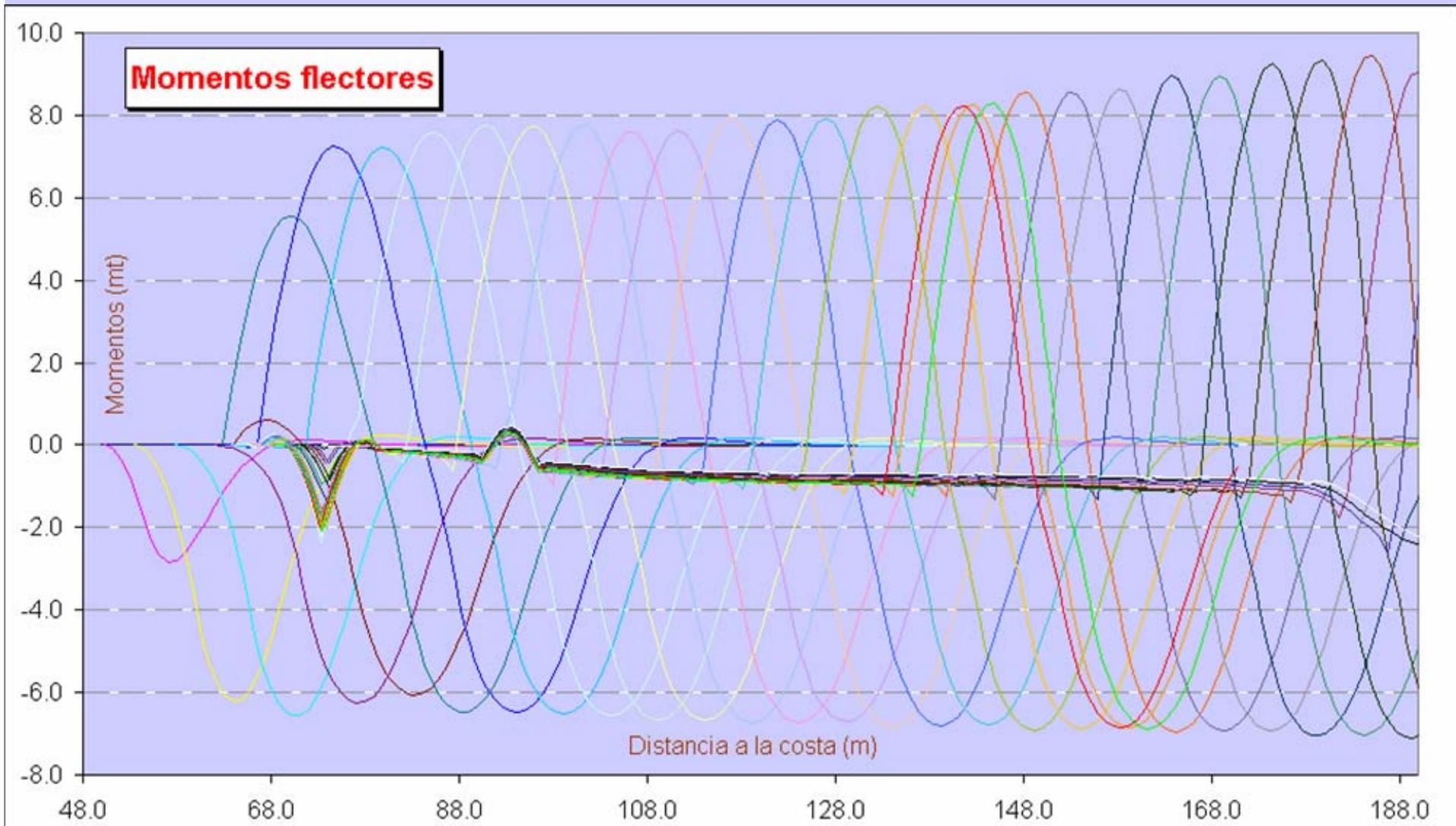
Resultados. Tensiones

$C_D = 0.70$ $C_t = 0.07$





Ejemplo ilustrativo



COMENTARIOS FINALES

- La capacidad actual de computación permite la realización de modelos teóricos más refinados, en los que se precisan técnicas matemáticas más adecuadas.
- La necesidad de utilizar los recursos de forma más eficiente exige modelos teóricos más exactos.
- Los dos anteriores desafíos conducen a
 - Incrementar la formación de equipos interdisciplinarios.
 - Intensificar la investigación básica y aplicada (Nada más práctico que una buena teoría).
 - Eliminar las barreras del lenguaje entre las comunidades científicas y técnicas.
 - Promover estancias de doctores entre ambas clases de centros universitarios y de investigación.
- Talleres de Matemáticas representa un esfuerzo en la dirección adecuada