

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL PROCESO DE COLOCACIÓN DE UN EMISARIO SUBMARINO MEDIANTE FLOTACIÓN Y HUNDIMIENTO

Avelino Samartín

Departamento de Mecánica de los Medios Continuos

y

Teoría de Estructuras.

Universidad Politécnica de Madrid

24 de enero de 2008

Índice

1. Introducción	4
1.1. Papel de la Matemática	4
1.2. Importancia del tema	6
2. La Obra Pública	7
2.1. Tareas fundamentales	7
2.2. El Análisis. Fases y clasificación	7
2.3. El Cálculo. Tipos	9
3. Emisarios submarinos	10
3.1. Introducción	10
3.2. Variables de proyecto	10
3.3. Estado del arte de los modelos de emisarios	11
4. Modelo desarrollado	12
4.1. Objetivos	12
4.2. Hipótesis de colocación del tubo	12
4.3. Modelo estructural	13
4.3.1. Hipótesis	13
4.4. Ecuaciones fundamentales del cálculo estructural	15
4.4.1. Aplicación a la viga 2-D	15
4.4.2. Expresión del trabajo virtual	15
4.4.3. Formulación en elementos finitos. Matriz de rigidez	18
4.5. Acciones. Matriz de rigidez de cargas	20
4.6. Modelo hidrodinámico	21
4.7. Ecuaciones fundamentales	22

4.8. Determinación de las acciones	25
5. Ejemplos de aplicación	28
6. Comentarios finales	28

Resumen

El uso de emisarios submarinos en la protección del medio ambiente es relativamente reciente. En España adquiere una importancia extraordinaria, debido a su extensa longitud de costa y a la concentración de población que habita cerca del litoral. En el caso de emisarios de material flexible, como polietileno de alta densidad, un proceso eficiente de colocación en el fondo del mar es mediante flotación y hundimiento. Sin embargo, este proceso exige un estudio cuidadoso, con objeto de que el emisario no sufra daños que perjudiquen su posterior funcionamiento. La complejidad del estudio de su comportamiento estructural aparece al considerar grandes movimientos, condiciones de contorno unilaterales así como acciones dinámicas no deterministas. La simulación numérica de la interacción dinámica estructura (emisario) y fluido (mar) utiliza conocimientos de disciplinas distintas como el cálculo de estructuras y la teoría de propagación de ondas. La primera permite un planteamiento adecuado de problemas no lineales de contorno y de valores iniciales y la segunda la determinación de las fuerzas del mar (propagación de ondas y relaciones no lineales entre el campo de velocidades y las acciones). En esta presentación se describirá el proceso del cálculo de una estructura, en el que, a veces, se hace preciso alcanzar un equilibrio entre el rigor matemático y la intuición. En la simulación se pondrá especial énfasis en el significado físico e intuitivo de los distintos factores que intervienen y se mostrarán algunos ejemplos en animación del comportamiento del emisario desde su situación de flotación hasta su reposo en el fondo del mar.

1. Introducción

1.1. Papel de la Matemática

Cuando recibí la amable invitación del Director del Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria de participar en estos Talleres de Matemáticas, invitación que acepté con mucho gusto, me pareció una idea estupenda la celebración de este ciclo de conferencias, que ya celebra varios cursos de vida. En estas sesiones se ponen de manifiesto la continua e importante influencia mutua entre Ciencia y Técnica y me vinieron entonces a la memoria unas consideraciones de Pedro Puig Adam. Escribía el inolvidable maestro, en uno de sus libros, en relación con este tema la siguiente anécdota.

Se paseaba una noche Thales de Mileto tan absorto en la contemplación del firmamento que se cayó a una fosa, accidente que comentó una vieja del lugar diciendo "¿Cómo queréis enseñaros lo que pasa allá arriba si no os dais cuenta siquiera de lo que ocurre a vuestros pies?". La vieja razonaba bien dentro de su estrecho campo visual. No podía prever el que afanes como los de Thales iban a crear más tarde una Ciencia que permitiría siglos más tarde orientar a los navegantes y a descubrir nuevos continentes y fuentes de riqueza.

Como la mujer de entonces en relación con la Astronomía, razonan todavía ingenieros de hoy respecto a la Matemática, y tampoco carecen de razón dentro de su concepción de la Ingeniería. De lo que carecen es de perspectiva.

La historia del progreso puede resumirse como un conjunto de sucesivos resultados procedentes de una continua y fascinante interacción, en ambos sentidos, entre Ciencia y Técnica. Así, el impresionante desarrollo del comercio en el siglo XVIII, con su necesidad de unificación de medidas ha conducido a las modernas concepciones del Universo. En efecto, el origen de la ciencia geodésica del XIX procede de las cuidadosas medidas de arcos de meridiano, precisas para el establecimiento del sistema métrico. Las aportaciones en este campo del genial Gauss y su desarrollo de la teoría intrínseca de superficies, continuada y extendida a espacios n -dimensionales por Riemann ha permitido, ya en el siglo pasado, ser aplicada por Einstein al mundo físico. En efecto, Einstein desarrolló la Teoría de la Relatividad generalizada basada en los resultados sobre curvatura de los espacios de Riemann-Gauss y en las transformaciones de Lorentz. El número de ejemplos semejantes acaecidos a lo largo de la historia podría multiplicarse.

No es menor el influjo que ha tenido la Matemática en la Ingeniería, y en particular en la ingeniería civil. No me resisto a comentar una experiencia que la mayoría de los actuales matemáticos e ingenieros hemos vivido y estamos viviendo desde mediados de los cincuenta del pasado siglo. Me refiero al método de los Elementos Finitos (MEF).

Este método ha sido introducido con objeto de resolver un problema estructural: el cálculo de un ala tipo delta de avión cuya asimilación a una viga, contrariamente a otras alas de avión con relación ancho/longitud pequeña, no parecía adecuada. El grupo Turner, Clough, Martin y Topp [13], en aquellos años trabajando en la Boeing Airplane Company, intentan aplicar a este problema los procedimientos matriciales de análisis ya desarrollados de estructuras de barras. Pero ahora se trataba de usar un elemento triangular de tensión plana para modelizar la piel del ala, pero para ello se precisaba conocer la matriz de rigidez de estos elementos triangulares. Una técnica posible era llevar a cabo un costoso ensayo experimental en laboratorio para deducir dichas matrices de rigidez. La idea del MEF ha sido calcular numéricamente, si bien de forma aproximada, esta matriz de rigidez así como las cargas equivalentes a las actuantes en el interior del elemento. Para ello se aplica el principio de los trabajos virtuales (PTV). La idea de los ingenieros del MEF se desarrolla en base a estos conceptos y el nombre de Elementos Finitos es debido a Clough [3].

Sin embargo, bastantes años antes Courant había usado el método en la forma como se aplica en la Ingeniería. En una conferencia en el año 1941 publicada más tarde en [4] Courant lo utiliza para resolver un problema de torsión de Saint Venant. Courant aplicó en esa publicación el principio de la energía potencial estacionaria así como funciones polinómicas de interpolación sobre subregiones triangulares. Este trabajo no tuvo apenas impacto en el mundo de la

técnica debido a que entonces no eran accesibles computadores capaces de resolver sistemas de ecuaciones lineales de gran dimensión, que son necesarios en la aplicación práctica del MEF.

Pocos años más tarde se comprobó que, el así llamado por los ingenieros MEF, representaba una generalización de las técnicas de resolución de problemas de ecuaciones de contorno, bien conocidas desde hacia varias décadas. Me refiero a los métodos de (Rayleigh-Ritz [9], Galerkin [6], Errores pesantes [7], etc.) en los cuales se utilizan funciones base de carácter global. La novedad era, desde el punto de vista matemático, la introducción en el MEF de otra clase de funciones base definidas en un soporte compacto o local, lo que exigía y planteaba problemas más refinados de convergencia y continuidad. En la publicación de Courant [4] ambas ideas eran aplicadas a un problema estructural de torsión. A partir de entonces la extensión de la aplicación del MEF a todas las ramas de la ingeniería y de técnica se produce de forma extraordinaria y es actualmente una herramienta de cálculo de uso universal.

1.2. Importancia del tema

El tema de la sesión de hoy *Simulación Numérica del Proceso de Colocación de un Emisario Submarino Mediante Flotación y Hundimiento* trata de una construcción cuya importancia en España como en otras partes del mundo no puede ser disminuida. En primer lugar la longitud de costa de nuestro país es de más de 8,000 km, de las cuales 2,000 km son de playa y los restantes 6,000 de acantilado. La población que vive cercana al mar se ha elevado en el siglo pasado del 12 % al 35 %, y durante el verano debido al turismo puede alcanzar hasta un 82 % de la población. El mayor volumen de población, local y turista, se concentra en la costa mediterránea a causa del clima. Por otra parte, la calidad del agua de las poblaciones cercanas a esta costa es de la máxima importancia y exige una política de tratamiento especial. En efecto, el carácter cerrado del mar Mediterráneo, así como el bajo recorrido de mareas y la importancia económica debida al turismo de la zona, son algunas causas que exige esa atención especial. En cualquier caso la necesidad de tratamiento de las aguas residuales ha sido puesta de manifiesto dentro de la política de respeto al medio ambiente por la UE. En esta política se recomienda que tras un adecuado tratamiento físico, mecánico y biológico de las aguas en la estación depuradora, las aguas residuales así tratadas deben de ser enviadas mediante tubos emisarios al alta mar.

En la elección del tema de la sesión de hoy han intervenido diversas motivaciones. En primer lugar, el tema ha sido objeto de estudio e investigación durante muchos años por la comunidad técnica. Los resultados que se presentan aquí están basados en una reciente Tesis doctoral llevada a cabo por un Ingeniero de Caminos de la Universidad de Cantabria, Jaime García Palacios, el cual bajo la dirección del Prof. Vicente Negro y el que les habla, alcanzó con esta Tesis un Premio extraordinario en la Universidad Politécnica de Madrid. Así mismo dicha Tesis obtuvo el premio ANCI (Asociación Nacional de Constructores Independientes), lo que puede ser indicativo de su interés tanto científico como de su potencial aplicación.

Además de estas consideraciones personales, en esta sesión se intenta mostrar como algunos procedimientos matemáticos se aplican a un problema complejo de ingeniería civil. La complejidad reside en el carácter no lineal del problema así como en su faceta multi-física. La no linealidad implica que el principio de superposición de efectos no es válido. Los aspectos multi-físicos aparecen al intervenir en el problema formulaciones de campos físicos distintos. En el presente caso, el tema es objeto de estudio dentro de la ingeniería estructural y de la ingeniería marina, ya que se tratan problemas no lineales tanto de la teoría de la elasticidad y como la del oleaje.

Finalmente, otro motivo adicional de este tema reside en el hecho de que, como veremos, Cantabria es una de las regiones de España en la que un importante número de este tipo de obras se han construido (Santander, Castro Urdiales, etc.).

Pero antes de entrar en la descripción del problema objeto de la presente sesión conviene introducir alguna terminología específica de la ingeniería civil.

2. La Obra Pública

2.1. Tareas fundamentales

La actividad de un ingeniero civil se centra en la construcción de la obra pública. En esta actividad se pueden distinguir las siguientes tareas. (1) Diseño o planificación; (2) Proyecto; (3) Construcción y (4) Mantenimiento. En todas las tareas anteriores la ayuda de los recursos de la Matemática son fundamentales. Aquí se va a estudiar básicamente un procedimiento de colocación de emisarios, en el que se utiliza el arrastre por flotación y posterior hundimiento y colocación en el fondo del mar mediante inundación. En este procedimiento de colocación del emisario se hace preciso comprobar que no se producen tensiones ni deformaciones importantes que puedan dañar el material del tubo, es decir, se necesita proceder a su análisis como estructura.

2.2. El Análisis. Fases y clasificación

El principal objetivo en el proyecto de una obra pública es asegurar su estabilidad durante toda su vida de servicio o de funcionamiento. Este objetivo se alcanza mediante el análisis, que se lleva a cabo actualmente utilizando cálculos matemáticos típicamente por computador.

Se pueden distinguir tres fases en el proceso del análisis: Idealización, Cálculo e Interpretación.

La fase de Idealización representa la traducción de la obra a construir en un modelo matemático que permita simular la respuesta resistente ante las acciones, generalmente cargas aplicadas. Exige la creación de un modelo físico-matemático, denominado *estructura*, que capte la capacidad resistente de la obra. Es importante tener en cuenta que la obra potencial que se idealiza no es idéntica al modelo. Este último constituye una representación ideal de la obra real y debería ser capaz de captar las características resistentes más importantes de dicha obra real.

El Análisis representa una fase en la cual se estudia el modelo físico-matemático denominado estructura utilizando las distintas técnicas de la Resistencia de Materiales, Teoría de estructuras, Elasticidad, Ciencias de Materiales y disciplinas similares con objeto de obtener su respuesta ante las acciones previstas.

Los resultados calculados en la fase anterior permite al proyectista entender y cuantificar el comportamiento de la estructura. Sin embargo, este comportamiento no es idéntico al de la obra real, por lo que estos resultados calculados son interpretados en la fase final del análisis denominada Interpretación. Por consiguiente, la fase de Interpretación consiste en la traducción de los resultados del modelo matemático a los de la obra real. Naturalmente, la Interpretación y la Idealización constituyen fases interdependientes, es decir, de acuerdo como se proceda en la Idealización la fase de Interpretación variará.

Hace algunos años, la tarea del proyectista consistía en modificar el diseño a partir de la interpretación de los resultados del cálculo y proponer el cálculo del nuevo proyecto modificado. Puesto que la capacidad de computación se ha incrementado extraordinariamente la investigación actual se dirige hacia el diseño directo, es decir, a evitar el procedimiento iterativo representado por el bucle idealización-cálculo-interpretación-nueva idealización y así sucesivamente.

La Matemática interviene de un modo importante en la fase de cálculo. Pero antes de continuar, es importante darse cuenta que una idealización pobremente concebida puede conducir a conclusiones erróneas y este hecho es el peligro escondido del cálculo. La única forma de estar seguros de la fiabilidad de un cálculo es verificar los resultados obtenidos utilizando un modelo físico, es decir, mediante experimentación en escala real o en modelo reducido. Aún recuerdo, en este contexto, una advertencia en el Laboratorio del Imperial College de Londres que decía: *Un buen experimento vale más que miles de opiniones razonables* y quien dice opiniones puede expresar cálculos con modelos inadecuados. Un cálculo sólo responde a las cuestiones que le plantea el proyectista. Un ejemplo sencillo, el pandeo de una barra no puede ser captado mediante un cálculo lineal. Un ensayo en modelo físico puede dar una buena idea del comportamiento real de una estructura, es decir, el ensayo responde a preguntas que no han sido en principio planteadas.

La siguiente diapositiva nos muestra como una estructura puede ser considerada como un

sistema en el cual los inputs son las cargas aplicadas (en general las acciones) y los outputs son las tensiones, deformaciones y desplazamientos. Dependiendo del tipo de entrada y de las incógnitas a determinar se pueden definir los siguientes grupos de problemas: Cálculo estructural, optimización, identificación y control.

2.3. El Cálculo. Tipos

El cálculo estructural corresponde al cálculo tradicional, que permite comprobar el comportamiento de una estructura. Su objetivo es determinar la respuesta de los distintos componentes de una estructura ante la acción de cargas de proyecto o de estado último de servicio y cargas del estado límite último.

El caso más simple de cálculo estructural está representado por el tipo de cálculo, en el cual las acciones son conocidas (input) así como las características de la estructura (geometría, material, condiciones de contorno o apoyos), es decir, el input y el sistema. El objetivo del cálculo es determinar la respuesta de la estructura (output)

La optimización representa el siguiente nivel de la simulación en la Ingeniería que se considera aquí. El proceso tradicional iterativo de un proyecto de ingeniería que puede estar descrito por el bucle diseño-cálculo-comprobación-nuevo proyecto. Para ciertos tipos de cálculos es posible automatizar este proceso y llevar a cabo lo que se denomina optimización estructural directa. El objetivo de este proceso es determinar una serie de parámetros estructurales (dimensiones, características del material, etc.), que satisfagan un conjunto dado de condiciones (o restricciones), cuando la estructura está sometida a varias acciones (tensiones, deformaciones, cargas o desplazamientos) y optimicen una función objetivo especificada.

Las dos siguientes diapositivas simplemente enuncian las otras posibilidades de análisis estructural: Identificación estructural y control estructural.

Concentrándonos en el cálculo estructural propiamente dicho, existen diversas posibilidades, como se describe en [10]. El tipo de cálculo estructural que se aplique en cada caso particular depende del modelo utilizado para representación de la obra.

El cálculo más simple es el denominado elástico y lineal [11]. Este cálculo ha sido utilizado en el pasado, por su facilidad de computación, en la mayoría de los proyectos. Por causas análogas, complejidad de computación, cálculos no lineales han sido utilizados en la práctica profesional hasta hace cuatro décadas en muy escasas ocasiones. Desde entonces, el crecimiento de su aplicación a proyectos profesionales ha sido impresionante, con incrementos relativos del orden del 1 % en 1970 y del 40 % actualmente.

Otros tipos de cálculo está representado por los modelos de escalas múltiples, que constituyen un tópico de intensa investigación muy actual.

El cálculo puede clasificarse en dinámico y estático, según sean las fuerzas de inercia, siempre existentes en una estructura, importantes o despreciables en la respuesta de la misma.

Otro grupo de cálculos son los denominados multi-físicos. Su importancia es creciente en el tratamiento de estructuras en contacto con otros medios continuos. Por ejemplo, en el caso de que el medio sea el terreno, su influencia en la estructura no puede ser englobada en una condición de contorno aislada, particularmente en situaciones dinámicas. Análogamente, en el caso de estructuras inmersas en medios fluidos, como presas, emisarios, etc., la propia deformación de la estructura en contacto con el fluido modifica la distribuciones de las fuerzas (presiones) que actúan sobre ella.

3. Emisarios submarinos

3.1. Introducción

Si nos centramos en los emisarios submarinos conviene repasar su historia que es relativamente reciente. En realidad la construcción de los primeros emisarios parece que comenzó hace un poco más de cien años. La noticia del emisario más antiguo construido ha sido en Hiperion (E.E.U.U.) con una longitud total de $L=600$ m y un diámetro del tubo $D=200$ mm. En la misma zona se han construido en 1950 recientemente dos nuevos emisarios. El primero de ellos con las siguientes características: $D=366$ mm y $L=8400$ m y el segundo con $D=560$ mm y $L=10900$ m. En España el primer emisario de polietileno del alta densidad ha sido construido en Premiá de Mar (Barcelona) con $D=200$ mm y $L=200$ m en el año 1962. Durante el primer año de servicio fue destruido por una tormenta y el reconstruido todavía se encuentra en servicio. Desde entonces en España la construcción de emisarios ha sido muy intensa. En la diapositiva se presentan algunos ejemplos en ambas costas, Atlántico y Mediterráneo.

3.2. Variables de proyecto

En el caso del proyecto de un emisario el problema es encontrar los valores de las siguientes variables indicadas en la diapositiva. Algunos de los cuales vienen determinados por la funcionalidad y otros se obtendrán de los resultados del cálculo.

Por otra parte en el proyecto se hace preciso prever el sistema de construcción y de colocación del emisario. Algunas posibilidades se muestran aquí así como los condicionantes que existen en su implementación.

De todos los posibles métodos de construcción, el de arrastrado, flotación y hundimiento será el único que se describe aquí. En este método se puede distinguir las siguientes fases.

Primeramente los tubos se unen en tierra para formar una tubería de mayor longitud. Esta operación puede ser realizada a una distancia considerable de la posición final del tubo. Este tramo de varios tubos se transporta a la barcaza en la cual el proceso de colocación va a ser controlado. Si existe ya construido un tramo anterior, el nuevo se une al mismo. A continuación se procede a una inundación continua controlada con objeto de trasladar mediante arrastre el tramo (o varios tramos unidos de tubos) a su posición final en el fondo del mar. Esta última fase es la más compleja de todo el proceso de colocación y es la que se estudiará a continuación.

3.3. Estado del arte de los modelos de emisarios

El desarrollo de los métodos de cálculo de emisarios submarinos construidos por flotación e inundación se ha visto influido por distintos factores. En la diapositiva se resume la situación actual.

En particular, la industria del petróleo ha desarrollado procedimientos de cálculo de tuberías (risers) para el estudio de la conducción del petróleo en el fondo del mar. Dada la importancia económica del sector estos estudios son muy elaborados, pero la aplicación de sus métodos y modelos al cálculo del comportamiento de emisarios no es directa debido a las siguientes diferencias importantes:

- El material del risers es polietileno, mucho más deformable frente al material de la mayoría de los emisarios, que es más rígido.
- El diámetro de los emisarios risers es mayor que el de los risers, lo que requiere que al ser más rígido el material de los emisarios, éstos son más difícil de controlar en su arrastre.
- La existencia del fondo marino, especialmente si es rocoso, en el que puede ser difícil la trinchera, implica al aparecer luces importantes una flexión de los emisarios producida por la pérdida de su soporte

Las siguientes diapositivas ilustran algunos programas de computador específicos. Se puede observar el programa de Det Norske Veritas y los tipos de elementos finitos que incluye. También se representa la simulación del fondo marino en esta otra diapositiva y las condiciones de contorno que se tienen en cuenta.

Finalmente, se muestran las deformadas de la tubería obtenidas en un cálculo típico llevado a cabo en la práctica profesional en nuestro país. El método corresponde a un cálculo geoméricamente no lineal. Las cargas que se tienen en cuenta son peso propio del tubo, empuje hidrostático o de Arquímedes e inundación del tubo. Estas cargas son aplicadas en cada incremento de carga. En la siguiente diapositiva se representan las leyes de momentos flectores. No se tiene en cuenta en este programa las acciones de la corriente ni del oleaje. Por otra parte

estos resultados corresponden a cálculos llevados a cabo en distintos puntos de tiempo y por lo tanto están desconectados entre sí.

4. Modelo desarrollado

4.1. Objetivos

Los objetivos finales que se proponen con el modelo de emisarios, que se ha desarrollado y que se resumen en esta diapositiva, son ambiciosos. Entre los objetivos alcanzados en el presente estado del modelo desarrollado no se incluyen la optimización y el cálculo estructural es casi-estático.

Existen varias posibilidades. Aquí, no se va a estudiar el proyecto, que es como se ha indicado un proceso iterativo. Por lo tanto, con objeto de simplificar la exposición se va a tratar el caso más elemental correspondiente a la comprobación del diseño. En lo que sigue se supone que se conocen todas las variables de proyecto, tanto las referentes al emisario (material, longitud, diámetro, espesor de pared, etc.) así como las variables de definición del proceso de colocación del tubo (tramos de tubos construidos, fuerza de arrastrado, velocidad de la barcaza, fondo marino, estado del mar, etc.). Se trata de comprobar si el diseño totalmente definido es capaz de soportar las acciones previstas, es decir, si las deformaciones, tensiones, curvaturas resultantes son admisibles y no producen daños irreversibles al material del tubo.

Para llevar a cabo esta comprobación se tiene que definir primeramente: (a) el modelo cálculo o estructura que simule el comportamiento de la tubería real; (b) a partir de este modelo elegir el nivel de cálculo más apropiado (lineal o no lineal, estático o dinámico etc. Aquí la intuición del ingeniero es importante, pues depende de la importancia de la obra y la relevancia de los efectos que se desprecian y (c) la definición de las acciones (de servicio y máximas o de rotura), lo cual en muchos casos son conocidas fácilmente y en otros representa un problema *per se* como ocurre por ejemplo en la ingeniería sísmica en la definición del terremoto de diseño o en el presente caso con las acciones debidas a la corriente y el oleaje, aunque existen afortunadamente normativas adecuadas.

4.2. Hipótesis de colocación del tubo

En el modelo se introduce una serie de hipótesis plausibles de colocación del emisario, que describe de forma suficientemente aproximada el proceso real. Estas hipótesis se resumen a continuación:

- La tubería se sitúa sobre el mar mediante un stinger a la cota nivel medio del mar (NMM). Este stinger puede ser modelado bien como una rampa recta con un ángulo fijo con la horizontal o como una rampa de curvatura constante.
- El proceso no puede retroceder, es decir, si una parte de la tubería reposa sobre el fondo marino, esta no puede levantarse de nuevo.
- El fondo del mar ha sido considerado como una línea recta continua, que puede tener diferentes ángulos. Esta línea se encuentra en el mismo plano vertical que el del eje de la tubería.
- No existen movimientos de la tubería fuera del plano de la tubería.
- Los efectos dinámicos del contacto entre la tubería y el stinger se desprecian.
- No se consideran los movimientos dinámicos de la barcaza, incluso los debidos a la deformación axil de la tubería.
- El coeficiente de rozamiento entre la tubería y el stinger es nulo.

4.3. Modelo estructural

4.3.1. Hipótesis

Se comprende que en el proceso de colocación del emisario, éste experimenta grandes desplazamientos, con lo que su geometría se modifica de forma importante. Este hecho exige que su cálculo estructural tenga en cuenta la existencia de esta geometría mediante la consideración de grandes desplazamientos. Por otra parte en su colocación la tubería no debe sufrir deformaciones fuera del rango elástico, es decir, irreversibles que podrían afectar al servicio y a la vida útil del emisario. Este hecho implica que el cálculo debe ser de material elástico lineal (es decir que siga la ley de Hooke). Por simplicidad no se describe un complejo cálculo dinámico, sino casi estático. Es decir simplemente se introducen las fuerzas de inercia de las acciones, debidas a la masa de agua que acompaña al tubo en su desplazamiento pero no la debidas a la masa del propio tubo tanto en sus tramos vacíos como los inundados por agua.

En relación con el modelo, el uso de elementos finitos, en el estado actual del cálculo estructural, es estándar y la elección del tipo de elementos importante. En la diapositiva se muestran tres posibilidades. En el caso de emisarios en los que no existen problemas de ovalización (o cambio de la sección circular a una elíptica) el modelo de elemento viga es suficiente. En este elemento con seis gdl por nudo (desplazamientos y fuerzas) satisface la hipótesis de Navier-Bernoulli o de las secciones planas. Se compone de extensión (acciones 1 y 7), flexión en las direcciones 2 y 3 (acciones 2, 3, 5 y 6, y 8, 9, 11 y 12) y torsión (acciones 4 y 10).

No obstante, en esta exposición por simplicidad se considera el elemento viga 2-D con los gdl que se muestran en la diapositiva. Por consiguiente, con objeto de simplificar la formulación matemática del modelo se supone una situación bidimensional, en lugar de la tridimensional que es más cercana a la realidad. Las hipótesis que se introducen en este caso son:

- El comportamiento de la tubería es modelado como una viga 2-D con su sección sometida a deformaciones de flexión y extensión. Se considera la interacción entre esfuerzos axiles y flectores.
- El modelo se desarrolla en el marco del MEF. La longitud total de la tubería (L) se divide en N elementos finitos de dos nudos de igual longitud y tres grados de libertad por nudo (dos desplazamientos y una rotación).
- El cálculo se formula según la teoría de grandes desplazamientos y pequeñas deformaciones.
- El material de la tubería es elástico y lineal.
- No se tiene en cuenta las deformaciones de torsión y de cortante.
- Se desprecian las fuerzas de inercia rotacionales.
- No existe rozamiento en el lecho marino.

Primeramente interesa introducir una serie de definiciones y notación general, que se utiliza típicamente en el cálculo geoméricamente no lineal de estructuras.

Existen dos descripciones de la posición, deformaciones y movimientos de un elemento de viga, ver [15]: La descripción material o *lagrangiana* y la espacial o *euleriana*. En la primera se describe en función de la posición inicial del elemento. En cambio en la descripción euleriana ésta se efectúa en función de la posición actual o corriente del elemento en es espacio.

En la formulación lagrangiana el cálculo se lleva a cabo suponiendo que la carga se aplica sobre el sólido como suma de un conjunto de incrementos para cada uno de los cuales se obtiene una configuración de equilibrio. Una configuración de equilibrio, representa un estado del sólido, en el que los resultados son compatibles, se encuentran en equilibrio y satisfacen las ecuaciones constitutivas o de comportamiento del material del sólido.

Las condiciones de contorno que se consideran en el cálculo son

- Contacto con el fondo
 - Sin penetración

- Sin fricción
- Contacto con el stinger
 - Ángulo constante
 - Curvatura constante
 - Elementos contacto

4.4. Ecuaciones fundamentales del cálculo estructural

4.4.1. Aplicación a la viga 2-D

A continuación, y a modo de ejemplo, se aplicará la formulación anterior al caso particular de vigas rectas de sección constante de plano medio correspondientes a elementos de un entramado plano.

Por comodidad a la hora de expresar la formulación, y por mantener la notación habitual en el caso de vigas 2-D, en este apartado se utilizarán las coordenadas x, y en lugar de las x_1, x_2 , y por consiguiente, los subíndices x, y sustituyendo a $i = 1, 2$. Estos cambios también se aplican a los movimientos (u_i con $i = 1, 2$) que pasan a denominarse u y v .

4.4.2. Expresión del trabajo virtual

Se dispone un sistema de coordenadas cartesiano dextrógiro xyz con origen el centro de gravedad (cdg) de la sección dorsal. El eje x coincide con la recta directriz o lugar geométrico de los cdg de las secciones rectas de la viga. El eje y ascendente está contenido en el plano vertical medio de simetría de la sección de la viga como se muestra en la diapositiva. Se supone la viga en la configuración C_1 y se considera que las cargas solo se aplican en los extremos A y B del elemento (cargas en nudos). Por tanto se tiene el trabajo virtual:

$${}_1^k R = \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k} \mathbf{f} \quad (1)$$

siendo:

$$\mathbf{k} \mathbf{f} = \left[{}^k F_{xa}, \quad {}^k F_{ya}, \quad {}^k F_{za}, \quad {}^k F_{xb}, \quad {}^k F_{yb}, \quad {}^k M_{zb} \right]^T \quad (k = 1, 2) \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^T = [u_a, \quad v_a, \quad \theta_a, \quad u_b, \quad v_b, \quad \theta_b] \quad (3)$$

respectivamente el vector de fuerzas y movimientos. Estos últimos si son virtuales se identifican mediante un asterisco, es decir, $\mathbf{u}^{*T} = [u_a^*, \quad v_a^*, \quad \theta_a^*, \quad u_b^*, \quad v_b^*, \quad \theta_b^*]$

Aplicando la hipótesis cinemática de Navier-Bernoulli a la viga, el movimiento (u_x, v_x) de un punto de coordenadas (x, y) puede expresarse en función de los movimientos (u, v) del punto $(x, 0)$ de la directriz como sigue:

$$u_x = u - yv' \quad u_y = v \quad (4)$$

donde ' expresa $\frac{d}{dx}$, y u y v son funciones únicamente de x .

Las componentes lineales y no lineales del tensor de tensiones incrementales de Green son:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \eta_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] & \eta_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Introduciendo la ecuación (4) en cada una de las componentes de (5) se tiene:

- Componentes lineales:

$$e_{xx} = u' - yv'' \quad e_{xy} = 0 \quad (6)$$

- Componentes no lineales:

$$\begin{aligned} \eta_{xx} &= \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + y^2 v''^2 - 2yu'v'') \\ \eta_{xy} &= \frac{1}{2} (-u'v' + yv'v'') \end{aligned} \quad (7)$$

La estática de la viga relaciona los esfuerzos con las tensiones en una sección, resultando:

$${}^1F_x = \int_A {}^1\sigma_{xx} dA \quad (8)$$

$${}^1F_y = \int_A {}^1\sigma_{xy} dA \quad (9)$$

$${}^1M_z = - \int_A {}^1\sigma_{xx} y dA \quad (10)$$

donde A es el área de la sección recta de la viga.

Las relaciones inversas a las anteriores son:

$$\sigma_{xx} = \frac{{}^1F_x}{A} - \frac{{}^1M_z y}{I_z} \quad (11)$$

siendo $I_y = \int_A y^2 dA$ el momento de inercia de la sección de la viga.

Sustituyendo las relaciones estáticas y cinemáticas de la viga en la expresión del trabajo virtual incrementado en formulación lagrangiana renovada (LA), se obtiene al suponer material

elástico, hookeano e isótropo de constantes E y $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_A E (u' - yv'') (u^{*'} - yv^{*''}) dAdx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^L \int_A {}^1\sigma_{xx} \left(u^{*'}{}^2 + v^{*'}{}^2 + y^2 v^{*''}{}^2 - 2yu^{*'}v^{*''} \right) dAdx + \\ & \int_0^L \int_A {}^1\sigma_{xy} (-u^{*'}v^{*'} + yv^{*'}v^{*''}) dAdx = \mathbf{u}^{*T} [{}^2\mathbf{f} - {}^1\mathbf{f}] \end{aligned} \quad (12)$$

En la anterior ecuación (12) se ha tenido en cuenta las igualdades siguientes, consecuencia de la elección del sistema de ejes x de coordenadas director o lugar de los centros de gravedad de las secciones y que la viga tiene la simetría de plano medio:

$$\int_A y dA = 0 \quad \text{y} \quad \int_A y^3 dA = 0 \quad (13)$$

La ecuación variacional (12) describe el principio de los trabajos virtuales al producirse el cambio de configuración de la viga desde C_1 a C_2 debida al incremento de las cargas de 1f a 2f . Esta expresión corresponde a la versión linealizada del trabajo virtual en el que se introduce dos hipótesis simplificadoras correspondientes a sustituir en las ecuaciones incrementales constitutivas del material la deformación incremental por su parte linealizada y las deformaciones virtuales por sus partes linealizadas.

En la ecuación (12) anterior es posible introducir nuevas simplificaciones despreciando los términos de orden superior, que de acuerdo con Argyris et al (1979)[1], Washizu (1982) [14], corresponden a los asociados con $u_{x,x}^2$, que intervienen en la componente no lineal de la deformación η_{xx} . La ecuación resultante, conocida como ecuación alternativa de la teoría simplificada de la viga 2-D, alternativa de la teoría general de viga 2-D expresada en (12), es:

$$\begin{aligned} & \int_0^L (EAu'u^{*'} + EI_zv''v^{*''}) dx + \frac{1}{2} \int_0^L {}^1F_x v^{*'}{}^2 dx - \\ & \int_0^L {}^1F_y u^{*'}v^{*'} dx = \mathbf{u}^{*T} [{}^2\mathbf{f} - {}^1\mathbf{f}] \end{aligned} \quad (14)$$

La formulación local o fuerte de (12) se escribe como sigue:

$$EAu'' + {}^1F_x u'' + ({}^1M_z v'')' - {}^1F_y v'' = 0 \quad \text{en} \quad (0, L) \quad (15)$$

$$EI_z v'''' - {}^1F_x v'' + {}^1F_x \frac{I_z}{A} v'''' + ({}^1M_z u')'' - {}^1F_y u'' = 0 \quad \text{en} \quad (0, L) \quad (16)$$

con las condiciones naturales de los bordes $x = 0$ y $x = L$.

$$EAu' + {}^1F_x u' + {}^1M_z v'' - {}^1F_y v' = {}^2F_x - {}^1F_x \quad (17)$$

$$-EI_z v''' + {}^1F_x v' - {}^1F_x \frac{I_z}{A} v''' - ({}^1M_z u')' - {}^1F_y u' = {}^2F_y - {}^1F_y \quad (18)$$

$$EI_z v'' + {}^1F_x \frac{I_z}{A} v'' - {}^1M_z u' = {}^2M_z - {}^1M_z \quad (19)$$

y las esenciales de dichos bordes son:

$$u^* = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \bar{u} \quad (20)$$

$$v^* = 0 \quad \longrightarrow \quad u = \bar{u} \quad (21)$$

$$v^{*'} = \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad v' = \bar{\theta} \quad (22)$$

4.4.3. Formulación en elementos finitos. Matriz de rigidez

Se expone a continuación la aplicación del método de los elementos finitos al desarrollo anterior del comportamiento no lineal de la viga. Se formula el método según un planteamiento en movimientos. Por ello, se introducen las siguientes funciones de campo y vectores:

- $\mathbf{N}_1$ Vector de funciones de forma o interpolación para los desplazamientos longitudinales
- $\mathbf{N}_3$ Vector de funciones de forma o interpolación para los desplazamientos transversales
- u Función de desplazamientos longitudinales reales
- u^* Función de desplazamientos longitudinales virtuales
- v Función de desplazamientos transversales reales
- v^* Función de desplazamientos transversales virtuales
- θ Función de giros reales
- θ^* Función de giros virtuales

Las relaciones que se establecen son:

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{u}} & u^* &= \mathbf{N}_1 \bar{\mathbf{u}}^* \\ v &= \mathbf{N}_3 \bar{\mathbf{v}} & v^* &= \mathbf{N}_3 \bar{\mathbf{v}}^* \\ \theta &= \mathbf{N}_3' \bar{\theta} & \theta^* &= \mathbf{N}_3' \bar{\theta}^* \end{aligned} \quad (23)$$

donde $\mathbf{N}_3'$ representa $\frac{\mathbf{N}_3}{d\xi}$ con $\xi = \frac{x}{L}$

Las expresiones de las funciones de forma y los vectores que contienen las incógnitas básicas (desplazamientos y giros en los nudos) son:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & \xi - 2\xi^2 & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & \xi^3 - \xi^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_a & 0 & 0 & u_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{u}}^* = \begin{bmatrix} u_a^* & 0 & 0 & u_b^* & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & v_a & \theta_a L & 0 & v_b & \theta_b L \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{v}}^* = \begin{bmatrix} 0 & v_a^* & \theta_a^* L & 0 & v_b^* & \theta_b^* L \end{bmatrix} \quad (27)$$

Sustituyendo las expresiones (23) en la ecuación de equilibrio (12) o (14) de los trabajos virtuales incrementales, y teniendo en cuenta las ecuaciones de equilibrio de la viga, que expresan el esfuerzo en función de las reacciones en los nudos mediante:

$${}^1F_x = {}^1F_{xa} = {}^1F_{xb} \quad {}^1F_y = -\frac{{}^1M_{za} + {}^1M_{zb}}{L} \quad {}^1M_z = -{}^1M_{za}(1 - \xi) + {}^1M_{zb}\xi \quad (28)$$

resulta:

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 \frac{EA}{L} \mathbf{N}_1'^T \mathbf{N}_1' d\xi \right] \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 \frac{EI_z}{L^3} \mathbf{N}_3''^T \mathbf{N}_3'' d\xi \right] \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 \frac{{}^1F_{xb}}{L} \mathbf{N}_1'^T \mathbf{N}_1' d\xi \right] \bar{\mathbf{u}} + \\ & \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 \frac{{}^1F_{xb}}{L} \mathbf{N}_3'^T \mathbf{N}_3' d\xi \right] \bar{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 {}^1F_{xb} \frac{I_z}{AL^3} \mathbf{N}_3''^T \mathbf{N}_3'' d\xi \right] \bar{\mathbf{v}} + \\ & \tilde{\mathbf{v}}^{*T} \left[\int_0^1 \frac{-{}^1M_{za}(1 - \xi) + {}^1M_{zb}\xi}{L^2} \mathbf{N}_3''^T \mathbf{N}_1' d\xi \right] \bar{\mathbf{u}} + \\ & \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 \frac{-{}^1M_{za}(1 - \xi) + {}^1M_{zb}\xi}{L^2} \mathbf{N}_1'^T \mathbf{N}_3'' d\xi \right] \bar{\mathbf{v}} + \\ & \tilde{\mathbf{v}}^{*T} \left[\int_0^1 -\frac{{}^1M_{za} + {}^1M_{zb}}{L^2} \mathbf{N}_3'^T \mathbf{N}_1' d\xi \right] \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^{*T} \left[\int_0^1 -\frac{{}^1M_{za} + {}^1M_{zb}}{L^2} \mathbf{N}_1'^T \mathbf{N}_3' d\xi \right] \bar{\mathbf{v}} = \\ & \mathbf{u}^{*T} [\mathbf{f}^2 - \mathbf{f}^1] \end{aligned} \quad (29)$$

Esta ecuación se puede expresar en forma matricial como:

$$\left(\frac{EA}{L} + \frac{{}^1F_{xb}}{L} \right) k_{11}^{110} \bar{\mathbf{u}} - \frac{M_{za}}{L^2} k_{13}^{120} \bar{\mathbf{v}} + \left(\frac{{}^1M_{za} + {}^1M_{zb}}{L^2} \right) (k_{13}^{121} + k_{13}^{110}) \bar{\mathbf{v}} = {}^2\mathbf{f}_x - {}^1\mathbf{f}_x \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{EI_z}{L^3} k_{33}^{220} + \frac{{}^1F_{xb}}{L} k_{33}^{110} + {}^1F_{xb} \frac{I_z}{AL^3} k_{33}^{220} \right) \bar{\mathbf{v}} - \\ & \left[\frac{{}^1M_{za}}{L^2} k_{31}^{210} + \frac{{}^1M_{za} + {}^1M_{zb}}{L^2} + (k_{31}^{211} + k_{31}^{110}) \right] \bar{\mathbf{u}} = {}^2\mathbf{f}_y - {}^1\mathbf{f}_y \end{aligned} \quad (31)$$

siendo:

$$\mathbf{k}_{\mathbf{f}_x}^T = \begin{bmatrix} {}^kF_{xa} & 0 & 0 & {}^kF_{xa} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{\mathbf{f}_y}^T = \begin{bmatrix} 0 & {}^kF_{ya} & \frac{{}^kM_{za}}{L} & 0 & {}^kF_{yb} & \frac{{}^kM_{zb}}{L} \end{bmatrix} \quad (32)$$

con $k = 1, 2$ y $k_{mn}^{\alpha\beta\gamma} = \int_0^1 \mathbf{N}_m^{\alpha T} \mathbf{N}_n^{\beta} \xi^{\gamma} d\xi$, representando los superíndices α y β las derivadas de orden α y β de las funciones de forma N_m y N_n y γ la potencia de la coordenada natural ξ

Finalmente, la expresión que resulta es:

$$[{}^1\mathbf{k} + {}^1\mathbf{k}_g] \bar{\mathbf{u}} = {}^2\mathbf{f} - {}^1\mathbf{f} \quad (33)$$

con $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}_p$ las matrices de rigidez lineal y geométrica respectivamente del elemento viga recta 2-D. El incremento de desplazamiento que se produce al incrementar la fuerza de la configuración C_1 a la C_2 , viene dado por:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u_a & v_a & \theta_a & u_b & v_b & \theta_b \end{bmatrix}^T \quad (34)$$

y el estado de fuerzas para ese mismo incremento ${}^1\mathbf{f}$ a ${}^2\mathbf{f}$ se puede expresar vectorialmente como:

$$\mathbf{k}_f^T = \begin{bmatrix} {}^k F_{xa} & {}^k F_{ya} & {}^k M_{za} & {}^k F_{xb} & {}^k F_{yb} & {}^k M_{zb} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad k = 1, 2 \quad (35)$$

A continuación se muestran las expresiones de estas matrices $\mathbf{k}$ y $\mathbf{k}_p$ obtenidas mediante el programa Maple V.

Matriz de rigidez lineal:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & 6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & 6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} & 4\frac{EI_z}{L} & 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} & 2\frac{EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI_z}{L^3} & -6\frac{EI_z}{L^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{L^3} & -6\frac{EI_z}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI_z}{L^2} & 2\frac{EI_z}{L} & 0 & -6\frac{EI_z}{L^2} & 4\frac{EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Matriz de rigidez geométrica:

$$\mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} \frac{F_{xb}}{L} & 0 & -\frac{M_{za}}{L} & -\frac{F_{xb}}{L} & 0 & -\frac{M_{zb}}{L} \\ 0 & \frac{6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & 0 & \frac{-6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} \\ -\frac{M_{za}}{L} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{2}{15} \frac{F_{xb}(AL^2+30I_z)}{AL} & \frac{M_{za}}{L} & \frac{-1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{1}{30} \frac{F_{xb}(-AL^2+60I_z)}{AL} \\ -\frac{F_{xb}}{L} & 0 & \frac{M_{za}}{L} & \frac{F_{xb}}{L} & 0 & \frac{M_{zb}}{L} \\ 0 & \frac{-6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & \frac{-1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & 0 & \frac{6}{5} \frac{F_{xb}(AL^2+10I_z)}{AL^3} & \frac{-1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} \\ -\frac{M_{zb}}{L} & \frac{1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{1}{30} \frac{F_{xb}(-AL^2+60I_z)}{AL} & \frac{M_{zb}}{L} & \frac{-1}{10} \frac{F_{xb}(AL^2+60I_z)}{AL^2} & \frac{2}{15} \frac{F_{xb}(AL^2+30I_z)}{AL} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Se observa que las matrices de rigidez anteriores son simétricas como corresponde a un problema conservativo (autoadjunto).

4.5. Acciones. Matriz de rigidez de cargas

En esta diapositiva se listan las acciones que deben ser tenidas en cuenta en el cálculo de un emisario. El carácter de estas acciones es distinto. Unas son de dirección constante como el peso del tubo con lastre y el del tubo inundado, si bien en este último caso la posición de la carga es variable. Otro grupo de cargas como el empuje de Arquímedes es de dirección variable, corresponde en realidad a la resultante de las presiones sobre las paredes del tubo. A veces se trabaja por simplicidad considerando el tubo con una densidad menor denominada sumergida. Las cargas de corriente y principalmente la del oleaje son de intensidad y dirección variables así como presentan un carácter dinámico. En efecto, la masa de las partículas de agua introducen fuerzas de inercia al tener velocidad y aceleración variables.

La clasificación de Ramm y Schweizerhof de las acciones se resume en la diapositiva, que se muestra. En las siguientes se indica el proceso ya estándar de obtención de los valores de las fuerzas equivalentes en los nudos.

La expresión de las fuerzas equivalentes en los nudos a una distribución de fuerzas de dirección constante (peso propio y tubo inundado) sobre el elemento se deduce de acuerdo con la aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) y resulta.

El tratamiento de las fuerzas equivalentes a una distribución de fuerzas seguidoras podría llevarse a cabo de forma análoga a como se ha procedido con las acciones de dirección constante. En este caso se debería en cada paso de carga, durante el cálculo de la estructura del emisario, actualizar no sólo la intensidad sino también la dirección de las fuerzas seguidoras. El proceso de convergencia y la aproximación se mejoran de forma sustancial si se introduce las denominadas matrices de carga, cuyo tratamiento en el cálculo, en particular su ensamblaje para formar la matriz global de la estructura es análogo al de las matrices de rigidez.

Para obtener la matrices de carga se desarrollan las expresiones de las fuerzas seguidoras que ahora dependen de los desplazamientos $\mathbf{u}$ en la forma que se muestra en la diapositiva. Las fórmulas obtenidas se aplican a las acciones de empuje de Arquímedes, corriente marina y oleaje. Con un objetivo ilustrativo se comprueba en las diapositivas siguientes la eficiencia del modelo de matrices de cargas frente a otros procedimientos para el caso de empuje de Arquímedes.

4.6. Modelo hidrodinámico

Con objeto de determinar las acciones sobre el emisario que dependen en el caso de la actuación de corrientes marinas de la velocidad de las partículas de agua y en el caso del oleaje, además de la velocidad, de la aceleración. Es decir, se hace preciso conocer en general el campo de aceleraciones y velocidades del mar durante el proceso de colocación de la tubería. Este objetivo exige el estudio de la interacción mar (agua) estructura, que es muy complejo.

En el modelo hidrodinámico que se aplica se introducen una serie de hipótesis con objeto de simplificar la determinación de las velocidades en los dos casos que se estudia: Corriente marina y oleaje. Una vez obtenidos en ambos casos el campo de velocidades y eventualmente el de aceleraciones, las fuerzas sobre la tubería se calculan mediante las fórmulas generalizadas de Morison *et al.*.

En el modelo hidrodinámico se considera el *fluido* como un medio material continuo deformable, incapaz de resistir tracciones y con escasa rigidez transversal. Los fluidos se denominan *perfectos* si se supone que las tensiones tangenciales viscosas son nulas y *reales* cuando se consideran estas tensiones.

El movimiento de un fluido puede ser *laminar* si está ordenado por capas y *turbulento* si se permite que el movimiento de las partículas abandonar su alineación dentro de una capa y saltar en sentido transversal al movimiento principal.

Las propiedades que definen un fluido newtoniano se resumen en las dos diapositivas siguientes.

4.7. Ecuaciones fundamentales

Las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica son la de *continuidad del fluido*, que expresa el hecho de que a través de un paralelepípedo elemental o diferencial la cantidad de fluido que entra es igual que la que sale. Su expresión es:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho_w u_f)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w v_f)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_w w_f)}{\partial z} \right] = 0 \quad (38)$$

en la que ρ_w es la densidad del agua y u_f , v_f y w_f son las velocidades de una partícula de fluido.

Otro conjunto de ecuaciones que describen el movimientos de un fluido corresponden a las conocidas *ecuaciones de Navier-Stokes*. Estas ecuaciones expresan la aceleración de una partícula y son válidas para el caso de fluidos Newtonianos de flujo laminar con una viscosidad cinemática (ν) constante.

$$\frac{Du_f}{Dt} = \frac{\partial u_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial u_f}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2} \right) \quad (39.a)$$

$$\frac{Dv_f}{Dt} = \frac{\partial v_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial v_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial v_f}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_f}{\partial z^2} \right) \quad (39.b)$$

$$\frac{Dw_f}{Dt} = \frac{\partial w_f}{\partial t} + u_f \frac{\partial w_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial w_f}{\partial y} + w_f \frac{\partial w_f}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_f}{\partial z^2} \right) \quad (39.c)$$

Las funciones X , Y y Z representan las fuerzas por unidad de volumen actuando sobre el fluido.

Si el fluido es irrotacional y perfecto (no viscoso) se puede introducir una función de tensión Φ que permite expresar, tras integración respecto a la coordenada espacial, las ecuaciones de Navier-Stokes como sigue:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g y \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = f(t) \quad (40)$$

en donde p es la presión, g la aceleración de la gravedad, y la coordenada vertical y $f(t)$ una función arbitraria en el tiempo. Si el flujo se considera estacionario ($\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$) entonces se llega

a la expresión usual del teorema de Bernoulli

$$p + \rho gy + \frac{1}{2}\rho(u_f^2 + v_f^2 + w_f^2) = \text{constante}$$

que corresponde a la forma no estacionaria de la ecuación de Bernoulli.

El planteamiento del oleaje consiste en obtener el campo de velocidades de forma que se satisfaga las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes del movimiento así como las condiciones de contorno.

Dada la complejidad del problema se suele reducir su dimensión a 2-D y en este caso se introduce una función de corriente Ψ definida por las expresiones:

$$u_f = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_f = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (41)$$

con lo que la ecuación de continuidad (38), suponiendo $\rho_w = \text{constante}$, se satisface idénticamente. Se puede demostrar la proposición inversa. Se denomina función de corriente las definidas por la expresión $\Psi = \text{constante}$.

Las condiciones de contorno en el fondo plano del mar, $y = -d$ para el caso del oleaje, con el origen de coordenadas en el NMM y el eje Ox horizontal y el Oy normal ascendente, se escriben como sigue:

- Borde del fondo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = -d$$

- Si existe un sólido rígido que se mueve a velocidad normal u_{fn} a su superficie

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = u_{fn} \quad \text{en la superficie del sólido}$$

- Condición cinemática en la superficie libre

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } y = \eta$$

con $y = \eta(x, y, t)$ la superficie libre.

- Condición dinámica en la superficie libre

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \rho g \eta = f(t)$$

que expresa la presión nula (atmosférica) en la superficie libre mediante la aplicación del teorema de Bernoulli.

No existe solución analítica de este problema no lineal así planteado por la complejidad de las condiciones de contorno, de tipo no lineal y móvil.

Sin embargo, existen numerosas teorías del oleaje que son aplicables a diferentes entornos dependiendo de los parámetros específicos del entorno, es decir, de la profundidad del agua, altura de la ola y de su período. Algunas de estas teorías se aplican con condiciones geométricas de fondo del mar irregulares o plano inclinado, a las más usuales se limita a fondo plano horizontal. Los rangos de validez de algunas de estas teorías se exponen en la diapositiva.

A diferencia de las olas oceánicas todas la teorías de olas suponen que estas son periódicas y uniformes, con un período T y una altura H .

Una teoría del oleaje exige obtener la solución de un problema de contorno, compuesto por una ecuación diferencial de dominio más determinadas condiciones en su contorno. Incluso en el simple caso de fondo plano horizontal no es posible resolver el problema de contorno, sin introducir simplificaciones. Existen dos tipos de aproximaciones. La primera consiste en utilizar una técnica de perturbación alrededor de un pequeño parámetro, como la altura de la ola. La segunda aproximación se desarrolla como función de la profundidad del agua, como se lleva a cabo en la teoría de aguas someras.

En los apartados siguientes se utiliza este desarrollo teórico hidrodinámico que permite deducir, al menos en teoría, el campo de velocidades y movimientos que se produce cuando actúa una corriente estacionaria y/o un oleaje. A partir del cual se determinan las fuerzas que se producen sobre el tubo en una posición genérica durante el proceso de su colocación en el fondo marino.

Las teorías aproximadas más utilizadas en la ingeniería son: (1) La teoría lineal del oleaje de Airy, (2) las teorías de Stokes de segundo y tercer orden, (3) Las teorías de Stokes de quinto orden, (4) la teoría cnoidal y (5) la teoría de la función de corriente. Estas tienen un rango de aplicación. Existen otras teorías del oleaje de interés como la de la ola solitaria y la teoría trocoidal, cuya aplicabilidad es limitada a casos especiales.

En este trabajo se ha utilizado la teoría lineal del oleaje (T. O. L.) de Airy, que es una formulación fácil de manejar que, explica la teoría lineal del movimiento ondulatorio al medio físico representado por la superficie libre del agua en movimiento. Esta adecuación se realiza ajustando los parámetros de amplitud y período de la onda con la altura y período de la ola. La descripción de la T.L.O. encaja adecuadamente con la onda de oleaje de gravedad de períodos cortos, sobre todo en aguas profundas.

A continuación se expone de forma resumida la formulación T.L.O que es la que se ha aplicado en el presente modelo, detalles de la misma pueden consultarse en distintas publicaciones, por ejemplo en [2].

Esta teoría determina los parámetros de la onda en función de tres zonas diferenciadas, aguas profundas, aguas someras o poco profundas y zona de transición entre ambas.

La separación entre ellas viene determinada por el valor de d/L donde:

d	Profundidad del fondo marino en el punto de estudio	(m)
L	Longitud de onda a la profundidad d	(m)

En la diapositiva se reproduce la formulación dada en el '*Shore Protection Manual*' [5] para los valores de la características de la onda según la Teoría Lineal del Ondas o formulación de Airy.

La notación utilizada en la tabla de la diapositiva, así como en la correspondiente a la zona que interesa en la colocación de emisarios, denominada de transición entre aguas someras y profundas ha sido:

θ_f	Angulo de fase del oleaje	(rad)
x	Distancia horizontal al origen de referencia	(m)
t	tiempo transcurrido desde el origen de medida	(s)
z	Profundidad desde la superficie libre (negativa)	(m)
ρ_w	Peso específico del agua del mar	(t/m^3)

Finalmente la obtención de la distribución de las velocidades producidas por la corriente, si bien más simple que en el caso del oleaje, presenta una serie de dificultades prácticas. En efecto, las ecuaciones de la Mecánica de fluido aplicada al medio marítimo exige imponer unas condiciones de contorno complejas, no lineales en el borde libre y con dificultades de modelización, rugosidad, existencia de capa límite y movimiento del sedimento, en el fondo, que no permiten obtener soluciones analíticas. Por analogía con otros problemas más simples, como la circulación de fluidos en canales, se han deducido en la situación estacionaria de corriente horizontal del mar, distribuciones aproximadas de la ley de velocidades, que suponen valores nulos en el fondo.

En la diapositiva se muestra una distribución de este tipo.

4.8. Determinación de las acciones

La obtención de las fuerzas que inducen sobre un sólido (emisario) un campo de velocidades y aceleraciones es un problema muy complejo, que como se ha indicado sería preciso resolverlo mediante el análisis del conjunto sólido-mar. No obstante se ha llevado a cabo una investigación experimental muy intensa, de la cual unos resultados relevantes corresponden a las fórmulas de Morison *et al.* publicadas en 1950 [8]. En esta publicación Morison *et al.* estudian la fuerza

actuante, producida por un oleaje sin rotura, sobre un cilindro vertical que se extiende desde el fondo a la superficie libre.

Como resultado, se obtienen dos componentes de la fuerza, un primer componente *de arrastre* y otro *de inercia*. La mayor dificultad del método estriba en la determinación de cada uno de los coeficientes asociado a cada componente de la fuerza.

$$f = f_D + f_I \quad (42)$$

Conceptualmente cada uno de estos componentes, actuando en la rebanada dl mostrada en la diapositiva puede interpretarse de la siguiente como sigue:

- *Arrastre*: Este fenómeno debe entenderse de la siguiente manera:
 - En primer lugar, cuando se tiene un flujo de velocidad constante actuando sobre el cilindro en la zona aguas arriba, la existencia del cilindro obliga a las líneas de corriente a abrirse para salvar el obstáculo creando una presión hacia afuera, mientras que aguas abajo ocurre el fenómeno contrario. La existencia del cilindro como obstáculo ante el flujo incidente provoca una zona que deja un *'hueco'* o zona de menor presión que debe llenarse. Este fenómeno provoca curvas de igual presión a lo largo del cilindro.
 - En segundo lugar, el campo de velocidades creado por el oleaje no es constante, sino que cambia de dirección y magnitud a lo largo del tiempo, con lo que en un oleaje regular, cada media longitud de onda se reproduce el fenómeno con igual valor, pero actuando en la dirección contraria; es decir la zona aguas arriba se convierte en aguas abajo y viceversa, produciéndose en ambas direcciones un mismo valor máximo de la velocidad.

Dado que el valor de la fuerza de arrastre $F_D = f(\rho_w, D, C_D u_f, u_f |u_f|,)$ es proporcional al cuadrado de la velocidad actuante y tiene la misma dirección que ésta, en un instante t puede expresarse como:

$$F_D = f(\rho_w, D, u_f, u_f |u_f|) \quad (43)$$

$$df_D = \frac{1}{2} C_D \rho_w D |u_f| u_f ds \quad (44)$$

df_D Fuerza de arrastre

C_D Coeficiente de arrastre

D Diámetro del cilindro

u_f Velocidad del fluido con dirección

ds Diferencial de cilindro sobre el que actúa la fuerza $ds = Adl$

A Area de la sección del cilindro $A = \frac{\pi D^2}{4}$

Se trabaja en términos diferenciales porque el campo de velocidades debido al oleaje varía con el tiempo como ya se ha explicado anteriormente.

- *Inercia:* Una partícula dentro de un campo de velocidades acelera al llegar al cilindro para rodearlo y decelera al pasar de largo, esto implica una variación en el momento de la partícula. La fuerza de inercia correspondiente a este fenómeno puede calcularse como el trabajo necesario que habría que aplicar a la partícula para provocar ese momento. La fuerza resultante es proporcional a la aceleración aplicada a la partícula en el centro del cilindro en ausencia de este. Matemáticamente esta fuerza puede expresarse mediante la expresión:

$$df_I = C_M \rho_w \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial u_f}{\partial t} ds \quad \rightarrow \quad F_I = f \left(\rho_w, D, C_D, u_f, \frac{\partial u_f}{\partial t} \right) \quad (45)$$

en la cual:

df_I	Fuerza de inercia
C_M	Coefficiente de inercia
$\frac{\partial u_f}{\partial t}$	Aceleración local de la partícula respecto del centro del cilindro

Si se consideran los siguientes términos:

$$A_D = \frac{1}{2} \rho_w D \quad A_I = \rho_w \frac{\pi D^2}{4} \quad (46)$$

se tiene que la ecuación de la fuerza a lo largo de todo el cilindro responde a la expresión:

$$F = \int_0^d f ds = \int_0^d \left[C_M A_I \frac{\partial u}{\partial t} + C_D A_D |u_f| u_f \right] ds \quad (47)$$

Si se utilizan las expresiones de la T. O. L. de Airy de las velocidades y aceleraciones se deducen tras los correspondientes cálculos las fórmulas de Morison *et al.* que determina las acciones más desfavorables:

- *Fuerza de arrastre:*

$$F_D = C_D \frac{\gamma}{g} u_f^2 \frac{D}{2} \quad (48)$$

- *Fuerza de inercia:*

$$F_I = C_M \frac{\gamma}{g} \dot{u}_f \frac{D^2}{4} \quad (49)$$

- *Fuerza de sustentación:*

$$F_L = C_L \frac{\gamma}{g} u_f^2 \frac{D}{2} \quad (50)$$

Las velocidades y aceleraciones máximas junto al fondo son:

$$u_{fmax} = \frac{\pi H}{T} \frac{1}{\text{sen} \frac{2\pi d}{L}} \quad (51)$$

$$\dot{u}_{fmax} = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \frac{1}{\text{sen} \frac{2\pi d}{L}} \quad (52)$$

$$(53)$$

obteniendo los valores de las fuerzas máximas de inercia y arrastre, no así, su simultaneidad.

La extension de las fórmulas de Morison *et al.* al caso de cilindros inclinados necesario en el estudio del proceso de colocación de un emisario se puede consultar en Sarpkaya *et al* (1982) [12]. Estos autores obtuvieron los valores de los componentes de las fuerzas de inercia y arrastre mediante el estudio cinemático de cilindros inclinados.

5. Ejemplos de aplicación

6. Comentarios finales

El ejemplo de ingeniería civil que se ha presentado intenta mostrar la necesidad e importancia de la aplicación de las técnicas matemáticas en la elaboración de modelos que permitan predecir el comportamiento de las estructuras ante las acciones previsibles de servicio y las potenciales últimas que producen su colapso. Dada la capacidad de computación alcanzada, la adopción de modelos estructurales más precisos y adecuados con la realidad que se intenta simular se hace perentoria. Este hecho, unido a la ética profesional, que exige la utilización mínima de los recursos limitados de nuestro planeta en las construcciones públicas, han impulsado la creación de modelos más elaborados y matemáticamente más exigentes. Este desafío impone a mi entender la necesidad de (a) una mayor colaboración interdisciplinar, en particular entre matemáticos, y en general científicos e ingenieros; (b) una intensificación de la investigación aplicada, pero también básica (no hay nada más práctico que una buena teoría); (c) la posibilidad de incrementar la docencia de la Matemáticas en los estudios técnicos así como introducir aplicaciones prácticas en las enseñanzas de la Matemáticas representan un ideal. Sin embargo, su implementación se presenta remota dado los recortes de estudios que se debaten en la actualidad. Se hace necesario, que la barrera del lenguaje, que sin duda existe en la comunicación entre ingenieros y matemáticos, sea removida mediante estancias que permitan tomar cursos optativos en los distintos centros, de forma análoga a como se procede con los idiomas dentro de los programas de ámbito europeo, tales como Erasmus o Sócrates, y que los actuales cursos de doctorado no utilice esta posibilidad con la intensidad que sería deseable. En cualquier caso, la realización de estos Talleres de Matemáticas representa una iniciativa que debe ser fomentada.

Enhorabuena a los organizadores.

Referencias

- [1] Argyris, J. H. and Hilbert, O. and Malejannakis, G. A. and Scharpf, D. W. On the geometrical stiffness of a beam in space. A consistent V.W. approach. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, 20:105–131, 1979.
- [2] Chakrabarti, S. K. *Hydrodynamics of Offshore Structures*. WIT Press/Computational Mechanics Publications, 1987.
- [3] Clough, R.W. The finite element in plane stress analysis. In *Proc. Second ASCE Conference on Electronic Computation. Pittsburg, Pa*, September 1960.
- [4] Courant, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49:1–23, 1943.
- [5] Coastal Engineering Reserch Center. *Shore Protection Manual*, volume Volume 1. Department of the Army. US Army Corps of Engineers, Washington, DC 20314, second printing edition, 1984.
- [6] Galerkin, B. G. Series solution of some problems of elastic equilibrium of rods and plates (in Russian). *Vestn. Inzh. Tech.*, (19):897–908, 1915.
- [7] Kantarovitch, L. V. and Krylov, V. I. *Approximate Methods of Higher Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1958.
- [8] Morison, J.R., O'Brien, M.P., Johnson, J.W., and Schaaf, S.A. The force exerted and surface waves on piles. *Petrol Trans., AIME*, 189:149–154, 1950.
- [9] Ritz, W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisen Variations. Problem der Matema-tischen Physik. *J. Reine angew. Math.*, 1909.
- [10] Samartín, A. *Resistencia de Materiales*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 1995.
- [11] Samartín, A and González de Cangas, J. R. *Cálculo Matricial de Estructuras*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid, 2001.
- [12] Sarpkaya, T., Raynes, T.S., and Trytten, D.O. Wave forces on inclined smooth and rough circular cylinders. In *Proceedings of the Fourteenth Offshore Technology Conference, Hous-ton, Texas, OTC 4227*, pages 731–736, 1982.

- [13] Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., and Topp, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of Aeronautical Sciences*, 23:805–823, 1956.
- [14] Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, Oxford. England, 1982.
- [15] Yang, Y. B. and S. R. Kuo. *Theory and Analysis of Nonlinear Frame Structures*. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ 07456, 2nd edition, 1994.