LO QUE EULER LE DIJO AL CARTÓGRAFO (1ª PARTE)

Raúl Ibáñez Torres (*)

Según podemos leer en cualquier diccionario,

"Mapa: *(Del latín mappa, mantel) Representación de una parte o de la totalidad de l a superficie terrestre o de otros planetas, cielo estrellado, cuerpos, etc, sobre una superficie plana*".

Pero no necesitamos acudir al diccionario para saber qué es un mapa. Los mapas son objetos familiares para nosotros. Los mapas pertenecen a nuestra vida cotidiana, nos los encontramos todos los días, desde que nos levantamos por la mañana hasta que nos acostamos, tanto en nuestro entorno laboral como en el privado, ya sea de forma activa o pasiva. Todos recordamos, con cierta nostalgia, los mapas que decoraban las paredes de las escuelas donde de niños estudiábamos. A diario utilizamos los billetes de nuestra nueva moneda, el Euro, y en ellos podemos ver un mapa de Europa que simboliza la unidad de los estados que forman la Comunidad Europea. Cuando leemos el periódico o vemos un noticiario en la televisión nos encontramos con infinidad de mapas. Nos podemos encontrar, por ejemplo, con un mapamundi con información sobre razas, religiones, idiomas o poblaciones, un mapa donde se representan los diferentes niveles de contaminación, producción de algún producto o tasa de accidentes de Euskadi, España, Europa, o cualquier otro territorio, un mapa mostrando la situación económica de los diferentes países de la Comunidad Europea o un mapa de alguna de las zonas del mundo donde hay conflictos armados. Por supuesto, nunca puede faltar el mapa más consultado por nosotros, el mapa del tiempo. Si vemos algún programa documental, ya sea de naturaleza, historia, geografía, economía u otro tema, o si leemos un libro o revista especializados, o de divulgación, en alguno de los anteriores tópicos, nos encontraremos mapas explicativos que nos ayudan a comprender la información, a ubicar los diferentes datos en su lugar. Por supuesto, también nos encontramos mapas en las películas que vemos o en los libros de ciencia ficción que leemos, mapas imaginarios como en *El señor de los Anillos* o mapas reales como en las películas de aventuras y de guerra, *Moby Dick*, *Dersu Uzala*, *Casablanca*, *Indiana Jones*, *Juegos de Guerra*,... o divertidos mapas como en la película de animación *El Emperador y sus locuras* donde los protagonistas caminan sobre el mapa.

Figura 1: Imagen de un mapa de una publicación del National Geographic
(ver también las Figuras 31 y 32)

(*) Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Matemáticas.

Cuando vamos a organizar nuestras vacaciones nos aprovisionamos de unos cuantos mapas para estudiar las diferentes alternativas para nuestros viajes, para organizarlos y para finalmente orientarnos en ellos. De igual forma cuando realizamos un viaje en coche necesitamos un mapa de carreteras o si paseamos por una nueva ciudad necesitamos un mapa-callejero, para no perdernos y llegar bien a los diferentes destinos. Paseando por nuestra ciudad nos podemos encontrar mapas en la publicidad de algunas compañías (por ejemplo, se utiliza el mapamundi para mostrar la internacionalidad del producto a vender), en escaparates de agencias de viaje, en tiendas de ropa infantil o librerías cuando anuncian el inicio del curso escolar, o en vallas para orientar a los visitantes de una ciudad. También nos encontramos mapas en el logotipo de algunas empresas o en el envoltorio de sus productos.

Figura 2: Mapa de Bilbao de una guía turística (editado por el Gobierno Vasco)

Pero también nos encontramos con los mapas en nuestra vida laboral. Prácticamente todos los trabajos tienen asociada en mayor o menos medida la utilización de mapas. Mapas para la navegación marítima o aérea, mapas políticos, mapas urbanos, mapas de comunicaciones (ferrocarril, carretera,...), mapas topográficos, mapas morfológicos, mapas científicos de diferentes clases (botánicos, geológicos, climatológicos, geográficos,...), mapas económicos y estadísticos, mapas artísticos utilizados para los anuncios publicitarios o para el turismo, mapas catastrales que representan las parcelas de los diferentes propietarios, con cultivos, y un largo etcétera. *Por lo tanto, podemos afirmar que sabemos qué son los mapas, que conocemos*

de forma exhaustiva estos objetos que manejamos cotidianamente para muy diversas acciones de nuestra vida.

Por otra parte, el mapamundi de la Figura 3 (que es el mapa realizado con la proyección de Mercator y que estudiaremos en la segunda parte de este artículo) es el mapa de toda la vida, el que hemos visto desde nuestra infancia para representar la tierra y que por lo tanto utiliza nuestra mente de forma inconsciente, como una realidad inalterable. *Como todos sabemos, este es el buen mapa, el mapa correcto o como alguien afirmó delante de mí en cierto momento, este es el mapa verdadero*. Miremos de nuevo al mapamundi de la Figura 3 y planteemos algunas cuestiones sencillas. ¿Qué camino tomar para ir de Madrid (o si queremos exagerar un poco más, de Baku) a Washington D.C.?

Figura 3: Mapamundi realizado con la proyección de Mercator

Como todo el mundo sabe que el camino más corto entre dos puntos del plano es la recta, la respuesta que obtendremos es el meridiano 40, sin embargo, en la esfera el camino más corto entre dos puntos cualesquiera es el círculo máximo que pasa por dichos puntos (una sencilla explicación de este hecho se encuentra en la Sección 1, además, recordemos que los círculos máximos de la esfera se obtienen como la intersección de esta con los planos que pasan por su centro) y en este caso, su imagen en el plano no es el meridiano 40 (en la Figura 4 podemos observar la imagen de un círculo máximo que une San Francisco y Yokohama en el mapa de Mercator, claramente distinto de la recta que los une). Este es uno de los motivos por los cuales los aviones que unen Madrid con Washington no siguen el meridiano 40, sino que suben hacia el norte y después descienden hacia el sur siguiendo el círculo máximo (si hemos considerado Baku el camino hacia Washington casi nos lleva al polo norte). Podemos concluir que para nuestro mapamundi no se preservan los caminos más cortos.

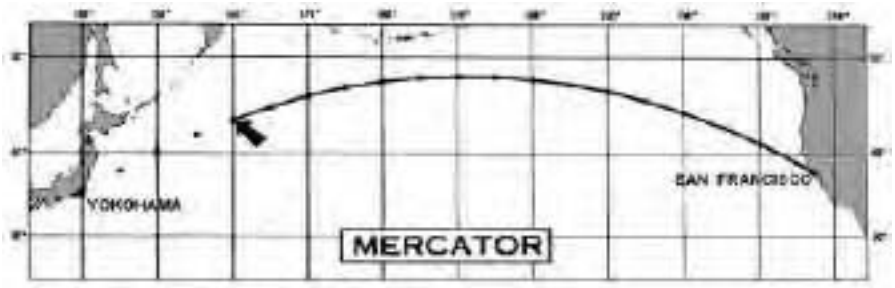

Figura 4: Círculo máximo en el mapa con la proyección de Mercator

Por otra parte, es habitual que en la parte inferior de un plano se indique la escala del mismo, entonces dados dos puntos sobre la tierra, ¿Cúal es la distancia entre esos puntos?. En estos casos, medimos la distancia en el mapa y utilizamos la escala indicada para obtener la supuesta medida. Sin embargo, por lo comentado anteriormente, tendríamos que medir en el plano la longitud de la curva imagen del círculo máximo y no la de la recta. Aun así, el resultado que se obtendría seguiría siendo incorrecto, y esto se debe a que nuestro mapa no preserva las longitudes de las curvas, no preserva las distancias, y en realidad, no se puede hablar de la escala como algo uniforme a lo largo de todo el mapa. Siguiendo en esta línea de pensamiento, cuestionemos si el área es preservada en la proyección de Mercator. Como es bien conocido Groenlandia aparece en este mapa demasiado grande, mostrándose incluso un poco más grande que África, sin embargo, la realidad es que Groenlandia tiene una extensión de 2.175.600 km^2 y África de 29.800.000 km^2, luego se produce una distorsión muy fuerte en el área. Finalmente, preguntemos si los mapas preservan los rumbos, las direcciones, en definitiva, los ángulos. El ángulo entre los meridianos y los paralelos es de 90º, y también lo es en nuestro mapa de la Figura 3, sin embargo, si fijamos nuestra atención en la Figura 5 (que es el que obtenemos si miramos a la tierra desde el espacio infinito –a esta proyección clásica se la conoce con el nombre de proyección ortográfica) esto no es cierto ahora, es decir, este mapa no preserva los ángulos.

Figura 5: Mapa realizado con la proyección ortográfica

Finalmente, mencionemos que no sólo existen los dos mapas anteriores, sino que existen un gran número de representaciones planas diferentes de la tierra: Mercator, ortográfica, cilíndrica isoareal de Lambert, cónica isoareal de Albers, Mollweide, ortográfica de Gall-Peters, Eckert IV, central, estereográfica, cónica conforme de Lambert, cónica conforme bipolar

oblicua, cilíndrica equidistante, azimutal equidistante, Winkel-Tripel, Van der Gritten, UTM, Bonne, Eckert I-IV, homolográfica sinusoidal de Goode, Hammer, Werner, Briesemeister, Van der Gritten, cilíndrica isoareal de Behrmann, Robinson, y una largo etcétera (como se puede ver por ejemplo en [7], [8] o www.3dsoftware.com/Cartography/USGS/MapProjections). John Snyder en su libro *Flattening the Earth* habla de unas 265 proyecciones distintas. Entonces, nos preguntamos:

> ¿Por qué hay tantos mapas? ¿Cuál es el correcto? ¿Por qué los anteriores mapas no lo son? ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la tierra? ¿Qué significa correctamente?

El objetivo del presente artículo es, en parte, contestar a las anteriores preguntas, así como intentar tener un conocimiento mayor de esos objetos cotidianos que son los mapas. La herramienta necesaria para adentrarnos en el estudio de dichas cuestiones es la Geometría Diferencial, como podemos observar en los programas de las asignaturas de cartografía de diferentes licenciaturas (Geografía, Ingeniería Cartográfica, Náutica, Ciencias Ambientales, Ciencias del Mar, ...) o en textos habituales de cartografía como por ejemplo [3], [4] o [6]. Sin embargo, nuestro objetivo en este artículo es evitar los tecnicismos y ser fundamentalmente intuitivos, "geométricos", por lo que las herramientas que vamos a utilizar son las propias de la geometría clásica (básicamente geometría euclídea y trigonometría). Las aproximaciones que aparecen en muchos de los argumentos desaparecen si llevamos estos al límite, pero observemos que al llevar los argumentos al límite no estamos más que introduciendo el Cálculo Diferencial e Integral y nos encontramos entonces dentro de la Geometría Diferencial.

SECCIÓN 1. ALGUNAS CONSIDERACIONES PREVIAS

Una de las primeras cuestiones a las que debemos responder antes de iniciar nuestro estudio sobre los mapas de la tierra es ¿cuál es la forma y tamaño de nuestro planeta? Se atribuye a Tales de Mileto (que vivió entre los siglos VII y VI a.C.) la idea de la esfericidad de la Tierra. Pitágoras en el siglo IV a.C. vuelve a insistir en la opinión de que la Tierra es esférica, pero apoya esta afirmación en razonamientos astronómicos y matemáticos, aunque también filosóficos (la esfera era considerada la más perfecta de todas las formas, por lo que, la Tierra, obra maestra de los Dioses, debía ser esférica). Sin embargo, la mayoría de sus compatriotas seguía creyendo que la Tierra era plana, aunque sí continúa apoyando la idea de la esfericidad de la Tierra el filósofo Aristóteles (384-322 a.C.), quien ofrece seis argumentos físicos y lógicos en su favor. Sabemos además que posteriormente se realizaron varias mediciones del radio de la Tierra, siendo la primera y quizás la más cercana a la realidad la de Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) utilizando un sencillo argumento de semejanza de triángulos (una interesante referencia para leer más sobre el tema en [2]).

A finales del siglo XVII, Isaac Newton (1642-1727) sugirió, basándose en su trabajo sobre gravitación y el movimiento de los planetas, que la Tierra podría ser descrita más bien como un elipsoide o una esfera aplastada. Y aquí se inició otro interesante capítulo de la historia de la ciencia, donde esta se unió una vez más con la aventura, ya que mientras que Newton afirmaba que la Tierra era una esfera achatada por los polos, los Cassini (padre e hijo), como consecuencia de sus mediciones geodésicas en Francia, afirmaban que la Tierra se alargaba a lo largo de su eje. La Academia de Ciencias de Paris organizó entonces dos expediciones, una a Laponia (1736-1737), bajo la dirección de Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), y otra a Perú (1735-1744) y las mediciones efectuadas en las dos expediciones confirmaron que la Tierra estaba achatada en los polos.

Sin embargo, la tierra tampoco tiene forma de elipsoide o de esfera achatada, y se ha determinado finalmente que su forma es de geoide, que es como decir que tiene su propia forma. *A lo largo de este artículo nosotros vamos a considerar que la tierra es esférica y las discusiones que realicemos serán bajo esta suposición, que en esencia no cambia las conclusiones que se muestran en el artículo. Además, para evitar el problema del tamaño consideraremos el radio de la tierra como la unidad*.

Dedicaremos la parte final de esta sección a justificar que los círculos máximos de la esfera juegan en ella el papel de las "rectas", ya que determinan el camino más corto entre dos puntos (e incluso su curvatura es mínima). Para empezar recordemos que la distancia entre dos puntos de una superficie es el ínfimo de las longitudes de las curvas que unen esos dos puntos, en definitiva, la longitud del camino más corto entre esos dos puntos (siempre que exista), al cual se le denomina "geodésica". Sobre el plano son las rectas las curvas que describen los caminos más cortos entre puntos (además, su curvatura es nula, no se curvan), mientras que sobre la esfera los caminos más cortos los van a describir los círculos máximos (que además son curvas de curvatura mínima sobre la esfera), es decir, las curvas que se obtienen como intersección de la esfera con planos que pasan por el centro de la misma.

Desde nuestra intuición, ¿cómo podemos justificar la afirmación anterior? Consideremos dos puntos sobre la esfera y tomemos todos los círculos que pasan por ellos dos (que se obtienen como intersección de la esfera con los planos que pasan por los puntos). Por simetría, se observa claramente que es el círculo dado por el plano que pasa por el centro de la esfera el que tiene menor longitud, además, como su radio es el mayor, entonces será el círculo de menor curvatura. En definitiva, los círculos máximos son las curvas "más estiradas" entre dos puntos cualesquiera de la esfera.

Aunque para los propósitos de este artículo nos hemos marcado trabajar sólo a nivel intuitivo, vamos a dar una sencilla demostración con cálculo diferencial de lo anteriormente comentado. Asumimos que la esfera tiene radio 1 y que uno de los puntos es el norte. Sea el otro punto con latitud ϕ_1 y longitud θ_1. La longitud del círculo máximo que une el norte con nuestro otro punto (que es el meridiano de longitud θ_1) es $\pi/2 - \phi_1$. Consideremos a continuación una curva cualquiera que une también esos dos puntos y que en cada tiempo t estará determinada por la latitud $\phi(t)$ y la longitud $\theta(t)$, es decir, su vector de posición es

$$\alpha(t) = (\cos\phi(t)\cos\theta(t),\ \cos\phi(t)\operatorname{sen}\theta(t),\ \operatorname{sen}\phi(t)).$$

La longitud de la curva es por lo tanto,

$$L = \int_0^{t_1} || \alpha'(t) ||\, dt,$$

donde t=0 corresponde con el punto norte y $\phi(t_1) = \phi_1$, $\theta(t_1) = \theta_1$, son las coordenadas del otro punto. Un simple cálculo nos lleva a que

$$||\alpha'(t)|| \geq \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} = \left|\frac{d\phi}{dt}\right| \geq -\frac{d\phi}{dt},$$

y en consecuencia,

$$L = \int_0^{t_1} || \alpha'(t) ||\, dt \geq \int_0^{t_1} -\frac{d\phi}{dt}\, dt = \phi(0) - \phi(t_1) = \pi/2 - \phi_1.$$

Quedando demostrado así que el círculo máximo es la ruta más corta para viajar entre dos puntos de la esfera.

SECCIÓN 2. ¿QUÉ SIGNIFICA CORRECTAMENTE?

Cuando utilizamos un mapa, estamos interesados en poder medir el área de un terreno, en elegir un rumbo para navegar, en tomar el camino más corto entre nuestro lugar de origen y nuestro destino, y medir la distancia entre ellos, en que las formas de los territorios se mantengan si estamos analizando distribuciones geográficas (niveles de vida, contaminación, población,...), etc. En concreto, estamos interesados en que las proyecciones que utilizamos para realizar los mapas preserven conceptos métricos como: las distancias, los caminos más cortos entre dos puntos (las geodésicas), las direcciones (es decir, los ángulos), las áreas, las formas,...

Mucha gente tiene la impresión de que los mapas perfectos se obtienen tomando imágenes aéreas o por satélite. Sin embargo, para el mapa realizado a partir de imágenes de este tipo (el mapa de la Figura 5 sería el caso límite del satélite en el infinito), no se preserva ninguno de los conceptos métricos anteriores (otra cosa es que para nuestros propósitos no nos importe el margen de error que se produce).

Figura 6: Imagen aérea de Bilbao

En nuestra búsqueda de un mapa correcto de la esfera-tierra, empezaremos demostrando que una aplicación (continua y diferenciable) de la esfera en el plano que preservase las distancias entre puntos (por ello a estas aplicaciones se les llama isometrías), también preservaría los caminos más cortos (las geodésicas), los ángulos y las áreas. Además, la propiedad de preservar las distancias es equivalente a que se preserven las longitudes de las curvas. Las anteriores afirmaciones no son más que un caso particular del estudio del comportamiento de las aplicaciones diferenciables entre superficies respecto a las propiedades métricas de las mismas (una demostración con las herramientas propias de la Geometría Diferencial puede encontrarse en cualquier texto clásico de esta disciplina).

Distancias ⇛ Caminos más cortos (geodésicas)

Supongamos que tenemos una proyección de la esfera en el plano que preserva las distancias y veamos que también preservará los caminos más cortos entre cualesquiera dos puntos. Si nuestra proyección no preservase los caminos más cortos, entonces existirían dos puntos A y B sobre la esfera y otro punto C sobre el camino más corto entre los anteriores, que como sabemos es el círculo máximo que los une, tal que la imagen de C en el plano, C', no está en la recta que une las imágenes, A' y B', de los puntos A y B respectivamente (véase la Figura 7). En consecuencia, tenemos la siguiente situación. Por un lado, la distancia entre los puntos A' y B' (que denotamos A'B') es igual a la distancia AB, puesto que la proyección preserva las distancias, y esta a su vez es igual a la suma de las distancias AC y CB, por estar C sobre el camino más corto. Sin embargo, como C' no está en la recta que une A' y B', entonces la suma de las distancias A'C' y C'B', que por preservarse las distancias es igual a la suma de las distancias AC y CB, es estrictamente mayor que la distancia A'B', obteniéndose así una contradicción.

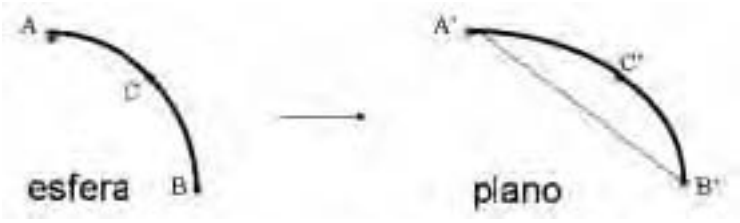

Figura 7

$$AC + CB = AB = A'B' < A'C' + C'B' = AC + CB.$$

Distancias ⇛ Longitudes de curvas

Por el párrafo anterior, una aplicación que preserva las distancias, también preserva los caminos más cortos y en consecuencia, preservará las longitudes de las curvas. La razón es que toda curva de la esfera puede ser aproximada mediante un número finito (suficientemente grande) de arcos de círculos máximos, luego aproximamos su longitud mediante la suma de las longitudes de estos (que son las distancias entre los puntos extremos), de igual forma la curva imagen se aproxima por las rectas imagen de los arcos anteriores y su longitud por la suma de las longitudes de estos segmentos (véase la Figura 8). El recíproco también es cierto porque la distancia entre dos puntos es la longitud de la curva geodésica entre ellos (o el límite de las longitudes de las curvas que los unen).

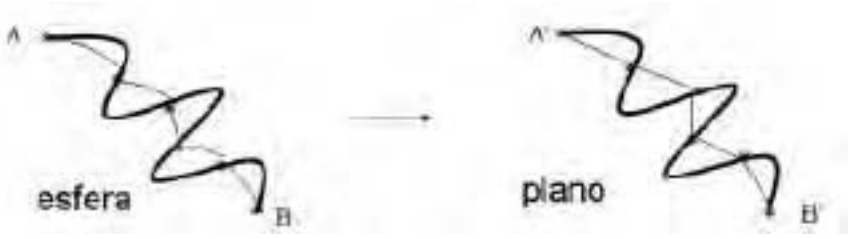

Figura 8

Distancias ⇛ Ángulos

Dados dos círculos máximos de la esfera que se cortan en un punto, si tomamos una circunferencia centrada en dicho punto, de radio suficientemente pequeño, entonces podemos

considerar que el ángulo θ entre los dos círculos máximos (que es el ángulo entre sus vectores tangentes) es el cociente entre la longitud del arco de circunferencia determinado por los dos círculos máximos y 2π veces el radio (véase la Figura 9).

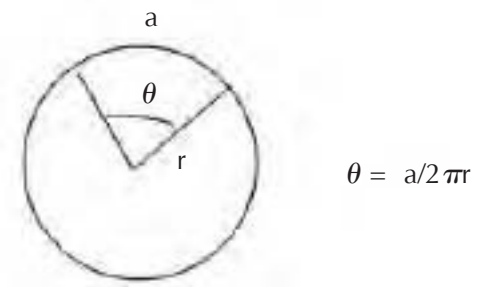

Figura 9

Si tomamos la imagen mediante una aplicación que preserva las distancias, obtenemos dos rectas y una circunferencia centrada en el punto de corte. Por preservarse las distancias y ser la fórmula de la Figura 9 válida para el plano, se deduce que dicha proyección preserva el ángulo. Este mismo argumento es válido para el ángulo entre dos curvas cualesquiera de la esfera que se corten en un punto, sin más que utilizar los círculos máximos que pasan por el punto de corte y con vectores tangentes iguales en dicho punto a los de las curvas.

Distancias ⇛ Áreas

La idea de esta afirmación reside en que dada una región acotada de la esfera la podemos cubrir con una familia finita (suficientemente grande) de regiones delimitadas por meridianos y paralelos, que podemos considerar regiones rectángulares (cuando el número sea suficientemente grande y por tanto estas regiones suficientemente pequeñas) y el área es la suma de las áreas de estos rectángulos (base por altura). En el plano obtendremos la región imagen, cubierta por la familia de rectángulos imágenes, y como la aplicación preserva las distancias, tendrá el mismo área.

En consecuencia, hemos demostrado que si existiesen aplicaciones de la esfera en el plano que preservasen las distancias también preservarían las áreas, las geodésicas y los ángulos. A continuación, vamos a mostrar tres mapamundis que se obtienen a partir de proyecciones clásicas de la esfera en el plano, para cada una de las cuales se preserva una de las propiedades métricas anteriores pero no las otras dos. La proyección de Arquímedes, que preserva las áreas, la proyección central o gnómica, que preserva las geodésicas, y la proyección estereográfica, que preserva los ángulos.

SECCIÓN 3. PROYECCIÓN DE ARQUÍMEDES O CILÍNDRICA ISOAREAL DE LAMBERT

El área de la esfera fue calculada por primera vez por Arquímedes (287 a.C - 212 a.C.) en su obra *Sobre la esfera y el cilindro*, demostrando que esta es igual al área del cilindro que la circunscribe. Cicerón relata en su obra *Discusiones tusculanas* que sirviendo como cuestor de Roma en Sicilia encontró y reparó la olvidada tumba de Arquímedes, sobre la cual estaba grabada una esfera inscrita en un cilindro (Plutarco narra en su obra *Vidas Paralelas* como Arquímedes hace esta petición a sus familiares). Se conoce como la aplicación de Arquímedes aquella entre la esfera y un cilindro tangente a la misma, tal que la imagen de un punto cualquiera A de la esfera es el punto A' del cilindro que es la intersección de este con la recta que pasa por A y corta perpendicularmente al eje del cilindro, como muestra la Figura 10.

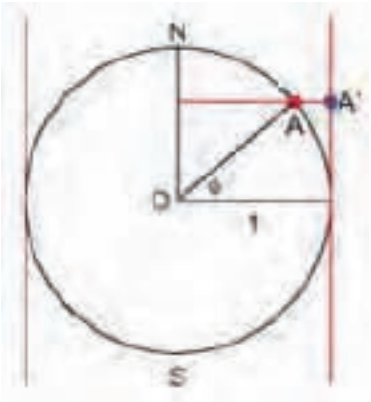

Figura 10: Proyección de Arquímedes

Si consideramos que la tierra es nuestra esfera unidad y que el cilindro es el tangente a la esfera en el ecuador (por lo tanto, su eje pasa por los polos norte y sur), entonces una vez obtenida la imagen de la esfera en el cilindro, se despliega este en el plano. Este mapamundi, véase la Figura 12, fue diseñado por J. H. Lambert en 1772. A pesar de su no muy larga vida (1728-1777), era considerado una de las figuras más importantes de su época. En 1761 publicó la primera demostración de la irracionalidad de π. Trabajó en las bases de la futura geometría no euclídea y produjo un fuerte avance en cartografía. Introdujo siete nuevos mapamundis, entre los que están la proyección azimutal isoareal, la conforme cónica o la de Mercator Transversa, esta última de gran importancia en nuestros días, como veremos en la segunda parte.

La proyección cilíndrica isoareal de Lambert es una *proyección cilíndrica*. Estas se obtienen al proyectar la esfera sobre el cilindro y después se desarrolla el cilindro en el plano. La distorsión en este tipo de mapas se produce en el primer paso ya que el desarrollo del cilindro en el plano es isométrico. Normalmente son proyecciones rectangulares. La distorsión es normalmente menor cerca de las curvas de tangencia (por ejemplo, el ecuador en la proyección de Lambert) y mayor según nos alejamos de ellas. Proyecciones cilíndricas geométricas (se llaman así a las proyecciones que tienen una interpretación geométrica, por ejemplo como rayos que emanan de un punto, de una recta o desde el infinito) son la isoareal de Lambert, de la ortogonal isoareal de Gall-Peters, la estereográfica de Gall o la estereográfica de Braun, mientras que proyecciones cilíndricas algorítmicas o matemáticas (proyecciones que no tienen una interpretación geométrica y que se obtienen a través de fórmulas matemáticas) son la de Mercator, la de Miller, la equirectangular (o carta plana), o la isoareal de Behrmann. Las proyecciones pseudocilíndricas son una gran familia que se distingue de las cilíndricas por tener meridianos curvados mientras mantienen los paralelos como rectas. Algunos ejemplos son las proyecciones isoareal de Eckert IV, isoareal sinusoidal (o de Sanson), isoareal de Mollweide, de Robinson, …

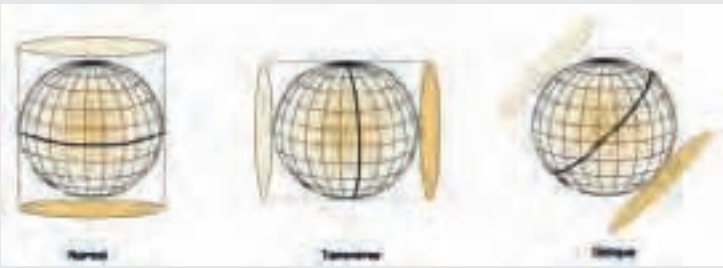

Figura 11: Aspectos normal, transverso y oblicuo de las proyecciones cilíndricas

Algunas propiedades del mapa basado en la proyección cilíndrica isoareal de Lambert:

i) es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas;

ii) los meridianos y los paralelos son rectas (de igual longitud cada una de las dos familias de rectas) que se intersecan ortogonalmente;

iii) preserva las áreas, pero no preserva ni los ángulos ni las geodésicas;

iv) la distorsión en las formas, ángulos y distancias, es muy pequeña cerca del ecuador (más aún, le escala es real en el ecuador), pero mayor según nos acercamos a los polos.

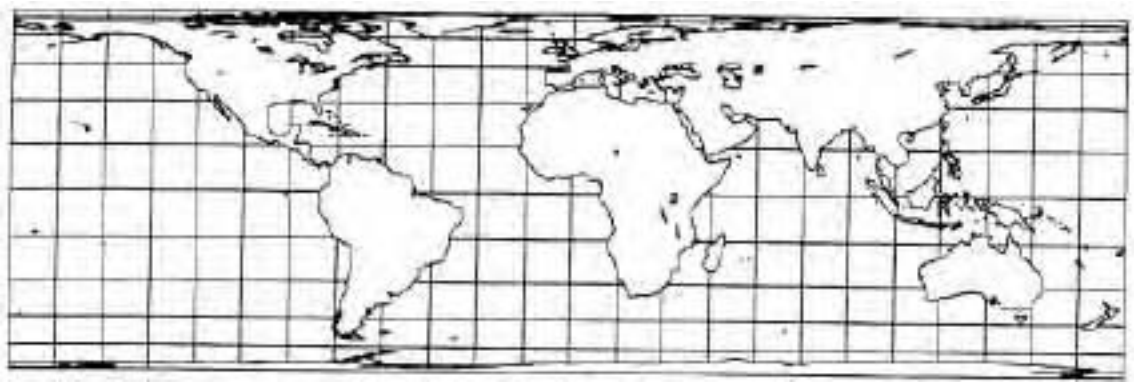

Figura 12 a: Mapa realizado a partir de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert (1772)

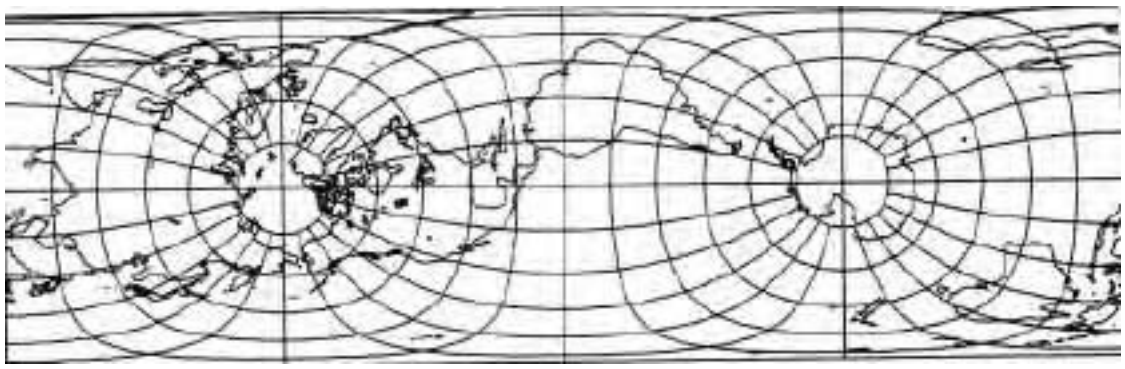

Figura 12 b: Mapa obtenido mediante la versión transversa de la proyección de Lambert

Teniendo en cuenta el comentario de la sección anterior relativo a las áreas, para demostrar que la aplicación de Arquímedes preserva el área, es suficiente probarlo para regiones "rectangulares" (suficientemente pequeñas) cuyos lados son meridianos y paralelos. Como se muestra en la Figura 13, dado un punto sobre la esfera de latitud ϕ, la imagen de un meridiano (suficientemente pequeño) de longitud l es un segmento de recta en el cilindro, de longitud $l' = l \cos \phi$, mientras que la imagen de un paralelo (suficientemente pequeño) de longitud k es un arco de circunferencia en el cilindro de longitud $k' = k / \cos \phi$. Por lo tanto, dado un pequeño "rectángulo" de base k y altura l sobre la esfera, luego de área $l \cdot k$, se transforma en un "rectángulo" de base $k' = k / \cos \phi$ y altura $l' = l \cos \phi$, cuyo área será también $l \cdot k$. En conclusión, la proyección de Arquímedes es una aplicación que preserva el área.

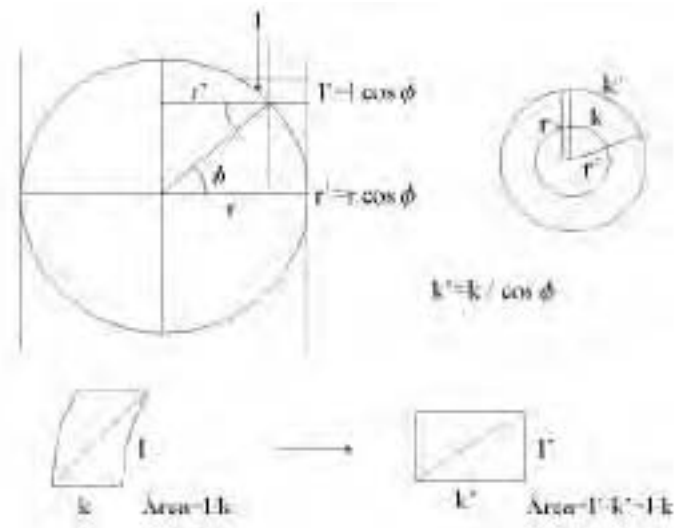

Figura 13: La proyección de Arquímedes es isoareal

Sin embargo, en este mapa de Lambert no se preservan los ángulos. Volviendo a la Figura 13, vemos que por la distorsión que se produce en los meridianos (se contraen) y en los paralelos (se dilatan), el ángulo entre la base y la diagonal del rectángulo sobre la esfera es mayor que el mismo ángulo pero del rectángulo imagen sobre el plano. Aunque el ángulo entre los meridianos y los paralelos sí es preservado. En general, del comentario anterior podemos extraer la conclusión de que para que se preserven los ángulos tienen que ocurrir dos cosas:

- Que se preserven los ángulos entre los meridianos y los paralelos (que son ángulos rectos, es decir, de 90 grados);
- Que la distorsión en la dirección de los meridianos μ sea igual a la distorsión en la dirección de los paralelos λ.

Por el Teorema de Pitágoras, si se cumplen ambas propiedades podemos concluir además que la distorsión en cualquier dirección es siempre la misma. En particular, para la proyección cilíndrica isoareal de Lambert hemos visto que $\mu = \cos \phi$ y $\lambda = 1 / \cos \phi$. Finalmente, es obvio que esta aplicación no preserva la geodésicas, solamente los meridianos y el ecuador.

Lambert también introdujo la versión transversa, que consiste en rotar el cilindro de tal forma que la curva tangente entre este y la esfera sea uno de los meridianos, para países o zonas del mundo que se extienden en la dirección norte-sur, por ejemplo, para mapas de America.

En muchas ocasiones se utiliza la proyección cilíndrica isoareal de Lambert porque es la proyección isoareal más sencilla de construir, por ejemplo, es muy utilizada en los libros de cartografía. La propiedad de preservación de las áreas es normalmente la propiedad prioritaria para mapas con información basada en áreas de territorios y también en mapas de interés general, ya que los mapas son un instrumento para transmitir información "de un vistazo", de forma más rápida y precisa que una tabla de números, y en este sentido es importante tener mapas que mantengan las proporciones de las áreas de los territorios. Además, sería también deseable que la deformación en las formas fuese la menor posible. En la actualidad la proyección utilizada por el National Geographic (hasta hace poco fue la proyección de Mercator) para crear sus mapas temáticos de la Tierra es la proyección de Winkel-Tripel (véanse las Figuras 31 y 32), que tiene una distorsión moderada en el área y en la forma, excepto en los polos. En general, nos encontramos este tipo de mapas en divulgación científica, en la educación o en los medios de comunicación, aunque desafortunadamente en muchas ocasiones se utilizan los mapas sin ningún criterio objetivo. También, este tipo de mapas suelen ser

utilizados en pósteres de mapamundis para colgar en las paredes. Otras proyecciones isoareales son la cónica isoareal de Albers, la de Mollweide, la ortográfica de Gall-Peters, la de Eckert IV, la proyección azimutal isoareal de Lambert o la proyección sinusoidal (o de Sanson-Flamsteed).

SECCIÓN 4. PROYECCIÓN CENTRAL O GNÓMICA

La proyección central o gnómica, considerada la proyección más antigua, se le suele atribuir a Tales de Mileto (624-547 a.c.), quien la utilizaba en su versión oblicua (el punto de tangencia no está en un polo o en el ecuador). Se denominaba horologium u horóscopo por su relación con los relojes de sol. El nombre de proyección gnómica le viene del gnomon (indicador de las horas en los relojes solares más comunes, frecuentemente en forma de un estilo; Antiguo instrumento de astronomía, compuesto de un estilo vertical y de un plano o círculo horizontal, con el cual se determinaban el azimut y altura del Sol, observando la dirección y longitud de la sombra proyectada por el estilo sobre el expresado círculo), este término empezó a ser utilizado a partir de mediados del siglo XVIII. Mientras que se desconoce la procedencia del término más obvio de proyección central. Consideramos una esfera y un plano tangente a ella, entonces la imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación central o gnómica, es el punto A′ del plano que se obtiene al intersecar este con la recta que pasa por A y el centro de la esfera (Figura 14). En la Figura 15 podemos ver un mapa realizado haciendo uso de la proyección central (en su versión ecuatorial).

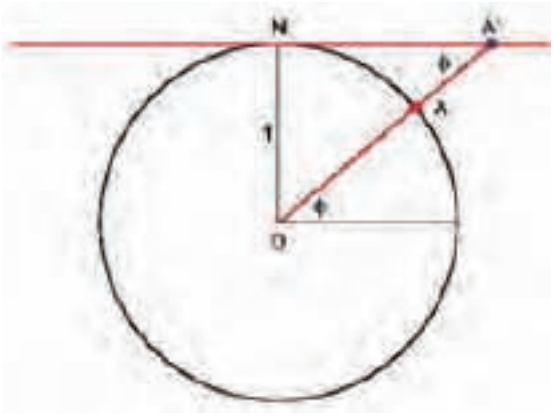

Figura 14: Proyección central

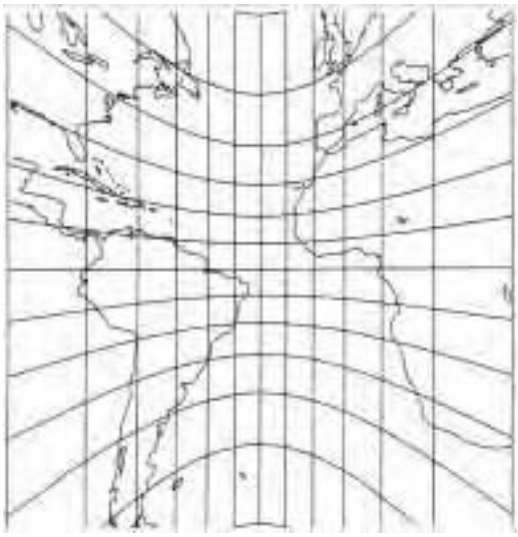

Figura 15: Mapa realizado con una de las proyecciones centrales ecuatoriales

La proyección gnómica es una *proyección azimutal* (el azimut es el ángulo que con el meridiano forma el círculo vertical que pasa por un punto de la esfera celeste o del globo terráqueo). Las proyecciones azimutales son proyecciones directas de la esfera sobre un plano tangente (o incluso secante) a la misma. Los círculos máximos (es decir, las geodésicas de la esfera) que pasan por el punto de tangencia se transforman bajo estas proyecciones en rectas que se intersecan en la imagen del punto de tangencia.

La distorsión que produce esta familia de proyecciones (geodésicas, área, ángulos, forma) es pequeña cerca del punto de tangencia (o alrededor del círculo de corte en el caso secante) y se va haciendo cada vez mayor según nos alejamos de este. Estas proyecciones tienen para la gente el atractivo de representarnos la imagen de la tierra vista desde el espacio. Proyecciones geométricas clásicas de esta familia son las proyecciones ortográfica, gnómica y estereográfica, mientras que otras proyecciones más sofisticadas son la azimutal equidistante o la azimutal isoareal de Lambert. Este tipo de mapas son útiles en oceanografía, navegación de larga distancia, defensa y otros intereses militares, turismo,… por ser proyecciones centradas en un sitio concreto y que preservan las geodésicas que pasan por el mismo. Causan demasiada distorsión para ser utilizados como mapas geográficos.

Figura 16: Aspectos polar, ecuatorial y oblicuo de las proyecciones azimutales

Algunas propiedades:

i) su imagen es circular y solamente cubre una parte de uno de los hemisferios;

ii) la distorsión de meridianos y paralelos es $\mu = 1 / \text{sen}^2 \phi$; $\lambda = 1 / \text{sen}\, \phi$;

iii) esta proyección preserva las geodésicas, pero no distancias, ángulos o áreas;

iv) la distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto.

Teniendo en cuenta que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos y que estos se obtienen como la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la misma, es trivial observar que la imagen de un círculo máximo mediante la proyección central es la recta intersección del plano que genera el círculo máximo y el plano de tangencia (ver Figura 17). En consecuencia, nuestra aplicación envía geodésicas de la esfera (círculos máximos) en geodésicas del plano (rectas). Además, esta es la única carta que satisface esta propiedad.

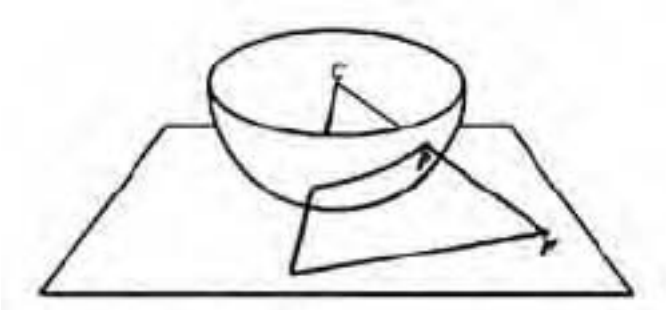

Figura 17: La proyección central preserva las geodésicas

Un método para estudiar la distorsión que producen las proyecciones de la esfera en el plano es el estudio la forma y excentricidad de la elipses sobre el plano que son imagen de pequeños

discos sobre la esfera (esta es la idea de la indicatriz o elipse de Tissot). Este método es equivalente a estudiar cómo es la distorsión que se produce en meridianos y paralelos. Veamos la distorsión de la proyección central.

Consideremos un disco D de radio suficientemente pequeño r y tangente a la esfera en un punto A, de latitud ϕ. Para ver su imagen en el plano mediante la proyección central, separemos el estudio en dos fases. En la primera, el disco D se transforma en un disco D' que descansa en un plano paralelo al de D y cuyo centro es A', la imagen de A mediante la proyección central. Por similitud de triángulos en la Figura 18 obtenemos que el radio r' de D' satisface que, $r'/r = |OA'|/1$, por lo tanto, $r' = r/\text{sen}\phi$.

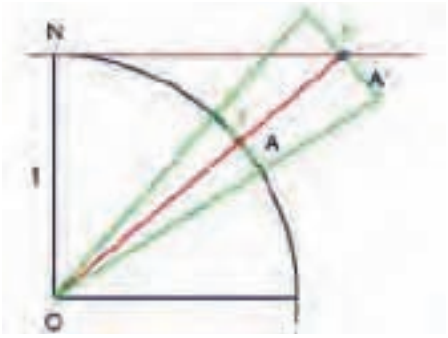

Figura 18: Fase de expansión de la proyección gnómica

La proyección del disco D' sobre el plano tangente T nos da la imagen deseada, que ya no es un disco sino una elipse. En la dirección "este/oeste" el disco D' interseca al plano T, luego no hay ningún cambio al proyectarlo y por tanto la distorsión en el paralelo es la ya calculada, $r' = r/\text{sen}\phi$. Pero veamos qué ocurre en la dirección "norte/sur" (distorsión en el meridiano). Como el radio r' es muy pequeño en comparación con la distancia de A' al origen O, el ángulo A'BC (véase Figura 19) está muy cercano al ángulo recto (en consecuencia, tomamos r suficientemente pequeño y consideramos dicho ángulo recto). Por lo tanto, el segmento en la dirección "norte/sur" de longitud r' se convertirá en un segmento en el plano T de longitud r'' igual a $r'' = r'/\text{sen}\phi = r/\text{sen}^2\phi$.

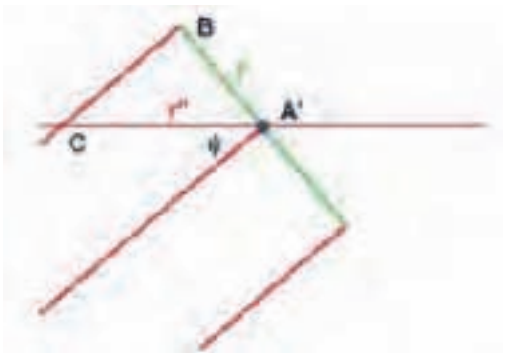

Figura 19: Fase de distorsión de la proyección gnómica

En consecuencia, la imagen D'' de D mediante la proyección central es una elipse de semiejes

$$r' = r/\text{sen}\phi \quad \text{y} \quad r'' = r/\text{sen}^2\phi$$

Como conclusiones tenemos que la proyección central no preserva las áreas, ya que $r^2 \neq r'\, r'' = r^2/\text{sen}^3\phi$, y no preserva los ángulos, ya que $r' \neq r''$.

A pesar de ser una de las proyecciones más antiguas, su utilización durante el renacimiento fue rara, empezándose a utilizar de nuevo por J. Kepler en un mapa celeste de 1606, y a partir de entonces se utilizó en algunos otros mapas celestes. Esta proyección es claramente útil en navegación, aérea o marítima, y suele usarse en combinación con la proyección de Mercator (como ya veremos en la segunda parte de este artículo). También, es útil en meteorología o cristalografía. La proyección central ha sido utilizada para diseñar mapas tipo estrella y también mapas sobre superficies poliédricas.

SECCIÓN 5. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Probablemente sea la proyección estereográfica la proyección azimutal más utilizada y conocida desde su origen (en el libro [9] puede verse una amplia descripción de su utilización en cartografía a lo largo de la historia; así mismo, puede verse qué métodos se utilizaban para diseñar estos mapas, así como para otras proyecciones, lo cual no es nada obvio y tengamos en cuenta que no se disponía de potentes ordenadores). Esta aplicación se suele atribuir a Hiparco y era conocida como *Planisphaerum* por Ptolomeo (aunque quizás los egipcios ya la conocían), mientras que el nombre de *proyección estereográfica* se debe a d'Aiguillon (1613). Además de la importancia de esta aplicación en cartografía, ha sido y sigue siendo una aplicación muy útil y utilizada en muchas y diferentes áreas de las Matemáticas y de la Física.

La proyección estereográfica se define como sigue. Consideremos la esfera y un plano tangente a ella en un punto S (por ejemplo el sur), entonces la imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación estereográfica desde el norte N, el punto antipodal al punto de tangencia, es el punto A′ del plano que se obtiene al intersecar este con la recta que pasa por A y el norte N (Figura 20). En la Figura 21 podemos ver un mapa realizado haciendo uso de la proyección estereográfica.

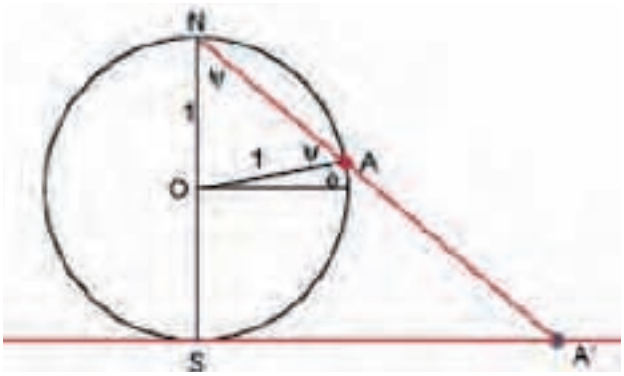

Figura 20: Proyección estereográfica

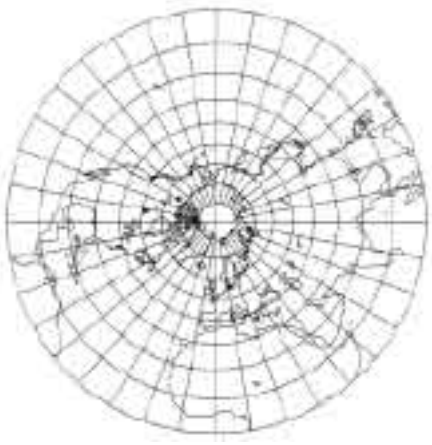

Figura 21: Mapa realizado con la proyección estereográfica polar

Algunas propiedades de la proyección estereográfica son:

i) al igual que otras proyecciones azimutales, su imagen es circular y solamente cubre parte de uno de los hemisferios, preserva las geodésicas pasando por el punto de tangencia y también, la distorsión de áreas y formas, aunque menor cerca del centro, en el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto;

ii) la distorsión de meridianos y paralelos es, $\mu = \lambda = \dfrac{1}{\cos^2(\phi/2 + \pi/4)}$
por lo tanto, es una proyección conforme, es decir, que preserva los ángulos;

iii) las loxodrómicas o líneas de rumbo fijo (i.e. las curvas sobre la esfera que forman un ángulo constante con los meridianos) se transforman en espirales logarítmicas;

iv) todos los meridianos y paralelos, aunque más generalmente todos los círculos de la esfera se proyectan en círculos del plano, con la excepción de los círculos máximos que pasan por el punto de tangencia que se transforman en rectas (que podemos considerar como círculos de radio infinito).

Veamos la distorsión que produce la proyección estereográfica. Consideremos un disco D de radio suficientemente pequeño r y tangente a la esfera en un punto A, de latitud ϕ. Vamos a estudiar su imagen mediante la proyección estereográfica y de paso cual es la distorsión que produce esta proyección. En la Figura 22, llamemos ψ al ángulo ONA, que es igual al ángulo OAN, y teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un triángulo es π se tiene que $\psi = \phi/2 + \pi/4$. Por otra parte, en función del ángulo ψ, tenemos que la distancia entre N y A es $|NA| = 2\cos\psi$, mientras que la distancia entre N y A' (A' es la imagen de A mediante la proyección estereográfica), $|NA'| = 2/\cos\psi$.

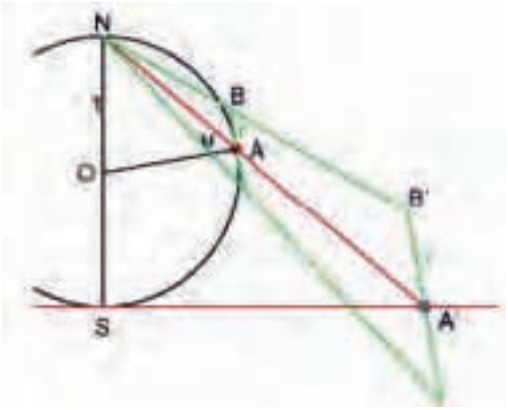

Figura 22: Fase de expansión de la proyección estereográfica

Separando la proyección del disco D en dos fases, tenemos que en la primera el disco se transforma en un disco D' que descansa en un plano paralelo al de D y cuyo centro es A', la imagen de A mediante la proyección estereográfica. De nuevo, por similitud de triángulos (véase Figura 22) tenemos que

$$r' = r\,\frac{|NA'|}{|NA|} = \frac{r}{\cos^2\psi} = \frac{r}{\cos^2(\phi/2 + \pi/4)}\,.$$

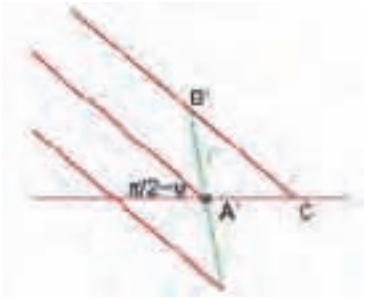

Figura 23: Fase de distorsión de la proyección estereográfica

A continuación, el disco D' de radio r' se proyecta sobre el plano de proyección T. En la dirección "este/oeste" el disco D' y el plano T se intersecan, luego el segmento imagen es él mismo y la distorsión que se produce en el paralelo es la ya calculada. Veamos qué ocurre en la dirección "norte/sur" (distorsión en el meridiano). Para empezar observemos que el ángulo SA'N es igual a $\pi/2 - \psi$. Si consideramos que |NA'| es muy grande en comparación con r' (tomamos inicialmente que D es suficientemente pequeño), podemos asumir que la proyección es paralela. Entonces, el segmento A'B' es proyectado en el segmento A'C y el segmento B'C es paralelo a NA', siendo el ángulo A'CB' igual a $\pi/2 - \psi$, así como el ángulo A'B'C, y el triángulo B'A'C isósceles. Por lo tanto, |A'C| = |A'B'| = r', y la imagen de D mediante la proyección estereográfica es un disco de radio

$$r' = \frac{r}{\cos^2(\phi/2 + \pi/4)} .$$

Todo ello nos dice que la proyección estereográfica es una proyección isogonal, es decir, que preserva los ángulos.

En 1695, Edmund Halley, motivado por su interés en las cartas celestes y usando la recientemente introducida herramienta que era el cálculo, publicó la primera demostración de que la proyección estereográfica es conforme. La conformalidad de la proyección estereográfica explica su utilidad para la realización de mapas celestes, donde el observador se convierte en el foco de la proyección y las estrellas visibles son proyectadas sobre un cierto plano. La mencionada propiedad nos asegura que los ángulos entre las diferentes constelaciones son los mismos en el plano que en el cielo. Por tanto, el observador sabrá exactamente hacia donde debe mirar en el cielo para localizar cualquier cuerpo celeste. Así mismo, la propiedad iv) anteriormente mencionada, es el motivo por el cual, en los mapas celestes, la "eclíptica", el círculo máximo que es el aparente camino del sol a través de las estrellas, se representa como un arco circular.

Figura 24: Durero utiliza la proyección estereográfica en su mapa del hemisferio norte eclíptico, *Imagines coeli septentrionales cum duodecim imaginibus zodiaci* (1515)

Mientras que en los siglos XVII y XVIII la proyección estereográfica centrada en el ecuador fue utilizada para mapas de los hemisferios este y oeste, en la actualidad sigue siendo frecuentemente utilizada para mapas topográficos de las regiones polares. Además es la base de la UPS- proyección estereográfica universal, que se utiliza para los polos en el sistema universal UTM, del que hablaremos en la segunda parte de este artículo. Es una proyección adecuada para regiones de forma aproximadamente circular, por ejemplo, ha sido utilizado también con este fin en mapas de regiones circulares de la Luna, Marte y Mercurio. El hecho de que la proyección estereográfica represente los círculos de la esfera como círculos sobre el plano, es el motivo por el cual la proyección estereográfica es utilizada para representar fenómenos radiales como las ondas sísmicas de los terremotos.

Las aplicaciones conformes son especialmente convenientes en situaciones en las que los ángulos y direcciones sean una condición principal, por ejemplo en la navegación (un caso muy importante es la aplicación de Mercator donde las loxodrómicas se transforman en rectas). Por otra parte, cuando le exigimos a un mapa que preserve las formas, esta es una propiedad un poco especial y no muy claramente definida. Si estamos hablando a nivel local, es decir, de regiones pequeñas, entonces las aplicaciones conformes son las que preservan las formas, sin embargo, esto no es así para regiones amplias de la tierra, como vemos en el mapa generado a partir de la proyección estereográfica.

Otras proyecciones isogonales son la proyección de Mercator, la aplicación cónica conforme de Lambert o la aplicación cónica conforme bipolar oblicua.

SECCIÓN 6. ¿EXISTEN MAPAS CORRECTOS DE LA TIERRA?

Pero volvamos al tema central de este artículo, ¿existen mapas correctos? ¿cómo construir correctamente un mapa de la tierra?. En una primera aproximación a este problema hemos visto que no es suficiente que la proyección preserve una de las propiedades métricas (áreas, ángulos o geodésicas), sino que se hace necesaria más información para poder asegurar que la proyección es isométrica, es decir, que representa correctamente la superficie terrestre. Por este motivo iniciamos esta sección con el estudio de proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo dos de las propiedades métricas que estamos considerando.

En primer lugar, consideremos una proyección de la esfera en el plano para la que se mantienen los ángulos y las áreas. Por lo comentado en la Sección 3, si la proyección es conforme entonces la distorsión no varía con la dirección, y en particular, la distorsión que se produce en los meridianos μ es igual a la que se produce en los paralelos λ. En esa misma sección hemos observado que si la proyección es isoareal, entonces $\mu = 1/\lambda$. Ahora, teniendo en cuenta ambas propiedades se concluye que $\mu = \lambda = 1$, es decir, la aplicación que preserva ángulos y áreas no produce ninguna distorsión, es una isometría. Luego, un método para la construcción de mapas correctos de la esfera-tierra podría ser el diseño de mapas que preserven ángulos y áreas al mismo tiempo. Lo cual no es ninguna trivialidad, ya que al ser isometría preservaría todas las propiedades métricas, ángulos y áreas, pero también geodésicas, formas, longitudes de las curvas y distancias.

Continuemos con nuestro estudio y consideremos ahora una proyección que conserve los ángulos y las geodésicas. En tal caso, tomemos un triángulo geodésico en la esfera formado por un arco de círculo máximo entre el norte y el ecuador, otro arco similar formando un ángulo de 90º con el anterior y el arco del ecuador que conecta los dos anteriores, que forma con cada uno de ellos un ángulo de 90º, como muestra la Figura 25.

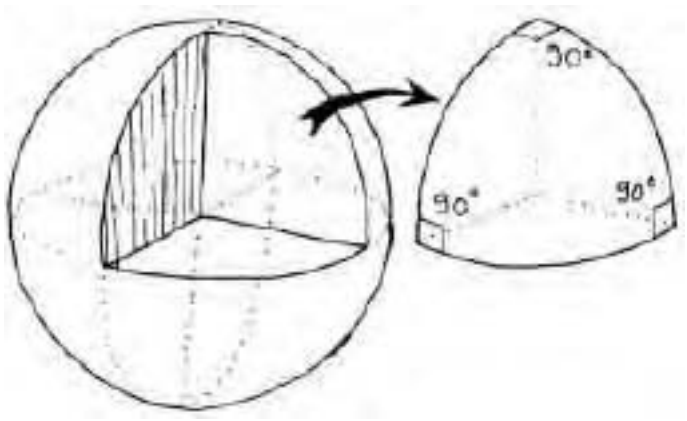

Figura 25: Un triángulo geodésico sobre la esfera

Entonces, la imagen de dicho triángulo geodésico de la esfera será un triángulo sobre el plano (ya que se preservan las geodésicas) con ángulos de 90º (ya que se preservan los ángulos), pero esto es absurdo porque, como bien sabemos de la geometría clásica, la suma de los ángulos de un triángulo en el plano es de 180º y no de 270º. Por lo tanto, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo los ángulos y las geodésicas. Pero esto tiene una consecuencia muy importante, ya que nos permite concluir que no existen isometrías de la esfera en el plano, es decir,

NO EXISTEN MAPAS PERFECTOS

todos los mapas son falaces en algún sentido. Este resultado es realmente local, el mismo argumento nos lleva a que no es posible construir isometrías locales de la esfera en el plano, es decir, tampoco es posible construir mapas perfectos de una parte pequeña de la tierra. Aunque a lo largo de la historia los cartógrafos no pudieron construir mapas ideales de la tierra, tampoco pudieron demostrar que no fuese posible, hasta que Leonhard Euler (1707-1783) lo probó en su trabajo *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano* (artículo presentado en la Academia de Ciencias de St. Petersburg en 1775 y publicado en 1778 en *Acta Academiae Scientarum Imperialis Petropolitinae*). Un experimento que pone de manifiesto el resultado de Euler es el siguiente. Consideremos una pelota de plástico, cortémosla por la mitad e intentemos colocarla completamente plana sobre la mesa. Podemos comprobar que en nuestro intento de aplanar la pelota, esta se nos rasgará, modificándose así las distancias entre los diferentes puntos de la superficie.

El resultado de Euler pone de manifiesto que lo importante a la hora de utilizar mapas, realizados con diferentes proyecciones, de diferentes regiones de la tierra o también mapamundis, es considerar para cada situación concreta los mapas que se ajusten lo más posible a nuestras necesidades. A la hora de utilizar un mapa en nuestro trabajo o en nuestra vida cotidiana no debemos dejarnos guiar por la fama de un mapa, su nombre o por ser el mapa oficial de alguna agencia internacional, sino que la elección debe ser consecuencia de una reflexión inicial sobre las propiedades que necesitamos que se preserven en el mapa y una posterior elección dentro de la gran variedad de mapas existentes (como ya hemos comentado en la introducción).

Centremos de nuevo nuestra atención en la imposibilidad de la existencia de mapas ideales de la tierra y mostremos un nuevo argumento que nos prueba esa afirmación. Elijamos el polo norte como punto de referencia (por simetría el resultado es válido para cualquier punto). A continuación, tracemos la circunferencia de la esfera formada por los puntos que distan una

pequeña distancia r del polo norte (el paralelo que nos encontramos al recorrer desde el polo norte una distancia r a lo largo de cualquiera de los meridianos). La longitud de esta circunferencia es menor que $2\pi r$ (exactamente $2\pi R sen(r/R)$). En consecuencia, si tuviésemos un mapa correcto de una región de la tierra que incluya nuestra circunferencia, entonces nuestra circunferencia se transformaría en una circunferencia de radio r sobre el plano (por preservarse las distancias) y su longitud sería $2\pi r$, en contradicción con el hecho de que al preservarse las longitudes de las curvas también debería de medir menos que $2\pi r$.

La obstrucción en nuestro experimento anterior a que podamos aplanar la pelota de goma sin rasgar ni estirar su superficie, es decir, la obstrucción a obtener una proyección isométrica de la esfera, parece estar en el hecho de que la esfera está curvada. Sin embargo, el cilindro o el cono son superficies curvadas y a pesar de ello nosotros podemos "desenrollar" partes de estas superficies hasta que queden planas y sin modificar sus propiedades métricas. Si fijamos nuestra atención en otra interesante superficie como es el toro (que se obtiene al revolucionar una circunferencia alrededor de una recta exterior) observamos que cuando la separamos para obtener el cilindro ya se han modificado las distancias, ya que la parte interior del toro se ha estirado. En consecuencia, parece ser que no todas las superficies están curvadas de la misma forma. De hecho, así es, existen dos tipos distintos de curvatura. Gauss demostró en su trabajo *Disquisiciones generales circa superficies curvas* (1827) que existe una curvatura para las superficies que depende únicamente de las propiedades métricas de la superficie, es la llamada curvatura de Gauss, por lo que si dos superficies son isométricas su curvatura de Gauss debe de ser la misma (el conocido como Teorema Egregium), y en el caso de la esfera es una constante positiva mientras que en el plano se anula, obteniendo así una nueva prueba de la imposibilidad de realizar mapas isométricos de la tierra. La otra curvatura, conocida como curvatura media, es la mide cómo se curva la superficie en el espacio. Digamos que esta es una curvatura extrínseca (es decir, que se aprecia desde el exterior de la superficie), mientras que la curvatura de Gauss es intrínseca (lo que quiere decir que un "habitante" de la superficie puede percibir esta curvatura desde la propia superficie, y a partir de las propiedades métricas como nos dice el Teorema Egregium). Para finalizar, y aprovechando el razonamiento anterior sobre la imposibilidad de isometrías de la esfera en el plano, describamos una de las formas de calcular la curvatura de Gauss. Dado un punto p la curvatura de Gauss en ese punto es el límite del valor

$$\frac{3}{\pi} \cdot \frac{2\pi r - C\,(r)}{r^3},$$

donde C(r) es la longitud de la "circunferencia" de la superficie de radio r y centrada en p, cuando el radio converge a 0.

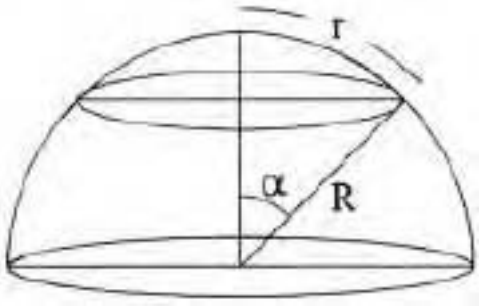

Figura 26: La circunferencia del paralelo es menor que $2\pi r$

Como acabamos de explicar, sólo las superficies con curvatura de Gauss nula –lo cual excluye a la esfera– pueden ser desarrolladas en un plano sin producirse distorsión métrica alguna. Un ejemplo de una tal superficie es el cono, el cual puede ser utilizado como paso intermedio para construir mapas, al igual que antes lo hicimos con el cilindro, y dando lugar a la tercera familia de proyecciones, *las proyecciones cónicas*. Para estas proyecciones se proyecta la esfera sobre un cono tangente o secante a la esfera, y luego se despliega el cono en un plano. La curva de tangencia, o las curvas de intersección en el caso secante, son líneas en las que se preserva la distancia (son líneas estándar). Además, en regiones cercanas a ellas se produce una distorsión moderada, aumentando esta de forma radial. Para que entendamos mejor estas proyecciones, observemos que en su versión polar, es decir, el vértice del cono está sobre el polo, en el eje polar los meridianos son rectas y los paralelos circunferencias. Las proyecciones cónicas fueron utilizadas ya por Ptolomeo. Estas proyecciones son especialmente útiles para regiones anchas en una dirección (en el caso polar, este-oeste) y estrechas en la dirección perpendicular (norte-sur en el caso polar), como por ejemplo, Canada, EEUU o la Unión Soviética. Algunas proyecciones cónicas son: la cónica equidistante, la isoareal de Albers, la cónica isoareal de Lambert, la cónica conforme de Lambert, cónica estereográfica de Braun o la cónica oblicua bipolar conforme. Las proyecciones pseudocónicas son aquellas en las que en su aspecto polar los meridianos son curvados. Algunas proyecciones pseudocónicas son: la de Bonne, la de Werner o la polifónica (para la cual, en su aspecto polar, los meridianos son trozos de circunferencia).

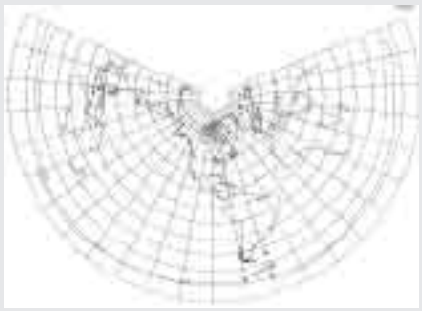

Figura 27 a: Proyección cónica equidistante

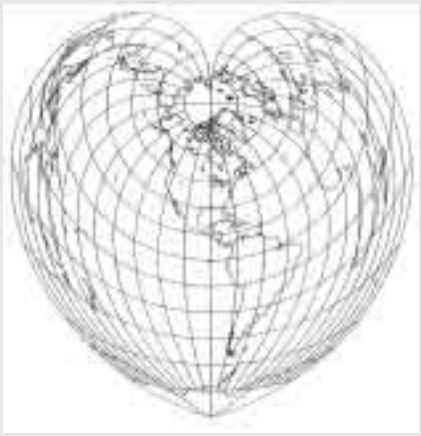

Figura 27 b: Proyección de Werner (isoareal)

No es posible diseñar mapas ideales de la tierra. Pero es más, en la práctica, la "única" forma de representar correctamente la esfera-tierra es mediante un globo terráqueo. En tal caso, se preservarán todos los valores métricos anteriores (salvo el factor de tamaño, la escala). Sin embargo, las importantes e insalvables desventajas del globo terráqueo descartan su utilización.

i) frágil, abultado, de difícil manejo, transporte y almacenamiento;
ii) muy caro de producir, especialmente para tamaños grandes, y nada práctico para mostrar detalles;
iii) difícil de manipular para tomar medidas o fijar ángulos;
iv) sólo se puede trabajar con un hemisferio a un tiempo;

v) completamente impracticable para hacer reproducciones por medio de impresión o electrónicamente.

Figura 28: Globo terráqueo

SECCIÓN 7. PROYECCIONES EQUIDISTANTES

Para finalizar la primera parte de este artículo vamos a introducir una familia importante de mapas atendiendo a sus propiedades métricas. A lo largo de este artículo hemos puesto de manifiesto que el ideal de cualquier cartógrafo sería diseñar un mapa con escala –índice de reducción– constante. En la sección anterior, acabamos de mostrar que esto no es posible, la escala de cualquier representación plana de la tierra no es constante, varía tanto con la posición como con la dirección. Sin embargo, existe la posibilidad de construir mapas para los cuales una familia de curvas tenga escala constante y longitud proporcional a las curvas correspondientes sobre la tierra (a estas curvas se les llama líneas o curvas standard), o también, que preserven las distancias desde uno o dos puntos. A tales proyecciones se les denomina equidistantes. Veamos dos ejemplos de este tipo de proyecciones.

Proyección cilíndrica equidistante

Esta proyección, también llamada rectangular, equirectangular o carta plana, es matemáticamente trivial y está definida, en su caso más sencillo y con el ecuador como curva tangente, tomando la longitud y la latitud directamente como coordenadas cartesianas (Figura 29). Mientras que el mapa cilíndrico isoareal de Lambert se comprime en las latitudes altas y el de Mercator se expande, en la carta plana los paralelos están equidistantes. La escala es correcta a lo largo de los meridianos y a lo largo del ecuador (en este caso la retícula está formada por cuadrados: platé carrée o carta plana), o también a lo largo de los meridianos y un par de paralelos equidistantes del ecuador (equirectangular o rectangular). Esta proyección suele atribuirse a Eratóstenes, aunque Ptolomeo cita a Marino de Tiro como su inventor sobre el año 100. A partir de entonces fue ampliamente utilizada. Esta proyección es muy buena para mapas de ciudades o de otras pequeñas superficies. Además, también es utilizada para mapas del mundo simples o de regiones con pocos datos geográficos. En el siglo XX casi no se utiliza ya para mapas geográficos con cierto detalle.

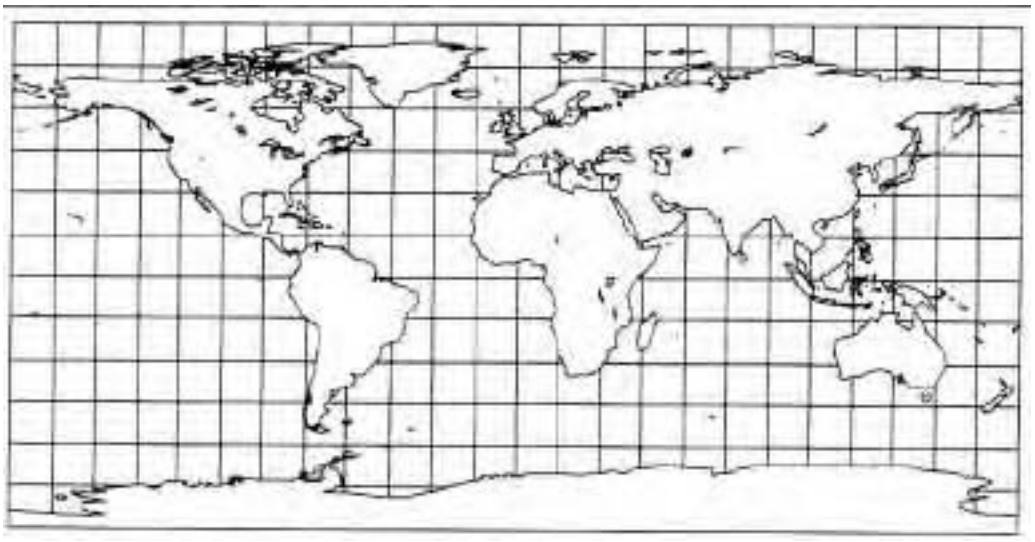

Figura 29: Carta plana

Proyección azimutal equidistante

Esta es la cuarta proyección azimutal clásica, pero a diferencia de las otras tres antes mencionadas, esta proyección no es geométrica. Esta proyección es muy importante ya que dibuja las geodésicas que pasan por su punto central como rectas y preserva las distancias desde ese punto. Esta proyección azimutal, por lo tanto que proyecta la esfera sobre un plano tangente, puede ser producida como otras proyecciones azimutales considerando en su versión polar los meridianos como rectas radiales desde el punto central o de tangencia y con los paralelos como círculos concéntricos, pero modificándola en este caso para que estos estén igualmente espaciados. El resultado es un mapa de toda la tierra, que en el caso en el que su centro es el polo norte (Figura 30), es el motivo central de la bandera de las Naciones Unidas. La misma proyección se puede construir centrada en cualquier otro punto de la tierra (es lo que se llama la versión oblicua de la anterior), en tal caso los círculos máximos que pasan por el punto se transforman en rectas standard. En este mapa hay un punto destacado, que se convierte en el "centro del mundo", motivo por el cual suele llamarse "el mapa egocéntrico". La dificultad de construcción de los aspectos oblicuo y ecuatorial hizo que esta proyección, en sus aspectos oblicuo y ecuatorial, no fuese utilizada hasta el siglo XIX. Sin embargo, la sencillez en la construcción polar motivó que fuese muy utilizada, por ejemplo, se dice que los Egipcios ya la utilizaron para mapas celestes en sus libros sagrados. Mercator, por ejemplo, utiliza esta versión polar para su mapa de 1569. Este mapa es muy utilizado en sus versiones polares y en sus versiones oblicuas, y es muy interesante para situaciones en las que se necesite considerar distancias o los caminos más cortos desde un punto concreto. Por ejemplo, puede ser considerada por el capitán de un submarino nuclear para determinar que ciudades están en su radio de destrucción o para considerar los rumbos de los barcos desde un determinado puerto y también, en combinación con la proyección de Mercator (como se comentará en la segunda parte del artículo). Además de ser útil en la navegación aérea, también es útil en el estudio de los terremotos y los operadores de radio con antenas direccionales lo utilizan para marcar la dirección y que la señal sea más fuerte.

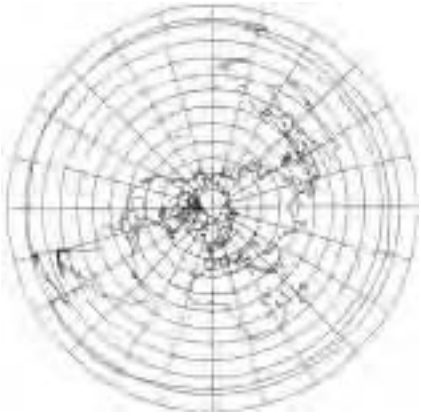

Figura 30: Proyección Azimutal Equidistante Polar

BIBLIOGRAFÍA

[1] Feeman, Timothy, G., 2002: "Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps". *Mathematical World 18*, AMS.

[2] Ferguson, K., 2000: *La medida del Universo*. Ma Non Troppo.

[3] Maling, D. H., 1992: *Coordinate Systems and Map Projections*. Pergamon Press, 2 ed.

[4] Pearson II, Frederick, 1990: *Map projections: Theory and Applications*. CRC Press.

[5] Petit, Jean-Pierre, 1980: *Le Géométricon. Les aventures d'Anselme Lanturlu*. Belin.

[6] Raisz, Edwin, 1985: *Cartografía General*. Omega.

[7] Snyder, John P., Voxland, Philip M., 1989: *An Album of Map Projections*. U. S. Geological Survey. Professional Paper 1453.

[8] Snyder, John P., 1395: *Map Projections: A Working Manual.* USGS Professional Paper.

[9] Snyder, John P., 1993: *Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections*. The University of Chicago Press.

PÁGINAS WEB

[10] Furuti, C. A.: Universidad de Campiñas. Brasil.
http://www.progonos.com/furuti/MapProj/CartIndex/cartIndex.html

[11] Polking, J. C.: Mapping the Sphere. Rice University.
http://math.rice.edu/~polking/cartography/

[12] http://www.3dsoftware.com/Cartography/

[13] Matching the Map Projection to the Need (1997). American Congress on Surveying and Mapping. http://www.gis.psu.edu/projection/

[14] Map Projections by Paul B. Anderson
http://www.ilstu.edu/microcam/map_projections/index.html

VIDEOS

[15] *Maps, Introduction to Pure Mathematics M203*. Open University.

FIGURAS

Figura 31: La proyección de Winkel-Tripel es la utilizada en la actualidad por Nacional Geographic para sus mapamundis. Este es un mapa sobre las diferentes lenguas en el mundo. Los mapas de la zona baja (principales lenguas y principales religiones) están realizados con la proyección homolosena de Goode

Figura 32: Este es un mapa de Nacional Geographic (con la proyección de Winkel-Tripel) con las luces nocturnas de la tierra y los mapas de la zona baja (proyección homolosena de Goode) son sobre densidad de población y renta per cápita