

Matemáticas en Acción 2008

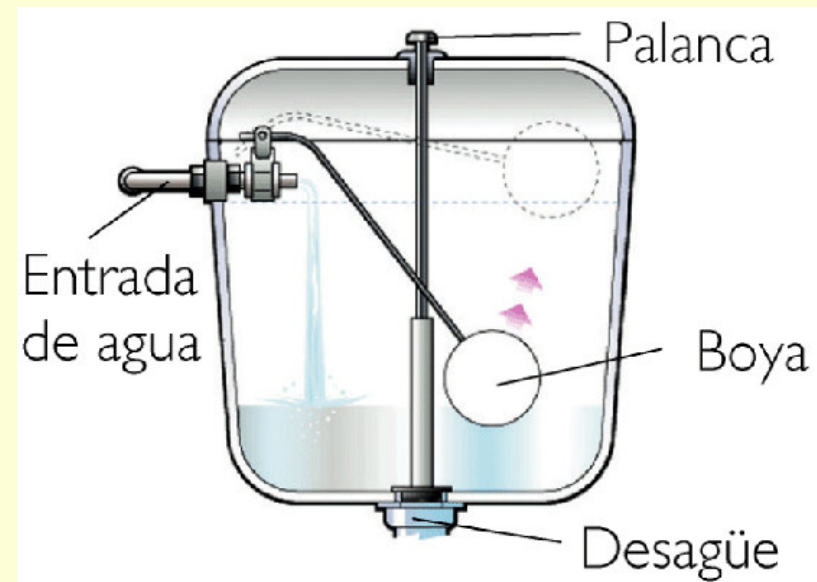
Todo está bajo control

Luis Alberto Fernández
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria

Santander, 20 de Mayo de 2009



Un día cualquiera...



Un día cualquiera...



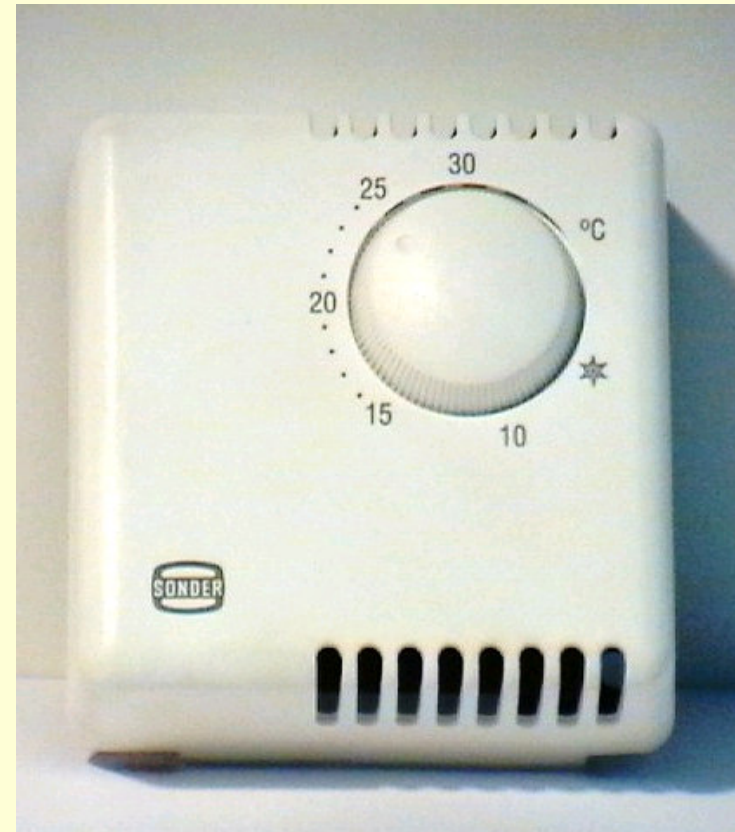
Un día cualquiera...



Un día cualquiera...



Un día cualquiera...



Un día cualquiera...





Marco general

- Sistema $A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{u})$
 - $\mathbf{x}$ es el estado del sistema
 - $\mathbf{u}$ es el control
 - Variantes:
 - Tiempo prefijado o no
 - Restricciones sobre $\mathbf{u}$ o no
 - Restricciones sobre $\mathbf{x}$ o no
- 



Objetivos

- **Controlabilidad:** conducir el sistema hacia un estado deseado.

- **Estabilización:** control feedback (retroalimentado)

$$u = F(x) \Rightarrow A(x) = B(F(x))$$

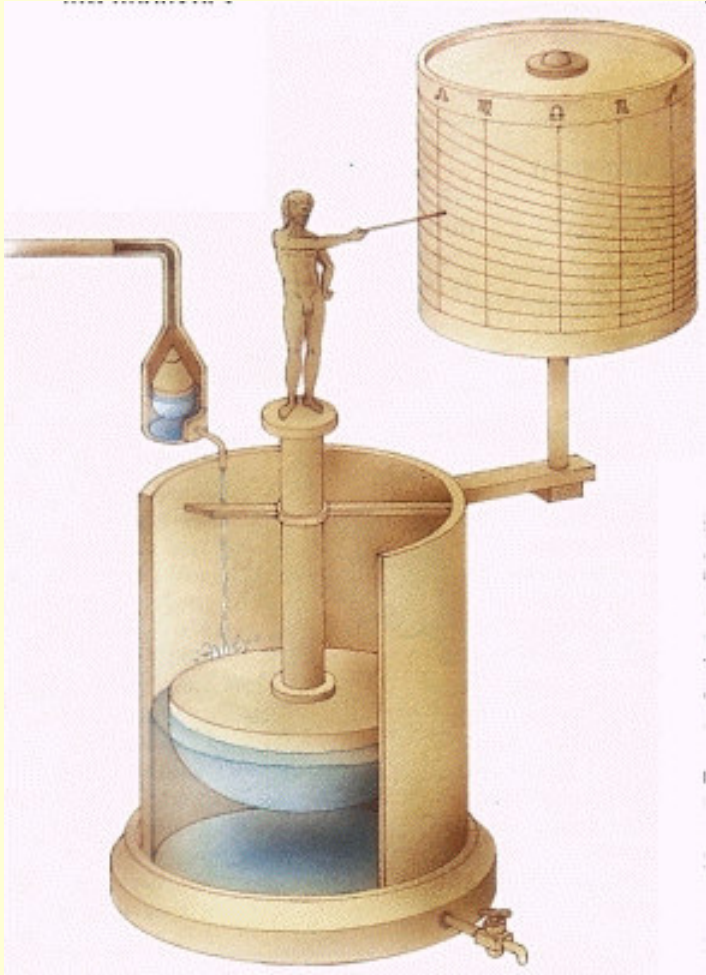
- **Control óptimo:** minimizando costes, tiempo, distancia,...



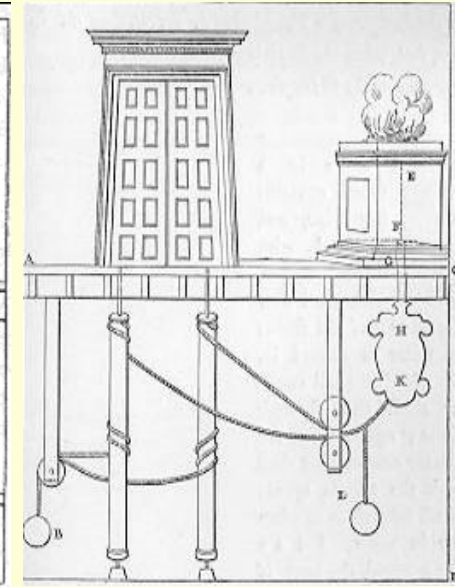
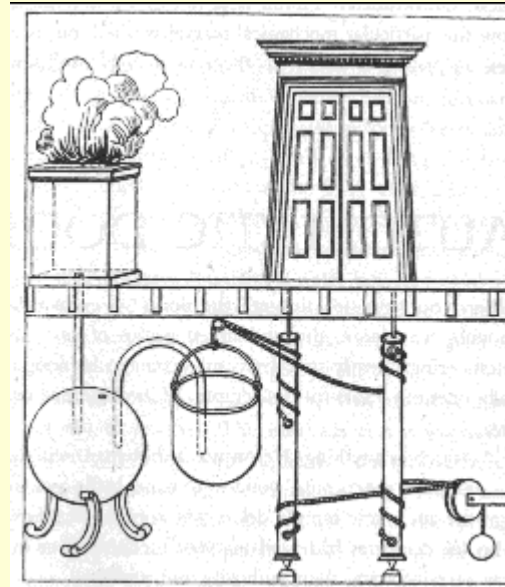
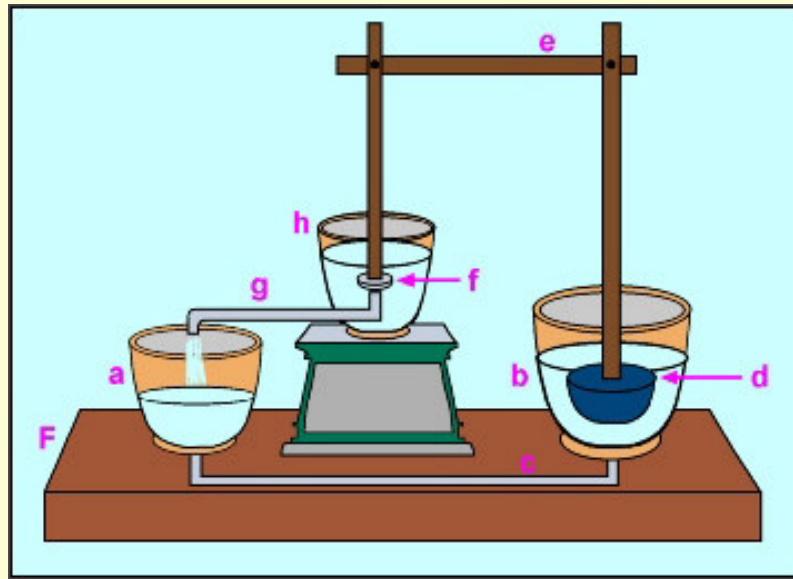
TEORÍA DE CONTROL PREINDUSTRIAL

"... si cada instrumento pudiera...hacer por
sí mismo lo que le tocase hacer..."

Aristóteles, "Política", s. IV a.C.



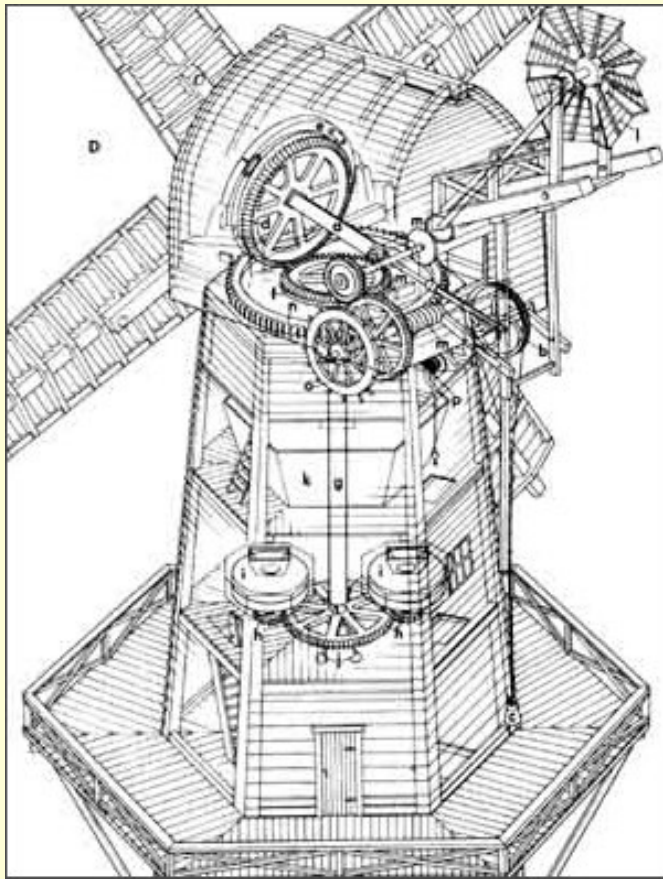
- Reloj de agua (clepsidra) de Ctesibios, s. III a.C.
- El nivel de un depósito de agua sube con velocidad constante.
- Utiliza un flotador que regula la entrada de agua a un depósito auxiliar.



- Dispensadores automáticos de vino.
- Sistemas de apertura/cierre de las puertas de los templos.
- Basados en los vasos comunicantes y flotadores reguladores.
- Recopilados por Herón (s. I a. C.).



- En el s. VII ya se utilizaban molinos de viento en Persia.
- La calidad de la harina depende de la velocidad de rotación de las aspas.



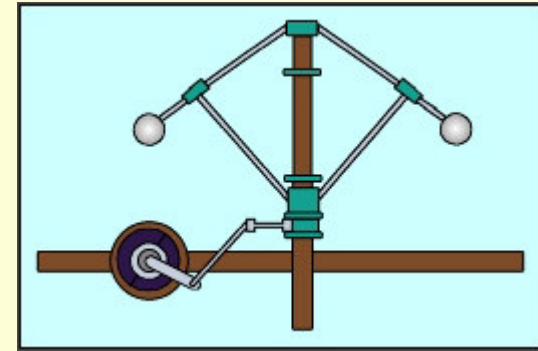
- La tolva regula el flujo del grano (1200).
- El molinillo de cola orienta el rotor en la dirección del viento (E. Lee, 1745).
- El regulador de velocidad utiliza un péndulo como sensor (T. Mead, 1787).



La Revolución Industrial

- En el s. XVII se empiezan a desarrollar las primeras máquinas de vapor (tras Herón).
 - Uno de los problemas básicos era la regulación de la presión, tratando de que fuera constante.
 - El prototipo de James Watt (1788) mejora la eficiencia energética e incorpora el regulador de velocidad, inspirado en los molinos de viento.
- 

La Revolución Industrial



- El péndulo centrífugo regula la cantidad de vapor suministrada por la caldera a la turbina de la máquina de vapor
 - Si la velocidad de giro del motor aumenta, los dos pesos se alejan, cerrando la válvula por la que entra el vapor y frenando el motor.
 - Al frenarse el motor en exceso, caen los pesos por la disminución de la fuerza centrífuga y se abre la válvula del vapor acelerando el motor.
- Se logra una velocidad constante de manera automática.



El problema de la estabilidad

- Los primeros reguladores de Watt tenían un buen comportamiento debido al gran rozamiento existente entre sus piezas.
 - A mediados del siglo XIX cambian las técnicas de diseño de las máquinas y se observa que la velocidad de las máquinas variaba con comportamientos inestables.
- 

TEORÍA DE CONTROL CLÁSICA



El trabajo “On Governors” de J. C. Maxwell en 1868 se considera como el origen de la Teoría de Control Clásica.





El problema de la estabilidad

- El comportamiento de un sistema cerca de una posición de equilibrio se puede aproximar por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes.
 - La estabilidad (asintótica) se puede discutir en términos de las raíces de un polinomio asociado (si todas las raíces tienen parte real negativa).
- 

- 
- Ecuación diferencial ordinaria (EDO)

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$$

- Polinomio asociado

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

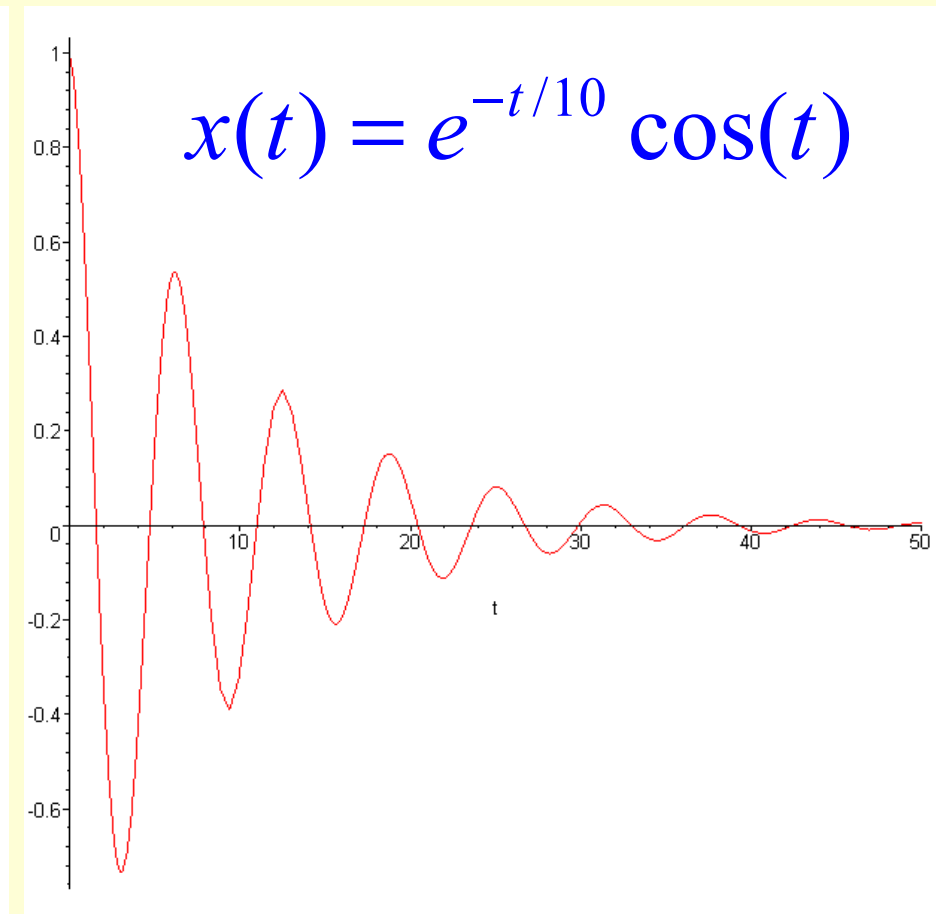
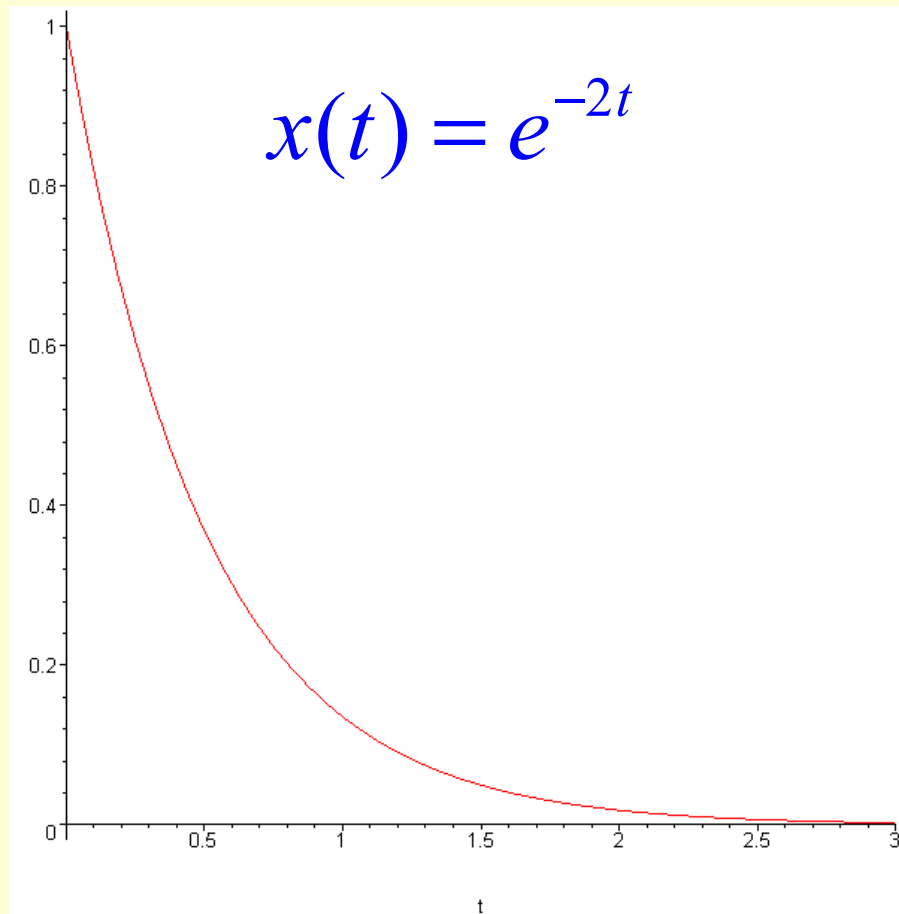

- 
- Solución de la EDO (raíces reales distintas)

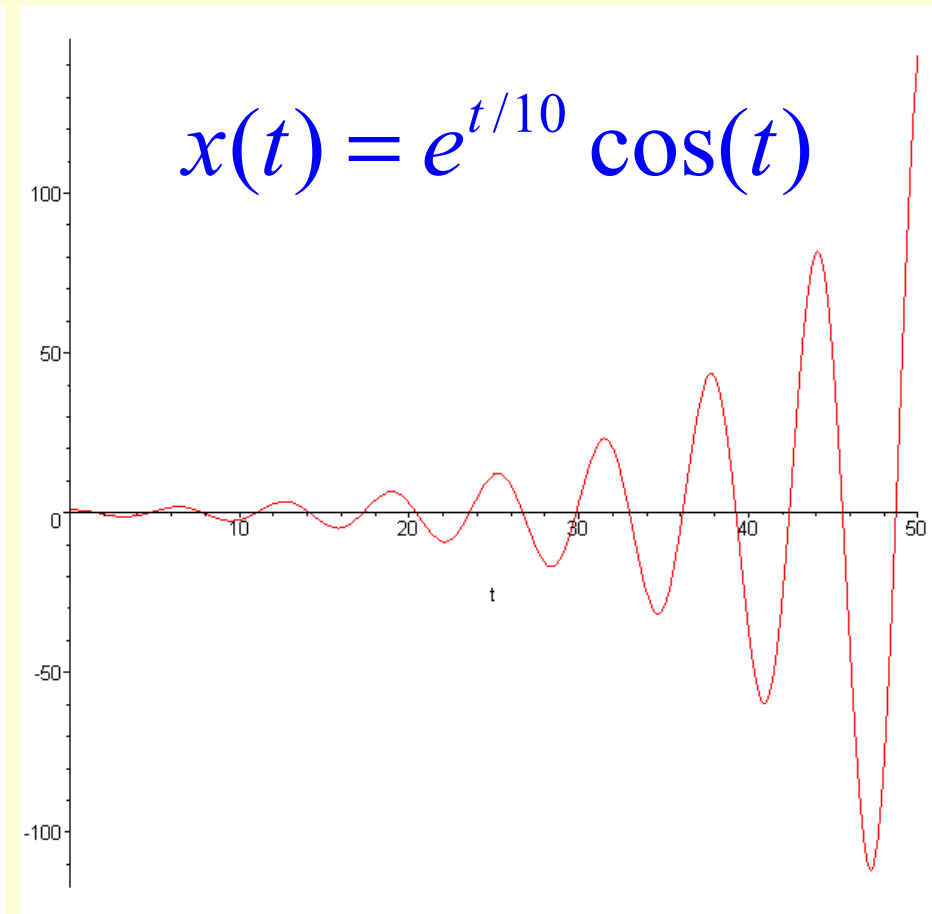
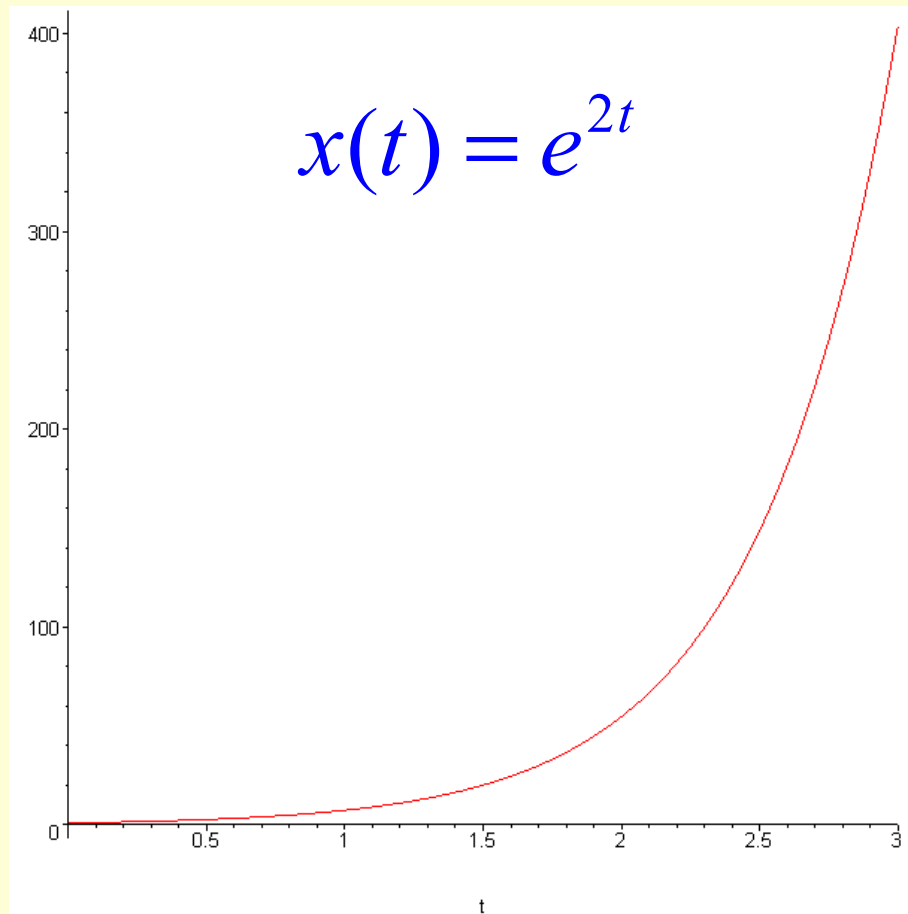
$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Solución de la EDO (raíces complejas)

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \operatorname{sen}(\beta t)),$$

$$\text{donde } \lambda = \alpha \pm i\beta.$$

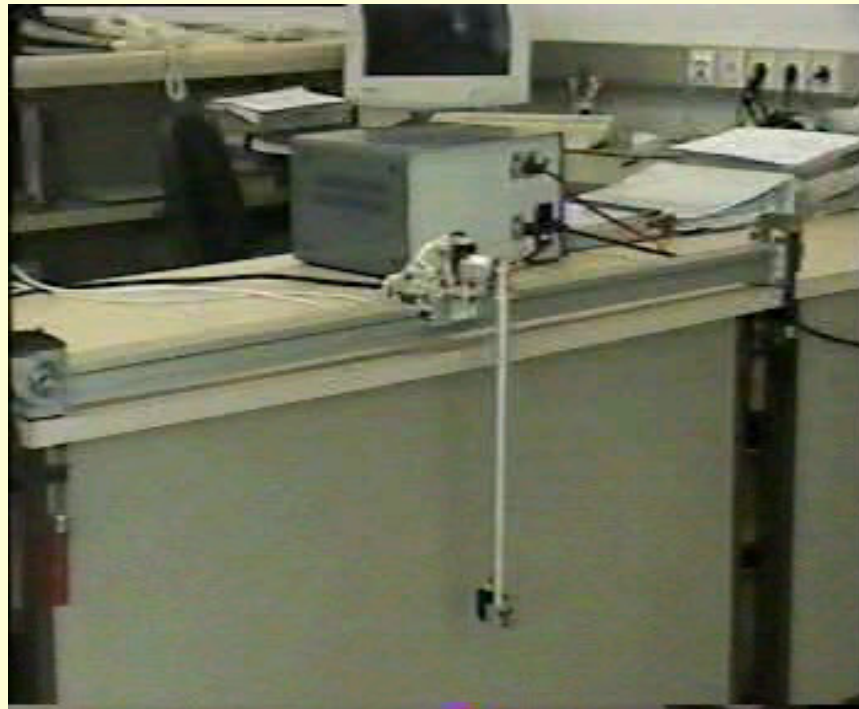




Esquema clásico

1. Estudiar el sistema a controlar.
 2. Aplicar las leyes de la física.
 3. Modelizar con EDO lineales con coeficientes constantes.
 4. Analizar las raíces del polinomio asociado.
 5. Estudiar la estabilidad.
- 

Levantamiento del péndulo simple invertido (controlabilidad)



Vídeo tomado de <http://www.tecnun.es/asignaturas/control1/>

Perturbaciones del péndulo simple invertido (estabilización)



Vídeo tomado de <http://www.tecnun.es/asignaturas/control1/>

Levantamiento del péndulo doble invertido (controlabilidad)



Vídeo tomado de <http://www.tecnun.es/asignaturas/control1/>

Perturbaciones del péndulo doble invertido (estabilización)



Vídeo tomado de <http://www.tecnun.es/asignaturas/control1/>



ANTECEDENTES DE LA TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO



Problema de la Braquistócrona



Cicloide

"Dados dos puntos en un plano vertical a diferente altura, hallar la curva por la que una partícula móvil, descendiendo sólo por su propio peso, alcanza el punto inferior en el menor tiempo posible"
(Johann Bernoulli, 1696)



Principios físicos

- Principio de Fermat: “El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es un mínimo (es estacionario respecto a posibles variaciones de la trayectoria)”.
 - Óptica geométrica.
 - Principio de Hamilton: “De todas las posibles evoluciones de un sistema, éste va a seguir la que hace mínima la acción”.
 - Condujo a la formulación lagrangiana y hamiltoniana de la Mecánica clásica.
- 



Cálculo de variaciones

$$\begin{cases} \text{Min } J(x) = \int_0^T L(t, x(t), x'(t)) dt \\ x(0) = x_0, x(T) = x_1. \end{cases}$$

i) T y x_1 conocidos

ii) T conocido, x_1 libre

iii) T y x_1 libres

iv) T libre, x_1 conocido





Condición de Euler (para i)

$$L_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) - \frac{d}{dt}(L_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$\bar{x}(0) = x_0, \bar{x}(T) = x_1$$

Condición de Legendre (para i)

$$L_{x'x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) \geq 0, \quad t \in [0, T]$$

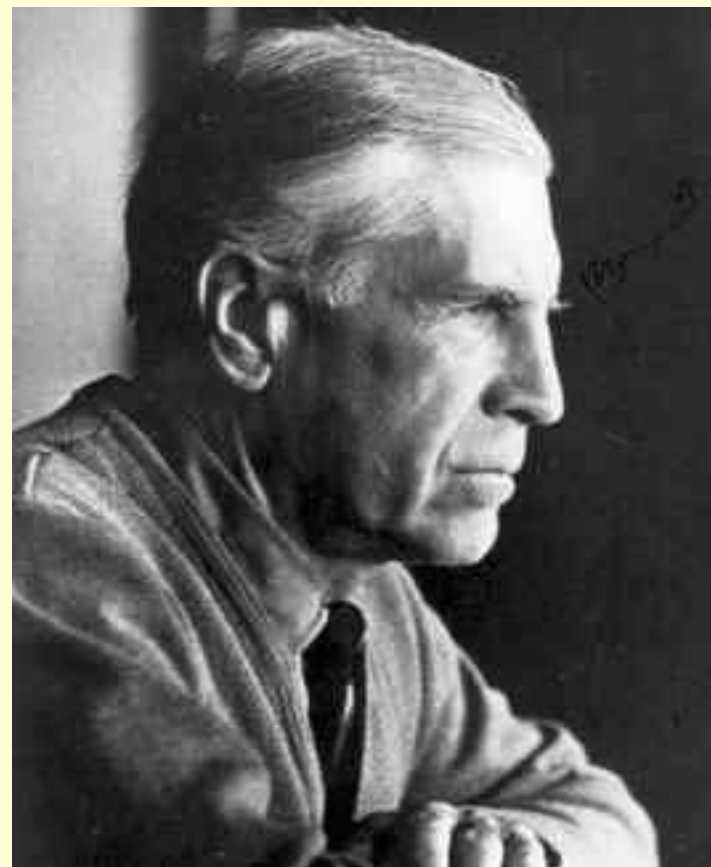
$$\bar{x}(0) = x_0, \bar{x}(T) = x_1$$


TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO



Lev S. Pontryagin

- Moscú (1908-1988).
- Ciego desde los 14 años.
- Eminente matemático.
- “The Mathematical Theory of Optimal Processes” (1961, en ruso; 1962 en inglés).





Problemas de control óptimo

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\text{Min } J(u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt + \psi(x(T)), \quad u(t) \in U$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) - x_d(t))^2 + N(u(t))^2 dt + \frac{1}{2} (x(T))^2$$




Principio de Pontryagin

$$H(t, p, x, u) = L(t, x, u) + p f(t, x, u)$$

$$\begin{cases} -p'(t) = L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + p(t)f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), & t \in [0, T] \\ p(T) = \psi'(\bar{x}(T)) \end{cases}$$

$$H(t, p(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \leq H(t, p(t), \bar{x}(t), u), \\ \forall u \in U, \forall t \in [0, T]$$

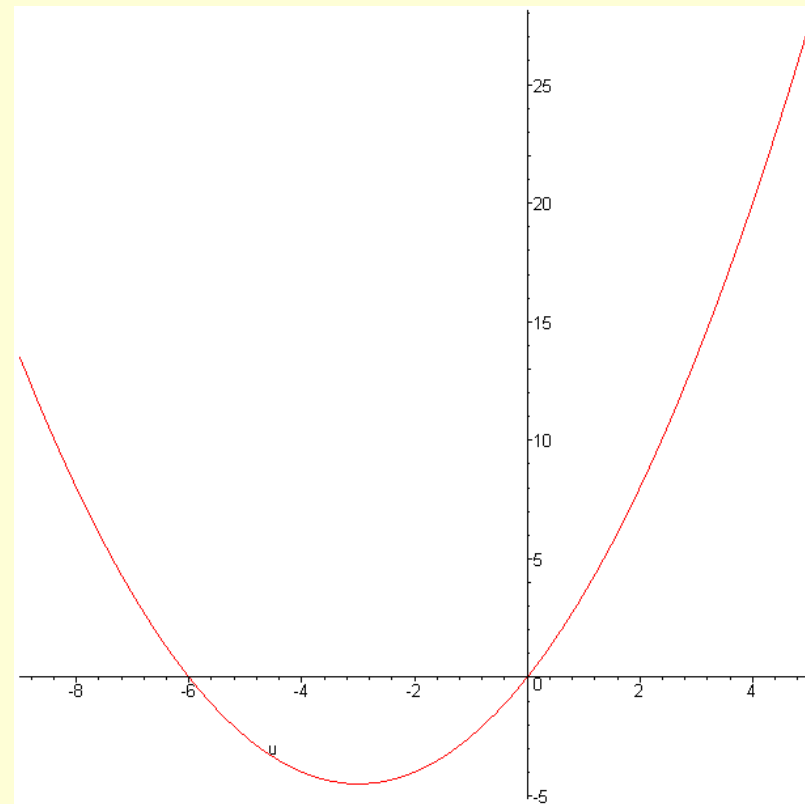

Principio de Pontryagin (sin restricciones)

$$\text{Si } H(t, p, x, u) = \frac{N}{2} u^2 + p u$$

con $U = \mathfrak{R}$,

$$H_u(t, p, x, u) = Nu + p$$

$$\Rightarrow \bar{u}(t) = \frac{-p(t)}{N}.$$



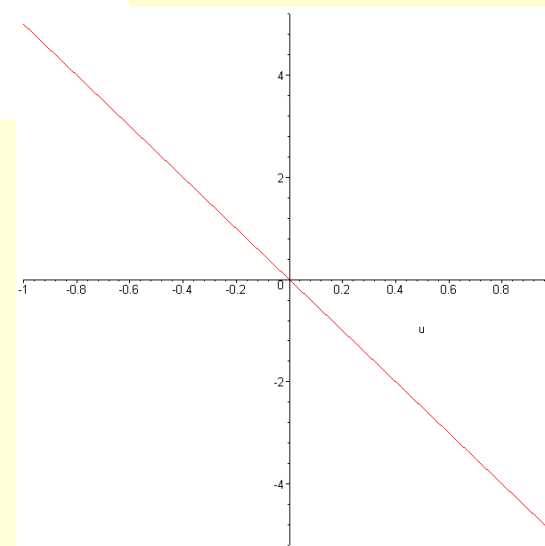
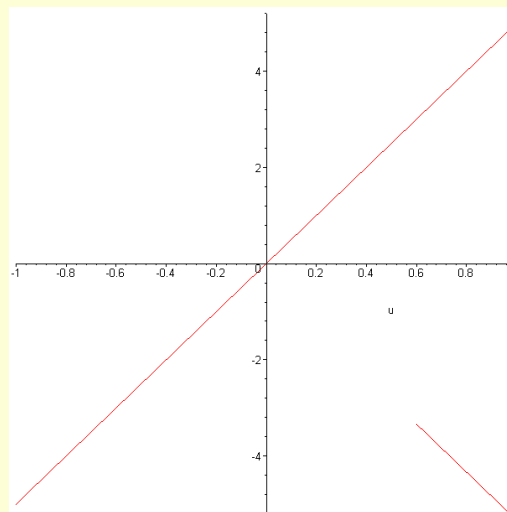
Principio de Pontryagin (con restricciones)

Si $H(t, p, x, u) = p u$

con $U = [\alpha, \beta]$,

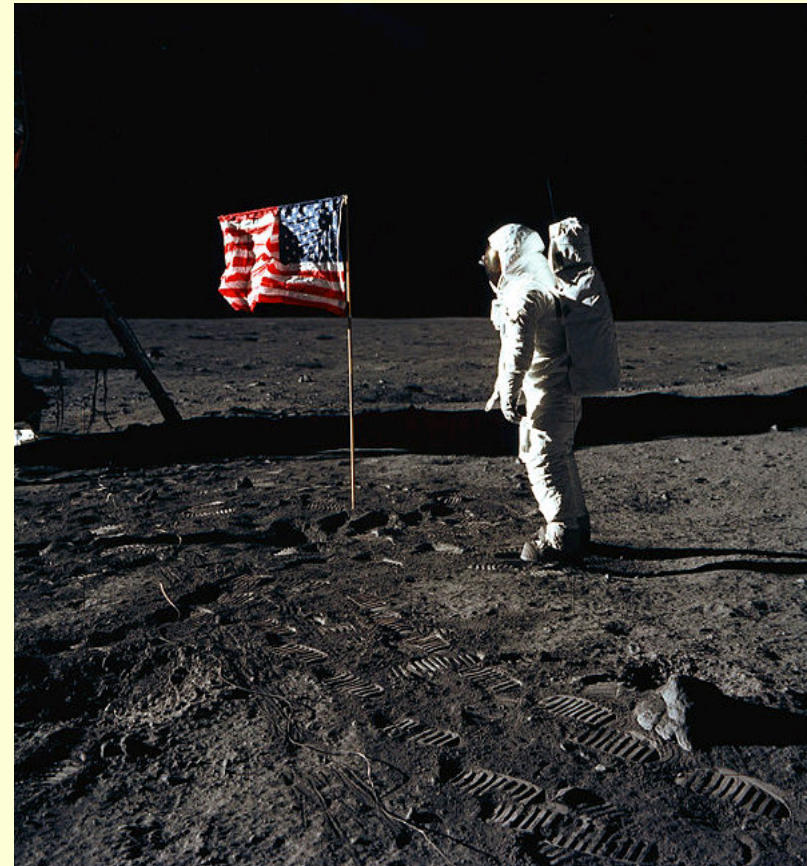
$$\Rightarrow \bar{u}(t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } p(t) > 0 \\ \beta & \text{si } p(t) < 0 \end{cases}$$

(control bang – bang)



Apolo XI

- Primera nave tripulada en llegar a la Luna.
- Hace casi cuarenta años (20 de julio de 1969).
- Para ejecutar la maniobra de descenso del módulo Eagle fueron fundamentales los sistemas de control implementados en su ordenador.



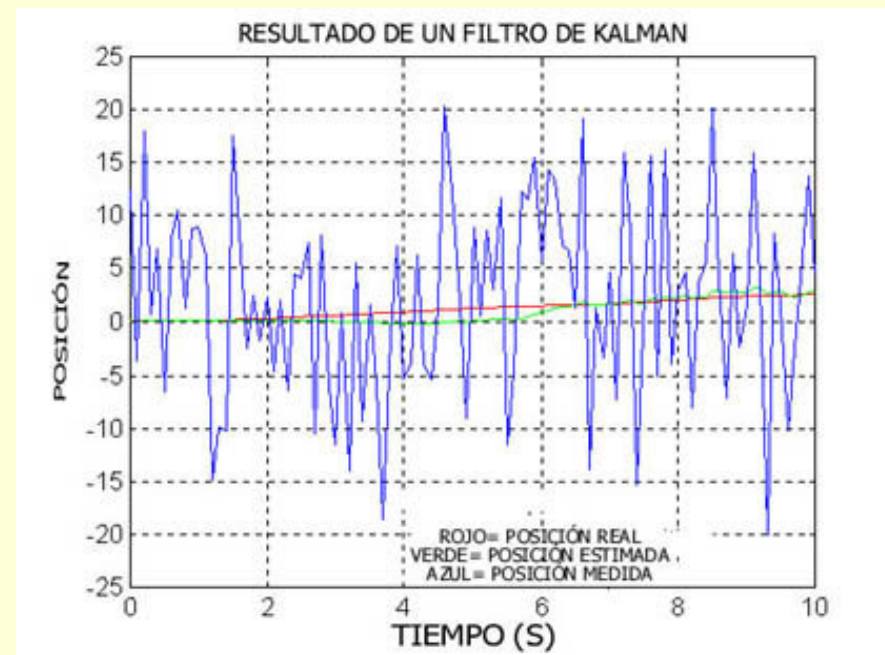
...Un gran salto para la Teoría de Control

- Rudolf E. Kalman (Budapest, 1930).
- El filtro de KALMAN (publicado en 1961) fue un componente esencial del sistema de guiado y estabilización del módulo.
- Pretende la estimación del estado de un sistema lineal, mediante observaciones que suelen tener RUIDO.



Filtro de Kalman

Proporciona una solución recursiva eficiente del método de mínimos cuadrados, calculando una estimación óptima del estado de un sistema en cada momento, usando la información disponible en el instante $t-1$ y actualizándola con la información adicional disponible en el instante t .



Filtro de Kalman

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B u_k + q_k \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E\{q\} &= 0 & E\{qq^T\} &= Q \\ E\{v\} &= 0 & E\{vv^T\} &= R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= A_0 x_0 + q_0 \\ N_0 &= E\{[\hat{x}_0 - x_0][\hat{x}_0 - x_0]^T\} \end{aligned}$$

$$\hat{x}_{1/0} = A_0 \hat{x}_0 \quad N_1 = A_0 N_0 A_0^T + Q$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1/1} &= \hat{x}_{1/0} + W_1 [y_1 - C_1 \hat{x}_{1/0}] \\ W_1 &= P_1 C_1^T R^{-1} \end{aligned}$$

$$P_1 = N_1 - N_1 C_1^T [C_1 N_1 C_1^T + R]^{-1} C_1 N_1^T$$

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k+1} = A_k \hat{x}_{k/k} + W_{k+1} [y_{k+1} - C_{k+1} A_k \hat{x}_{k/k}] \\ N_{k+1} = A_k N_k A_k^T + Q \\ P_k = N_k - N_k C_k^T [C_k N_k C_k^T + R]^{-1} C_k N_k \\ W_k = P_k C_k^T R^{-1} \end{cases}$$

Aplicaciones del filtro de Kalman

- Pilotos automáticos
- Satélites
- Radares
- Robótica
- Meteorología
- Procesamiento de imágenes





Diferentes tipos de sistemas

- Lineales / no lineales
 - Deterministas/ estocásticos
 - Dimensión finita/ infinita
 - EDO/ EDP
- 

Jacques-Louis Lions

- Francia (1928-2001).
- Desarrolló la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) utilizando distribuciones.
- Estableció las bases de la Teoría de control de EDP.
- Presidente del INRIA, CNES (84-92), UMI (91), Academia de Ciencias (97-99),...





IFIP Workshop on *Control of PDE's*,
Laredo (Cantabria, SPAIN), Sept. 5-9, 1994.



Ariane 5

- Nave lanzadera desarrollada por la Agencia Espacial Europea.
 - Último lanzamiento: 14-5-2009 (satélites Planck y Herschel).
 - Primer lanzamiento: 4-6-1996.
- 

Ariane 501



Vídeo tomado de <http://www.youtube.com/>



Ariane 501

- El vuelo sólo duró unos segundos.
 - Pérdidas estimadas: 5000 millones de euros y un año de retraso.
 - Se encargó elaborar un informe a una comisión presidida por Lions.
- 



Informe Lions sobre Ariane 501

(19 de julio de 1996)

El fallo de Ariane 501 fue causado por la completa pérdida de guía e información de orientación 37 segundos después del comienzo de la secuencia de ignición del motor principal. Esta pérdida de información fue debida a errores de especificación y diseño en el software del sistema de referencia inercial. Las extensas revisiones y tests llevados a cabo durante el programa de desarrollo del Ariane-5 no incluyeron el adecuado análisis y prueba del sistema de referencia inercial o del sistema de control de vuelo completo, lo cual podría haber detectado los fallos potenciales.





Informe Lions sobre Ariane 501

- Se produjo un fallo en el sistema de control del vuelo por el desbordamiento (overflow) del sistema (aparición de un dato numérico excesivamente grande, fuera del rango previsto).
 - La nave hizo una brusca e innecesaria corrección de su trayectoria, tratando de compensar un problema que no había tenido lugar.
- 



Informe Lions sobre Ariane 501

- La parte del software donde se presentó el fallo se había reutilizado del Ariane 4, donde esta situación no se presentó debido a las diferentes características técnicas entre ambas naves.
 - No se puede dar por sentado que un software que ha funcionado bien en ciertas condiciones, vaya a hacerlo igualmente bien en otras parecidas.
 - Ahora es un ejemplo en los libros de computación.
- 

SISTEMAS DE CONTROL DEL AUTOMÓVIL



- 
- Sistema de frenos ABS.
 - Control inteligente de velocidad.
 - Control electrónico de estabilidad.
 - Sistema de aparcamiento automático.
 - Sistema de control de presión de neumáticos.
 - Sistema de alerta de punto ciego.
 - ...
- 



Ventajas

- Mayor seguridad vial.
 - Disminución de los accidentes de tráfico y de sus víctimas.
 - Ahorro de combustible.
 - Comodidad.
- 



Sistema de frenos ABS

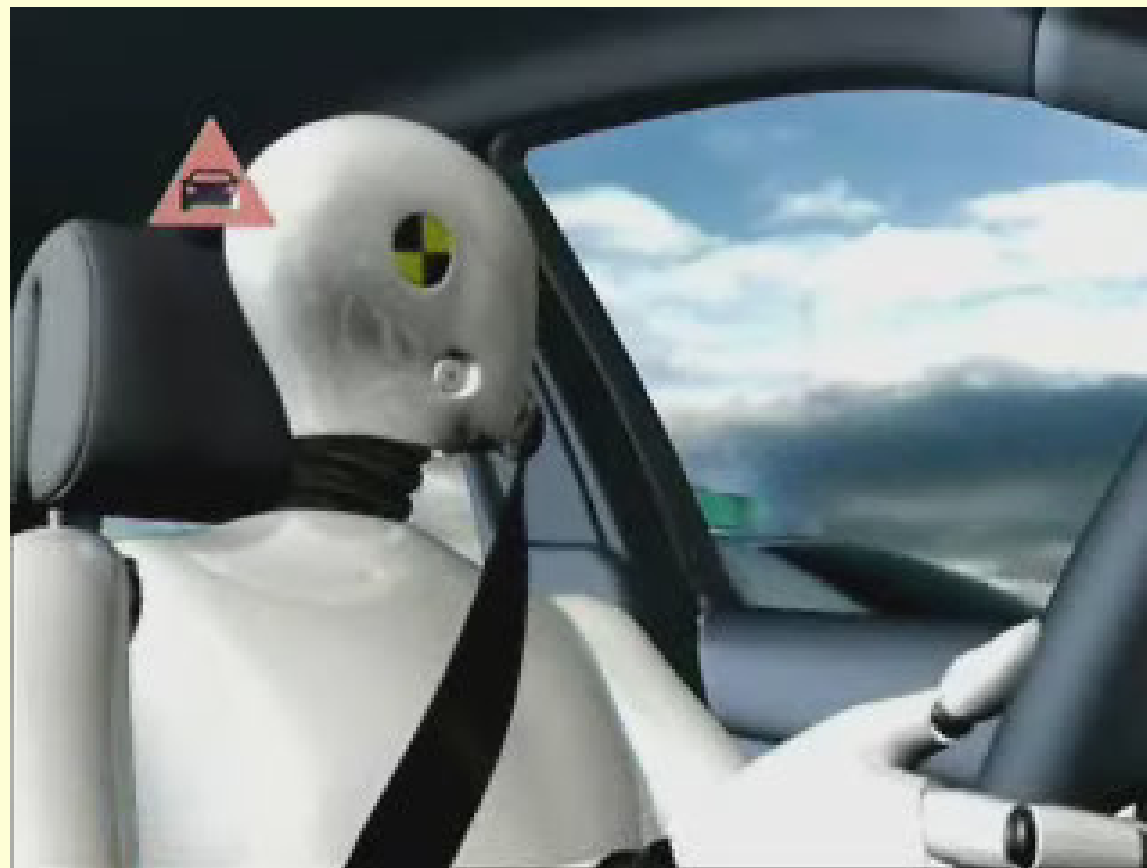
- Unos sensores controlan las revoluciones de las ruedas. En una frenada brusca, reduce la presión realizada sobre los frenos automáticamente. El procedimiento se repite de forma muy rápida.
- El conductor percibe una vibración en el pedal del freno, pero sigue teniendo el control sobre la trayectoria del vehículo para poder esquivar el obstáculo causante de la situación de riesgo.



Control inteligente de velocidad

- Los sensores analizan continuamente el espacio por delante del coche midiendo la distancia y la velocidad del resto de vehículos.
 - Calcula una distancia de seguridad y actúa electrónicamente sobre el acelerador o el freno para intentar mantener dicha distancia.
- 

Control inteligente de velocidad





Control electrónico de estabilidad

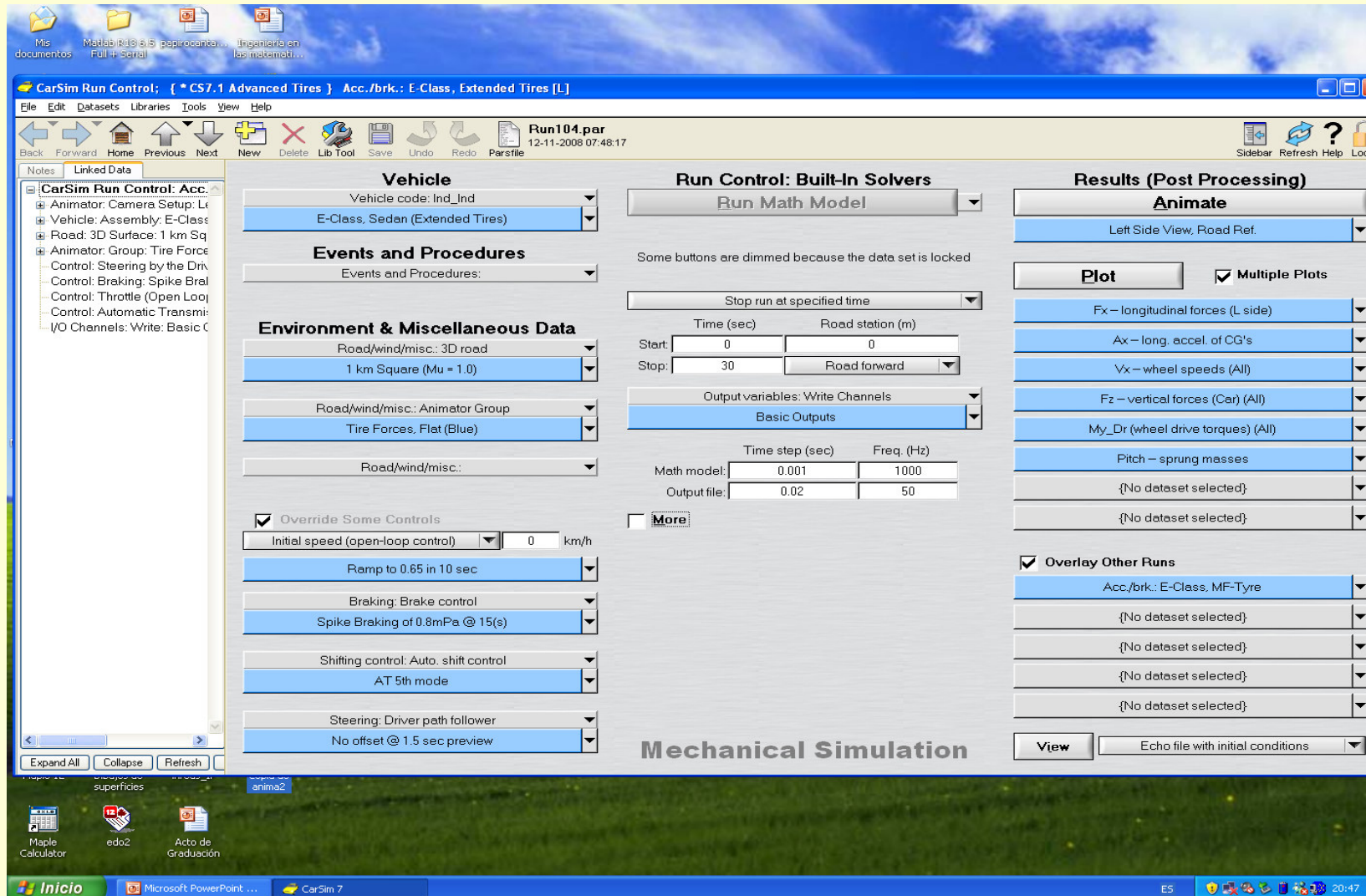
- Los sensores analizan la dirección del volante, la velocidad y la aceleración y los compara con la rotación del vehículo sobre su eje vertical.
 - Hace funcionar el sistema de frenado en cada rueda de forma individual para mantener el vehículo sobre la carretera.
- 

Control electrónico de estabilidad

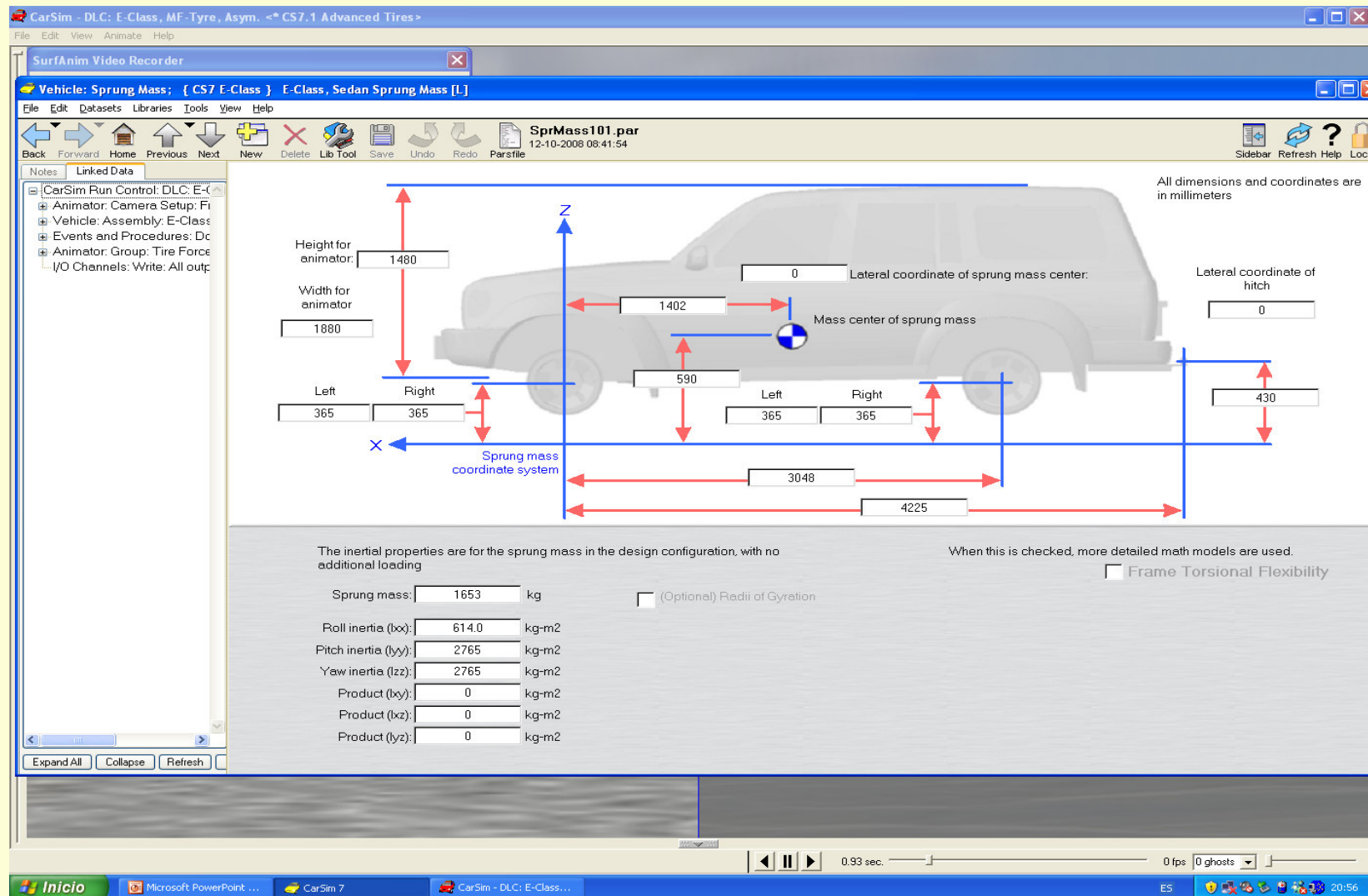


Vídeo tomado de <http://www.esafetysupport.org/>

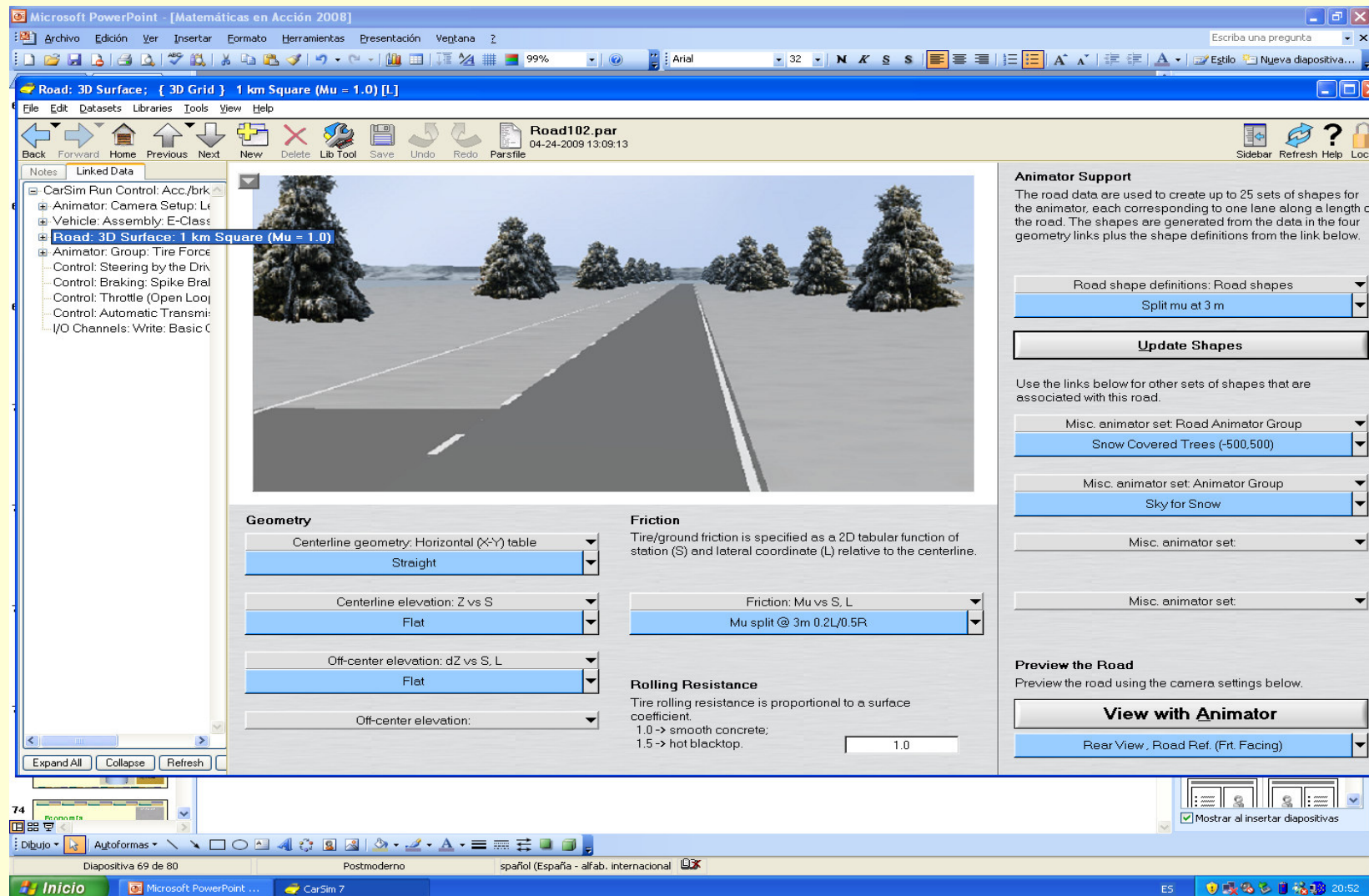
Software de simulación (CarSim)



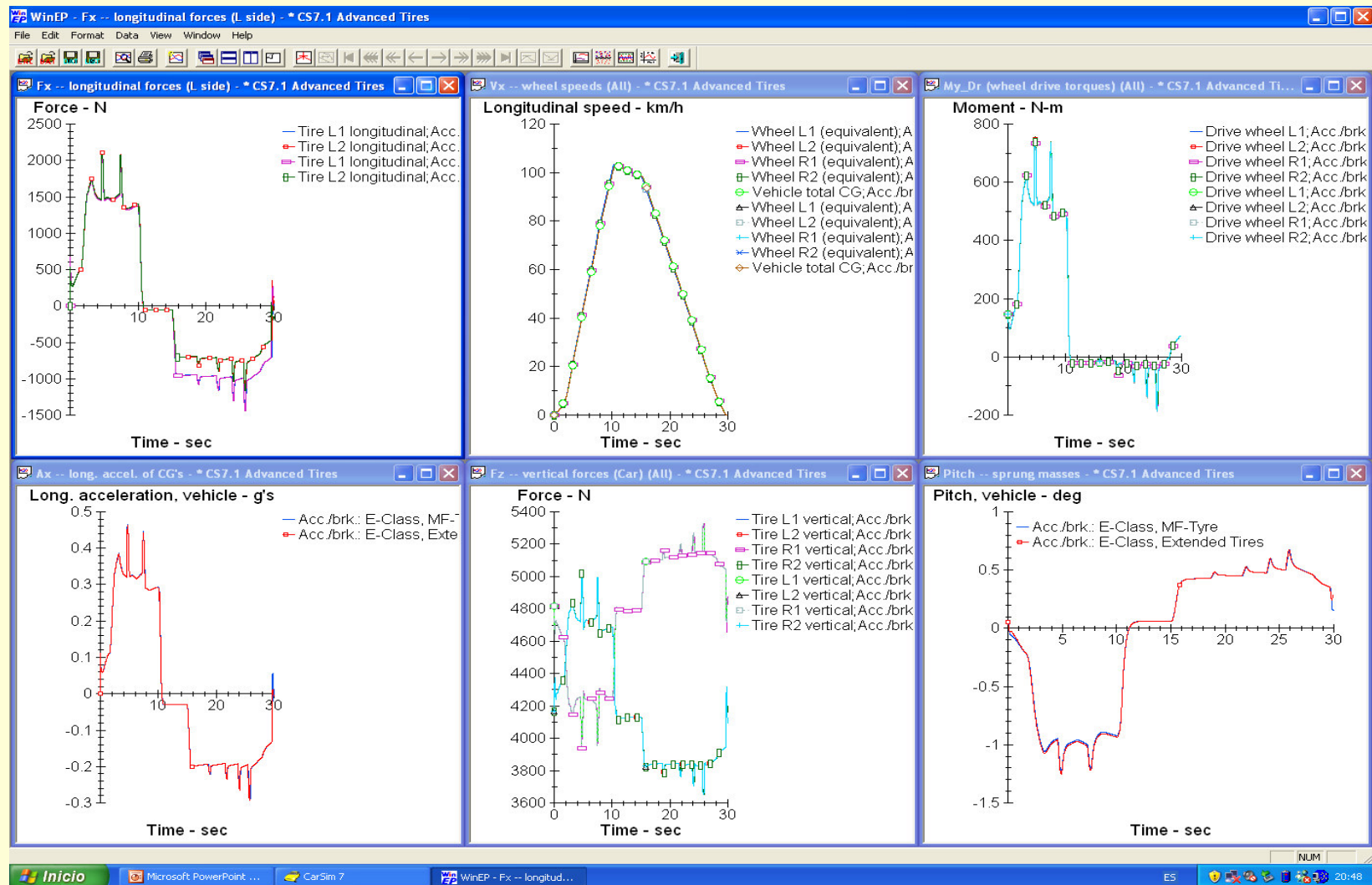
Software de simulación (CarSim)



Software de simulación (CarSim)



Software de simulación (CarSim)



APLICACIONES DEL CONTROL EN OTRAS ÁREAS

Medicina

- Páncreas artificial: control del nivel de insulina (diabetes).
- Corazón artificial: diseño y control de la frecuencia.
- Terapias contra el cáncer.



Review

Cancer: A Challenge for Control Theory and Computer Modelling

W. Düchting,¹ W. Ulmer² and T. Ginsberg¹

¹Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of Siegen, Hoelderlinstr. 3, D-57068, Siegen; and ²Max-Planck-Institute, Munich, Germany



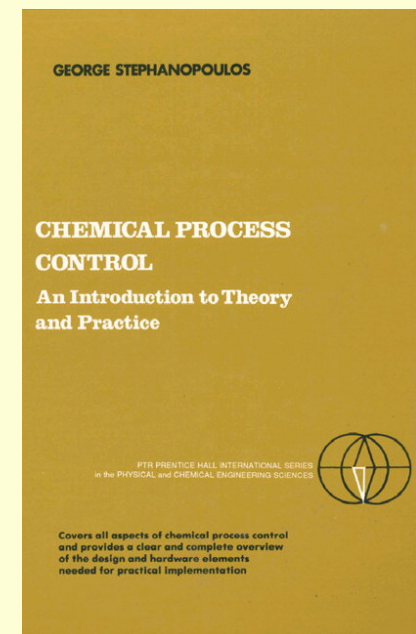
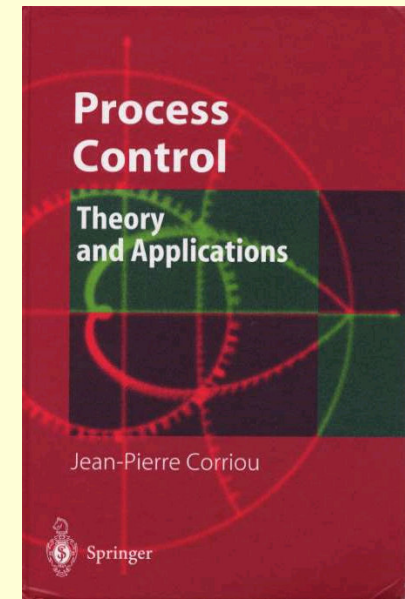
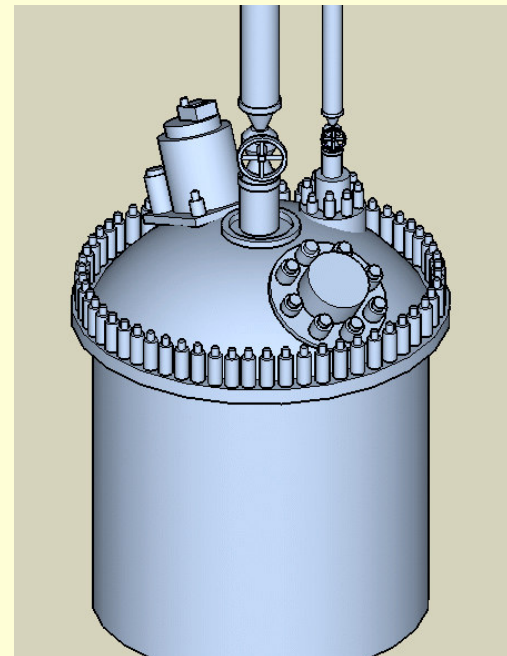
Biología



- Control biológico de plagas y enfermedades.
- Se usan organismos vivos (insectos, pájaros, ...) para controlar poblaciones de otros organismos.
- Modelo matemático: el sistema de ecuaciones diferenciales presa-depredador de Lotka-Volterra.
- Requiere amplios conocimientos de biología para no provocar problemas mayores.

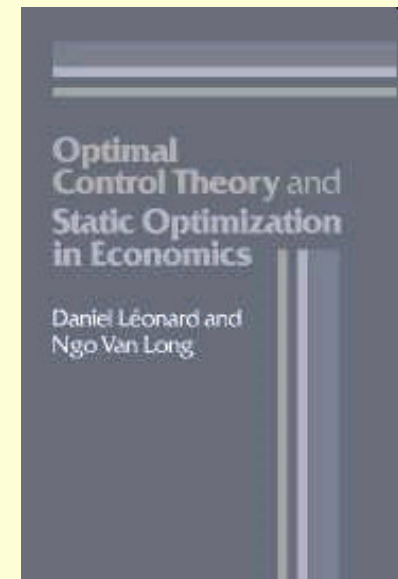
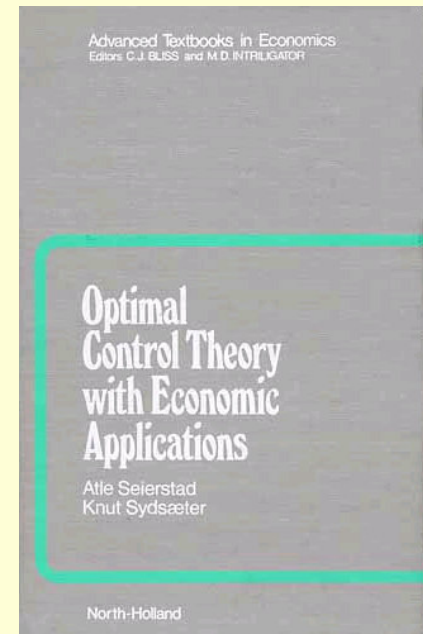
Química

- Control de reacciones químicas (presión, temperatura, caudal,...)
- Control del agua.
- Control de pH.
- Industria de plásticos.
- Industria del papel.
- Industria del petróleo.



Economía

- Gestión de recursos.
- Toma de decisiones en inversiones, infraestructuras, compra-venta, ...
- Maximización de los beneficios, minimización de pérdidas,...
- Largo / corto plazo





¿ Y la crisis ?

“Es un hecho curioso que, mientras los economistas políticos reconocen que para un correcto funcionamiento de la ley de la oferta y la demanda ha de haber fluctuaciones, esto no ha sido reconocido por los mecánicos en relación a la máquina de vapor. El objetivo de los economistas no es suprimir estas fluctuaciones completamente (puesto que entonces se suprimiría también el principio de la autorregulación), sino disminuirlas lo más posible, permitiéndoles que sean lo bastante grandes como para mantener suficiente poder regulador”.

H. R. HALL, 1907.





Teoría de Control

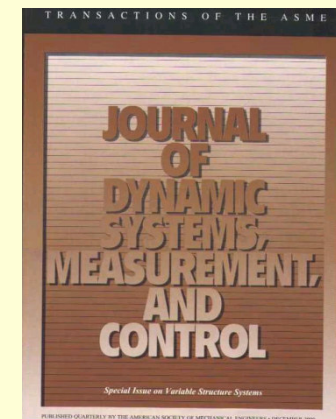
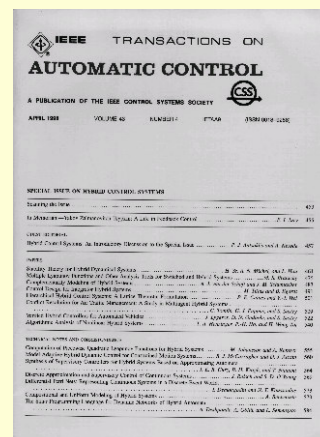
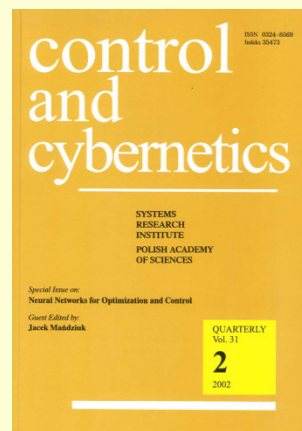
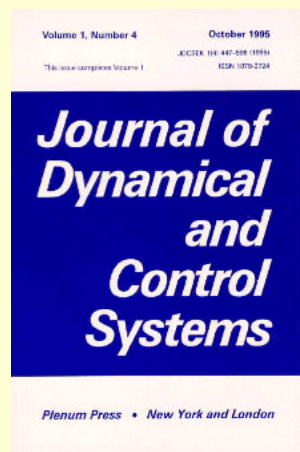
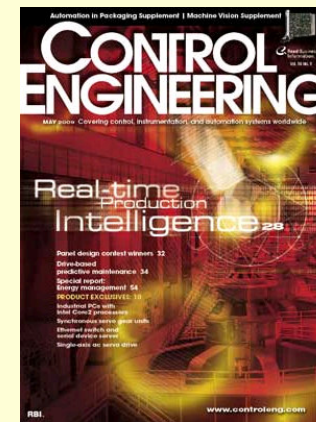
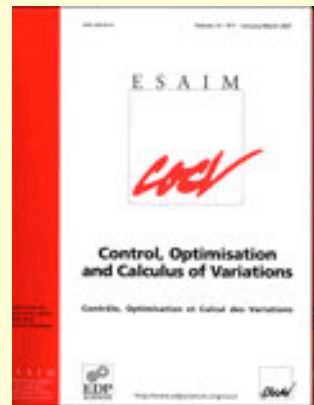
- Ingeniería
 - Física
 - Matemáticas
 - Álgebra
 - Ecuaciones Diferenciales
 - Cálculo Numérico
 - Estadística
 - Análisis Funcional
 - Geometría
 - Informática
 - Electrónica
- 



Planes de estudio

- Ingeniería Industrial
 - Ingeniería de Telecomunicaciones
 - Ingeniería Electrónica
 - Ingeniería Aeronáutica
 - Ingeniería Química
 - Economía
 - ...
- 

Algunas revistas sobre control





**¡ Muchas gracias
por vuestra atención !**

