Taller de Matemáticas 2010

J Güémez
Dpto. Física Aplicada

Las matemáticas y el mundo físico

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

$$E = mc^2$$

Abril 14, 2010

Taller de Matemáticas 2010

La interpretación físico-matemática más general de la ecuación de Einstein

$$\mathcal{M} = Uc^{-2}$$

Relación
Inercia (mecánica)
y
Energía Interna (termodinámica)

Las matemáticas y el mundo físico

En el caso de la interpretación física de la famosa Ecuación de Einstein $E = mc^2$ es el formalismo conjunto de la Transformación de Lorentz y del álgebra de 4-vectores de Minkowski el que va a proporcionar la interpretación más general de ésta ecuación.

Algunas interpretaciones de dicha ecuación, según las cuales, la misma estaría detrás del funcionamiento del Sol, de las bombas atómicas y de las centrales nucleares, deben ser, por lo menos, matizadas adecuadamente.

La Ecuación de Einstein

... la equivalencia entre masa y energía no es en absoluto despreciable cuando una bomba atómica hace explosión. La explosión de la bomba [atómica] es la conversión súbita en energía de parte de su masa. La energía radiada por el Sol tiene un origen similar.

M Gardner, *La explosión de la relatividad,* Salvat (1994), p. 70

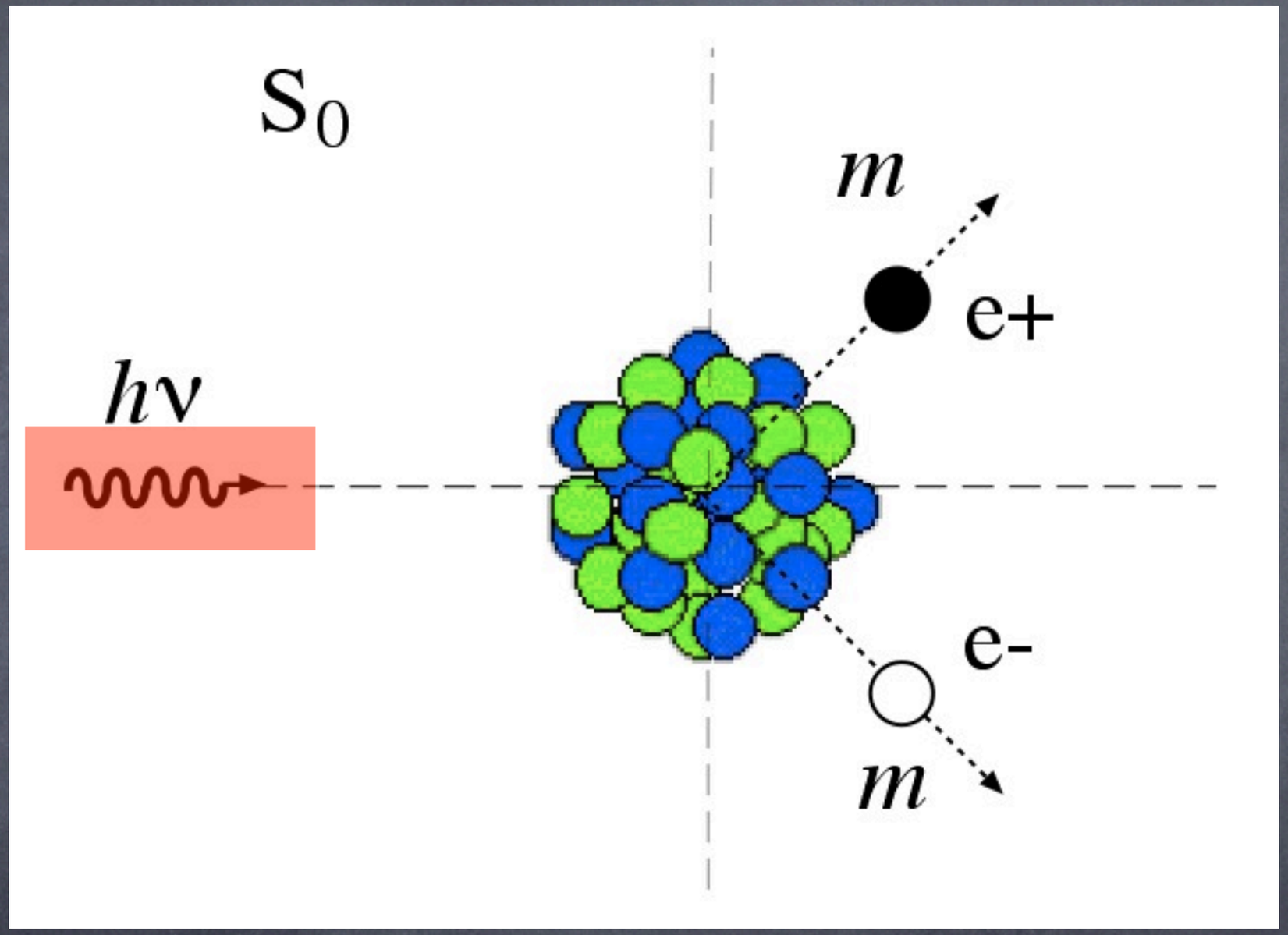
La Ecuación de Einstein

Einstein's equation has become part of popular culture and an icon of physics. Yet, despite its familiarity, its significance continues to be misrepresented in popular writing: *a persistent myth is that it was the key to developing nuclear weapons and that it can explain the source of the Sun's luminosity and of nuclear power* [énfasis mío]. (...) We argue that the real importance of the equivalence of mass and energy is that it sanctions interactions in which the creation and annihilation of particles occur.

E G Thomas, *What's so special about* $E = mc^2$ *? Separating truth from myth* Eur. J. Phys. **26** S125-S130 (2005)

Un ejemplo moderno

Creación de un par electrón-positrón



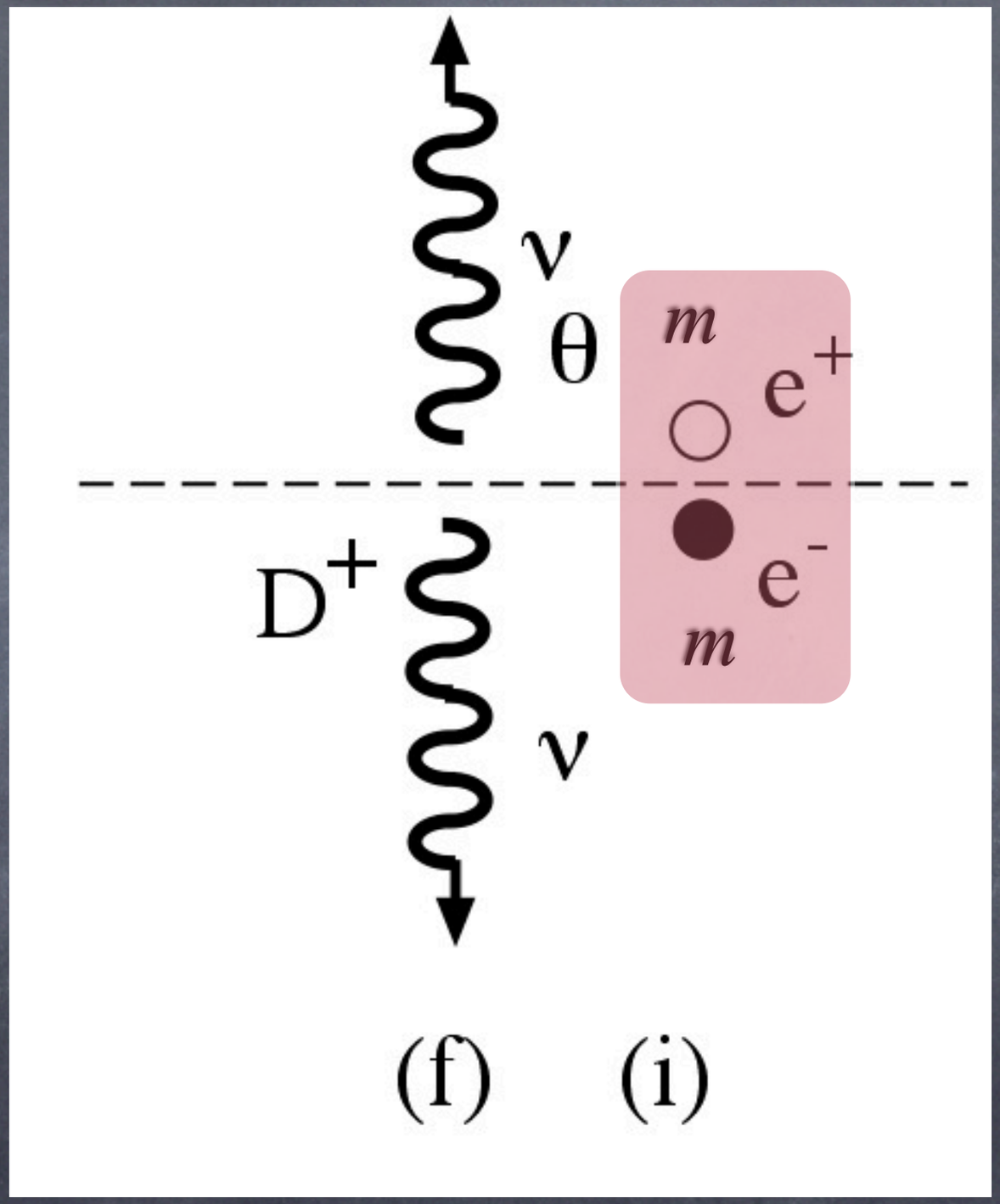
$$h\nu = 2mc^2$$

La energía $h\nu$ del fotón se transforma en las masas del electrón y del positrón.

Un ejemplo moderno

Aniquilación de un par electrón-positrón

$$2mc^2 = 2h\nu$$



Las masas del electrón y del positrón se transforman en energía electromagnética en forma de fotones

¿Una interpretación de la ecuación de Einstein bien establecida?

Einstein Never Approved of Relativistic Mass

Eugene Hecht, Adelphi University, Garden City, NY

The Physics Teacher 2009

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

Masa *en reposo* de una partícula

$$m_0$$

Velocidad *v.* Factor de Lorentz

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(v)}}$$

$$\beta(v) = v/c$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Masa *relativista* de la partícula

$$m = \gamma(v) m_0$$

$$m \rightarrow \infty$$

$$v \rightarrow c$$

¿Cómo escribió Einstein su famosa ecuación?

$$E_0 = m_0 c^2$$

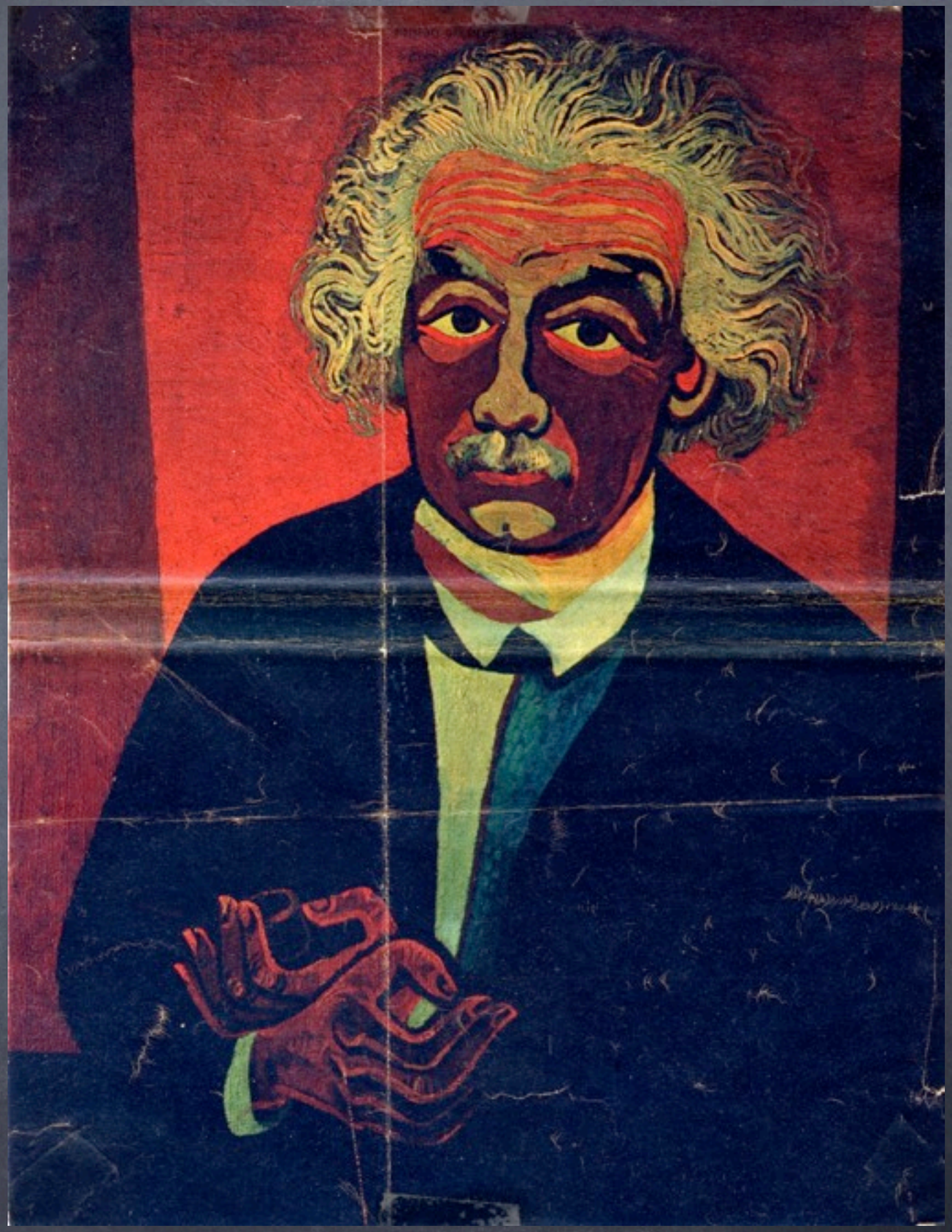
$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

$$E = \gamma(v) mc^2$$

$$E = mc^2$$

$$E = \gamma(v) m_0 c^2$$

$$E = m_0 c^2$$



Mass versus relativistic and rest masses

L. B. Okun
Institute for Theoretical and Experimental Physics (ITEP), 117218 Moscow, Russia

(Received 18 September 2008; accepted 3 December 2008)

The concept of relativistic mass, which increases with velocity, is not compatible with the standard language of relativity theory and impedes the understanding and learning of the theory by beginners. The same difficulty occurs with the term rest mass. To get rid of relativistic mass and rest mass it is appropriate to replace the equation $E=mc^2$ by the true Einstein's equation $E_0=mc^2$, where E_0 is the rest energy and m is the mass. © *2009 American Association of Physics Teachers.*
[DOI: 10.1119/1.3056168]

American Journal of Physics 2009

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

Energía total

$$E = \gamma(V)mc^2$$

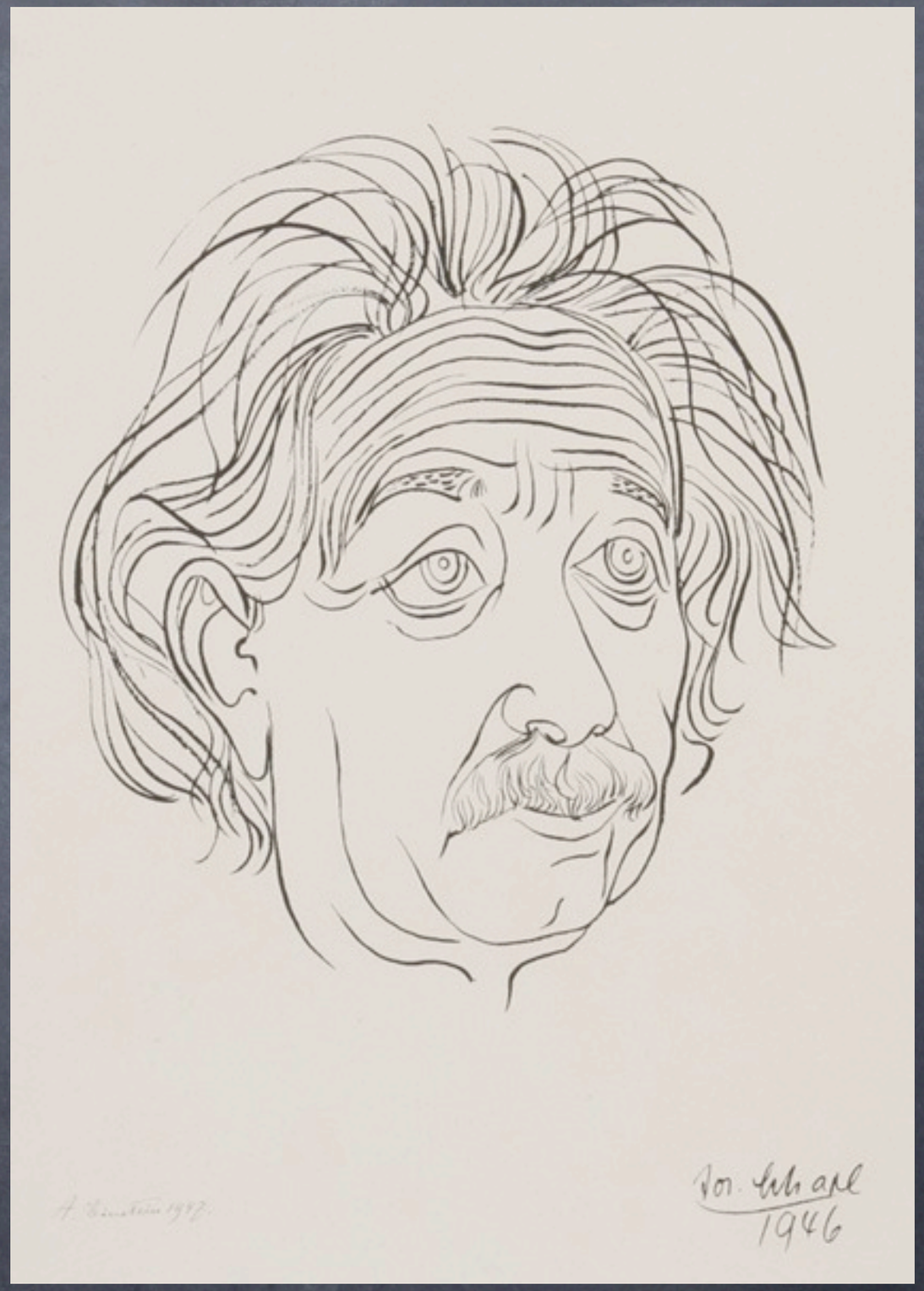
$$E = K + E_0$$

$$K = [\gamma(V) - 1]\, mc^2$$

$$E_0 = mc^2$$

Energía Cinética
Energía en reposo o Interna

La Energía Cinética, y la energía total, depende del sistema de referencia en el que se describa el movimiento de la partícula. La energía en reposo es invariante



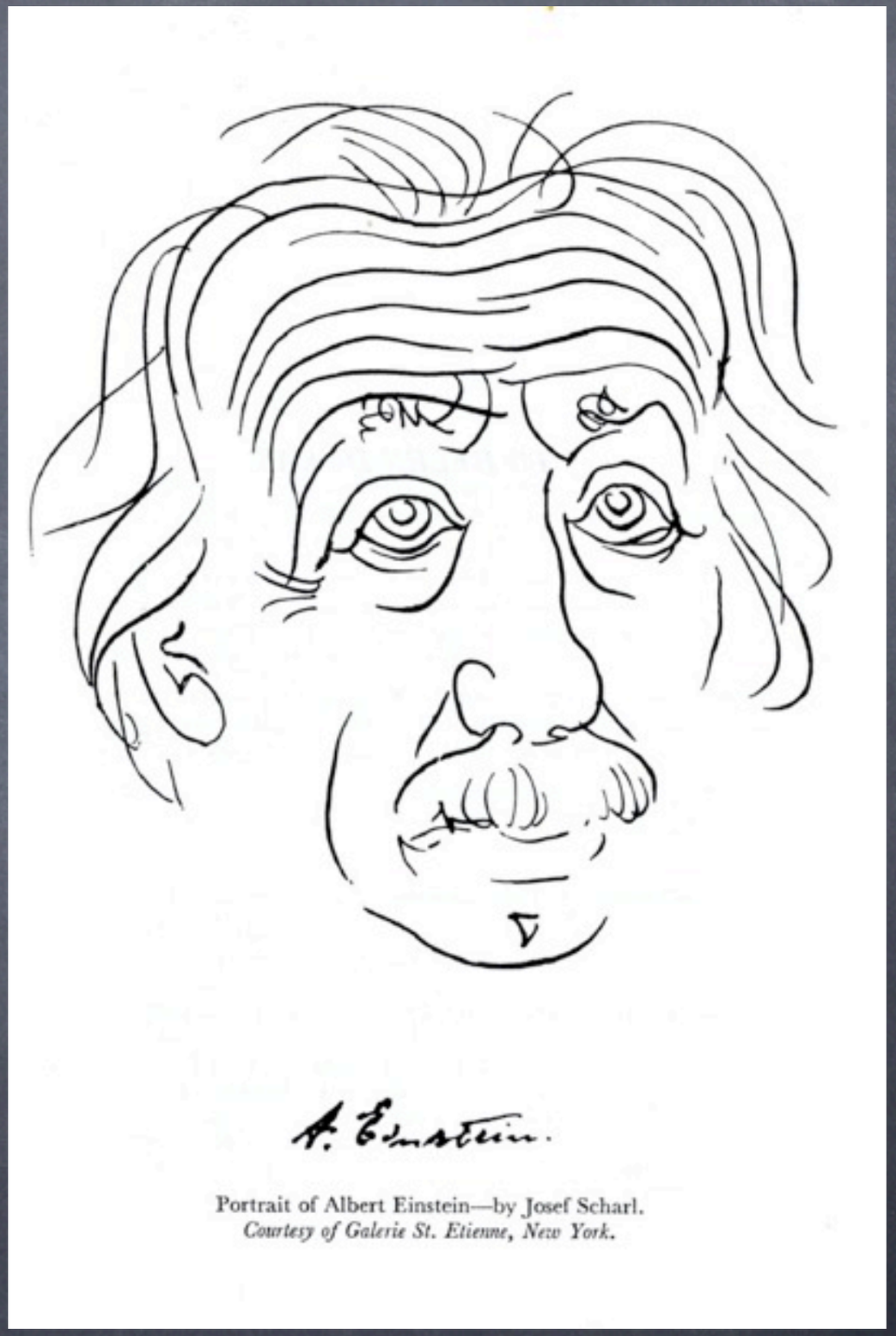
La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

Energía

$$
\begin{aligned}
E &= \gamma(V)mc^2 \\
E &= K + E_0 \\
K &= [\gamma(V) - 1]\, mc^2 \\
E_0 &= mc^2
\end{aligned}
$$

Momento lineal

$$p = \gamma(v)mv$$



Portrait of Albert Einstein—by Josef Scharl.
Courtesy of Galerie St. Etienne, New York.

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

Einstein on mass and energy

Eugene Hecht[a)]
Department of Physics, Adelphi University, Garden City, New York 11530

(Received 30 September 2008; accepted 9 June 2009)

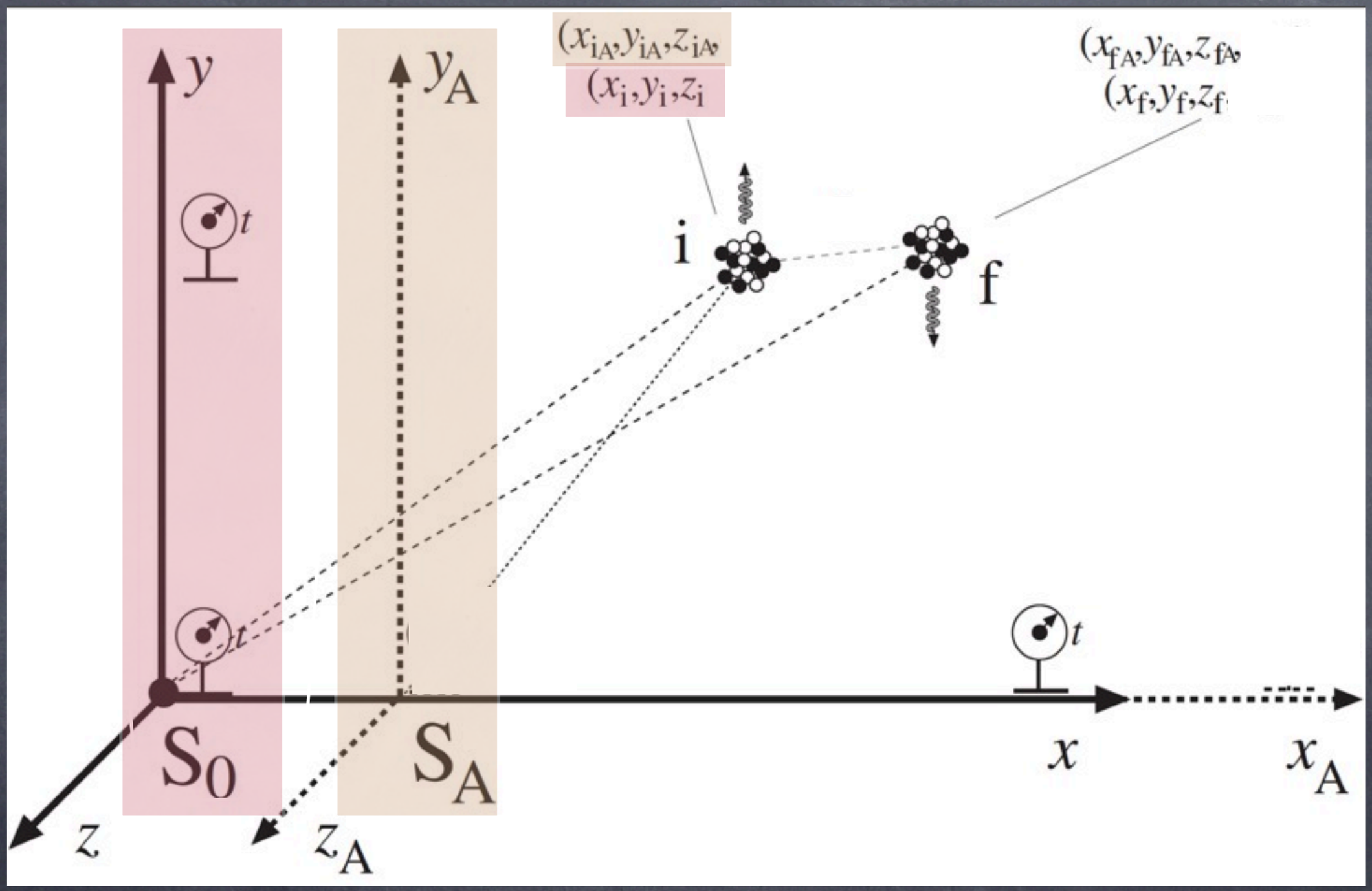
This paper explores the evolution of Einstein's understanding of mass and energy. Early on, Einstein embraced the idea of a speed-dependent mass but changed his mind in 1906 and thereafter carefully avoided that notion entirely. He shunned, and explicitly rejected, what later came to be known as "relativistic mass." Nonetheless many textbooks and articles credit him with the relation $E=mc^2$, where E is the total energy, m is the relativistic mass, and c is the vacuum speed of light. Einstein never derived this relation, at least not with that understanding of the meaning of its terms. He consistently related the "rest energy" of a system to its invariant inertial mass. © *2009 American Association of Physics Teachers.*

[DOI: 10.1119/1.3160671]

American Journal of Physics 2009

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

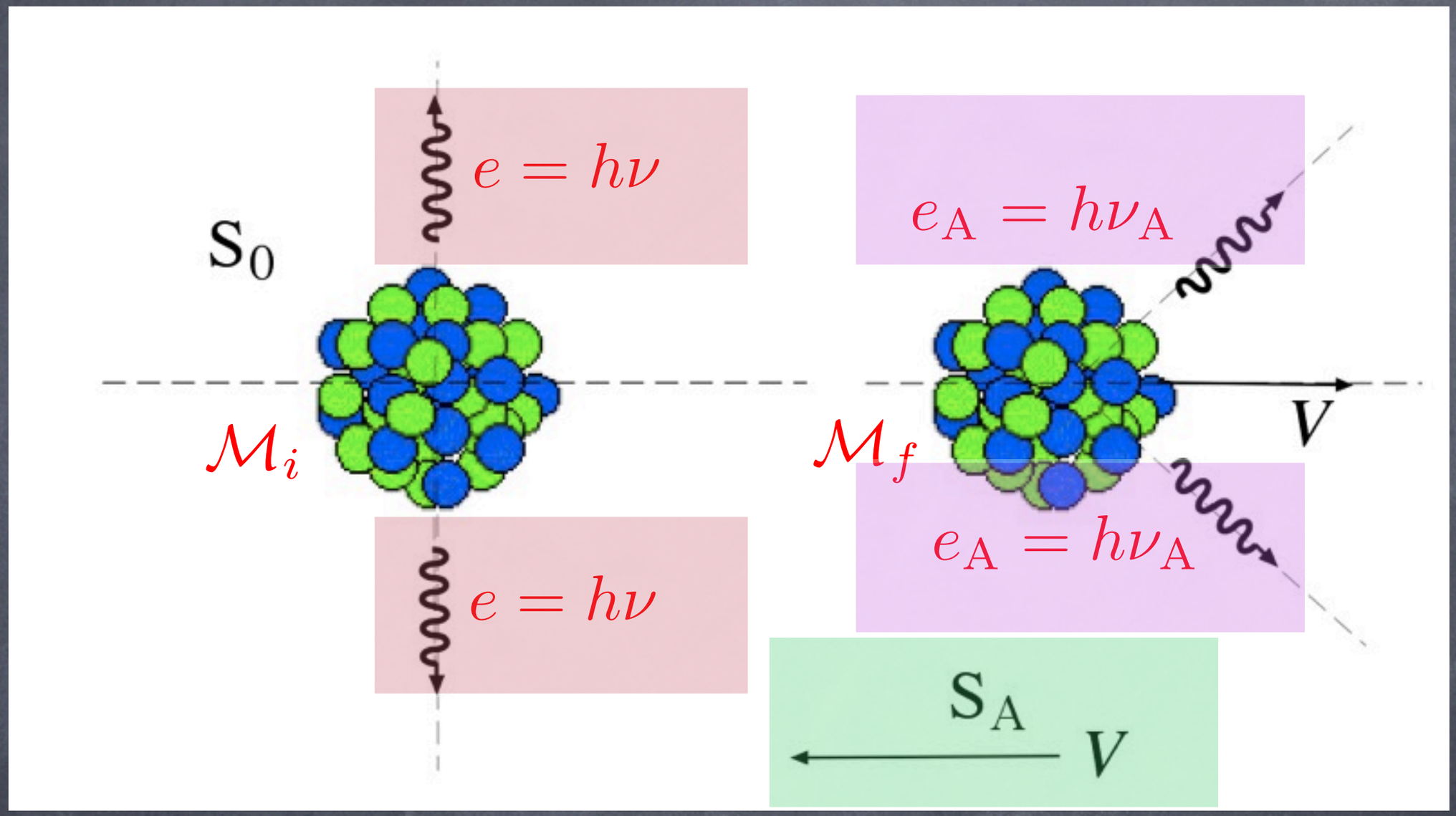
Sistemas de referencia inerciales



Cada sistema de referencia tiene sus propias reglas lo que les permiten asignar coordenadas. El tiempo es absoluto. Ambos referenciales se encuentran en configuración estándar.

Interpretación original de Einstein

Emisión de fotones (sin desaparición de protones o neutrones)



Interpretación original de Einstein

Efecto Doppler Relativista, obtenido por Einstein

$$\nu_{\mathrm{A}} = \gamma(V)\left[1 - \beta(V)\cos\theta\right]\nu$$

Efecto de Aberración

$$\cos\theta_{\mathrm{A}} = \frac{\cos\theta - \beta(V)}{1 - \beta(V)\cos\theta},$$

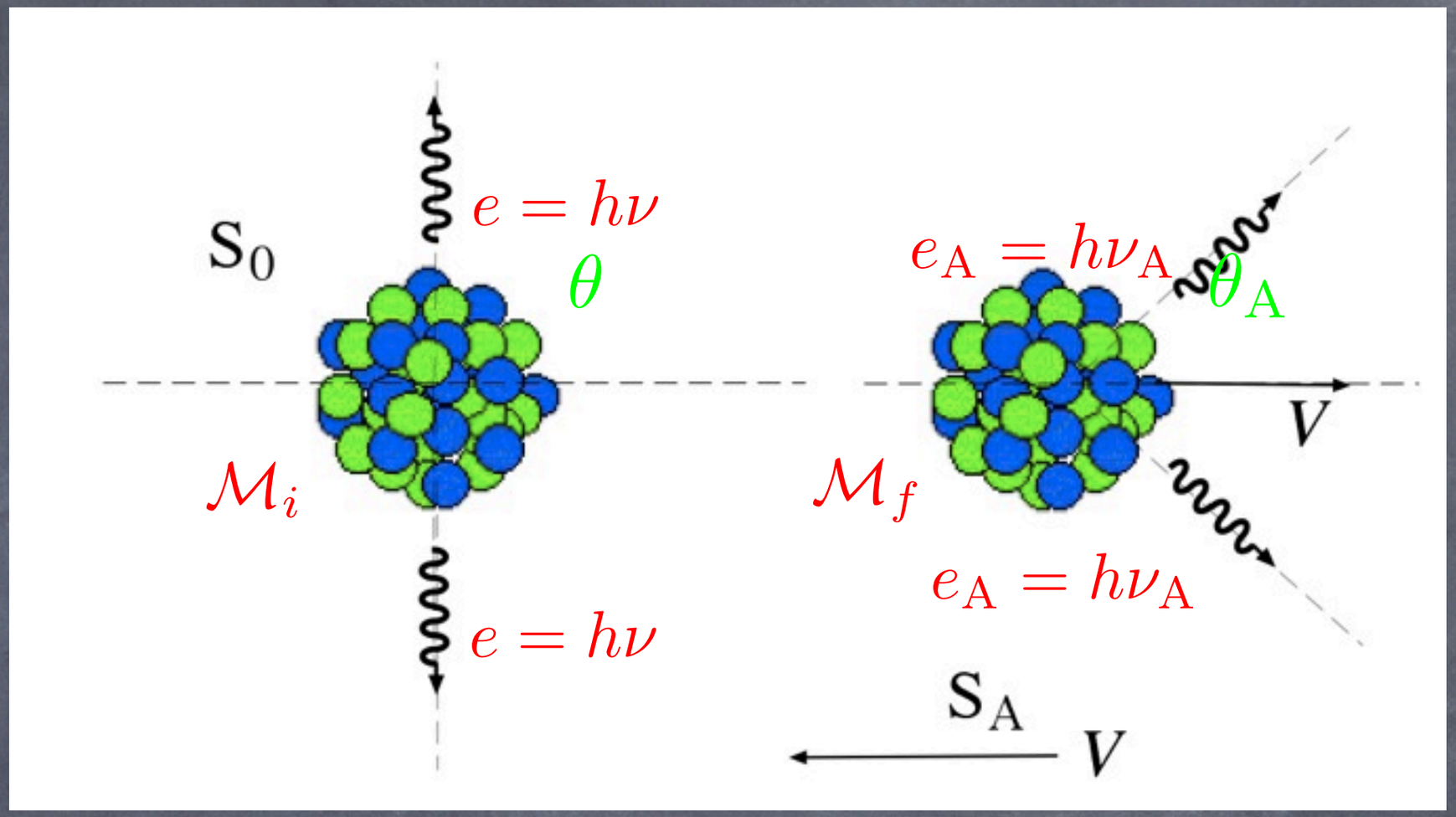
$$\operatorname{sen}\theta_{\mathrm{A}} = \gamma^{-1}(V)\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \beta(V)\cos\theta},$$

Para que se cumplan los Principios de Conservación,
el momento lineal del núcleo en el referencial S_{A} debe ser

$$p_{\mathrm{A}} = \gamma(V)\left(\mathcal{M}_i - \frac{2h\nu}{c^2}\right)V$$

Interpretación original de Einstein

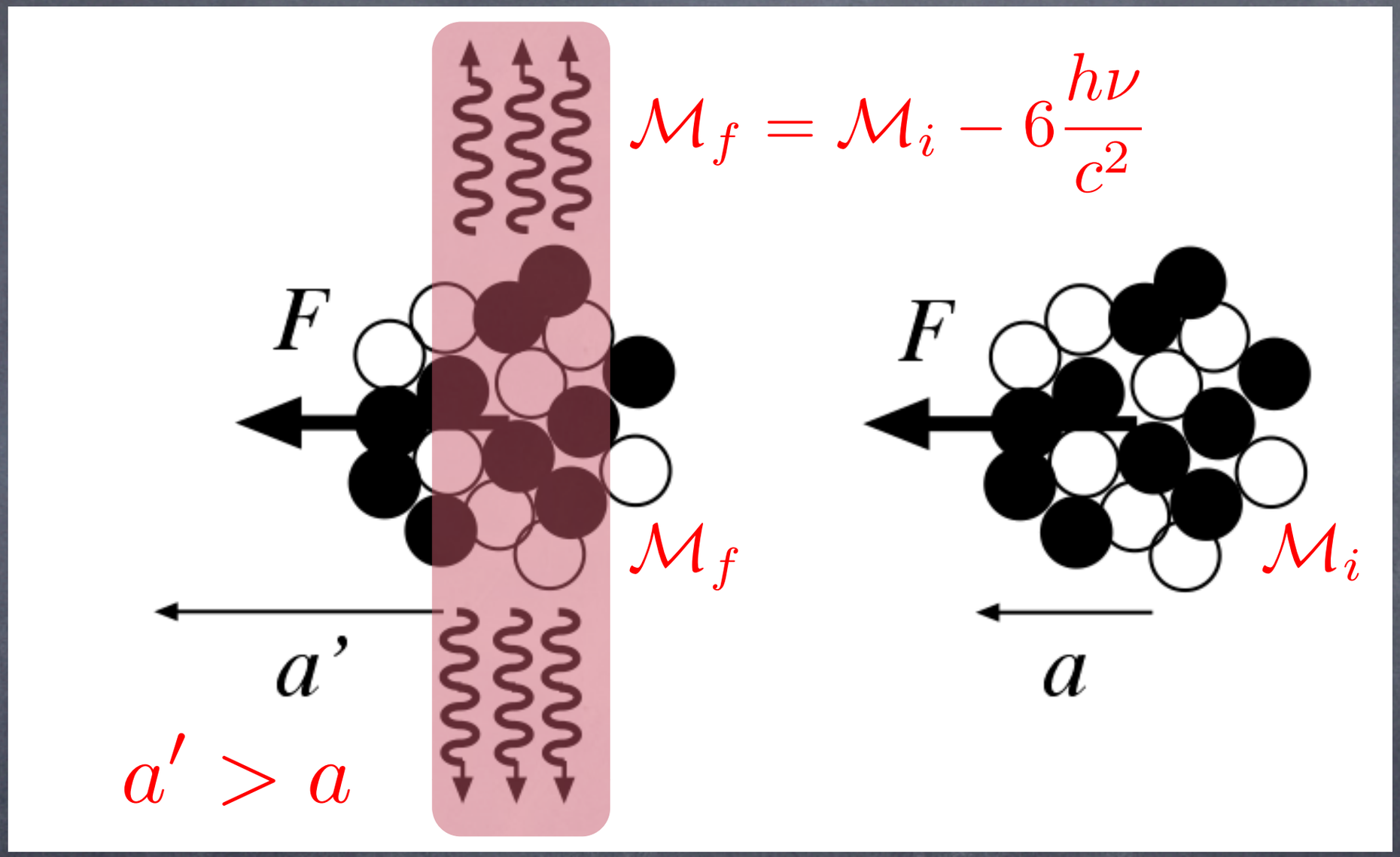
Emisión de fotones (sin desaparición de protones o neutrones)



En un referencial en el que se encuentra en reposo, un núcleo emite dos fotones, sin que se produzca ninguna desintegración. Para otro observador, que se mueve con velocidad -*V* respecto del anterior, la inercia del núcleo ha disminuido en la energía de los fotones dividida por *c* al cuadrado. Nada de materia ha desaparecido, pues el número inicial y final de protones y neutrones es el mismo antes y después de la emisión de los fotones.

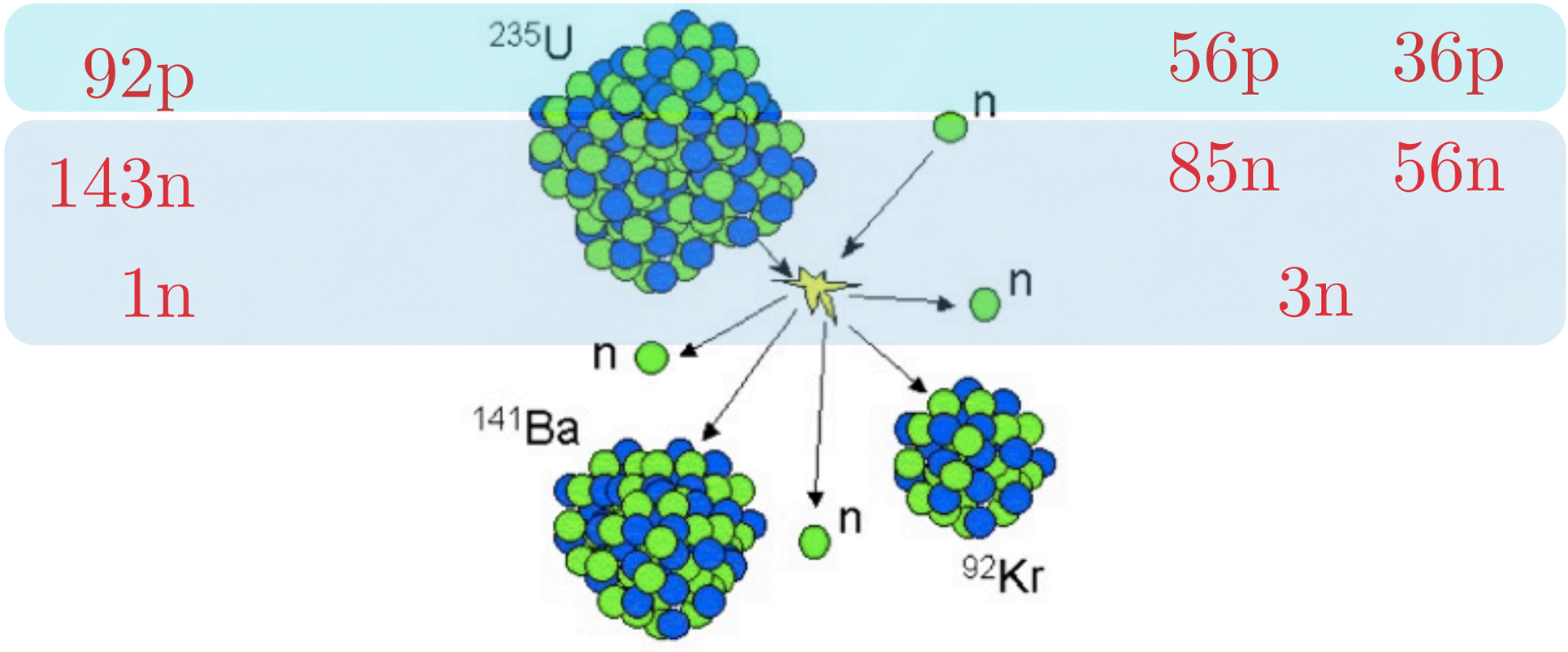
Interpretación original de Einstein

Emisión de fotones (sin desaparición de protones o neutrones)



Si el núcleo es sometido a una misma fuerza antes y después de la emisión de los fotones, se moverá con mayor aceleración después de emitirlos.

Bomba atómica

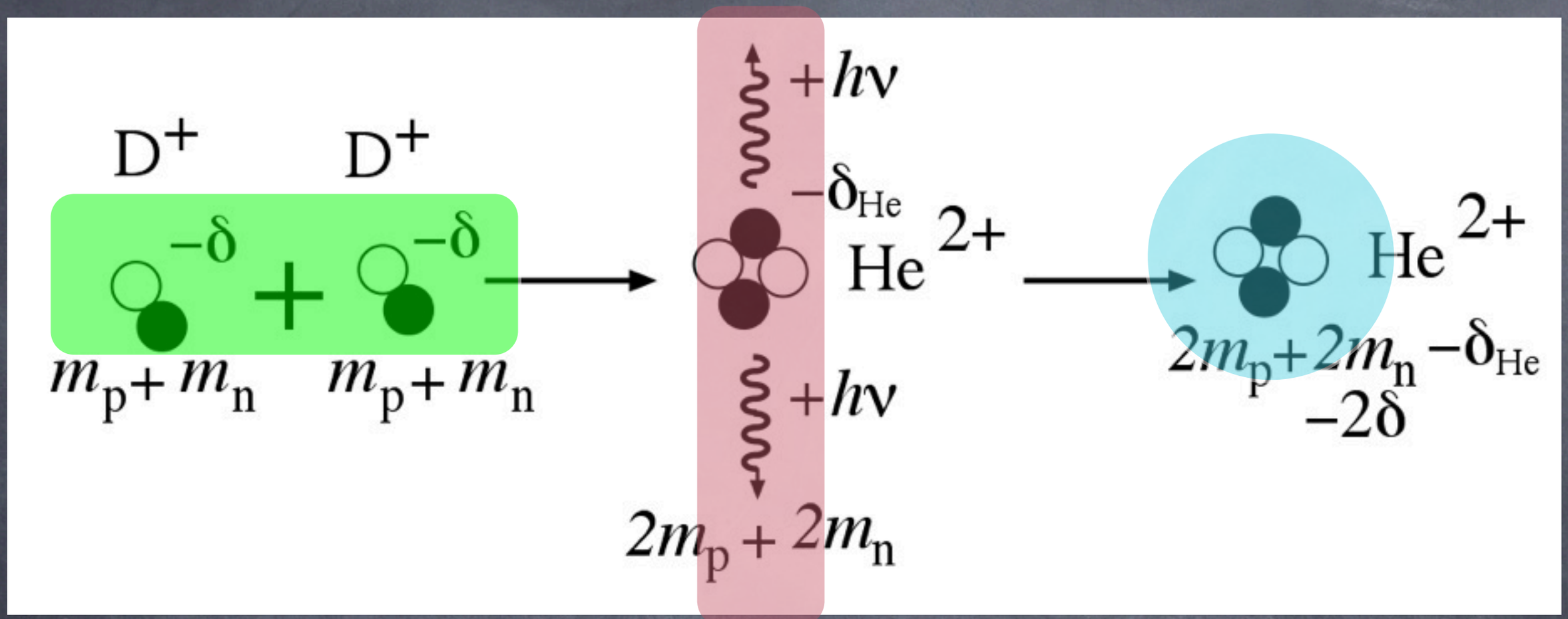


Un núcleo de uranio-235, ^{235}U, atrapa un neutrón lento, ^{1}n, se desintegra y produce un núcleo de bario- 141, ^{141}Ba, otro de kriptón-92, ^{92}Kr y 3 neutrones. El número de protones y el número de neutrones se conserva a lo largo del proceso. Ningún protón o neutrón es convertido en fotones.

Al igual que sucede en una reacción química, en el caso de los núcleos de uranio, bario y kriptón, con la interacción fuerte entre protones y neutrones, los núcleos de bario y kriptón tienen una energía de enlace menor que el núcleo de uranio 235, por lo que la diferencia de energía de interacción se emite en forma de energía cinética de los tres neutrones liberados y en forma de fotones.

El Sol

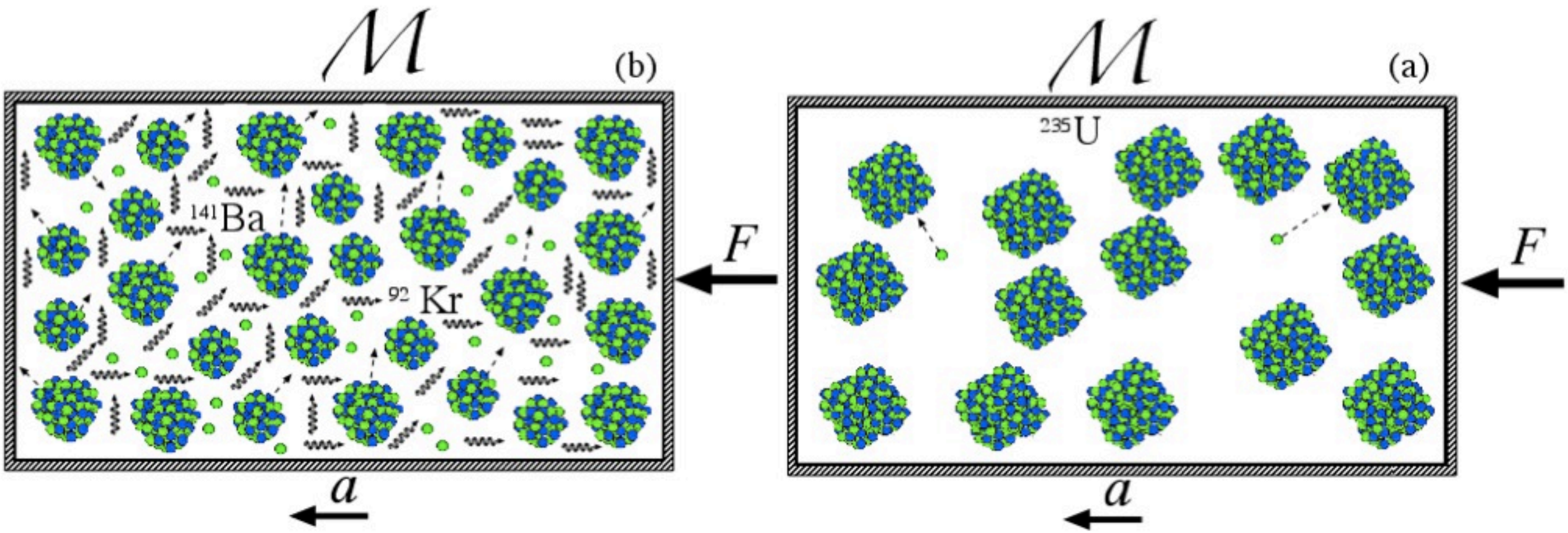
Emisión de fotones (sin desaparición de protones o neutrones)



Dos núcleos de Deuterio se unen para dar un núcleo de He. Se conserva el número de protones y el número de neutrones. Se emiten fotones. Se conserva la energía total, si se toman en cuenta las energías de interacción.

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

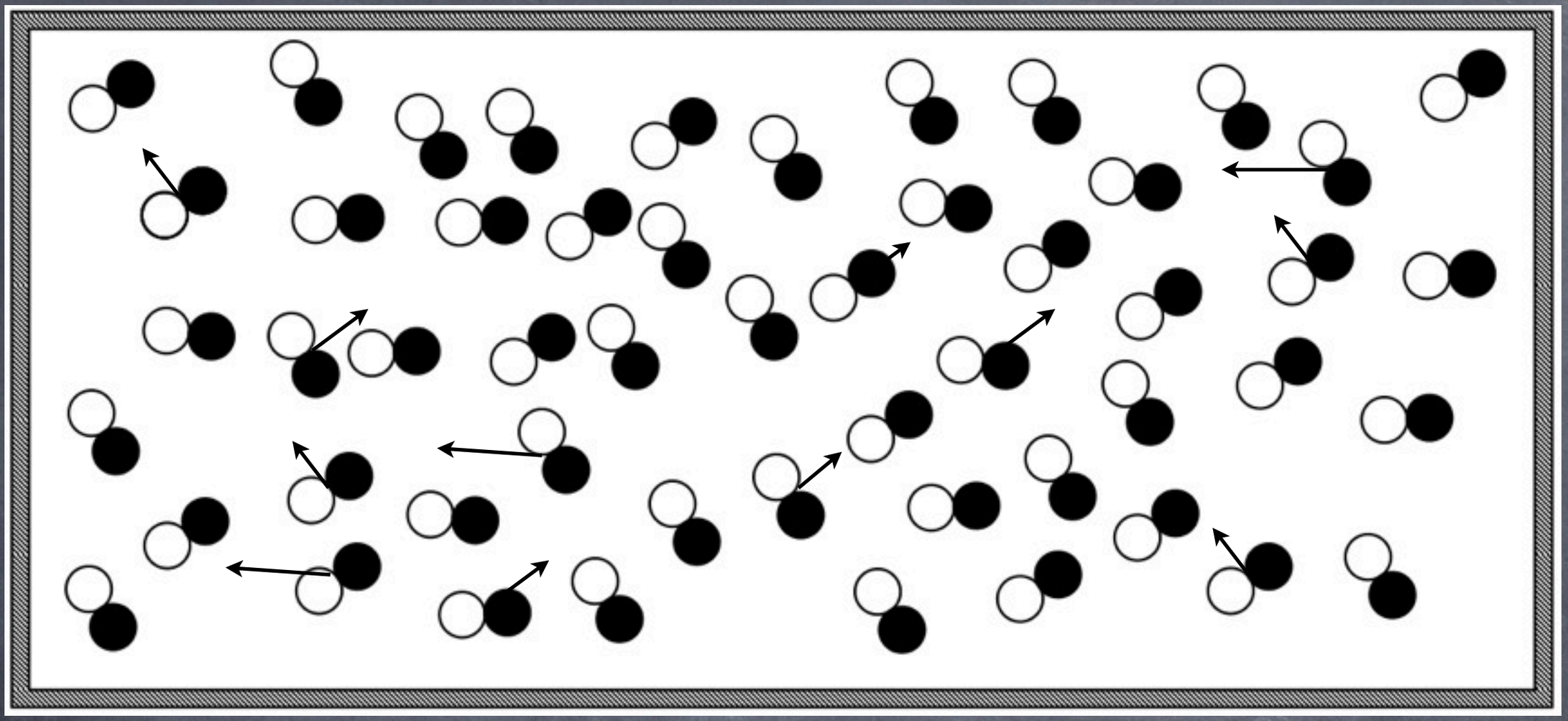
Bomba atómica



(a) Un sistema conteniendo gran número de núcleos de átomos de ^{235}U, colocados en una matriz metálica, es acelerado bajo la acción de una fuerza F, adquiriendo una aceleración a, de donde se obtiene una inercia $\mathcal{M} = F/a$. (b) Un neutrón absorbido por un núcleo de uranio produce la desintegración en cadena de los núcleos de uranio, produciéndose núcleos de ^{141}Ba y de ^{92}Kr y más neutrones, todos ellos moviéndose a alta velocidad, así como fotones . La aceleración del sistema es la misma, así como su inercia.

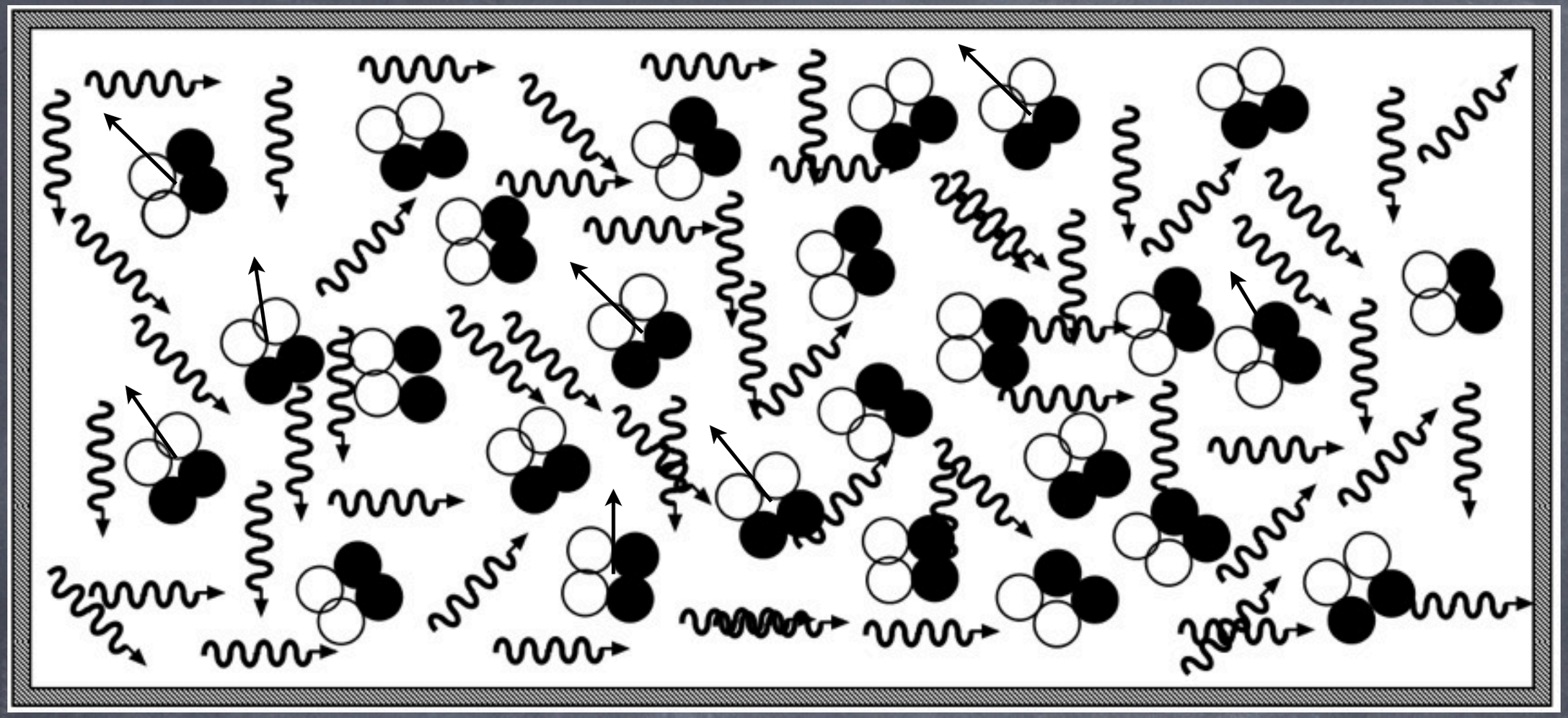
La inercia se conserva en un sistema aislado. La inercia de la energía es la misma se encuentre en forma de materia, como energía de interacción, energía cinética o en forma de radiación.

El Sol



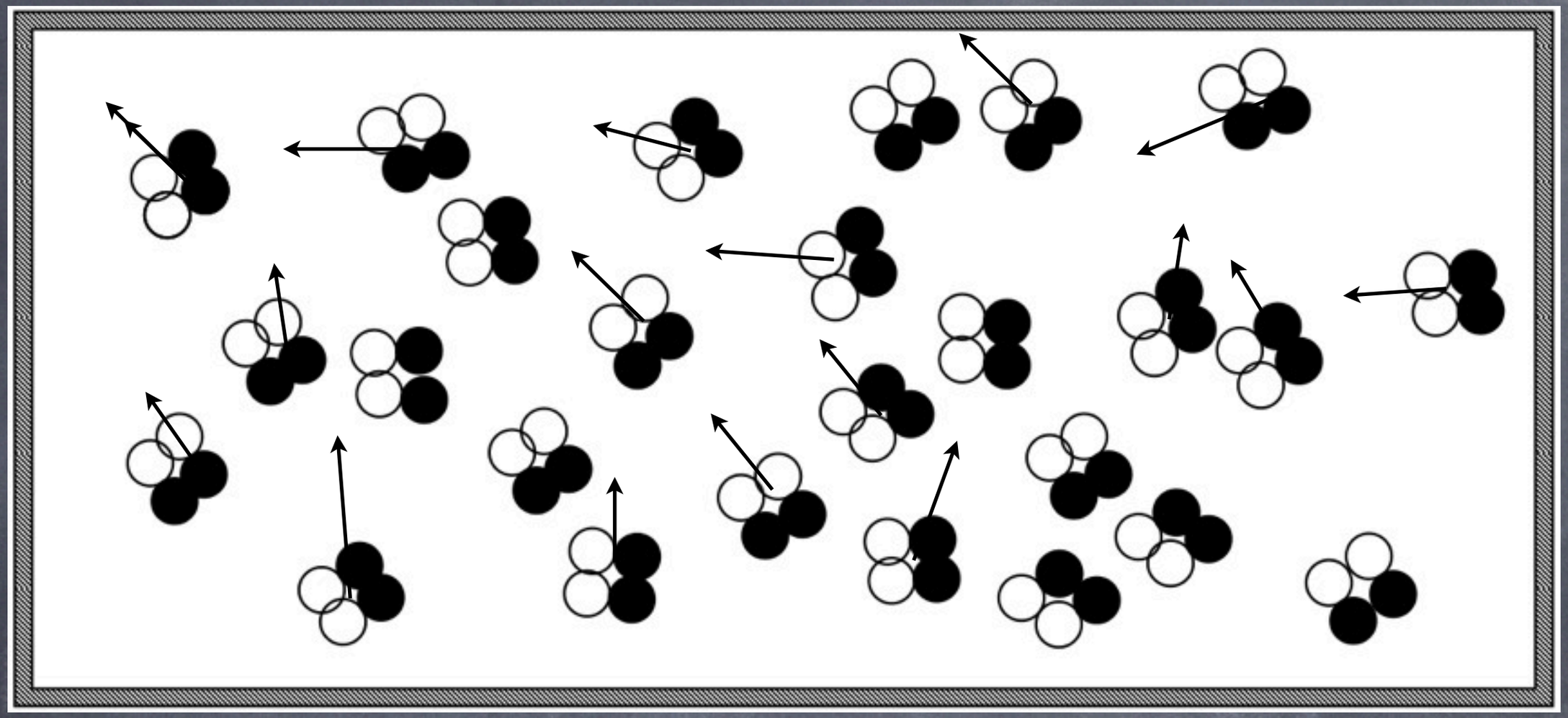
Núcleos de deuterio que se mueven en el interior de una caja aislada del exterior. Estos núcleos se van a unir dos a dos para dar núcleos de He y fotones de alta energía.
Se conserva el total de protones y neutrones.

El Sol



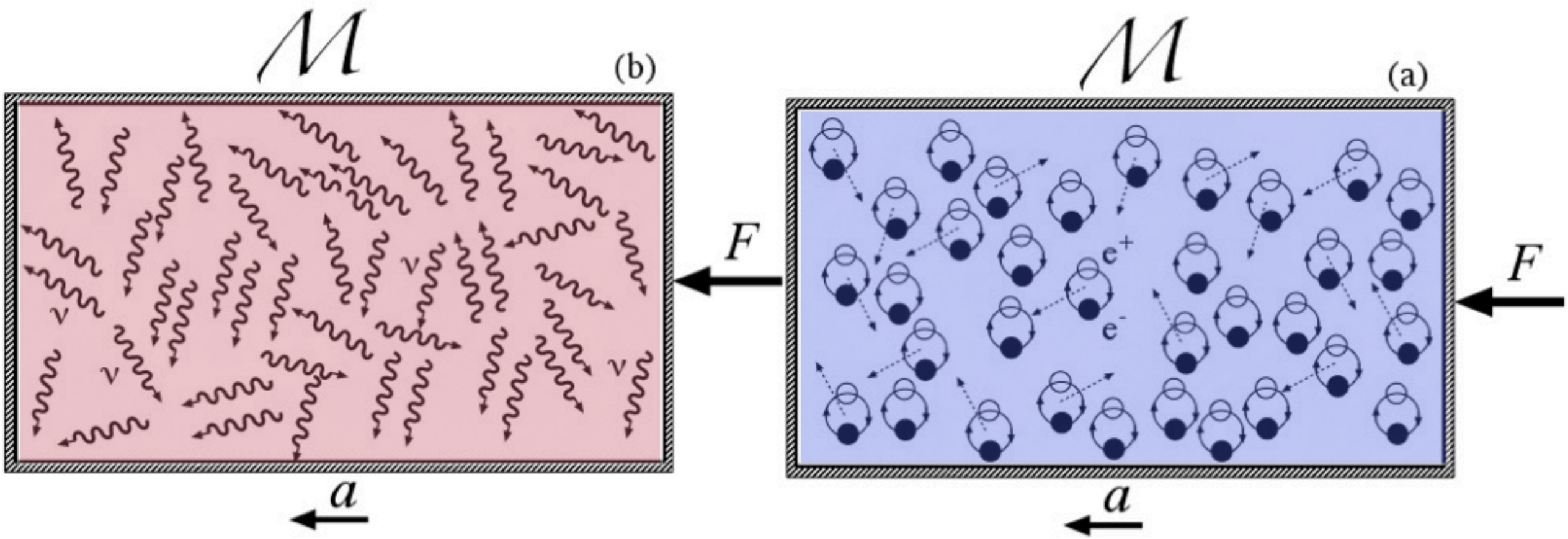
Núcleos de helio y fotones. Este conjunto tiene la misma función energía, y la misma inercia que el anterior conjunto de núcleos de deuterio. Se conserva el total de protones y neutrones.

El Sol



Núcleos de helio. Los fotones han escapado de la caja. Este conjunto tiene menor función energía, menor inercia, que el conjunto anterior. La disminución en la inercia es igual a la energía escapada en forma de fotones dividida por *c* al cuadrado.

Caja con pares electrón-positrón



(a) Un sistema conteniendo gran número de átomos de positronio –un electrón orbitando alrededor de un positrón y a la inversa– es acelerado bajo la acción de una fuerza F, adquiriendo una aceleración a, de donde se obtiene una inercia $\mathcal{M} = F/a$. (b) Sometido el sistema a la acción de la fuerza F, los átomos de positronio se desintegran, produciendo cada uno de ellos un par de fotones con momento lineal opuesto y frecuencia ν. La aceleración del sistema es la misma, así como su inercia.

La inercia se conserva. Es la misma en forma de materia o en forma de radiación si la energía total es la misma.

Principio de Inercia de la Energía

Toda forma de energía de un sistema, incluyendo la energía en forma de masa de sus partículas elementales, las energías de enlace, energías cinéticas de sus componentes, fotones, etc., dividida por *c* al cuadrado, contribuye a la inercia del mismo.

$$\mathcal{M} \equiv U c^{-2}$$

Este Principio de Inercia de la Energía está completamente ausente en la Mecánica Clásica y en la Termodinámica: la inercia no depende de la energía interna y la contribución de la inercia a la energía interna no se considera.

Formalismo Matemático de Minkowski

La verdadera interpretación física del Principio de Inercia de la Energía se debe llevar a cabo en el marco del Formalismo de Minkowski.

Teoría Especial de la Relatividad de Einstein

El principio más básico en Física es el Principio de Relatividad: las ecuaciones de la Física deben ser covariantes, *i. e.*, deben tener la misma forma funcional para todos los observadores en sistemas de referencia inerciales. Otro principio básico es el de la constancia de la velocidad de la luz en el vacío, c .

Formalismo de Minkowski

Si el Principio de Relatividad es correcto, todas las leyes de la Física que sean válidas en un sistema de referencia inercial deben ser invariantes bajo Transformaciones de Lorentz. Más allá del principio de relatividad y de la constancia de la velocidad de la luz, esta afirmación implica que las ecuaciones deben ser expresadas mediante tensores, para garantizar que sean válidas en todos los referenciales inerciales.

Física Clásica

Para poder apreciar en su justa medida las ventajas del formalismo relativista de Minkowski para describir los procesos físicos y cómo se integra en el mismo el Principio de Inercia de la Energía, es necesario considerar cómo se describen los mismos procesos en Física Clásica.

Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Esta ecuación se refiere a la descripción del comportamiento de *partículas elementales*

Cuando se refiere a *cuerpos extensos*, formados por muchas partículas, se generaliza como:

$$\sum_k \vec{F}_k = M\vec{a}_{\mathrm{cm}}$$

La suma vectorial de las fuerzas permite obtener la aceleración del centro de masas del sistema. Integrando esta ecuación, se obtiene la *Ecuación del Centro de Masas*:

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} = \left(\sum_k \vec{F}_k\right) \cdot \Delta x_{\mathrm{cm}}$$

El producto de la suma de las fuerzas por el desplazamiento del centro de masas no es un trabajo, pues fuerza y desplazamiento no están relacionados

Principio de Relatividad de Galileo

De acuerdo con el Principio de Relatividad de Galileo, todas las leyes de la Física que sean válidas en un sistema de referencia inercial deben ser invariantes bajo Transformaciones de Galileo.

La Segunda Ley de Newton es covariante, invariante bajo Transformaciones de Galileo.

$$\left(\sum_k \mathbf{F}_k\right)\Delta t = M(v_f - v_i)$$

$$v_{\mathrm{fA}} = v_f - V$$
$$v_{\mathrm{iA}} = v_i - V$$

$$M = \mathrm{C^{te}}$$

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} = \left(\sum_k \mathbf{F}_k\right)\Delta x_{\mathrm{cm}}$$

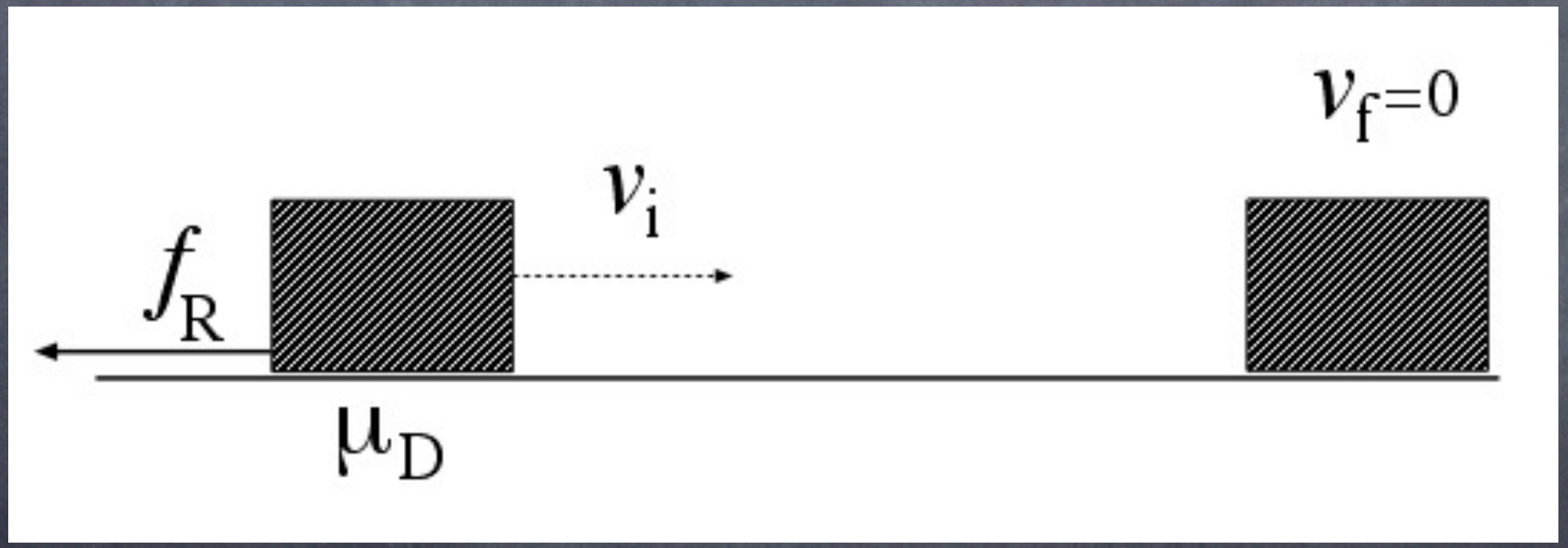
$$\Delta x_{\mathrm{cmA}} = \Delta x_{\mathrm{cm}} - V\Delta t$$
$$\Delta K_{\mathrm{cmA}} = \Delta K_{\mathrm{cm}} - M(v_f - v_i)\Delta t$$

$$\Delta K_{\mathrm{cmA}} = \left(\sum_k \mathbf{F}_{k\mathrm{A}}\right)\Delta x_{\mathrm{cmA}}$$

La Segunda Ley de Newton no proporciona toda la información necesaria para resolver problemas en los que intervienen cuerpos extensos.

Destrucción de energía mecánica

Un cuerpo desliza sobre una superficie con la que roza. Su velocidad final es cero.



Fuerzas de rozamiento (descritas fenomenológicamente)

$$f_R = \mu_D m g$$

Destrucción de energía mecánica

La energía cinética inicial del cuerpo

$$K_i = \frac{1}{2} M v_i^2$$

disminuye

$$K_f = 0$$

y se produce una desaparición de energía mecánica (la energía cinética inicial)

La información que proporciona la Ecuación del Centro de Masas

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} = f_R \cdot \Delta x_{\mathrm{cm}}$$

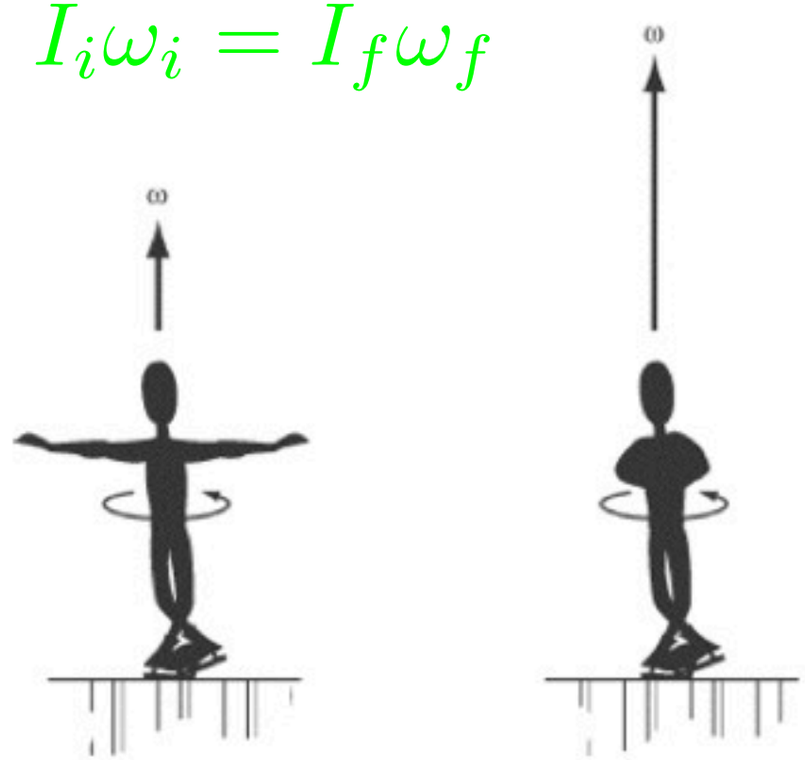
no informa sobre en qué se ha convertido la energía cinética. Tampoco explica la mayor temperatura final del cuerpo que roza.

Comodín del calor: la energía mecánica desaparecida se transforma en calor

Creación de energía mecánica

Conservación del momento angular

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$



Persona que extiende o contrae los brazos mientras gira. Mientras se conserva el momento angular $I\omega$, la energía mecánica se crea o se destruye según extiende o contrae los brazos.

Momento de inercia $I = mr^2$

Velocidad angular $r_i^2\omega_i = r_f^2\omega_f$

Destrucción y creación de energía mecánica

Variación de la energía cinética de rotación

$$\Delta K_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

Destrucción de energía mecánica

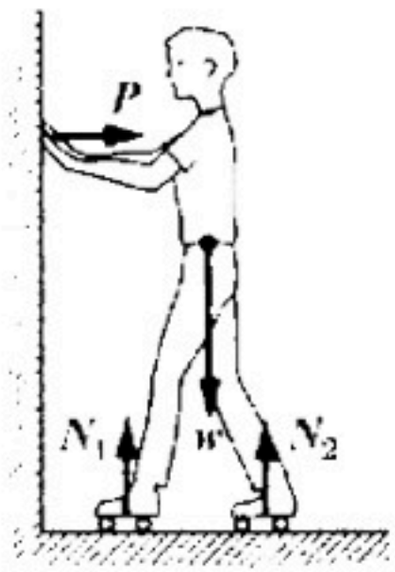
$$r_i < r_f \qquad \Delta K_{\mathrm{R}} = \left(1 - \frac{r_f^2}{r_i^2}\right) r_f^2 \omega_f^2 < 0$$

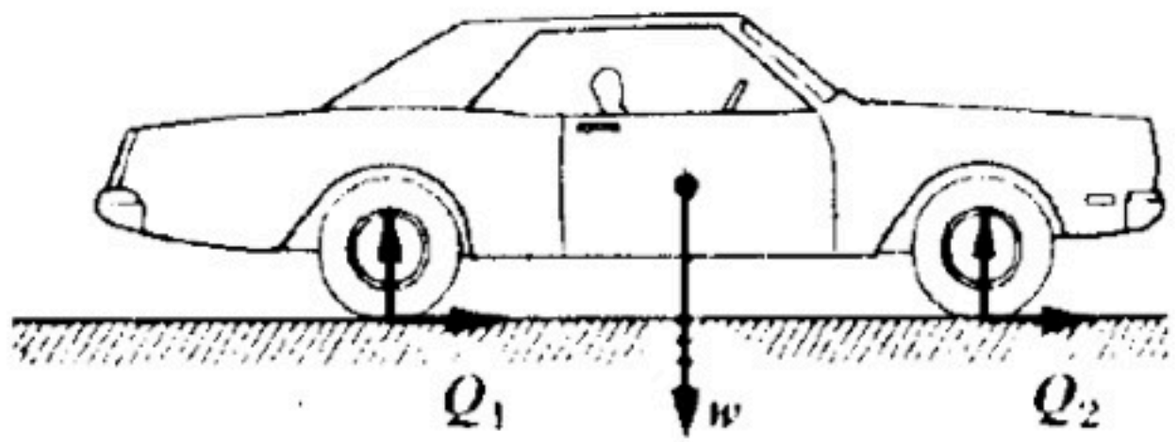
Creación de energía mecánica

$$r_i > r_f \qquad \Delta K_{\mathrm{R}} = \left(1 - \frac{r_f^2}{r_i^2}\right) r_f^2 \omega_f^2 > 0$$

Si en el primer caso se puede admitir que se describa el proceso diciendo que la energía cinética inicial se transforma en calor, en el segundo caso, eso es inadmisible (Violación del Segundo Principio de la Termodinámica).

Creación de energía mecánica





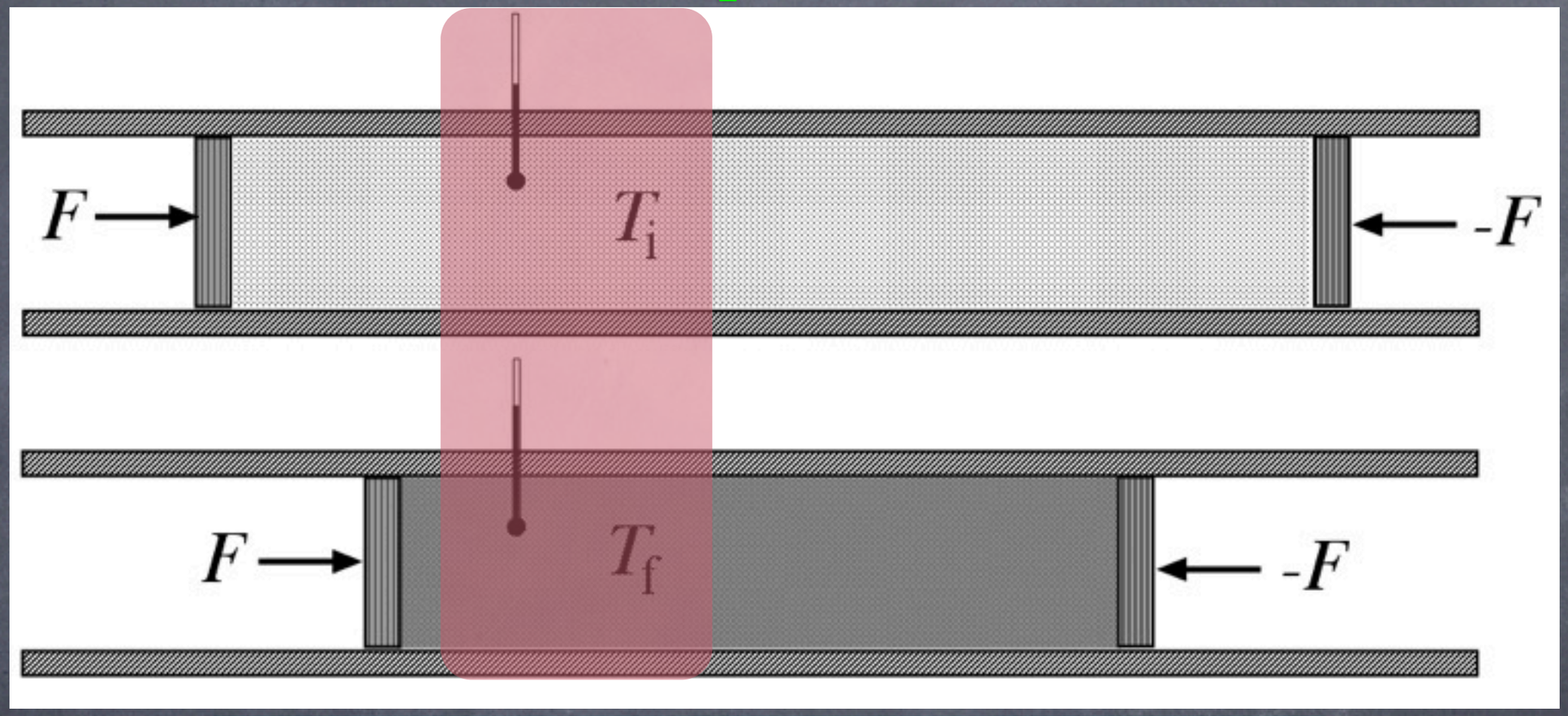
Persona sobre patines que haciendo fuerza, sin desplazamiento asociado, contra consigue obtener energía mecánica en forma de energía cinética de traslación. Algo semejante sucede con un automóvil que se pone en movimiento. [C M Penchina, *Pseudowork-energy principle*, Am. J. Phys. **46**, 295-296 (1978)]

Las fuerzas sobre la pared o sobre el suelo no realizan trabajo (la fuerza se aplica sin desplazamiento).
La Ecuación del Centro de Masas describe --indica la energía cinética obtenida en función de la fuerza aplicada sobre la pared y el desplazamiento del centro de gravedad de la persona--, pero no explica, el origen de la energía cinética creada.

La energía cinética no puede provenir del calor (Violación del Segundo Principio de la Termodinámica).

Deformación de un sistema extenso

Un gas encerrado en un cilindro dotado de dos émbolos se contrae bajo la acción de dos fuerzas iguales y de sentido contrario aplicadas sobre los émbolo, en un proceso adiabático. El gas varía su temperatura.

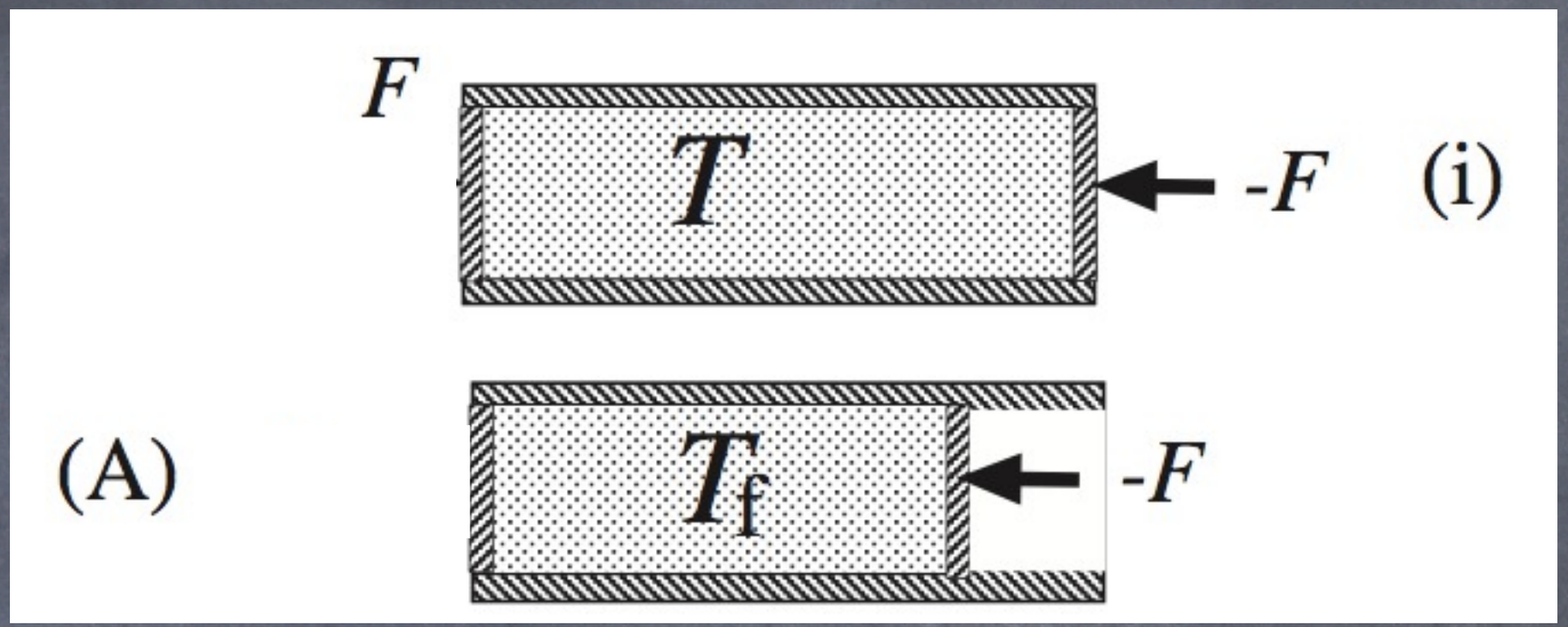


$$\sum_k F_k = 0\,;\Delta x_{\rm cm} = 0$$

La Segunda Ley de Newton no proporciona toda la información y se hace necesario introducir nuevos conceptos --energía interna, temperatura, calor, etc.-- y un nuevo principio, el Primer Principio de la Termodinámica

Primer Principio de la Termodinámica

$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q$$



Compresión *adiabática* del gas Q=0

Trabajo fuerzas externas $$W_{\text{ext}} = F\Delta x$$

Energía Interna $$\Delta U = C_V(T_f - T_i)$$

$$C_V(T_f - T_i) = F\Delta x$$

Esta ecuación permite obtener la *temperatura final* del sistema.

¿Es covariante el Primer Principio de la Termodinámica?

La energía interna, y su variación, no depende del referencial

$$\Delta U_{\mathrm{A}} = \Delta U$$

¿Es el calor invariante entre referenciales inerciales?

$$Q_{\mathrm{A}} = Q$$

Transformación de desplazamientos

$$\Delta x_{\mathrm{A}} = -\Delta x - V\Delta t$$

Trabajo en el referencial S_A

$$W_{\mathrm{ext}\mathrm{A}} = F_{\mathrm{A}}\Delta x_{\mathrm{A}} = -F\Delta x - FV\Delta t$$

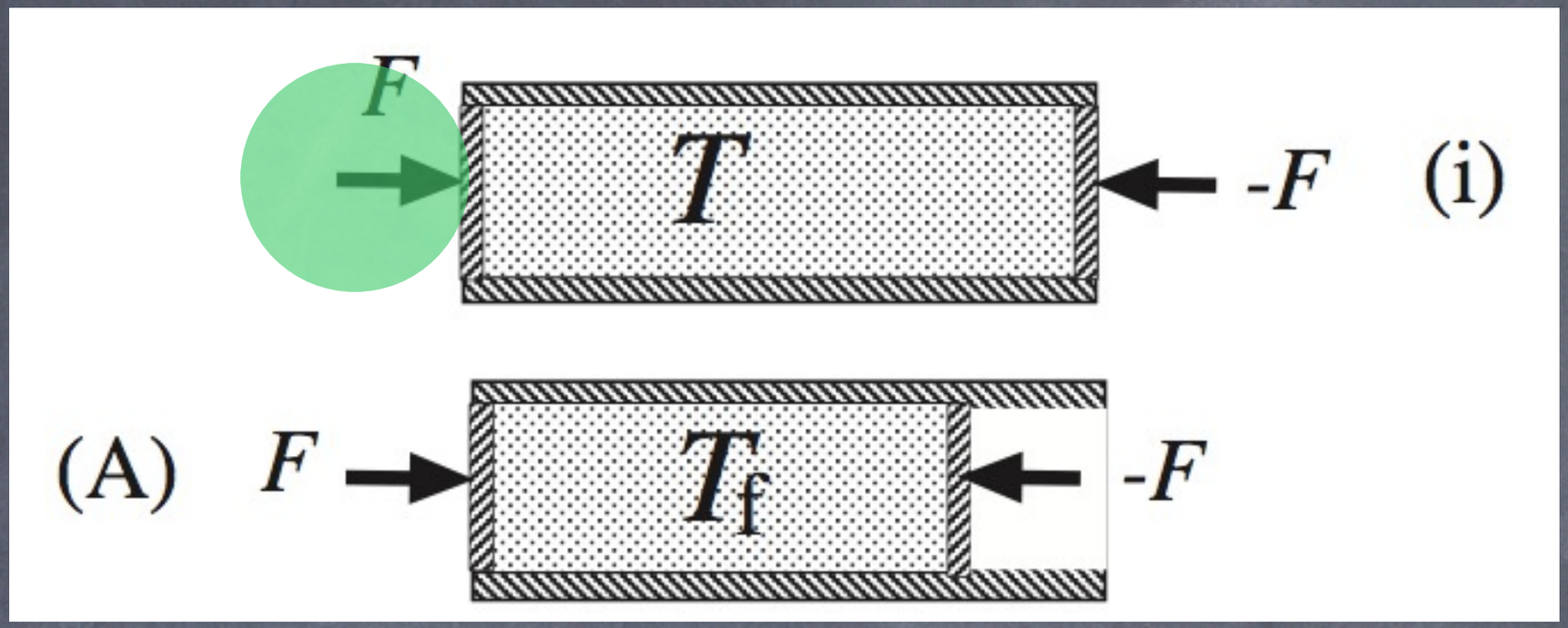
El Primer Principio en el referencial S_A

$$\Delta U \neq -F\Delta x - FV\Delta t + Q$$

Aparentemente, el Primer Principio no es covariante.

¿Qué se ha olvidado?

¿Es covariante el Primer Principio de la Termodinámica?



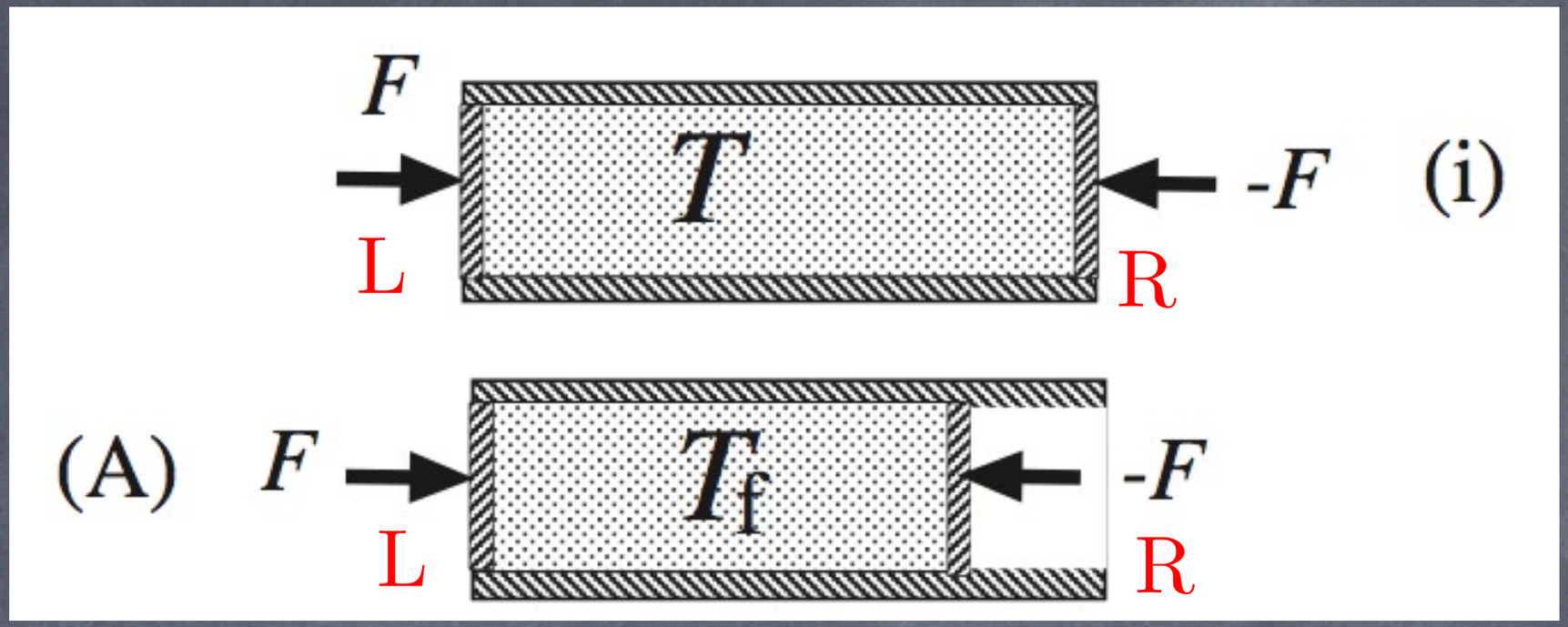
Lo que se ha olvidado es la fuerza F que debe aplicarse sobre la base del cilindro para que éste no se mueva como un todo. Con esta fuerza, al aplicar la Segunda Ley de Newton se tiene:

$$\sum_k \vec{F}_k = 0$$

$$\Delta K_{\rm cm} = \left(\sum_k \vec{F}_k \right) \cdot \Delta x_{\rm cm} = 0$$

El centro de gravedad del gas permanece en reposo.

¿Es covariante el Primer Principio de la Termodinámica?



$$\Delta x_{\mathrm{R}} = -\Delta x - V\Delta t$$

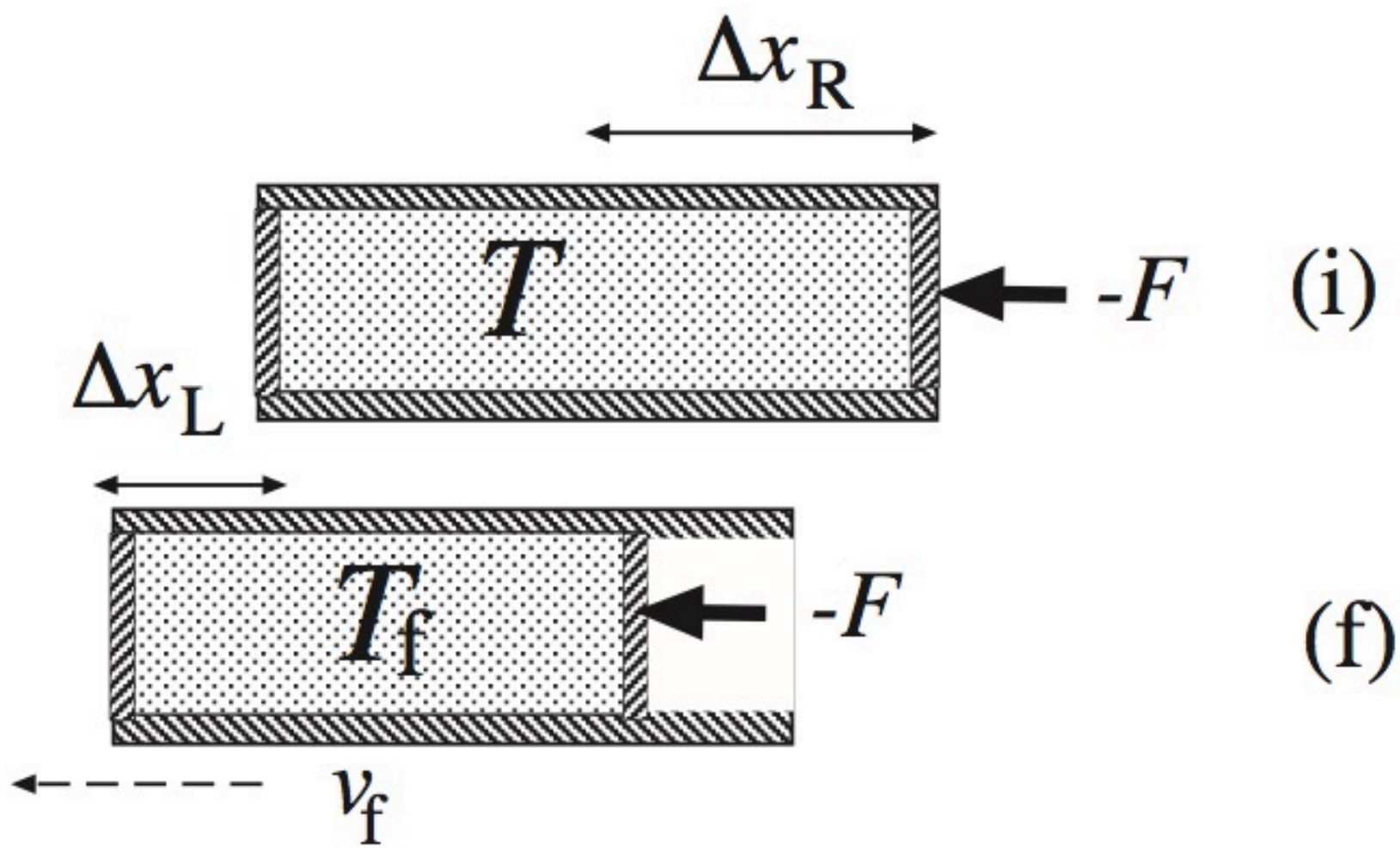
$$\Delta x_{\mathrm{L}} = -V\Delta t$$

$$W_{\mathrm{extA}} = -F\Delta x_{\mathrm{R}} + F\Delta x_{\mathrm{L}} = F\Delta x$$

$$\Delta U = F\Delta x + Q$$

Considerando también la fuerza aplicada sobre la base y que en el referencial S_A sí tiene desplazamiento, el Primer Principio es covariante

Primer Principio de la Termodinámica Generalizado



(i) Sobre un gas de Van der Waals encerrado en un cilindro dotado de un émbolo, a temperatura T, se aplica una fuerza $-F$ sobre el émbolo, sin ninguna otra fuerza aplicada. (f) Durante el intervalo de tiempo Δt, el émbolo se mueve una distancia Δx_R, mientras que el extremo cerrado del cilindro se desplaza una distancia Δx_L. El sistema conjunto adquiere una velocidad v_f. El proceso se puede considerar adiabático (A) o isotermo (I).

¿Cómo se considera en este problema la variación de la energía cinética del centro de masas del sistema

Primer Principio de la Termodinámica Generalizado

El Primer Principio de la Termodinámica se generaliza cuando el centro de gravedad del sistema varía su velocidad relacionando la energía total, la suma de su energía interna y su energía cinética, con los trabajos de las fuerzas externas y el calor:

$$\Delta E = W_{\text{ext}} + Q$$

$$\Delta E = \Delta K_{\text{cm}} + \Delta U$$

Primer Principio Generalizado

$$\Delta K_{\text{cm}} + \Delta U = W_{\text{ext}} + Q$$

Segunda Ley de Newton y Primer Principio Generalizado

La resolución de problemas de física relativos a cuerpos extensos, sobre los que se aplican fuerzas, exige, en general, que se utilice tanto la Segunda Ley de Newton, que proporciona información sobre la variación de la energía cinética del cuerpo, como el Primer Principio de la Termodinámica, que proporciona información complementaria.

$$\left(\sum_k \mathbf{F}_k\right)\Delta t = M\Delta v$$

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} + \Delta U = W_{\mathrm{ext}} + Q$$

La Segunda Ley de Newton --impulsos y momentos lineares, vectores tridimensionales-- y el Primer Principio de la Termodinámica --energías, escalares-- son principios completamente diferentes, aunque complementarios.

Covarianza del Primer Principio Generalizado

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} = \left(\sum_k \mathbf{F}_k\right) \cdot \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{cm}}$$

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} + \Delta U = W_{\mathrm{ext}} + Q$$

En el referencial S_A debe ser:

$$\Delta K_{\mathrm{cmA}} = \left(\sum_k \mathbf{F}_{k\mathrm{A}}\right) \cdot \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{cmA}}$$

$$\Delta K_{\mathrm{cmA}} + \Delta U_{\mathrm{A}} = W_{\mathrm{extA}} + Q_{\mathrm{A}}$$

El observador en S_A debe aplicar las mismas definiciones que en el referencial en reposo y al aplicar las mismas ecuaciones, debe obtener los mismos resultados que en el referenciaal en reposo (la misma temperatura final, el mismo calor intercambiado, el mismo consumo de combustible, etc.)

Covarianza del Primer Principio Generalizado.

¿Cómo se puede llevar a cabo la descripción anterior, pero utilizando Transformaciones de Lorentz en lugar de Transformaciones de Galileo?

Temas de Física

¿Es posible una Termodinámica Relativista?

J. Güémez

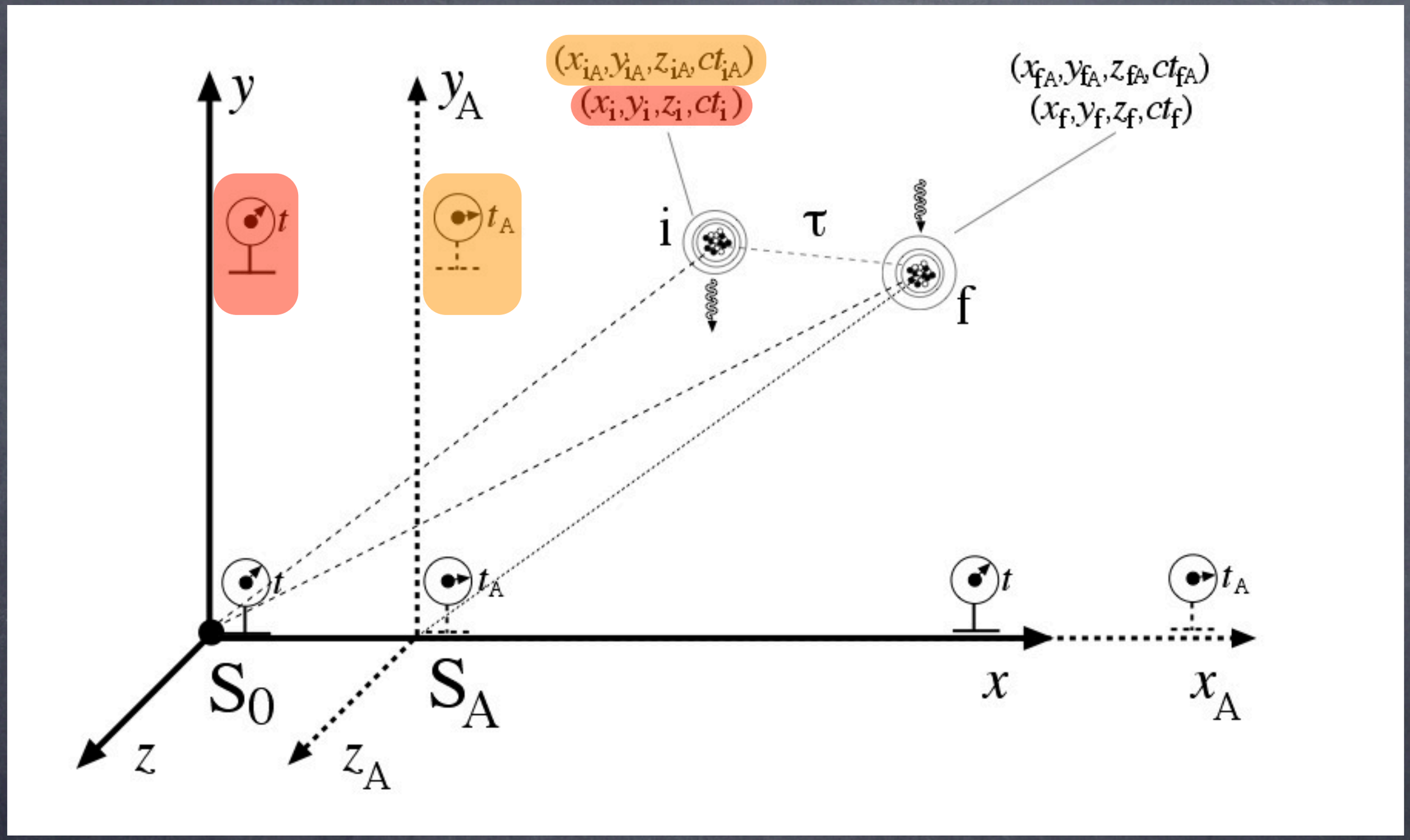
Se hace una breve reseña histórico-bibliográfica del desarrollo del concepto de Termodinámica Relativista. Se analizan dos ejemplos de aplicación de la Termodinámica Relativista Galileana y se discute en qué circunstancias se podría construir una Termodinámica Relativista covariante Lorentz con sentido físico.

Revista Española de Física 2010

Espacio de Minkowski

Hermann Minkowski

Sistemas de referencia inerciales



Cada sistema de referencia tiene sus propias reglas y sus propios relojes, lo que les permiten asignar coordenadas y tiempos. Ambos referenciales se encuentran en configuración estándar.

Espacio de Minkowski

Sea un sistema de referencia S_0 , con tres coordenadas espaciales y una temporal. Un evento o suceso en S_0 viene caracterizado por las coordenadas

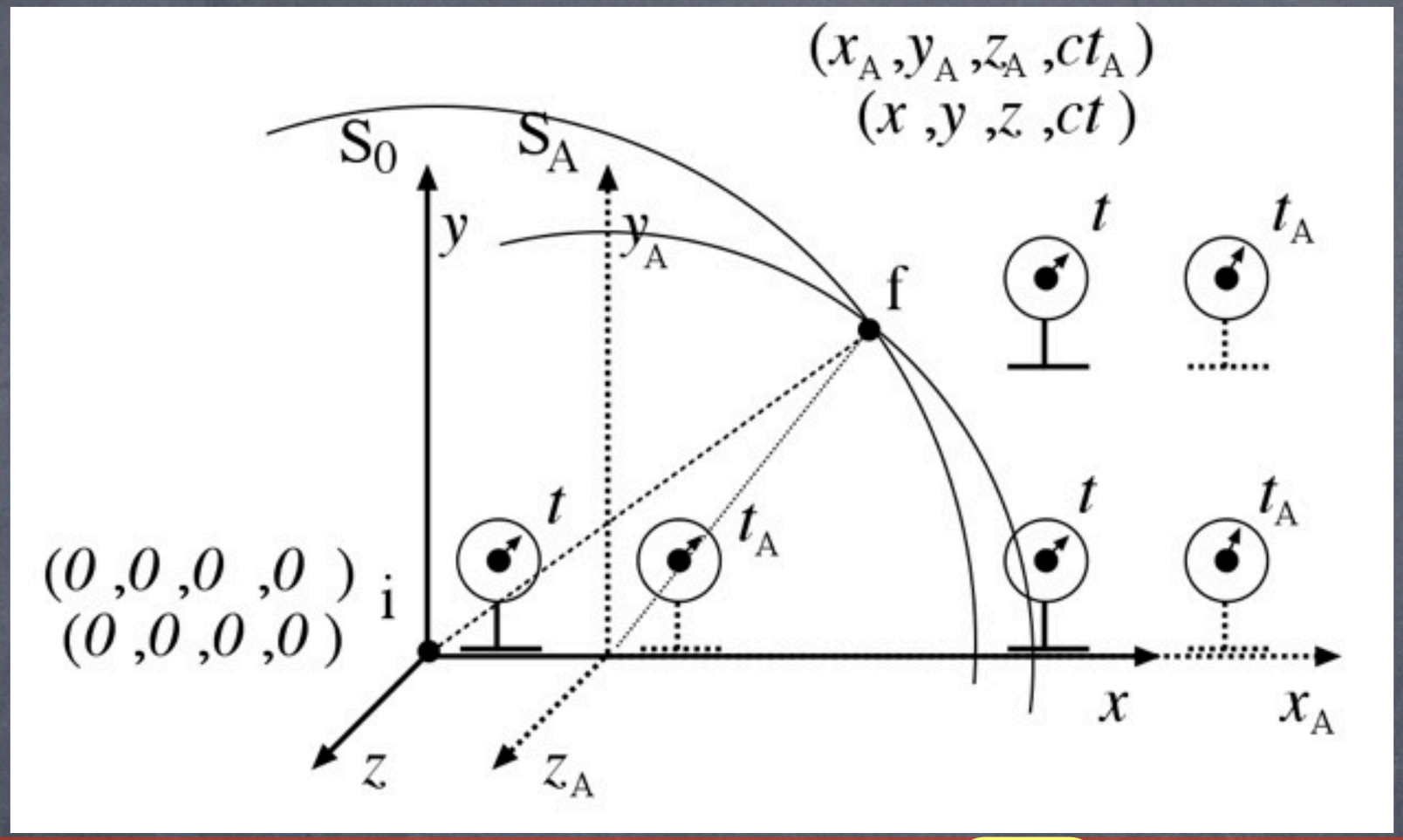
$$(x, y, z, ct)$$

En un referencial S_{A} que se mueve con velocidad V respecto de S_0, en configuración estándar, el mismo suceso vendrá caracterizado por las coordenadas

$$(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}}, ct_{\mathrm{A}})$$

Espacio de Minkowski

En el instante t=0 se emite un fotón desde el origen de coordenadas de los dos referenciales. Cada observador los localiza con las coordenadas propias, que deben cumplir en ambos casos:



$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 ,$$
$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = c^2 t_A^2 .$$

Ésta es la condición de que la velocidad de la luz sea la misma en ambos referenciales.

Espacio de Minkowski

La transformación entre coordenadas para la configuración estándar con velocidad V entre refereciales viene dada por

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{A}} &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,, \\
y_{\mathrm{A}} &= y\,, \\
z_{\mathrm{A}} &= z\,, \\
t_{\mathrm{A}} &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Éstas son las Transformaciones de Lorentz, que se transforman en las Transformaciones de Galileo si se hace infinito la velocidad de la luz.

Transformación de Lorentz

La matriz de la Transformación de Lorentz, para la configuración estándar:

$$\mathcal{L}^{\mu}_{\nu}(V) = \begin{pmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} \beta(V) &= V/c \\ \gamma(V) &= (1-\beta^2(V))^{-1/2} \end{aligned}$$

Transformación de Lorentz

Las transformaciones entre eventos se pueden expresar en forma de matrices como:

$$\begin{Bmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{A}} \\ ct_{\mathrm{A}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{Bmatrix},$$

Hipótesis de Minkowski:

Las magnitudes con sentido físico se deben expresar igual que un evento, con cuatro componentes, tres componentes espaciales, correspondientes a un vector tridimensional, y una componente temporal, un escalar, y tal que entre referenciales inerciales en configuración estándar se transformen mediante transformaciones de Lorentz. Dichas magnitudes se denominan *4-vectores* o *cuadrivectores*

Los 4-vectores se notan como:

$$A^{\mu} = \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \right\} ; A^{\mu}_{\mathrm{A}} = \left\{ \begin{array}{c} A_{1\mathrm{A}} \\ A_{2\mathrm{A}} \\ A_{3\mathrm{A}} \\ A_{4\mathrm{A}} \end{array} \right\}$$

aunque, por razones tipográficas, se pueden poner como filas.

Postulados de Minkowski

(i) Todas las magnitudes físicas deben venir dadas en forma de tensores: (i) constantes, (ii) 4-vectores, o (iii) 4-tensores

(ii) Las magnitudes físicas se transforman entre sistemas de referencia inerciales mediante transformación de Lorentz

$$A^{\mu}_{\mathrm{A}} = \mathcal{L}^{\mu}_{\nu}(V) A^{\nu}$$

(iii) Las ecuaciones de la física deben venir dadas como relaciones entre tensores

Cuadrivectores de Minkowski

Cuadrivector intervalo, espacio-tiempo

$$\{\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t\}$$

Cuadrivector momento lineal-energía

$$\{cp_x, cp_y, cp_z, E\}$$

Cuadrivector impulso-trabajo

$$\{cF_x\Delta t, cF_y\Delta t, cF_z\Delta t, F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z\}$$

Cuadrivector vector de ondas para un fotón

$$\left\{c\frac{h\nu}{c}\cos\theta, c\frac{h\nu}{c}\mathrm{sen}\theta, 0, h\nu\right\}$$

Cuadrivectores de Minkowski. Referencial S_A

Cuadrivector suceso, espacio-tiempo

$$\{\Delta x_{\mathrm{A}}, \Delta y_{\mathrm{A}}, \Delta z_{\mathrm{A}}, c\Delta t_{\mathrm{A}}\}$$

Cuadrivector momento lineal-energía

$$\{cp_{x\mathrm{A}}, cp_{y\mathrm{A}}, cp_{z\mathrm{A}}, E_{\mathrm{A}}\}$$

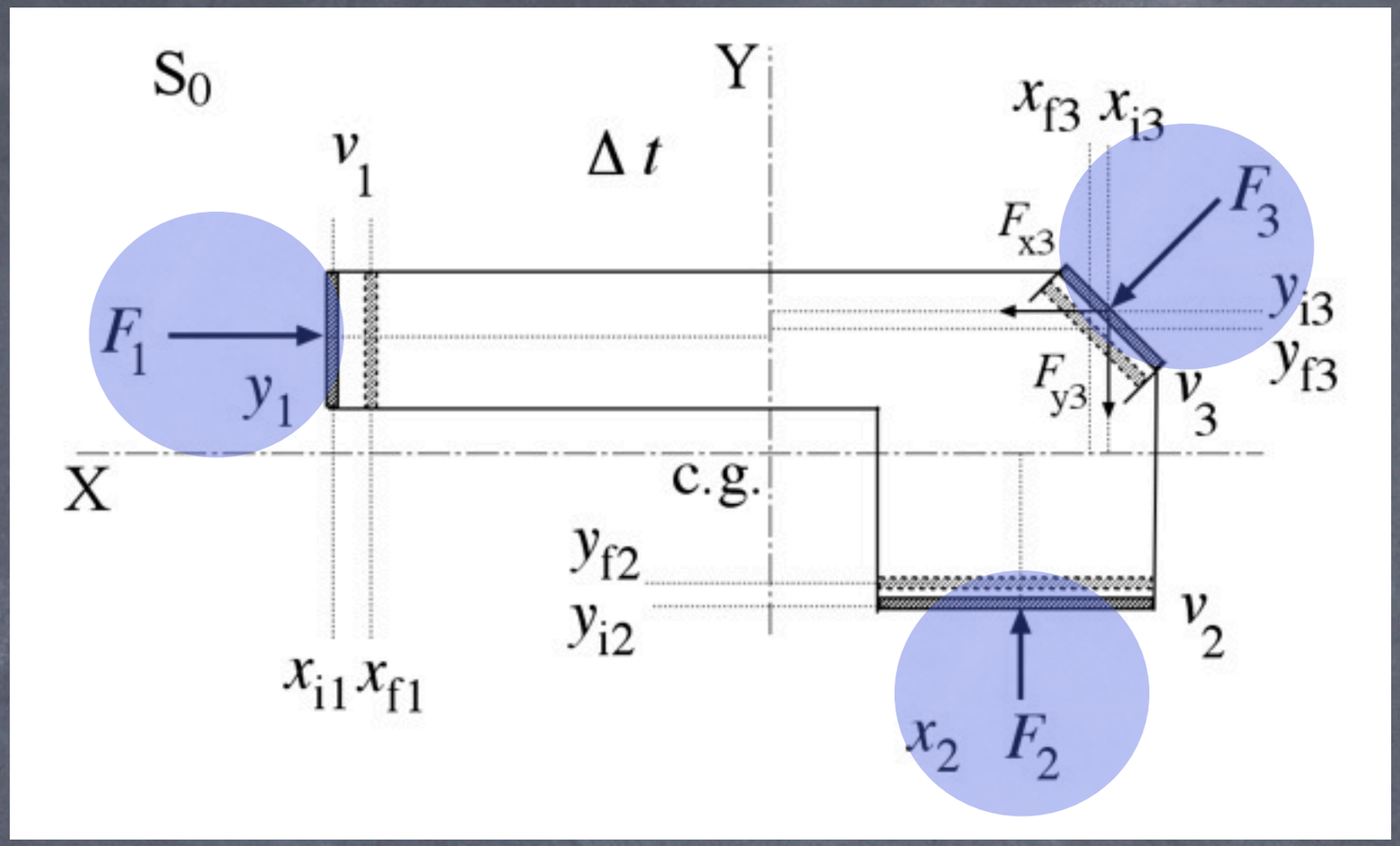
Cuadrivector impulso-trabajo

$$\{cF_{x\mathrm{A}}\Delta t_{\mathrm{A}}, cF_{y\mathrm{A}}\Delta t_{\mathrm{A}}, cF_{z\mathrm{A}}\Delta t_{\mathrm{A}}, F_{x\mathrm{A}}\Delta x_{\mathrm{A}} + F_{y\mathrm{A}}\Delta y_{\mathrm{A}} + F_{z\mathrm{A}}\Delta z_{\mathrm{A}}$$

Cuadrivector vector de ondas para un fotón

$$\left\{c\frac{h\nu_{\mathrm{A}}}{c}\cos\theta_{\mathrm{A}}, c\frac{h\nu_{\mathrm{A}}}{c}\mathrm{sen}\theta_{\mathrm{A}}, 0, h\nu_{\mathrm{A}}\right\}$$

Sistemas deformables



Lo que se pretende es encontrar leyes, entre 4-vectores, que siendo covariantes bajo Transformaciones de Lorentz, contengan toda la información física sobre las variaciones de un sistema extenso sometido a diversas fuerzas.

En particular, deben obtenerse los 4-vectores energía interna, calor y trabajo, para, a partir de ellos obtener una forma conjunta de la Segunda Ley de Newton y del Primer Principio de la Termodinámica que sea covariante Lorentz

El 4-vector Función Energía.

El estado del sistema va a venir caracterizado por otro 4-vector, el 4-vector Función Energía. El 4-vector Función Energía sólo estará bien definido cuando el sistema se encuentre en equilibrio termodinámico, es decir, cuando tenga sentido caracterizar el sistema como un todo.

El objetivo final es conseguir que un sistema formado por muchas partículas, interaccionantes o no, pueda ser descrito en cada estado mediante un único parámetro, equivalente a la masa de una partícula elemental.

El 4-vector Función Energía. Partícula elemental.

Para una partícula elemental --protón, neutrón, electrón-, su función energía es igual a su masa tabulada multiplicada por la velocidad de la luz al cuadrado

$$U_{\mathrm{p}} = m_{\mathrm{p}} c^2$$

$$U_{\mathrm{n}} = m_{\mathrm{n}} c^2$$

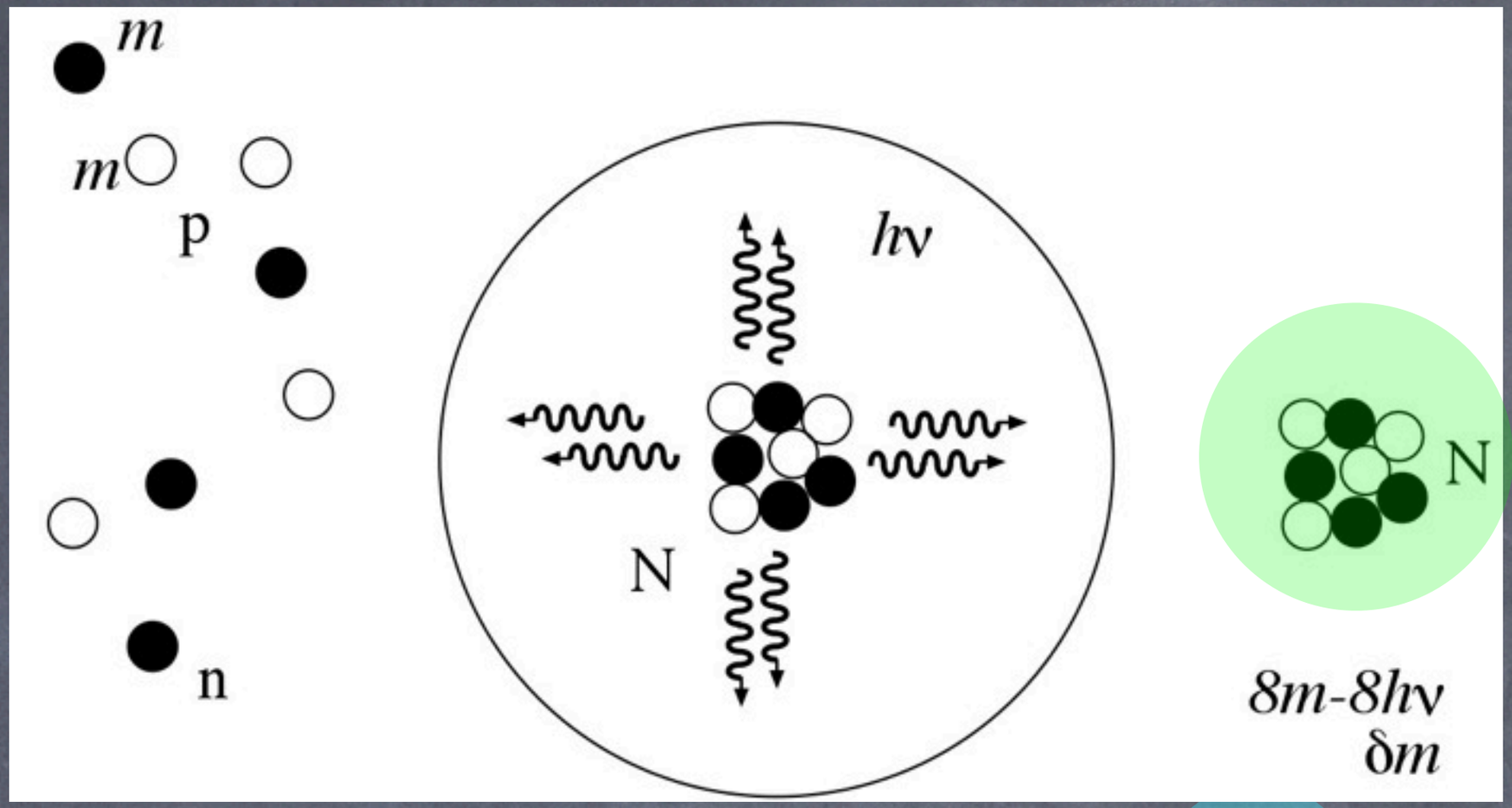
$$U_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{e}} c^2$$

Se define la inercia del sistema como su función energía dividida por c al cuadrado.

$$\mathcal{M} = \frac{U}{c^2}$$

Para una partícula elemental aislada, su inercia coincide con su masa tabulada.

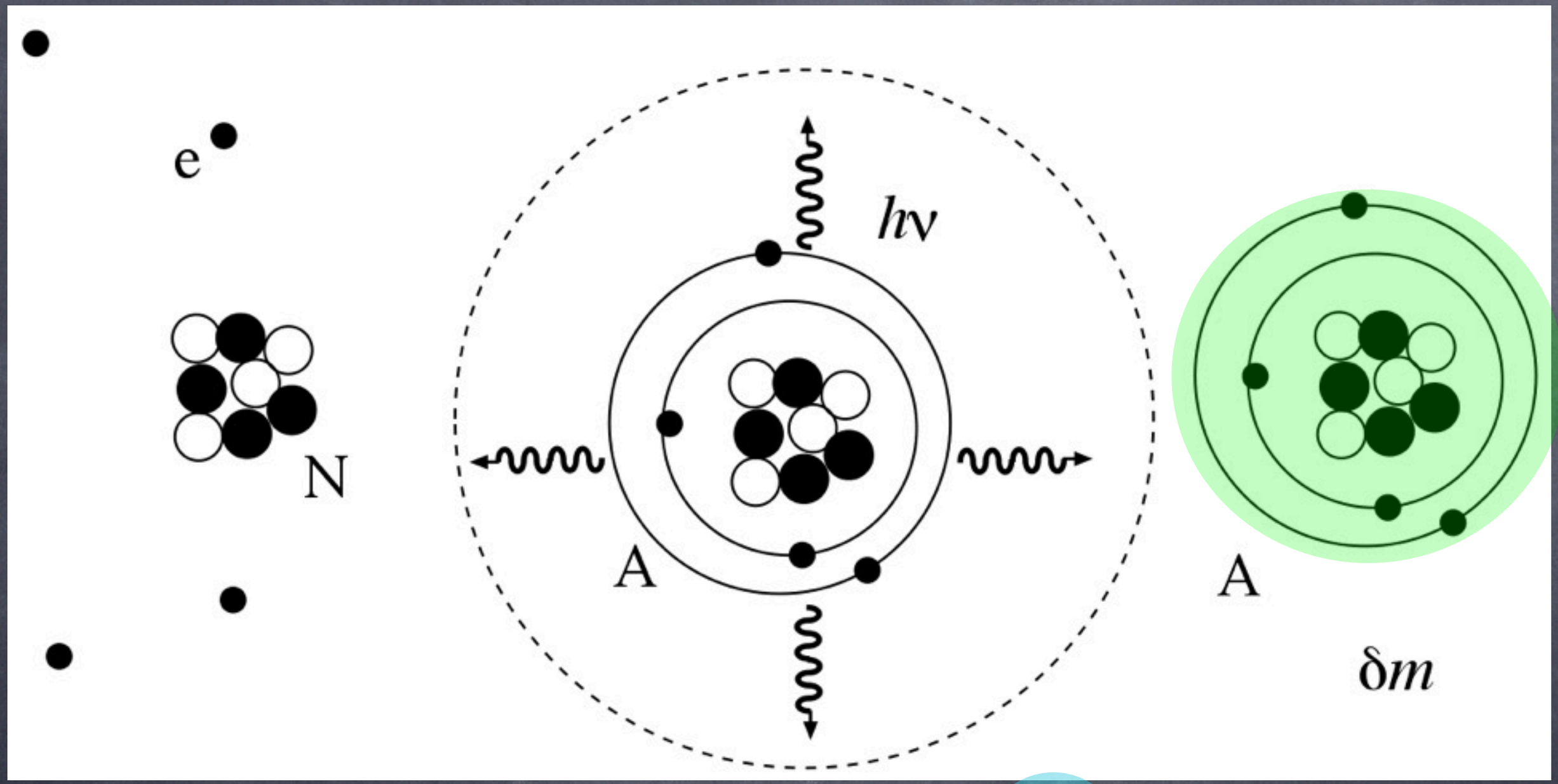
El 4-vector Función Energía. Núcleo atómico



$$U_{\mathrm{N}} = Zm_{\mathrm{p}}c^2 + (A - Z)m_{\mathrm{n}}c^2 - |U_\delta|$$

La inercia del núcleo no coincide con la suma de las masas tabuladas de sus partículas elementales constituyentes. La norma del 4-vector función energía del núcleo no es igual a la suma de las normas de las funciones energía de protones y neutrones. La operación de ensamblado del núcleo no es una simple suma.

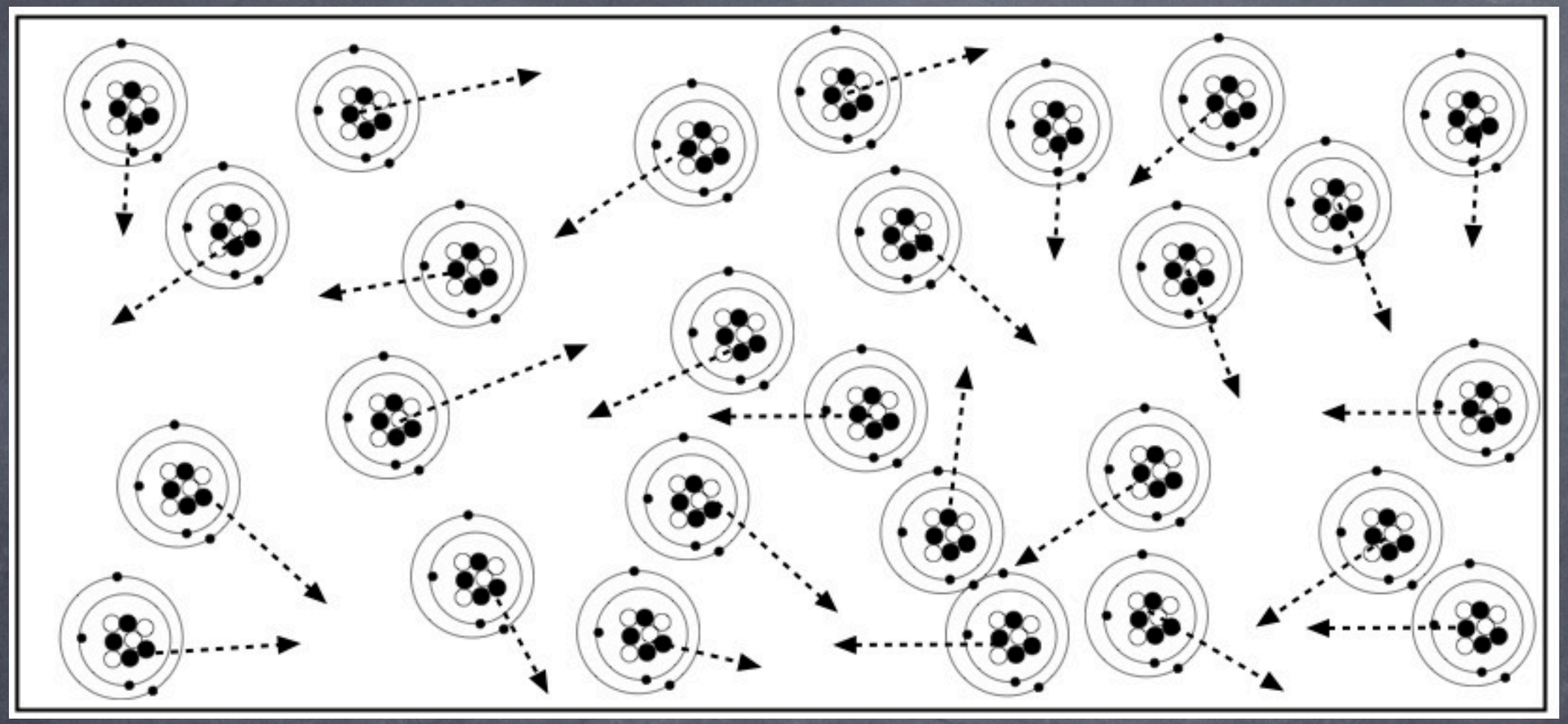
El 4-vector Función Energía. Átomo



$$U_{\mathrm{A}} = U_{\mathrm{N}} + n_p m_{\mathrm{e}} c^2 - \left|\tilde{U}_{\mathrm{A}}\right|$$

La inercia del átomo no coincide con la suma de las masas tabuladas de sus partículas elementales constituyentes, es menor que dicha suma.

Conjunto de Átomos sin interacciones



En S_0 el sistema como un todo se encuentra en reposo.

El 4-vector Función Energía. Gas de He

El 4-vector Función Energía. Conjunto de Átomos sin interacciones

Para un conjunto de átomos que interaccionan poco, por ejemplo, un gas, su función energía es igual a su suma de las funciones energía de sus átomos componentes más sus correspondientes energía cinéticas, medidas estas en un referencial en el que el sistema como un todo permanezca en reposo

Para un átomo en reposo de He

$$u = u_0 - (|\tilde{u}_{\mathrm{N}}| + |\tilde{u}_{\mathrm{A}}|) \ ,$$

$$u_0 = 2(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}})c^2 + 2m_{\mathrm{n}}c^2 \ ,$$

El 4-vector Función Energía. Gas de He

A cierta temperatura del gas, cada átomo se mueve con una cierta velocidad (distribución de velocidades)

Para un átomo de He

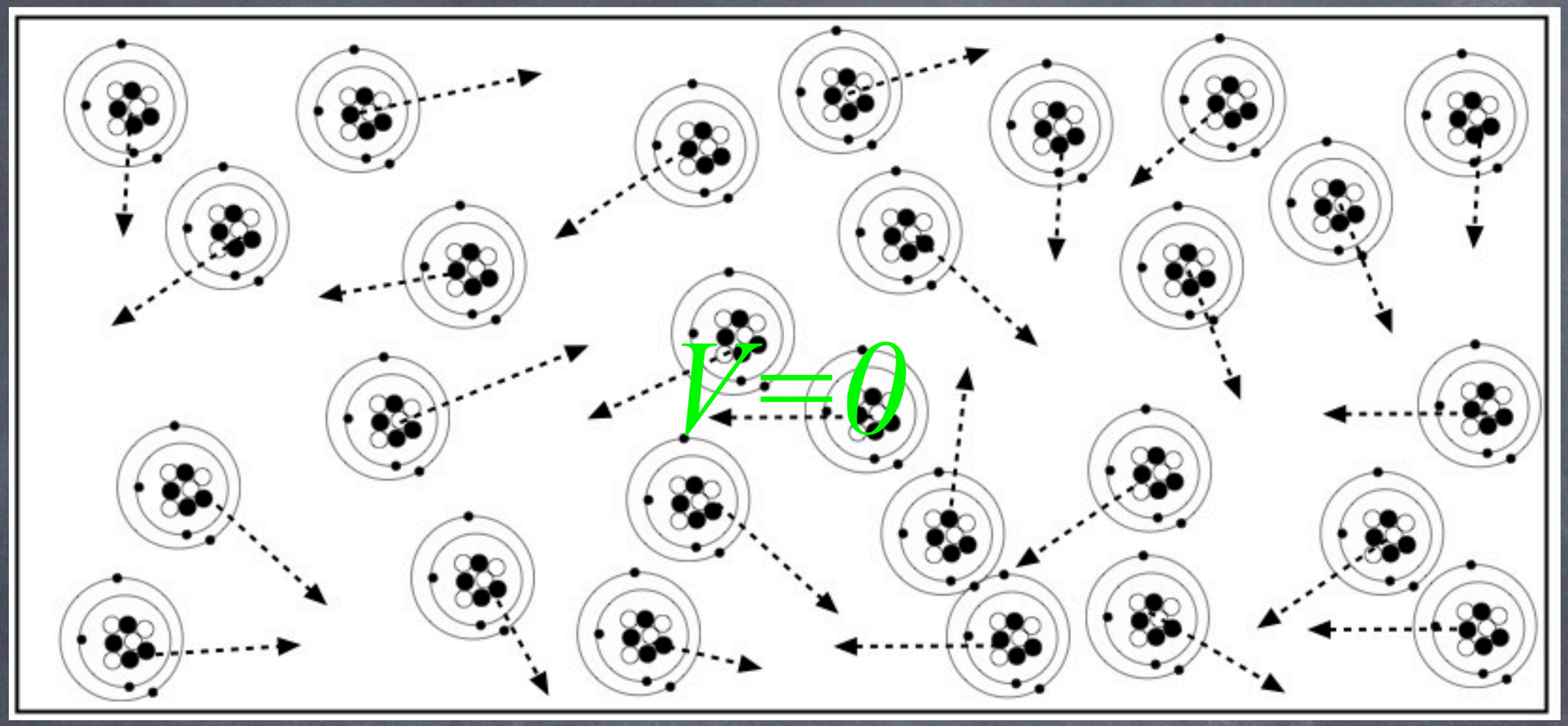
$$
\begin{aligned}
p_{xk} &= \gamma(v)\mathcal{M}v_x\,, \\
p_{yk} &= \gamma(v)\mathcal{M}v_y\,, \\
E_k &= \gamma(v)u\,, \\
\mathcal{M} &= uc^{-2}
\end{aligned}
$$

El 4-vector Función Energía. Gas de He

Para el conjunto de átomos de He, la función energía se obtiene en un referencial en el que sistema permanece en reposo:

$$
\begin{aligned}
p_{xi} &= \sum_k p_{xk} = \sum_k \gamma(v)\mathcal{M}v_{xk} = 0\,, \\
p_{yi} &= \sum_k p_{yk} = \sum_k \gamma(v)\mathcal{M}v_{yk} = 0\,, \\
U_i &= \sum_k \gamma(v)u_k = N_{\mathrm{A}}\gamma(v)u\,.
\end{aligned}
$$

El 4-vector Función Energía. Gas de He

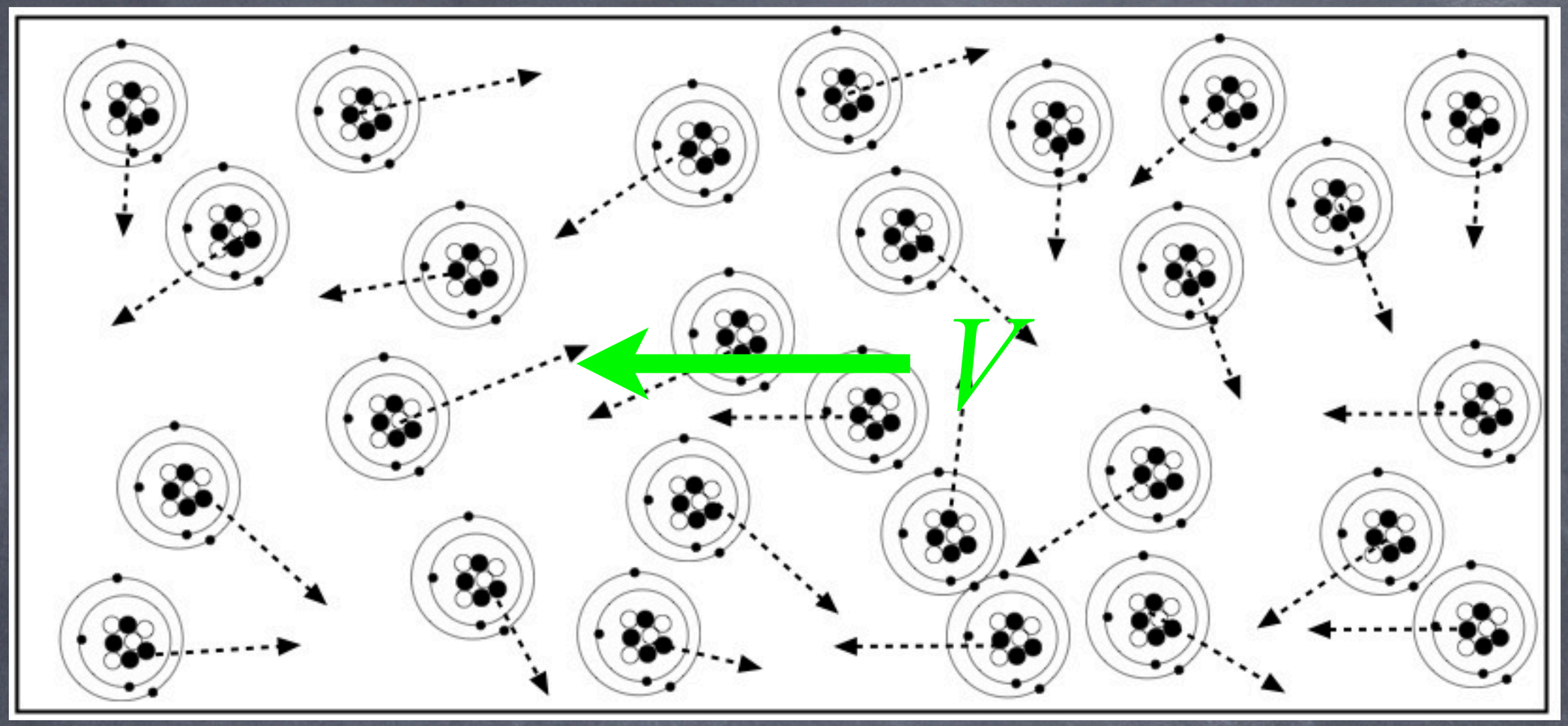


Para el conjunto de átomos de He, la función energía se obtiene en un referencial en el que sistema permanece en reposo:

$$U_i^\mu = \{0, 0, 0, U(T_i)\}$$

$$U(T_i) = \gamma(v) N_{\mathrm{A}} u$$

¿Cómo se ve desde el referencial S_A?



La caja tiene momento lineal, además de función energía.

El 4-vector Función Energía. Conjunto de Átomos

$$U^\mu = \{0, 0, 0, U(T)\}$$

¿Cómo se ve desde el referencial SA?

$$U^\mu_{\mathrm{A}} = \mathcal{L}^\mu_\nu(V) U^\nu$$

$$\begin{pmatrix} cp_{\mathrm{A}} \\ 0 \\ 0 \\ E_{\mathrm{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T) \end{pmatrix}$$

$$p_{\mathrm{A}} = -\gamma(V) \left[\frac{U(T)}{c^2}\right] V$$

$$E_{\mathrm{A}} = \gamma(V) U(T)$$

$$U^\mu_{\mathrm{A}} = \left\{ -c\gamma(V) \left[\frac{U(T)}{c^2}\right] V, 0, 0, \gamma(V) U(T) \right\}$$

Fotón

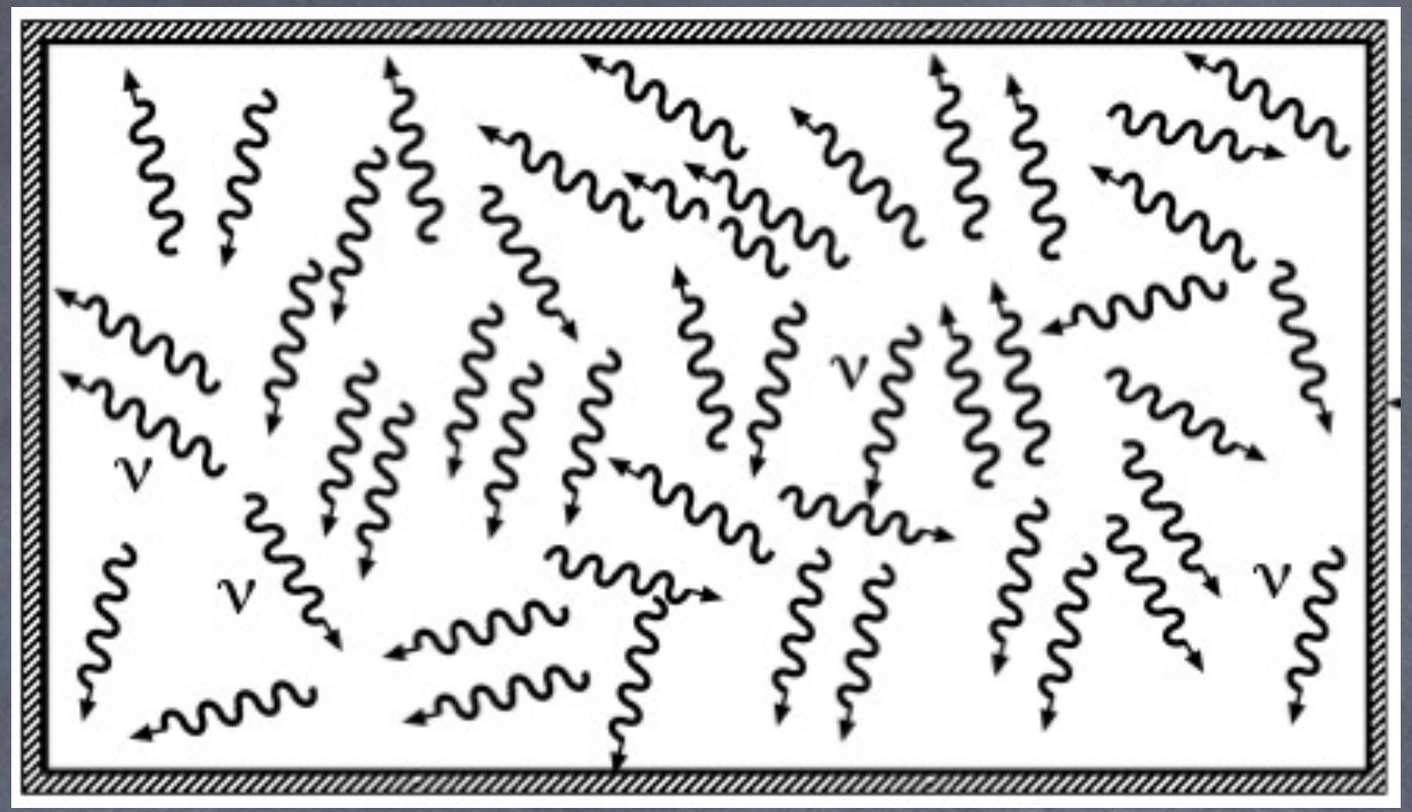
Para un fotón de frecuencia que se emite con dirección que forma un ángulo respecto del eje *x*,

$$\vec{k} = (\cos\theta\vec{i}, \operatorname{sen}\theta\vec{j})$$

$$u^{\mu}_{\mathrm{p}} = \left\{ c\left[\frac{h\nu}{c}\right]\cos\theta, c\left[\frac{h\nu}{c}\right]\operatorname{sen}\theta, 0, h\nu \right\}$$

$$||u^{\mu}_{\mathrm{p}}|| = \left[(h\nu)^2 - c^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)(\frac{h\nu}{c})^2\right]^{1/2} = 0$$

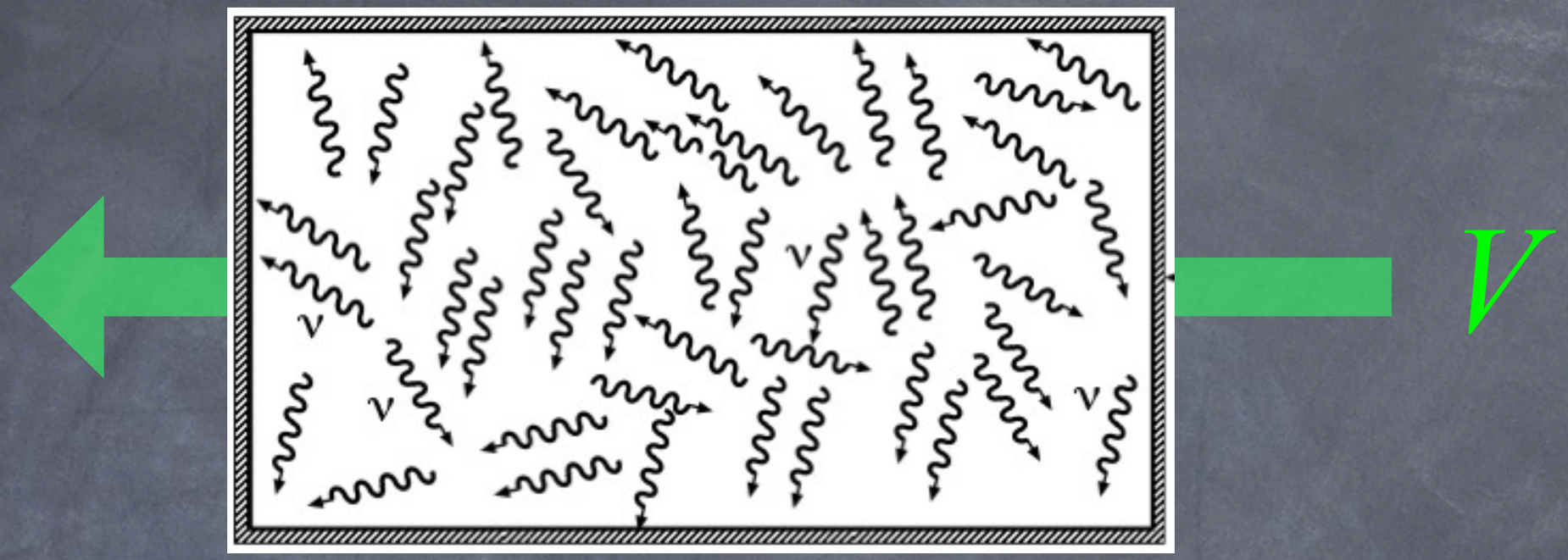
Conjunto de fotones



$$p_{\mathrm{p}} = \sum_j \frac{h\nu}{c}\vec{v}_j = 0\,,$$

$$E_{\mathrm{p}} = Nh\nu(T)\,,$$

Calor. Conjunto de fotones



$$U^{\mu}_{\mathrm{p}} = \{0, 0, 0, Nh\nu\}$$

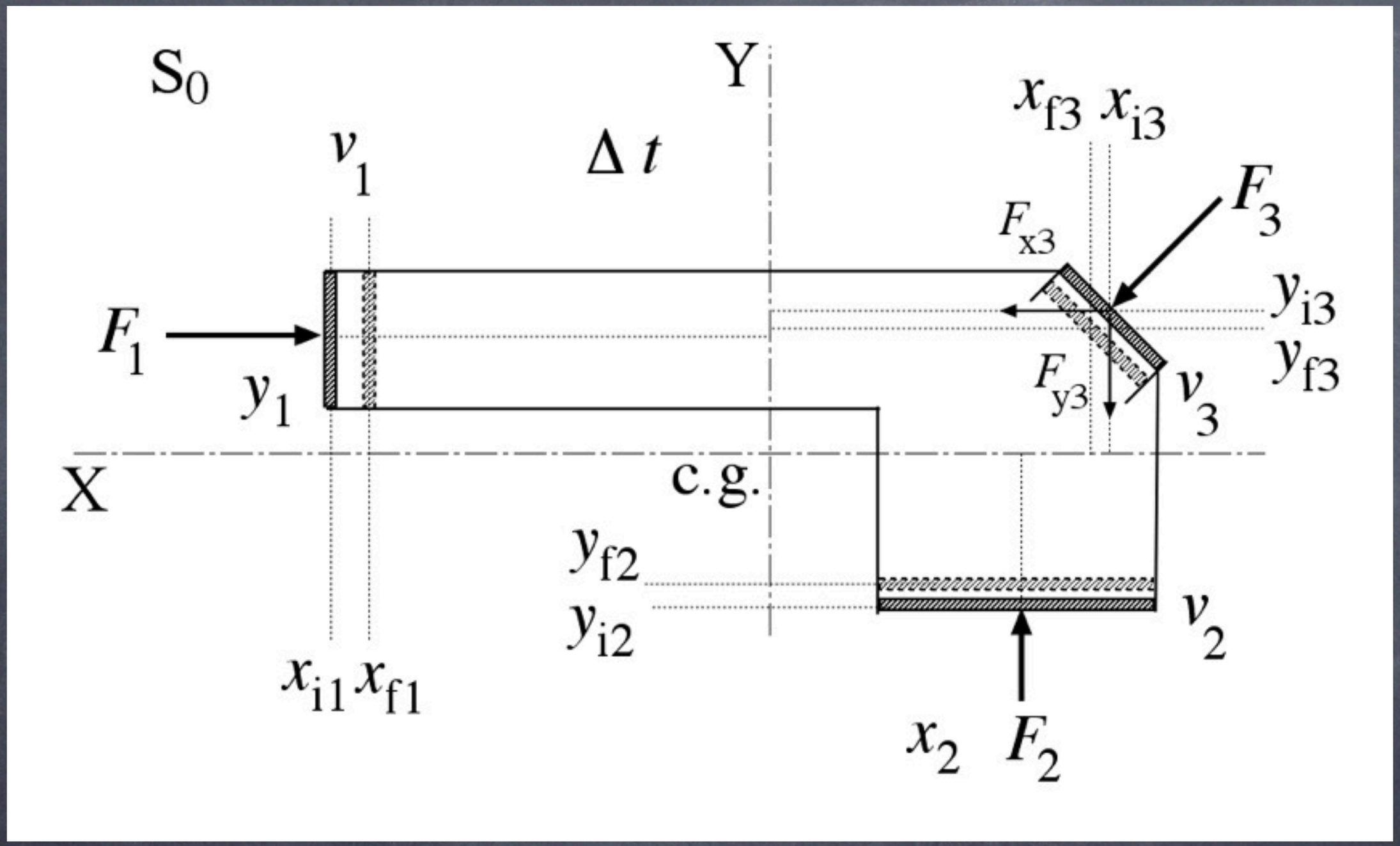
$$U_{\mathrm{pA}} = \mathcal{L}^{\mu}_{\nu}(V) U^{\mu}_{\mathrm{p}}$$

$$U^{\mu}_{\mathrm{pA}} = \left\{ -c\gamma(V) \left[\frac{Nh\nu}{c^2} \right] V, 0, 0, \gamma(V) \left[Nh\nu \right] \right\}$$

$$\mathcal{M}_{\mathrm{p}} = U_{\mathrm{p}} c^{-2}$$

Inercia del Conjunto de Fotones en S_A

Trabajo. Sistemas deformables



Hay que relacionar fuerzas y desplazamientos con un 4-vector trabajo.

4-vector desplazamiento

A cada evento se le asocia un 4-vector, y el intervalo entre dos eventos es también un 4-vector, el 4-vector desplazamiento

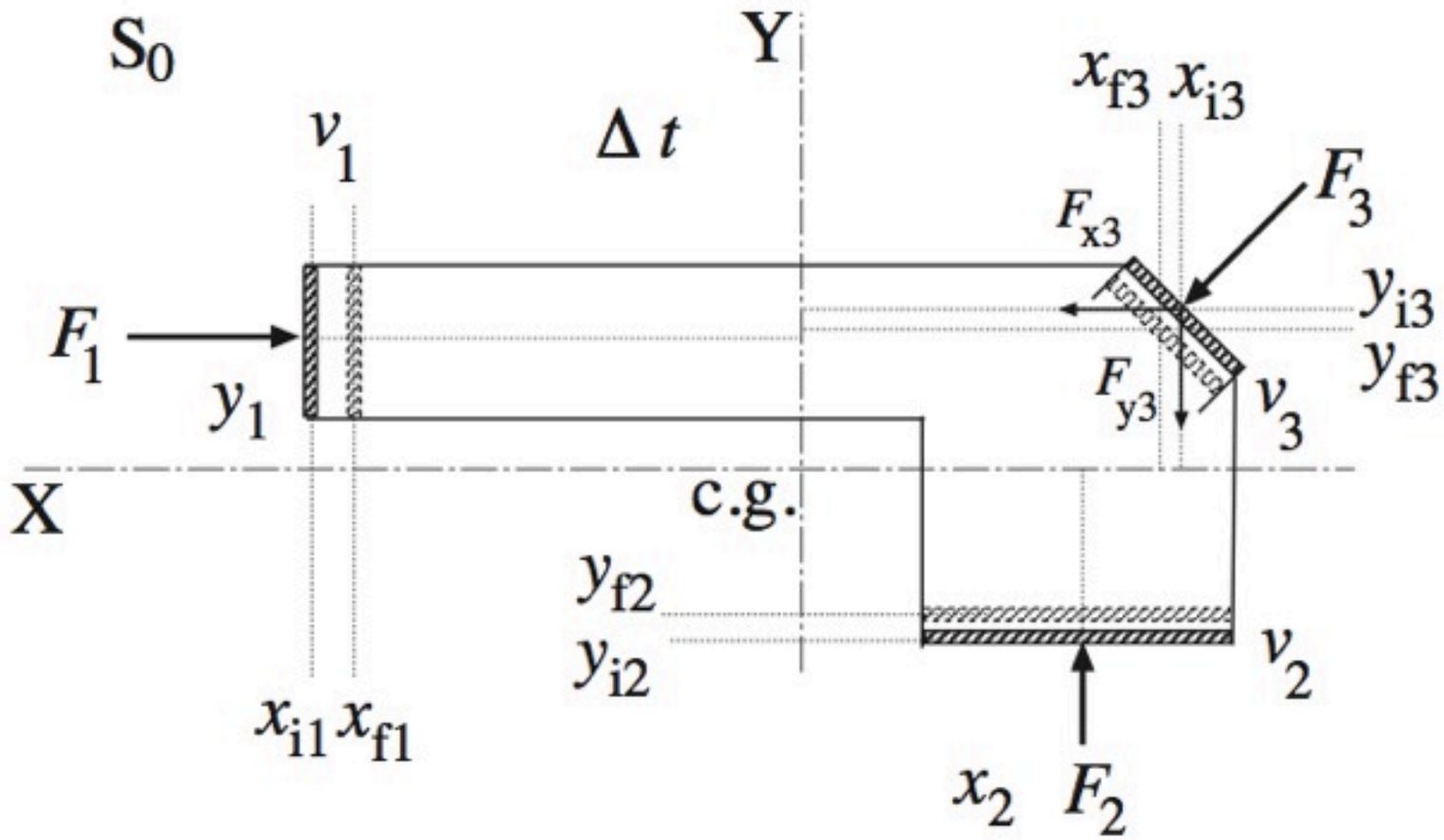
$$\Delta X^\mu = X^\mu_f - X^\mu_i = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t\}$$

En otro referencial

$$\Delta X^\mu_{\mathrm{A}} = X^\mu_{f\,\mathrm{A}} - X^\mu_{i\mathrm{A}} = \{\Delta x_{\mathrm{A}}, \Delta y_{\mathrm{A}}, \Delta z_{\mathrm{A}}, c\Delta t_{\mathrm{A}}\}$$

$$||A^\mu_{\mathrm{A}}|| = ||A^\mu||$$

Condición de la Formulación Asíncrona



Sistema extenso y deformable sobre el que se aplican simultáneamente diversas fuerzas F_j durante un intervalo de tiempo Δt. Cada fuerza lleva asociado un desplazamiento Δx_j y una velocidad de aplicación $v_j = \Delta x_j / \Delta t$.

Para un sistema extenso y deformable, con varios émbolos desplazados bajo la acción de diversas fuerzas, las fuerzas deben aplicarse de tal manera que el centro de gravedad del sistema, considerado como un todo, no se mueva. Esta condición permite que tenga sentido físico hablar del tiempo propio del referencial en el que se describen los procesos. Esta condición se aplica siempre, implícitamente, en Termodinámica.

4-vector Trabajo

A cada vector tridimensional fuerza,

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

que se aplica sobre un émbolo que tiene un cierto 4-vector desplazamiento, se le asocia un 4-vector trabajo

$$W_k^\mu = \{cF_{xk}\Delta t, cF_{yk}\Delta t, cF_k z\Delta t, F_{xk}\Delta x_k + F_{yk}\Delta y_k + F_{zk}\Delta z_k\}$$

1 $W_k^\mu = \{cF_{xk}\Delta t, cF_{yk}\Delta t, cF_k z\Delta t, F_{xk}\Delta x_k + F_{yk}\Delta y_k + F_{zk}\Delta z_k\}$

2 $W_k^\mu = \{cF_{xk}\Delta t, cF_{yk}\Delta t, cF_k z\Delta t, F_{xk}\Delta x_k + F_{yk}\Delta y_k + F_{zk}\Delta z_k\}$

3 $W_k^\mu = \{cF_{xk}\Delta t, cF_{yk}\Delta t, cF_k z\Delta t, F_{xk}\Delta x_k + F_{yk}\Delta y_k + F_{zk}\Delta z_k\}$

4-vector Trabajo

$$W_k^\mu = \{cF_{xk}\Delta t, cF_{yk}\Delta t, cF_k z\Delta t, F_{xk}\Delta x_k + F_{yk}\Delta y_k + F_{zk}\Delta z_k\}$$

Sumando sobre las k fuerzas aplicadas

$$W^\mu = \{0, 0, 0, W\}$$

$$W_{\mathrm{A}}^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu W^\mu$$

Para el observador en S_A

$$W_{\mathrm{A}}^\mu = \left\{ -c\gamma(V)\left[\frac{W}{c^2}\right] V, 0, 0, \gamma(V)W \right\}$$

Primer Principio de la Termodinámica Relativista

Por similitud con el Primer Principio de la Termodinámica Generalizado, se eleva a la categoría de principio que la variación de la Función Energía se relaciona con el Trabajo de las fuerzas y con el calor como:

$$\Delta U^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}$$

$$U_f^{\mu} - U_i^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}$$

Covariante Lorentz. En S_A

$$U_{f\mathrm{A}}^{\mu} - U_{i\mathrm{A}}^{\mu} = W_{\mathrm{A}}^{\mu} + Q_{\mathrm{A}}^{\mu}$$

Principio de Inercia de la Energía

Todas las formas de energía llevan asociada inercia (que no se manifiesta hasta que se intenta acelerar el sistema)

$$
\begin{aligned}
U^{\mu} &= \{0,0,0,U(T)\} \\
U^{\mu}_{\mathrm{A}} &= \{-c\gamma(V)\mathcal{M}(T)V,0,0,\gamma(V)U(T)\} \\
||U^{\mu}_{\mathrm{A}}|| &= U(T) \\
\mathcal{M}(T) &= U(T)c^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W^{\mu} &= \{0,0,0,W\} \\
W^{\mu}_{\mathrm{A}} &= \{-c\gamma(V)\mathcal{M}(T)V,0,0,\gamma(V)W\} \\
||W^{\mu}_{\mathrm{A}}|| &= W \\
\mathcal{M} &= Wc^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q^{\mu} &= \{0,0,0,Q\} \\
Q^{\mu}_{\mathrm{pA}} &= \{-c\gamma(V)\mathcal{M}_{\mathrm{p}}V,0,0,\gamma(V)Q\} \\
\left|\left|Q^{\mu}_{\mathrm{pA}}\right|\right| &= Nh\nu(T) \\
\mathcal{M}_{\mathrm{p}} &= Qc^{-2}
\end{aligned}
$$

Segunda Ley de Newton y Primer Principio

$$\left\{\begin{aligned} \sum_i F_{xj} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[MV_x\right] \\ \sum_i F_{yj} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[MV_y\right] \\ \sum_i F_{zj} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[MV_z\right] \end{aligned}\right.$$

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} = \left(\sum_k \mathbf{F}_k\right) \cdot \Delta \mathbf{x}_{\mathrm{cm}}$$

$$\left\{ W_{\mathrm{ext}} + Q = \Delta K_{\mathrm{cm}} + \Delta U \right.$$

Primer Principio Relativista

$$c\sum_k F_{xk} = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\gamma(V)\mathcal{M}(T)V_x\right]$$

$$c\sum_k F_{yk} = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\gamma(V)\mathcal{M}(T)V_y\right]$$

$$c\sum_k F_{zk} = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\gamma(V)\mathcal{M}(T)V_z\right]$$

$$\sum_k \left[F_{xk}v_{xk} + F_{yk}v_{yk} + F_{zk}v_{zk}\right]\mathrm{d}t + Nh\nu = \mathrm{d}\left[\gamma(V)U(T)\right],$$

$$M = Uc^{-2}$$

Inercia de la Energía

Einstein on mass and energy

Eugene Hecht[a)]
Department of Physics, Adelphi University, Garden City, New York 11530

(Received 30 September 2008; accepted 9 June 2009)

This paper explores the evolution of Einstein's understanding of mass and energy. Early on, Einstein embraced the idea of a speed-dependent mass but changed his mind in 1906 and thereafter carefully avoided that notion entirely. He shunned, and explicitly rejected, what later came to be known as "relativistic mass." Nonetheless many textbooks and articles credit him with the relation $E=mc^2$, where E is the total energy, m is the relativistic mass, and c is the vacuum speed of light. Einstein never derived this relation, at least not with that understanding of the meaning of its terms. He consistently related the "rest energy" of a system to its invariant inertial mass. © *2009 American Association of Physics Teachers.*

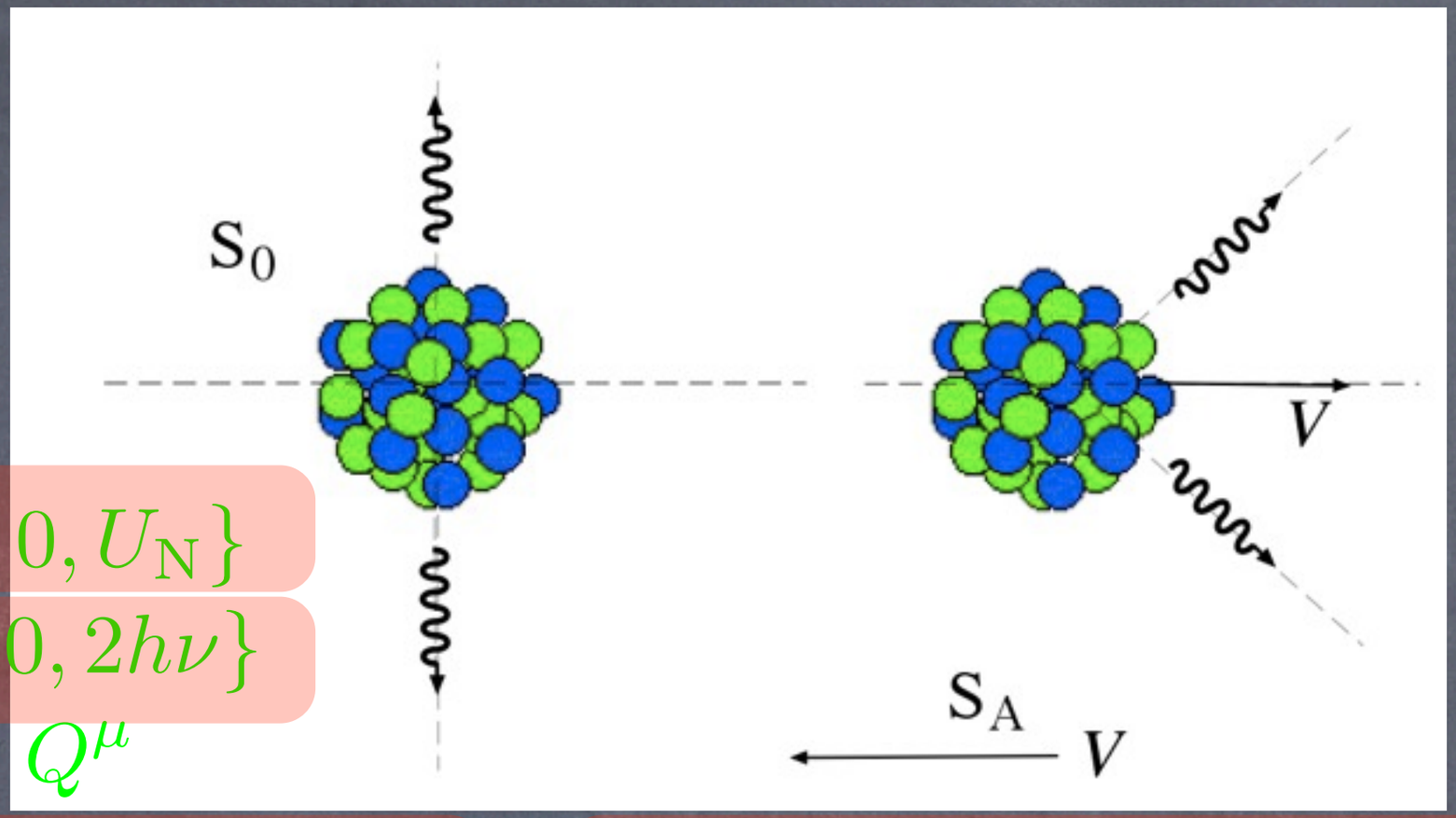
[DOI: 10.1119/1.3160671]

American Journal of Physics 2009

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

Interpretación original de Einstein

Emisión de fotones



$$U_i^\mu = \{0, 0, 0, U_\mathrm{N}\}$$

$$Q^\mu = \{0, 0, 0, 2h\nu\}$$

$$U_f^\mu - U_i^\mu = Q^\mu$$

$$U_f^\mu = \{0, 0, 0, U_\mathrm{N} - 2h\nu\}$$

$$U_{i\mathrm{A}}^\mu = \left\{c\gamma(V)\frac{U_\mathrm{N}}{c^2}V, 0, 0, \gamma(V)U_\mathrm{N}\right\}$$

$$Q_\mathrm{A}^\mu = \left\{-c\gamma(V)\frac{2h\nu}{c^2}V, 0, 0, \gamma(V)\,(2h\nu)\right\}$$

$$U_{f\mathrm{A}}^\mu - U_{i\mathrm{A}}^\mu = Q_\mathrm{A}^\mu$$

$$U_{f\mathrm{A}}^\mu = \left\{c\gamma(V)\frac{(U_\mathrm{N} - 2h\nu)}{c^2}V, 0, 0, \gamma(V)\,(U_\mathrm{N} - 2h\nu)\right\}$$

Las matemáticas y el mundo físico

The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences
by Eugene Wigner[1]

"Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty, a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry."

Bertrand Russell, *Study of Mathematics*

La sorprendente eficacia de las Matemáticas en la Ciencias Naturales.

Inercia de la Energía.
Evidencias experimentales

El Níquel-59 (Ni), con 28 protones y 31 neutrones tiene un peso atómico de 58,70 uma.
El protón tiene una masa de 1,0073 uma y el neutrón una masa de 1,0087 uma. Al Ni-59 le correspondería una inercia de 59,47 por la suma de las masas de protones y neutrones. El Ni-59 tiene una inercia 1,3% menor que la suma de las masas de sus partículas componentes.

Al formarse el núcleo de Ni-59 la energía liberada contribuye, negativamente, a la inercia del sistema.

Las matemáticas y el mundo físico

$$\mathcal{M} = Uc^{-2}$$

La interpretación físico-matemática de la ecuación de Einstein

$$E = mc^2$$

¡Gracias por su atención!