MATEMÁTICAS EN UNA BARAJA DE CARTAS

Juegos de magia con cartas basados en principios matemáticos.

PEDRO ALEGRÍA

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

¿HABLAMOS DE MEZCLAS?

Las mezclas son la única cosa que la Naturaleza no puede deshacer.

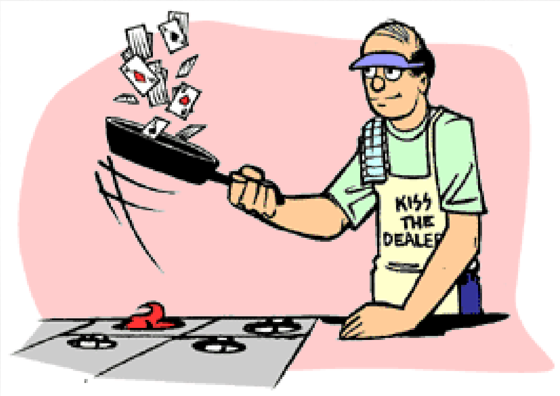
Sir Arthur Eddington

- Contacto de gases.
- Rotura de un vaso.

- Ley Universal de la Entropía: el desorden de un sistema tiende a aumentar.
- La mezcla de cartas es un paradigma espléndido de los hábitos unidireccionales de la Naturaleza.
- Una mezcla es una permutación del conjunto de las cartas de la baraja.

Probabilidad de que los colores se separen:

$$\frac{(26!)^2}{52!} = 2,02 \cdot 10^{-15}$$



¿CUÁNTAS MEZCLAS DESORDENAN UNA BARAJA?

Modelo probabilista de Gilbert, Shannon y Reeds.

- La mezcla es función de densidad de una variable aleatoria.
- Mezclas sucesivas corresponden a la convolución de cada mezcla por separado.

$$f * f(P) = \sum_{P_1 \circ P_2 = P} f(P_1) f(P_2).$$

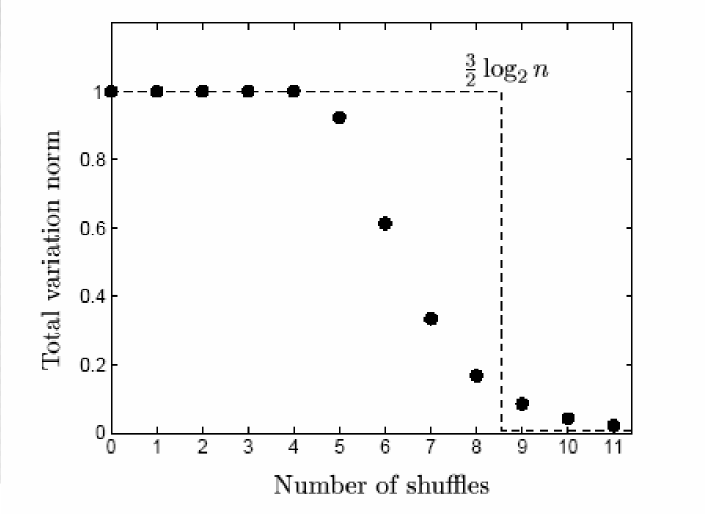
La mezcla consta de un corte (distribución binomial)

$$P(X = k) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

y la mezcla en sí (distribución uniforme).

Probabilidad conjunta: $$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^n}$$

¿CUÁNTAS MEZCLAS SON NECESARIAS?



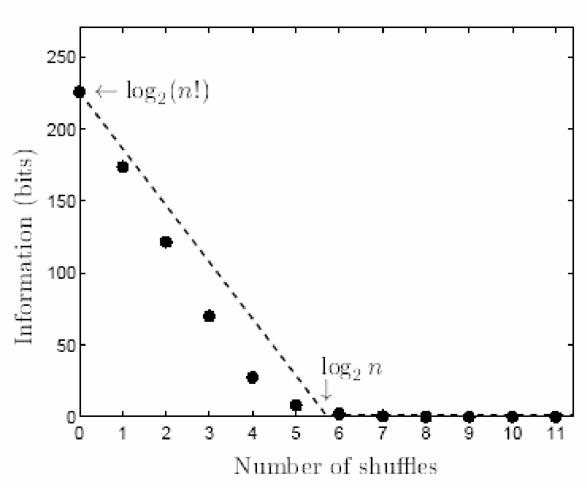
Aldous, Diaconis:

Definen la distancia entre dos distribuciones de probabilidad

$$\|f_1 - f_2\| = \frac{1}{2} \sum_{P \in S_n} |f_1(P) - f_2(P)|$$

- Se calcula a partir del número de sucesiones crecientes en una permutación.
- La distancia a la distribución uniforme disminuye con el número de mezclas.
- A partir de siete mezclas la distancia es menor que 0,5.
- Para n cartas, bastan k = (3/2) $\log_2$ n mezclas.

¿CUÁNTAS MEZCLAS SON NECESARIAS?



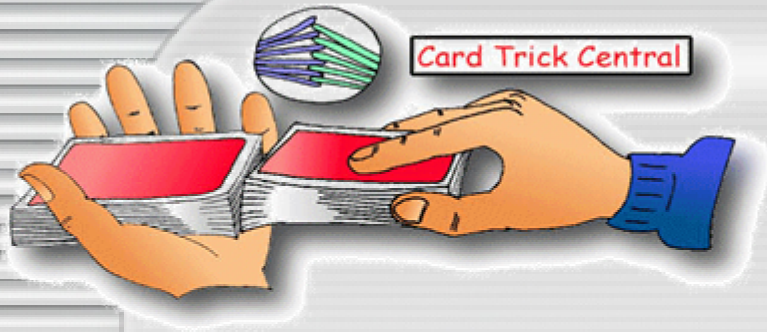
Modelo de Trefethen y Trefethen:

(aplicado en criptografía, camuflaje, mercados financieros, …)

- Consideran la baraja como paquete de información.
  - o Su valor mínimo es cero (no se conoce la distribución de ninguna carta).
  - o Su valor máximo es uno -225 bits- (se tiene información de todas las cartas).
- Concluyen que cinco mezclas son suficientes (sólo queda el 3.5% de información).

Las mezclas perfectas permiten eliminar la aleatoriedad del resultado.

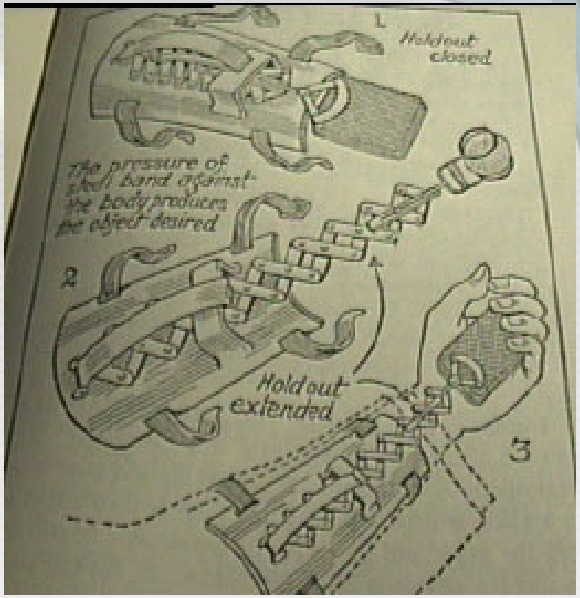
MEZCLA FARO



- Dividir el paquete en dos montones exactamente iguales.
- Mezclar las cartas alternando exactamente una de cada montón.

- Faro-in: la carta superior pasa al segundo lugar y la inferior al penúltimo.
- Faro-out: las cartas superior e inferior mantienen sus posiciones.
- Faro-impar: en una baraja impar, las el paquete menor se introduce en el mayor.
- Antifaro: operación inversa.

ORIGEN DE LA MEZCLA FARO



Juego de cartas americano llamado faro.
En la corte de Luis XIV llamado faraón.

Manifestaciones escritas:

(1726) *" Whole Art and Mystery of Modern Gaming"*

(1843) *"An Exposure of the Arts and Miseries of Gambling"*, J.H.Green (póquer)

(1894) *"Sharps and Flats"*, J.N.Maskelyne (trampas en el juego)

(1919) *"Thirty Card Mysteries"*, C. Jordan (juegos de magia)

(1957) *"Ibidem"*, Alex Elmsley (propiedades matemáticas)

¿DÓNDE ESTÁ CADA CARTA TRAS LA MEZCLA?

	Faro interior (I)	Faro exterior (O)
(n par)	$I(k) = 2k \pmod{n+1}$	$O(k) = 2k-1 \pmod{n-1}$
(n impar)	$I(k) = 2k \pmod{n}$	$O(k) = 2k-1 \pmod{n}$

Ejemplo

Orden inicial S	1	2	3	4	5	6	7	8
In-faro I(S)	5	1	6	2	7	3	8	4
Out-faro O(S)	1	5	2	6	3	7	4	8
$(S-1)_2$	000	001	010	011	100	101	110	111
$O(S-1)_2$	000	100	001	101	010	110	011	111

¿PUEDE VOLVER LA BARAJA A SU POSICIÓN INICIAL?

Conway, Guy (1996)

- Faro-in:

$$2^x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n+1)$$

- Faro-out:

$$2^x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n-1)$$

- Faro-impar:

$$2^x \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$$

Si m_i mezclas vuelven la carta i a su posición inicial, la baraja vuelve a su posición inicial después de $m = \mathrm{mcm}(m_1, \ldots, m_n)$ mezclas.

Propiedades

- Si n es impar, es equivalente la sucesión de faros-in que la de faros-out.
- Con 2n – 1 cartas se consigue el mismo efecto que con 2n cartas y faros-out.
- Con 2n cartas y faro-out, se consigue el mismo efecto que con 2n – 2 cartas y faro-in.
- Si 2n + 1 es primo, después de 2n faros se vuelve al inicio.
- Con 2^n cartas, se necesitan n faro-out para volver al inicio.
- Basta quitar (o añadir) una carta para disminuir drásticamente el número de permutaciones posibles de las cartas.

Nº cartas	Faro Out	Faro In
4	2	4
5	4	4
6	4	3
7	3	3
8	3	6
9	6	6
10	6	10
...	...	...
39	12	12
40	12	20
41	20	20
42	20	14
...	...	...
51	8	8
52	8	52
53	52	52
54	52	20

PRINCIPIO DE SIMETRÍA DE LA BARAJA

Rusduck, The Cardiste (1957)

- Cartas que ocupan lugares equidistantes de los extremos vuelven a quedar equidistantes después de una mezcla faro.
- Con barajas impares (suponiendo que sigue ordenada si mantiene el orden cíclico), el resultado es el mismo si las mezclas faro (o antifaro) se intercalan con cortes arbitrarios de la baraja.

Ejemplo:

Posición inicial	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Faro-out	1 6 2 7 3 8 4 9 5 10
Faro-in	6 1 7 2 8 3 9 4 10 5

OTRAS PROPIEDADES

- Combinación de faros-in y faros-out para pasar la primera carta a cualquier posición.

n	$n - 1$	$(n - 1)_2$	Mezclas
23	22	10110	I-O-I-I-O
9	8	1000	I-O-O-O
42	41	101001	I-O-I-O-O-I

(Alex Elmsley, 1957)

Válido para barajas con cualquier número de cartas.

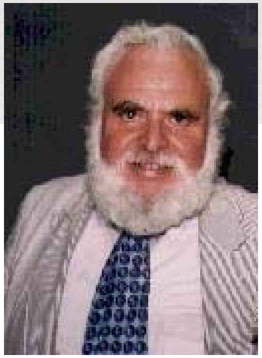
- Si n es par, la misma combinación de faros permite pasar la última carta a la posición $n - p + 1$.
- Existe una combinación más eficiente de faros-in y faros-out para colocar una carta en cualquier posición (Ramnath-Scully, 1996).

OTRAS PROPIEDADES

Solomon Golomb (1961)

- Con barajas pares, se puede conseguir cualquier permutación de la baraja combinando cortes y mezclas in-faro y out-faro.
- Una baraja impar sólo permite una mínima fracción del total de sus permutaciones:

Con n cartas se generan n · o(O,n) permutaciones.



EJEMPLO: Con 9 cartas hay 6 órdenes cíclicos:

1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 6 2 7 3 8 4 9 5
1 8 6 4 2 9 7 5 3
1 9 8 7 6 5 4 3 2
1 5 9 4 8 3 7 2 6
1 3 5 7 9 2 4 6 8

un total de 6·9=54 permutaciones, ínfima fracción de las 9! = 362880 permutaciones de 9 cartas.

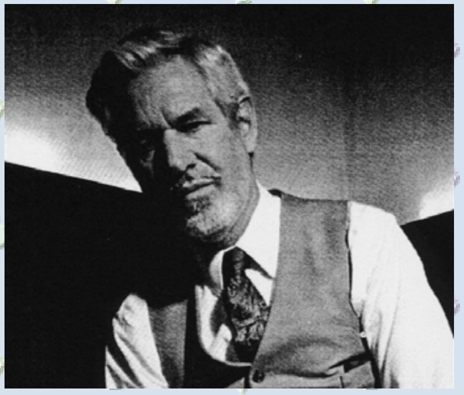
USOS DE LA MEZCLA FARO

- Matemáticas:
  - Teoría de procesamiento paralelo (Stone, Chen)
  - Matrices de permutaciones (Morris)
  - Diseño de memoria dinámica de ordenadores (Morris)
  - *Desplazamiento de la memoria para acceder a los datos*
  - Cadenas de Markov (Diaconis)
- Matemática recreativa: M. Gardner
  - Útil en juegos de apuestas
- Magia: A. Elmsley, Ed Marlo


EL PRINCIPIO DE GILBREATH

Norman Gilbreath, 1958

"Cuando se mezcla una serie repetida de cartas consigo misma, pero uno de los montones se coloca en orden inverso, el contenido de cada grupo en la serie no cambia, sólo cambia de orden."
Charles Hudson (1966)



1. Se mezcla por hojeo una baraja de 2n cartas con los colores alternados.
   Se corta (y se completa el corte) entre dos cartas del mismo color.
   Para cualquier i = 1, 2, ..., n, las cartas 2i – 1 y 2i son de distinto color.

EL PRINCIPIO DE GILBREATH

II. Se ordena una baraja por palos, manteniendo la misma secuencia. Se invierte el orden de la mitad de la baraja. Se mezclan ambos montones.

Al repartir manos de cuatro cartas, siempre aparecen los cuatro palos.

Si se mezclan dos barajas completas con sus cartas colocadas en orden inverso, al repartir dos montones iguales se obtienen dos barajas completas.

APLICACIÓN

Se separa la baraja en dos montones, rojas a la izquierda y negras a la derecha. Se toman n cartas del montón izquierdo y se mezclan con las del montón derecho. Se toman n cartas del montón derecho y se mezclan con las del montón izquierdo. Entonces el montón izquierdo tiene tantas cartas rojas como negras tiene el montón derecho.

EL PRINCIPIO DE HUMMER

Bob Hummer

Dada una cantidad par de cartas alternadas (ya sea por colores, por palos o por cualquier otro criterio), al girar dos cartas consecutivas y colocarlas nuevamente, el orden previo se ha alterado pero el cambio se manifiesta por el giro de las cartas. No importa cuántas veces se realiza la operación anterior: cada carta invertida representa una alteración del orden inicial.

Al invertir al final sólo las cartas que ocupan el lugar par, los dos grupos iniciales de cartas quedan en sentido contrario.

JUSTIFICACIÓN DEL JUEGO

Sea {A,B,X,D} el conjunto de las cuatro cartas (con atención a X)

Posibles operaciones:

"C" (cut) = A,B,X,D $\rightarrow \begin{cases} B,X,D,A \\ X,D,A,B \\ D,A,B,X \end{cases}$

"A" (and)

"TT" (turn two) = A,B,X,D → B,A,X,D

"O" (over) = A,B,X,D → D,X,B,A

EFECTO PRODUCIDO POR CADA OPERACIÓN

Posición	"C"	"TT"	"O"
A,B,X,D	B,X,D,A	X,B,D,A	A,D,B,X
	X,D,A,B	D,X,A,B	B,A,X,D
	D,A,B,X	A,D,B,X	X,B,D,A
	A,B,X,D	B,A,X,D	D,X,A,B

En todos los casos, la carta X queda entre las otras dos cartas de su mismo color, suponiendo el orden cíclico de las cartas.

Operación final:

A, B, X, D → A, B, X, D → B, A, X, D → X, A, B, D

EL PROBLEMA DE JOSEFO

Durante la rebelión judía contra Roma en el siglo I d.C., 40 judíos se encontraron acorralados en una cueva. Para evitar ser atrapados y convertirse en esclavos, prefirieron la muerte y decidieron formar un círculo, matándose entre ellos: el primero mataba al segundo y pasaba el arma al tercero, quien mataba al siguiente, y así sucesivamente, hasta que quedara uno solo, quien se suicidaría. Josefo rápidamente calculó el lugar que ocuparía el último superviviente, ocupó dicho lugar y escapó a la muerte.

Solución:

A. Con 2^n personas, se eliminan primero los que ocupan una posición par. Quedan 2^{n-1} personas y se repite el proceso. El número 1 es el superviviente.

B. Con $2^n + k$ personas, se eliminan las que ocupan las posiciones 2, 4, ..., 2k y quedan 2^n personas. El número 2k + 1 es el superviviente.

LA MEZCLA AUSTRALIANA

La primera carta se coloca debajo de la baraja.
La siguiente se elimina.
La siguiente se coloca debajo de la baraja.
La siguiente se elimina.
El proceso termina cuando sólo queda una carta.

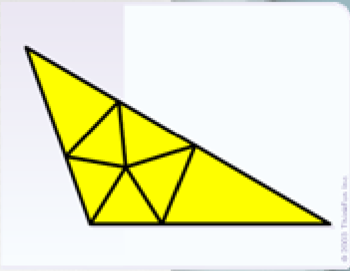
Mel Stover

Solución:

Con n cartas, la que queda al final es la que ocupa el lugar

$$2 \cdot (n - 2^k) + 1,$$

donde 2^k es la mayor potencia de 2 menor que n.



Explicación:

Si $n = 2^k + a \cdot 2^{k-1} + b \cdot 2^{k-2} + \ldots + c = 1ab\ldots c_{(2)}$,

el procedimiento anterior deja como última carta la del lugar

$$a \cdot 2^k + b \cdot 2^{k-1} + \ldots + c \cdot 2 + 1 = ab\ldots c1_{(2)}$$

EL PRINCIPIO DEL NÚMERO PRIMO

- Se tiene una baraja con un número primo p de cartas.
- Se elige una de ellas y se coloca encima.
- Se elige un número n menor que p y se realiza p-1 veces la siguiente operación:

  Pasar una a una n cartas de arriba abajo y se gira cara arriba la siguiente.
- Al final, la única carta cara abajo es la elegida.

George Sands (1975)

Explicación:

Ninguno de los valores n, 2n, 3n, ..., (p-1)n es múltiplo de p.

Generalización:

Si m y n son primos entre sí, con un paquete de m cartas se pasan n cartas de arriba abajo y se gira la siguiente. Al hacerlo m – 1 veces, la única carta cara abajo es la que estaba inicialmente arriba.

CONCLUSIÓN

- Una correcta notación matemática simplifica espectacularmente el planteamiento y resolución de problemas diversos.
- También permite entender las propiedades intrínsecas de dichos problemas.
- Incluso los casos particulares pueden extenderse fácilmente a situaciones generales con escasa complicación técnica.

La forma de hacer magia es muy parecida a la de hacer matemáticas. Inventar un truco e inventar un teorema son actividades muy similares en el siguiente sentido: en ambas actividades te enfrentas y tratas de resolver un problema sujeto a ciertas restricciones. Una diferencia entre la magia y las matemáticas es la competencia: la competencia en matemáticas es mucho más dura que en la magia.

Persi Diaconis