

# LA OPTIMIZACIÓN: MATEMÁTICAS PARA MEJORAR.

Cecilia Pola  
Dpto. Matemáticas, Estadística y Computación  
Universidad de Cantabria

Ciclo de talleres divulgativos  
**MATEMÁTICAS EN ACCIÓN 2009**  
Curso 2009-2010



**La optimización:  
matemáticas para mejorar**  
**Cecilia Pola Méndez**  
Dpto. MATESCO, UC

**Día: 28 de Abril de 2010.**  
**Hora: 18:00 -19:30**  
**Lugar: Salón de Actos de la**  
**Facultad de Ciencias**

**La optimización es una rama de las matemáticas bastante reciente: sus cimientos modernos se pusieron a mediados del siglo XX como respuesta a las demandas de varias aplicaciones. En este taller se tratará de dar un paseo por la optimización: haremos una breve introducción para pasar a considerar algunas de sus numerosas aplicaciones en diversos ámbitos de la vida (industria, economía, medicina,...).**

**El ciclo completo consta de 14 talleres. Los alumnos de la UC que asistan al menos a 6 (resp. 12) sesiones recibirán la certificación que les permitirá obtener un crédito de libre elección (resp. dos créditos) por curso de corta duración. Del mismo modo, los Profesores de Educación Secundaria que asistan al menos a 6 (resp. 12) sesiones recibirán la certificación que les permitirá obtener un crédito de formación (resp. dos créditos).**

# Contenidos

- Introducción

```
graph LR; A[• Introducción] --> B[Dominio]; A --> C[Interés]; A --> D[El trabajo];
```

Dominio

Interés

El trabajo

- Algunos hitos

- Aplicaciones

# ¿Qué es la optimización?

*Maximizar*  $f(x)$   
*sujeto*  
 $a$   $x \in K$

*Minimizar*  $f(x)$   
*sujeto*  
 $a$   $x \in K$

- **Encontrar valores que minimicen o maximicen una función y que satisfagan unas condiciones.**

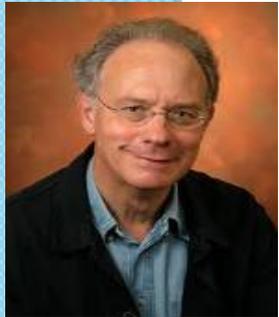
- **Ingredientes**

}	<b>variables</b>	<b>(x)</b>
	<b>función objetivo</b>	<b>(f)</b>
	<b>restricciones</b>	<b>(K)</b>

# ¿Interés?



- **“Rien ne se passé dans le monde qui ne soit la signification d’un certain maximum ou d’un certain minimum”- L.Euler (1707-1783).**



- **“L’homme a toujours oeuvre vers l’optimisation”- I. Ekeland (1944-).**

<http://www.pims.math.ca/~ekeland/>



- **“Celui qui renounce à être meilleur cesse déjà d’être bon”- Cartel en la entrada de un centro de formación de un club de fútbol profesional. J.B. Hiriart-Urruty (1949-).**

<http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/>

# Presencia académica

- **Optimización** Avanzada en **Sistemas de Energía Eléctrica**.  
(Posgrado). UCLM.
- **Optimización** Lineal en **Arquitectura**. UPV.
- **Optimización** y Simulación de **Procesos Industriales**.  
(Posgrado). UAL.
- **Optimización** y **Control Óptimo**. (TR). ULPGC.  
Ingeniero en Automática y Electrónica Industrial.
- **Optimización** en **Redes de Comunicaciones**. URJC.
- Métodos y Técnicas de **Optimización** en **Modelos Empresariales**. UNIOVI.
- Simulación y **Optimización** de **Procesos Químicos**. UC.  
Grado: Ingeniería Química.
- Estadística y **Optimización**. (OBL). UC.  
Grado: Ingeniería Informática.
- **Optimización** I. Grado: MATEMÁTICAS. (OBL). UC.

# En “Matemáticas en Acción”:

- **OPTIMIZACIÓN (MATEMÁTICAS EN LA INDUSTRIA).**  
CLAUDIA SAGASTIZÁBAL (INRIA, IMPA, CEPTEL, BRASIL).  
29/09/04 .
- **MATEMÁTICAS EN LA EMPRESA.**  
ÁNGEL COBO (MATEMÁTICA APLICADA, UC).  
18/05/05.
- **TODO ESTÁ BAJO CONTROL.**  
LUIS ALBERTO FERNÁNDEZ (MATESCO, UC ).  
20/05/09.
- ...



Motivados por  
problemas de la  
realidad física

• **¿Cómo se trabaja?**

Teoría

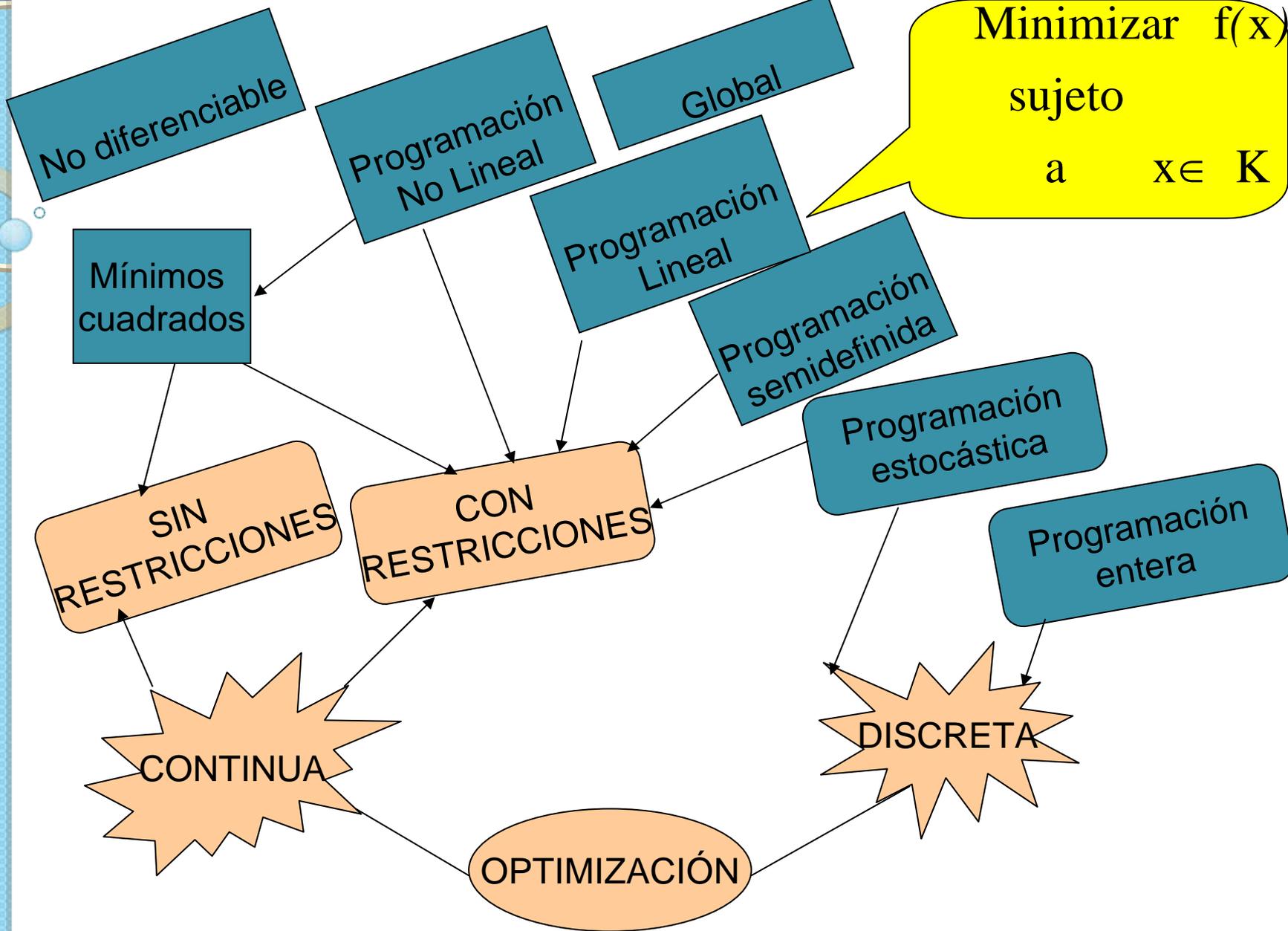
Modelos

Algoritmos

Ordenador

# Algunas revistas





- Con limitaciones de espacio y tiempo.

# SOFTWARE

- CPLEX
- XPRESS
- LINDO, LINGO
- MINOS
- KNITRO
- LANCELOT
- SNOPT
- OSL
- MINTO
- MIPO
- LOQO
- IPOPT
- NAG
- MATLAB
- GAMS
- SCILAB

Enlaces sobre optimización:

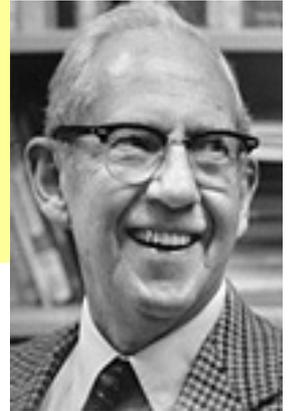
<http://www.optimization-online.org/links.html>

<http://neos.mcs.anl.gov/neos/solvers/index.html>

- 
- Algunos hitos

# El problema de la dieta

Asegurar unos requerimientos nutricionales diarios al menor coste.



Stigler 1911 - 1991

- Uno de los primeros problemas de optimización.
- TALLA: 77 variables y 9 restricciones.
- 1939 - Stigler usa un heurístico: 39.93 \$ /año.
- 1947 - Laderman usa simplex: 39.69 \$ /año.  
(TIEMPO: 120 días, 10 humanos calculando.)

# Problema de la dieta de Stiegler

- Variables: dólares gastados en cada alimento.
  - Función a minimizar: coste.
  - Las restricciones: una por cada nutriente.
- 

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar } f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ c_j^{\min} & \leq c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \dots + c_{jn}x_n, \quad j = 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$



# Traveling Salesperson Problem

$$\min \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m C_{ij} X_{ij}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^m X_{ij} = 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1 \quad \text{for } j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in K} X_{ij} \leq |K| - 1 \quad \text{for all } K \subset \{1, \dots, m\}$$

$$X_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \text{for all } i, j$$

Princeton Series in APPLIED MATHEMATICS

## The Traveling Salesman Problem

*A Computational Study*



David L. Applegate,  
Robert E. Bixby, Vašek Chvátal,  
and William J. Cook

(2007)

<http://www.tsp.gatech.edu/>

# PROGRAMACIÓN LINEAL

Un hito en la matemática aplicada del siglo XX



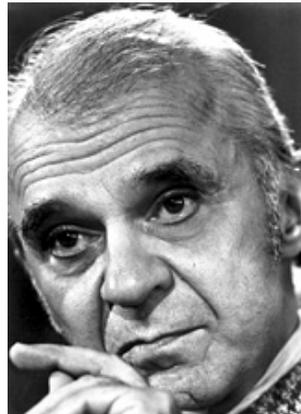
DANTZIG 1914-2005

Algoritmo  
del Simplex  
1947

Métodos  
matemáticos  
para planificar la  
producción  
1939



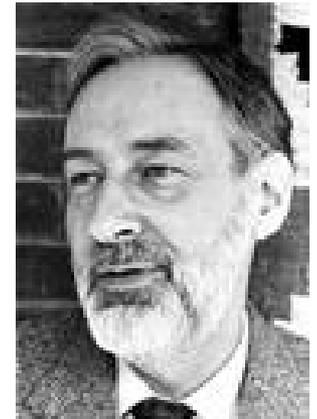
Von Neumann  
1903-1957



Leontief  
1906-1999



Kantorovich  
1912-1986



Koopmans  
1910 - 1985

Premio Nobel en economía

# La motivación

## DANTZIG

[http://www2.informs.org/History/dantzig/LinearProgramming\\_article.pdf](http://www2.informs.org/History/dantzig/LinearProgramming_article.pdf)



1914-2005

- **Problemas de planificación militar**

- En el Pentágono, era un experto en métodos de programación-planificación de despliegue, entrenamiento y suministro logístico.

- Antes de 1947

¡Sin función objetivo!

- Sin ordenadores

# DANTZIG

## El modelado

- 1932- Leontief :“The Interindustry Input-Output Model of the American Economy”.  

---

**matrices**
- “I greatly admired Leontief for having taken the three steps necessary to achieve a successful application:
  1. Formulating the inter-industry model.
  2. Collecting the input data during the Great Depression.
  3. Convincing policy makers to use the output”.
- 1947- Plantea un problema de **minimización**.

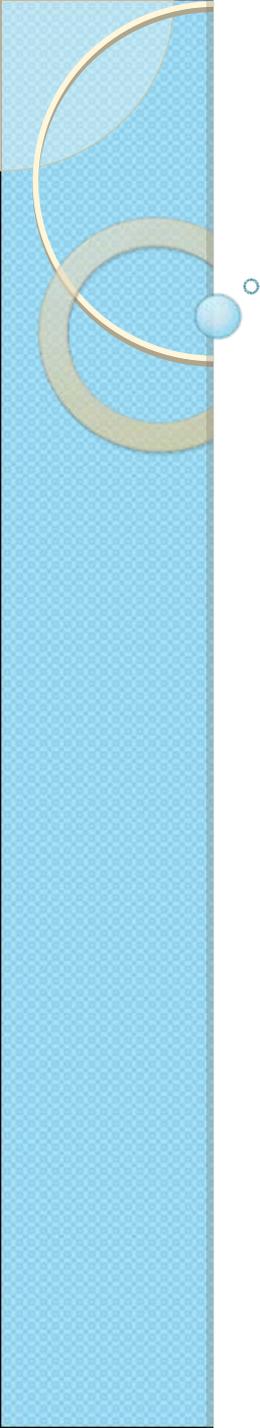
# DANTZIG

## El algoritmo

¿Cómo resolver el problema planteado?

- Recurre a los economistas:  
Koopmans (problema del transporte).
- Se lanza a resolver el problema él mismo.  
En 1947 propone el método del Simplex.
- Busca asesoría teórica con von Neumann.
- Avances en la computación.

MILITAR + ECONÓMICO- INDUSTRIAL + MATEMÁTICO



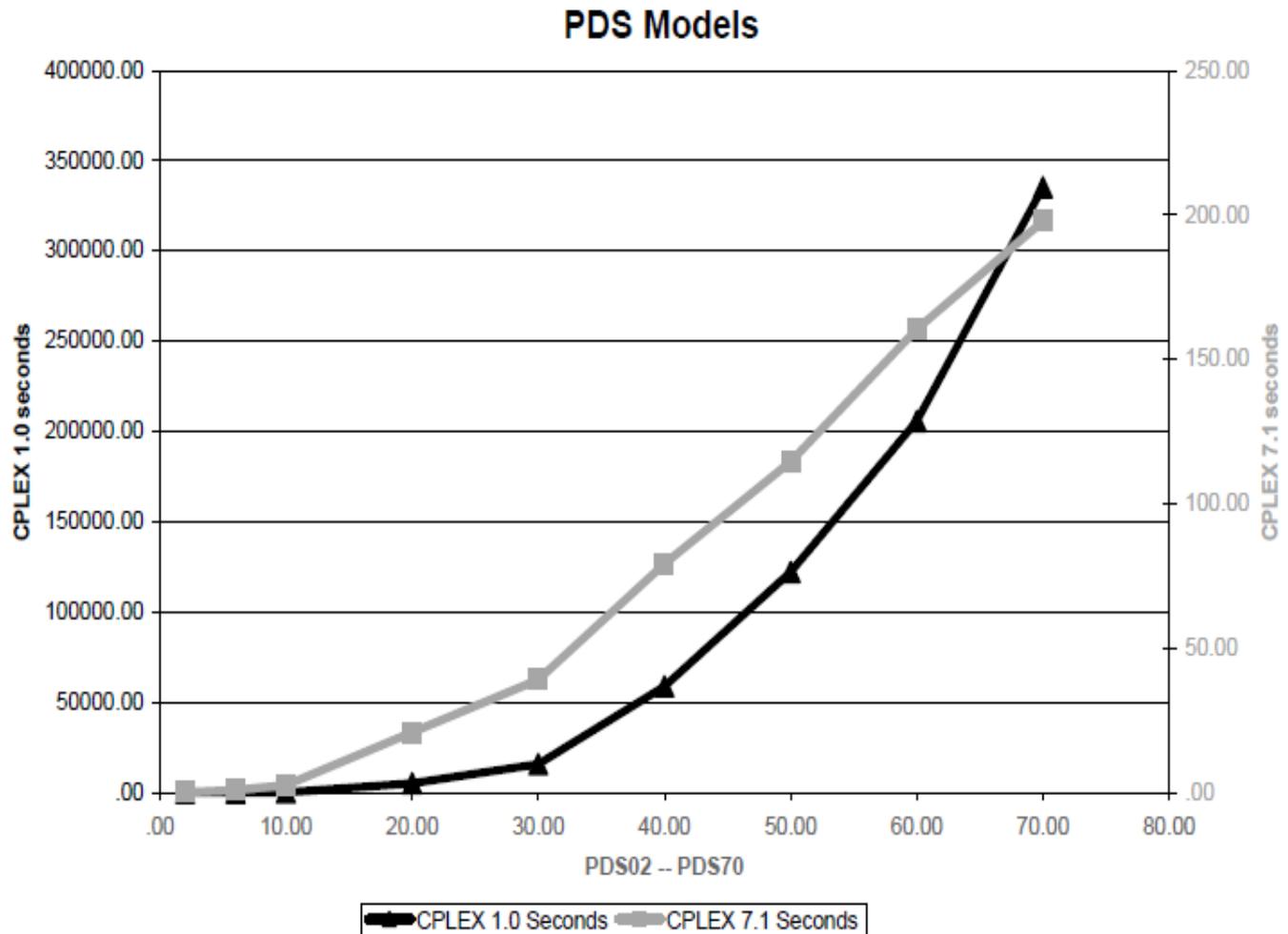
# La experimentación

- 1952-53 Orden-Hoffman (7lv,48rest,18h).
- 1954 Orchard-Hays. Primer programa comercial.
- Aplicaciones comerciales eclipsan a las militares.

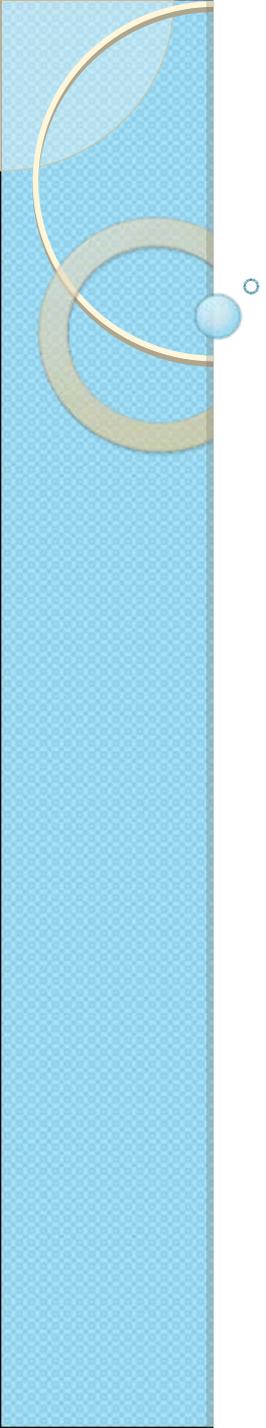
>>>>>>>>> Avances en  
hardware + software + algoritmos.

# Bixby, "Solving real-world LP: a decade and more of progress", 2002

Figure 1. PDS models.



1988-----2001



**Table 4.** PDS models.

Instance	Rows	Columns	Nonzeros
pds100	156171	546469	1193533
pds90	142823	507771	1112089
pds80	129181	467192	1025706
pds70	114944	422356	929346
pds60	99431	367268	809094
pds50	83060	304348	671605
pds40	66844	242649	536690
pds30	49944	177628	393657
pds20	33874	119438	265793
pds10	16558	52712	118283
pds06	9881	28655	62524
pds02	2953	7535	16390

# Mathematical Programming-Hitos

- 1947 - Programación lineal.
  - 1970 Klee y Minty // 1978 Khachian.
  - 1984 Karmarkar.
- 1951 - Programación no lineal.
  - Karush-Kuhn-Tucker.
  - Powell, Broyden, Fletcher, Shanno, Goldfarb.
- 1958 - Programación entera.
  - Gomory.



Gomory

1929-

Programación=planificación

# Puntos interiores-Un paso adelante

- ***Breakthrough in Problem Solving.***

THE NEW YORK TIMES, November 19, 1984.

- **Folding the Perfect Corner**

*A young Bell scientist makes a major math breakthrough.*

TIME MAGAZINE, December 3, 1984.

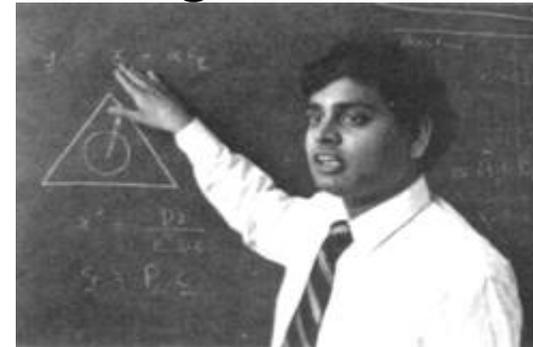
- **Karmarkar Algorithm Proves Its Worth.**

THE WALL STREET JOURNAL, July 18, 1986.

- **THE STARTLING DISCOVERY  
BELL LABS KEPT IN THE SHADOWS.**

Now its breakthrough mathematical formula could save

BUSINESS WEEK, September 21, 1987.

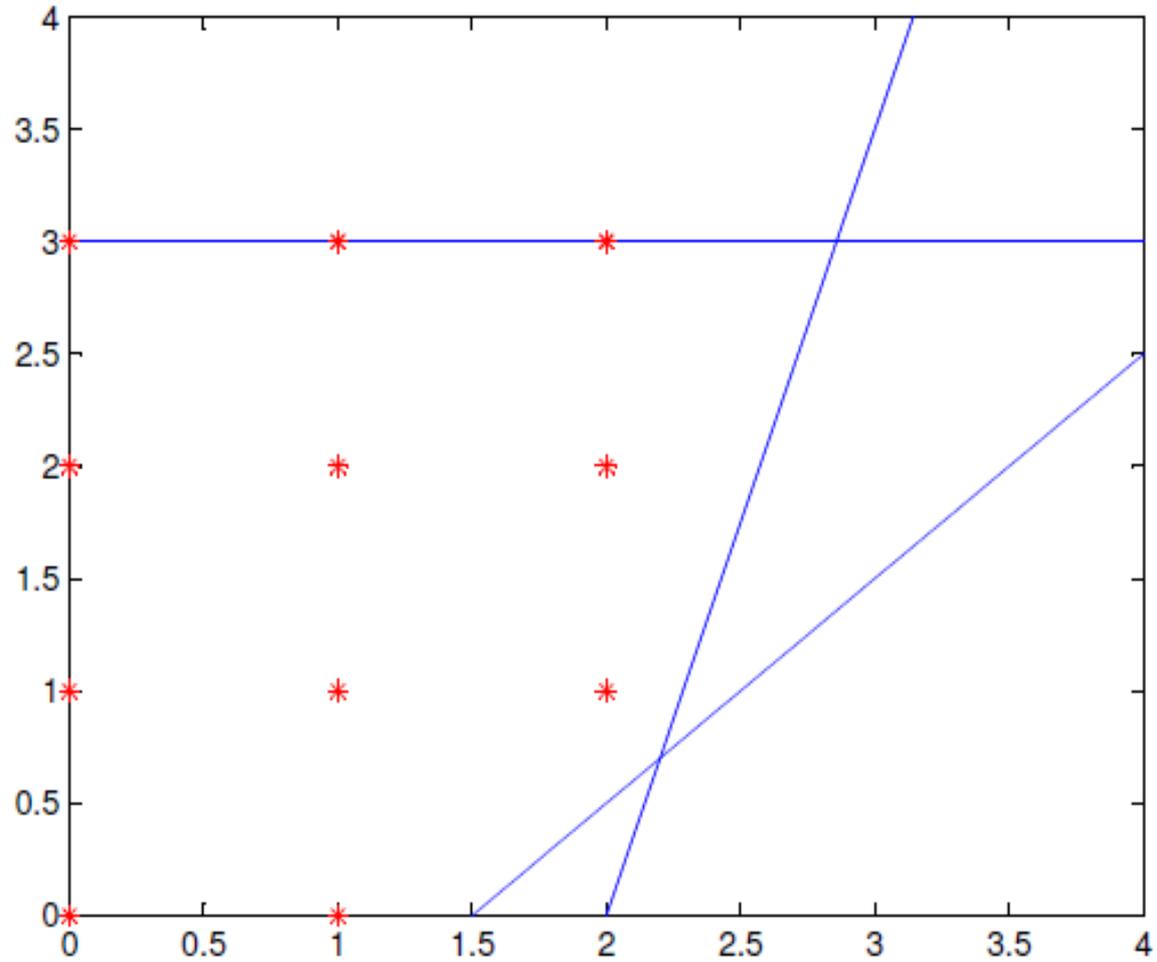


N. Karmarkar, 1957-

business millions

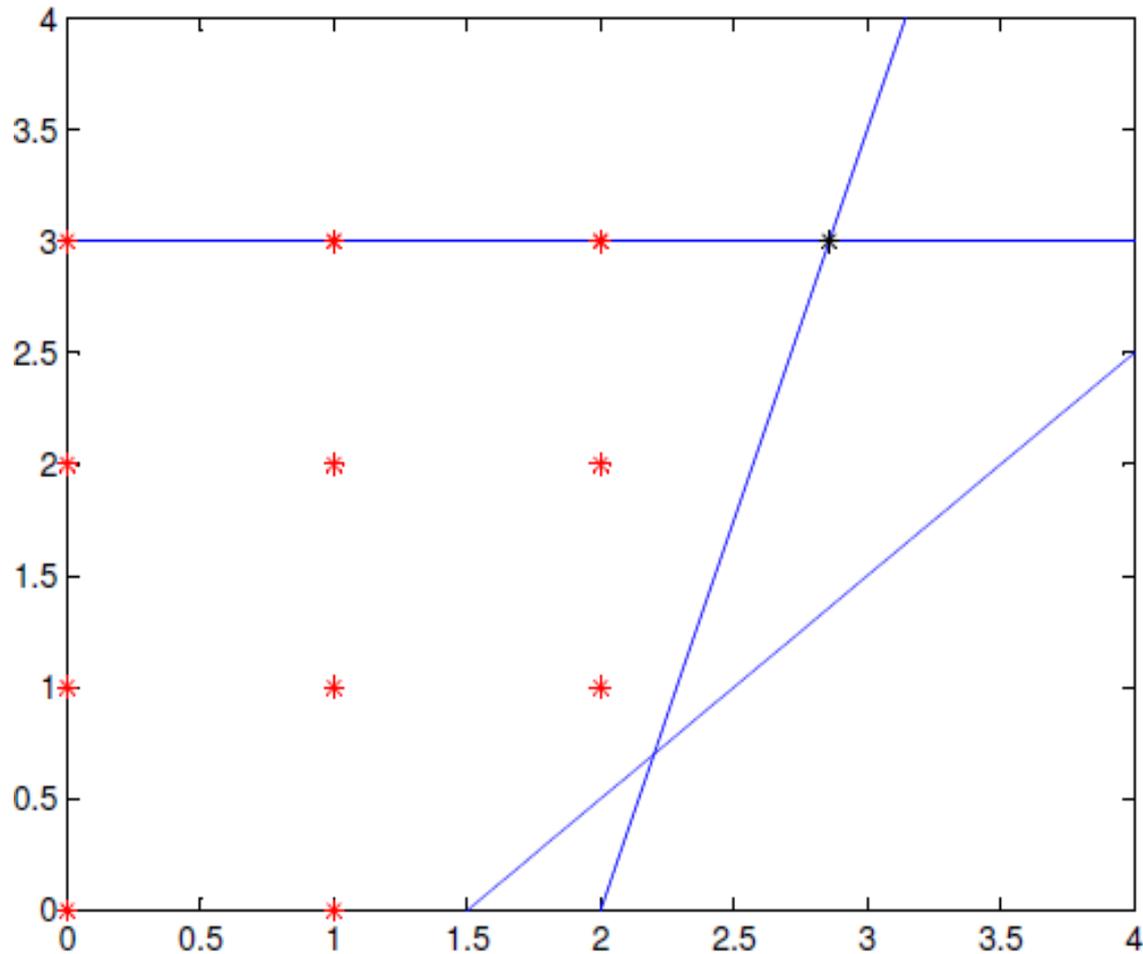
# Idea de los cortes.

★  $K \subset N^n$   
— restricciones

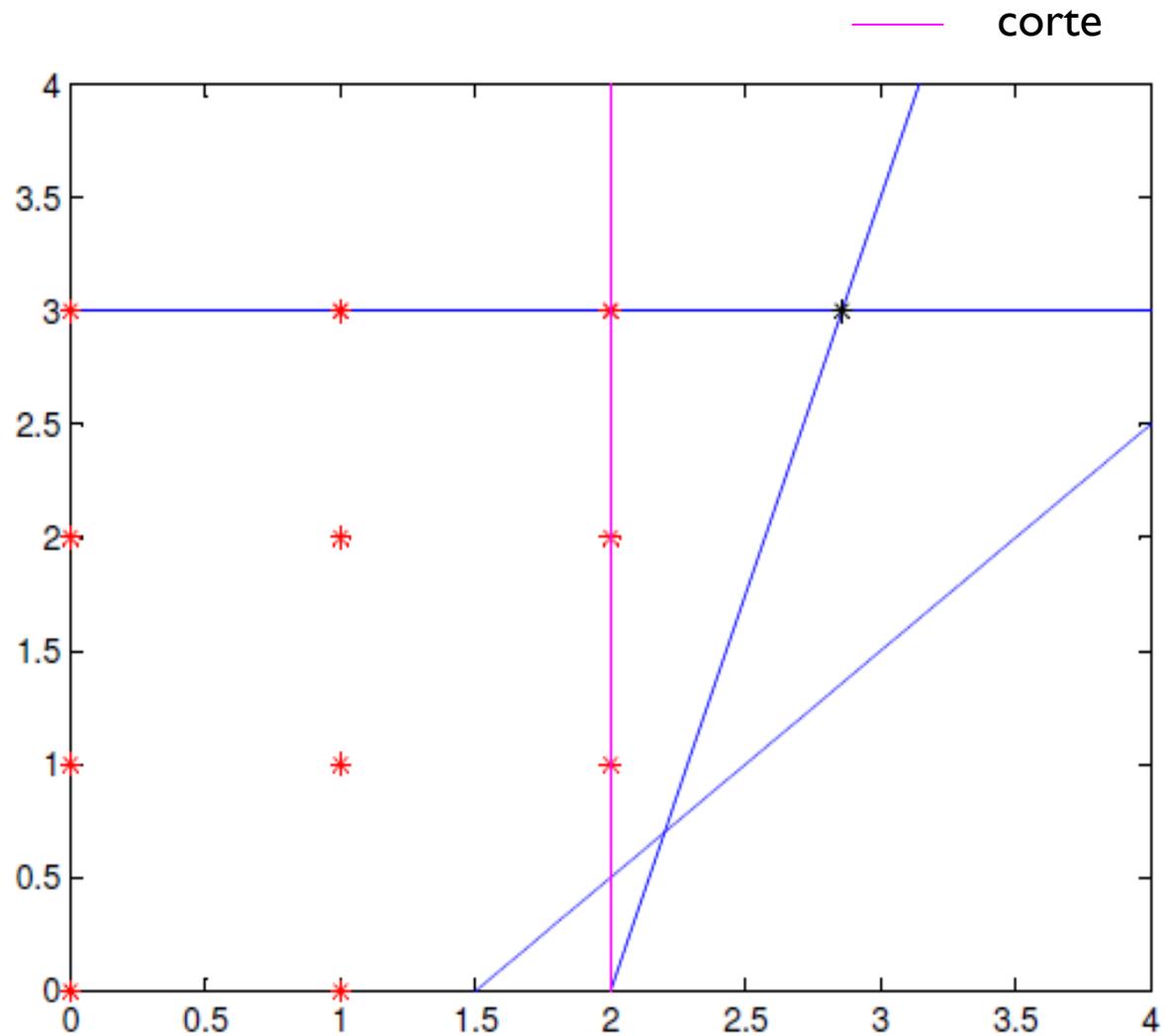


# Idea de los cortes.

- ★ Solución PL
- ★  $K \subset N^n$
- restricciones

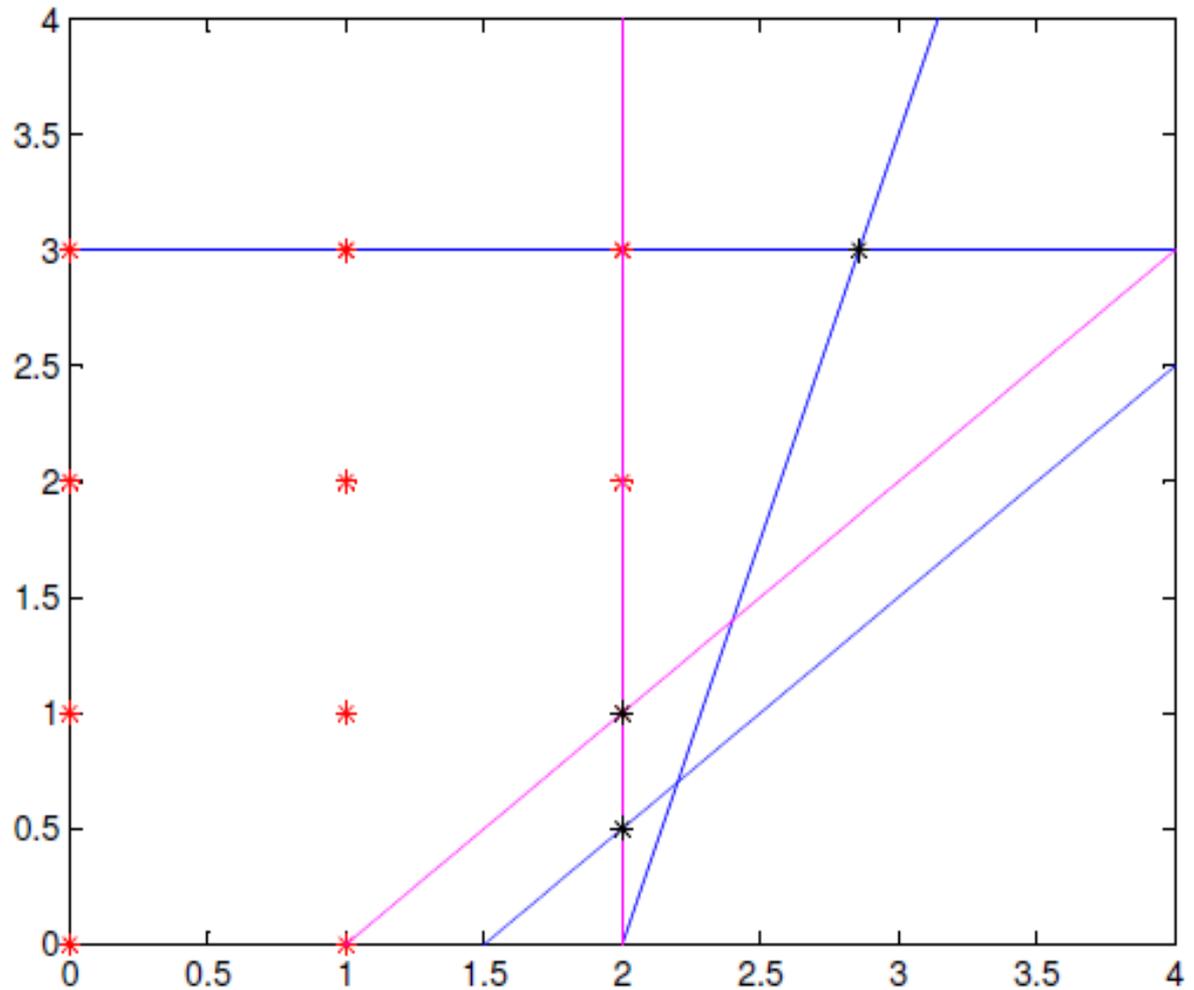


# Idea de los cortes.



# Idea de los cortes.

★ Soluciones PL



## A tener en cuenta:

- Resulta más fácil la programación continua que la entera.
- La sencillez de la formulación no implica facilidad de resolución.
- La necesidad de una base teórica para el buen uso del software.

---

El algoritmo del simplex no tiene comportamiento polinomial, pero es el más usado.



- **Aplicaciones**

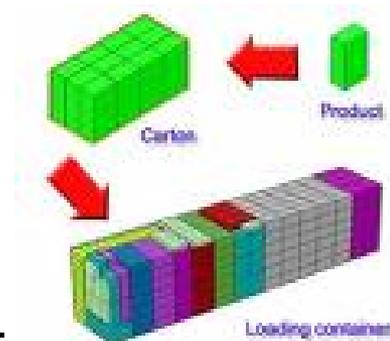
# Modelo: problema de la mochila



$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \\ \text{sujeto a} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \leq C \\ & x_i \in \{0,1\}, i=1, \dots, n \end{aligned}$$

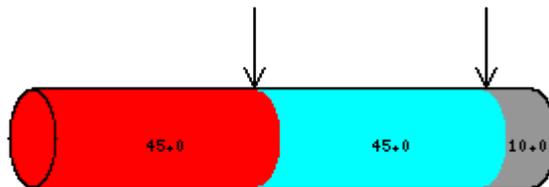


- Problema del montañero.
- ¿Cómo cargar un avión o un buque?
- Toma de decisiones financieras.
- Problema de dar el cambio.
- Problemas de cortado en la industria del papel, del acero,...



# Industria del papel: cortado

- Problema I:



$$\text{Maximizar } f(x) = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n$$

$$\text{sujeto } c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \leq C$$

$$a \quad y_i \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, n$$

Available stock size (length or width) &

Size	Cost Each	Nbr Used	Cost
9	10	18	180.00

Ordered sizes

Size	Nbr required	Color	Nbr Cut
2	20	Green	22
3	10	Yellow	10
4	20	Red	20

Pattern #1, Stocklength: 9.0



Number to Cut 3

Pattern #2, Stocklength: 9.0



Number to Cut 10

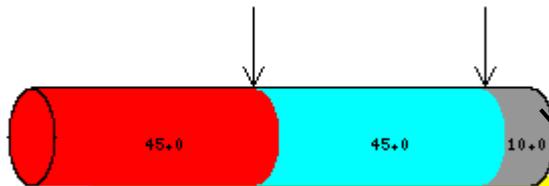
Pattern #3, Stocklength: 9.0



Number to Cut 5

# Un problema de cortado 1-dim

- Variables: n° de veces que se usa cada patrón.
- Función a minimizar: suma de los desperdicios.
- Las restricciones: satisfacer los pedidos.



$$\text{Minimizar } f(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n$$

$$\text{sujeto a } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq D_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i \in \mathbf{N}, \quad i = 1, \dots, n$$

Dificultad: demasiadas variables.

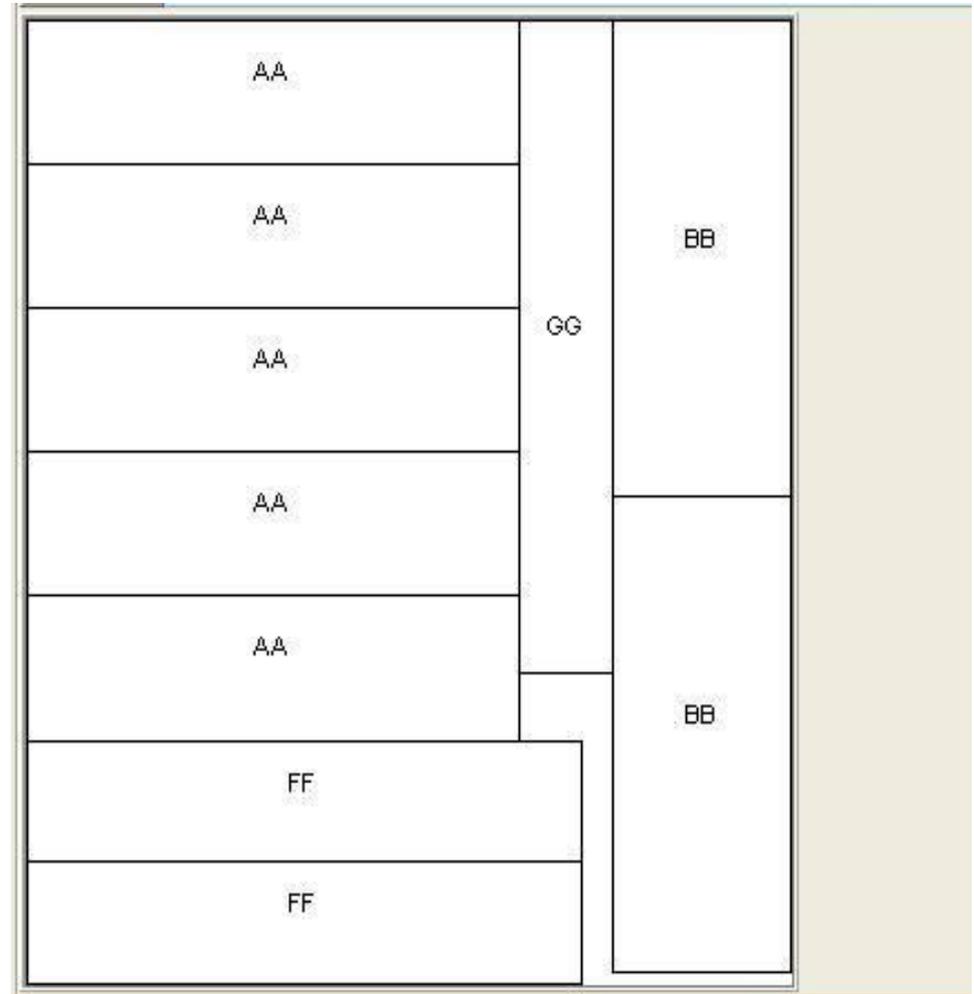
# Un caso real.

Código_ejemplo	Número_Pedidos	Tolerancia	Bobinas master	Desperdicio
645	13	0%	51	1,22%
645	13	5%	53	0,03%
778	9	0%	50	3,38%
778	9	5%	51	3,07%
001	24	0%	92	1,32%
001	24	5%	94	0,65%
732_33	9	0%	36	5,82%
732_33	9	5%	36	2,63%
732_33_51	12	0%	59	5,49%
732_33_51	12	5%	60	3,13%
732_33_51_90	20	0%	122	0,52%
732_33_51_90	20	5%	125	0,21%
732_33_51_56_90	24	0%	137	0,28%
732_33_51_56_90	24	5%	140	0,18%

# Industria del papel: cortado

- Problema 2:

Aprovechamiento  
óptimo de una hoja

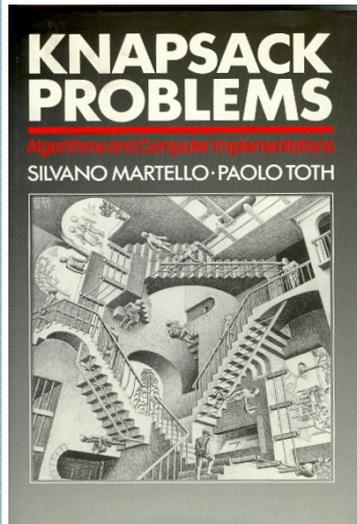


# Modelo: el problema de la mochila

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \\ \text{sujeto a} \quad & p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq c \\ & x_i \in \{0,1\} \quad i=1,\dots,n \end{aligned}$$

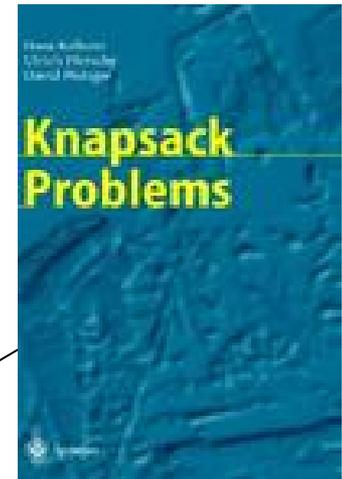


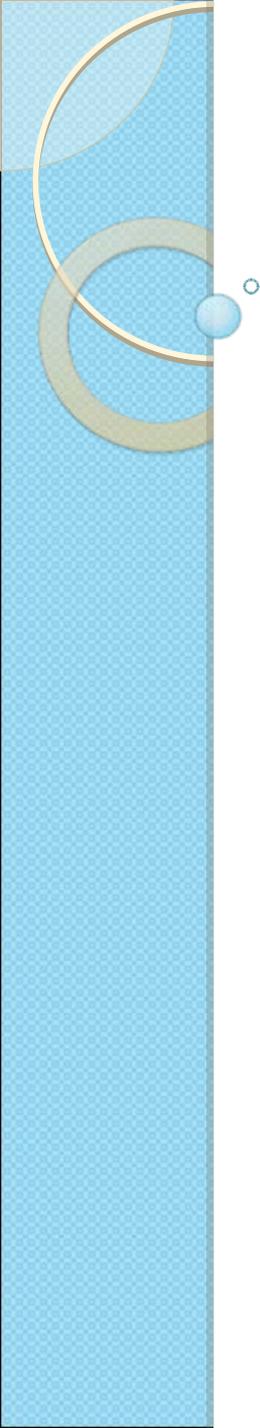
¡Las apariencias engañan!



S. Martello, P. Toth  
*John Wiley & Sons-1990 - 296 páginas.*

H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger  
2004 - Springer - 546 páginas.

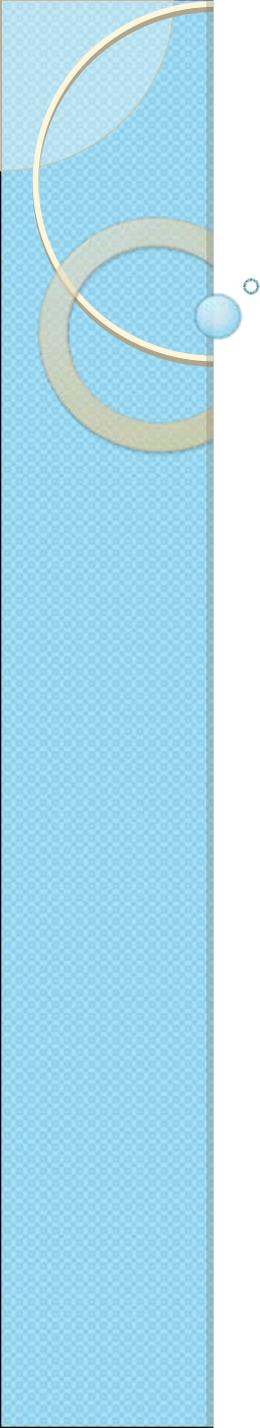




# Optimización en el hospital

[www.espaciohospital.es/assets\\_db/documents/document\\_1249053608.pdf](http://www.espaciohospital.es/assets_db/documents/document_1249053608.pdf)

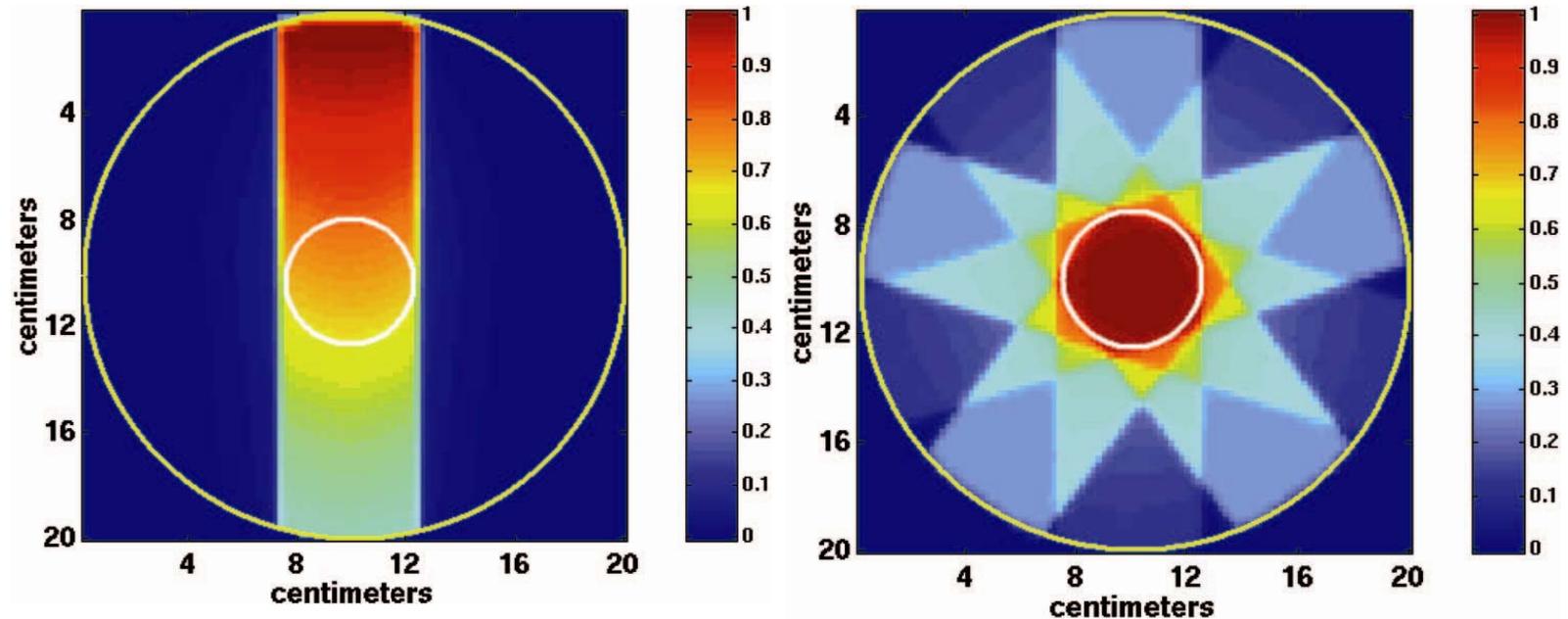
- Planificación de los horarios.
- Planificación de una dieta equilibrada.
- Planificación de Admisiones.
- Entrega de comidas.
- Optimización de las tarifas.
- Transporte.
- Tratamiento de imágenes.
- En el tratamiento del cáncer.



# Optimización-radiación-cáncer

- Interfiere el crecimiento de las células.
- Daña las células sanas.
- Las células sanas tienen mayor capacidad de regeneración que las cancerosas.
- **OBJETIVO:** dar una dosis suficiente al tumor mientras se controlan los daños colaterales en tejidos sanos y regiones de riesgo.

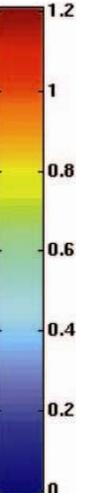
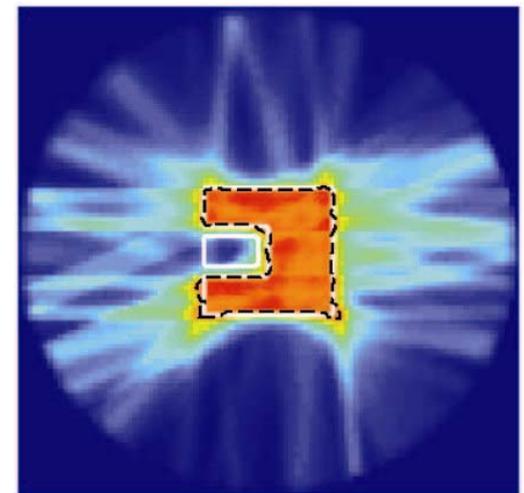
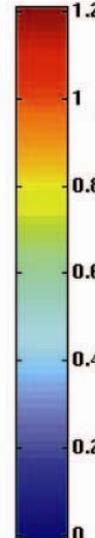
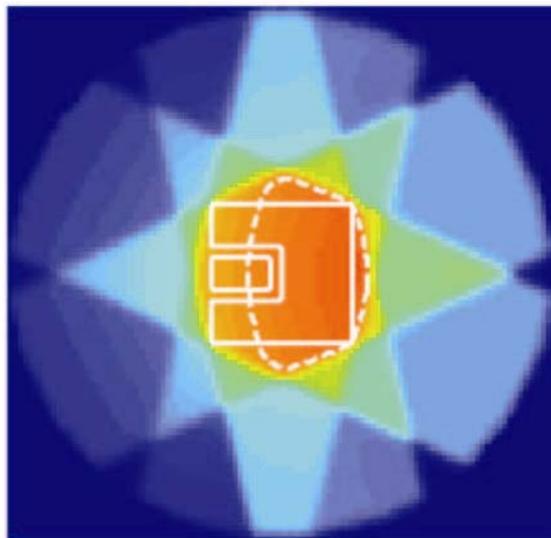
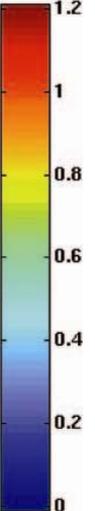
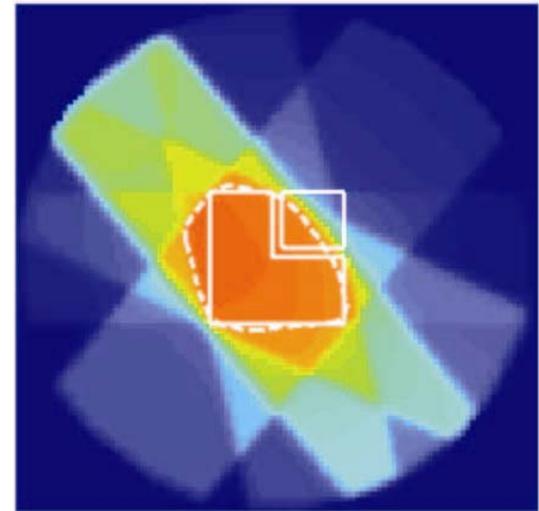
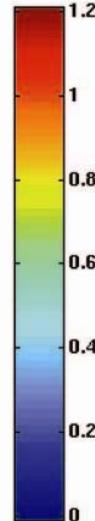
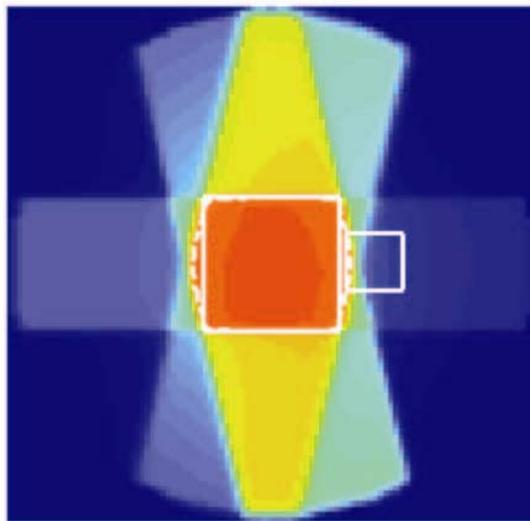
# Optimizando la radiación en pacientes de cáncer (SIAM Review, vol 41,4)



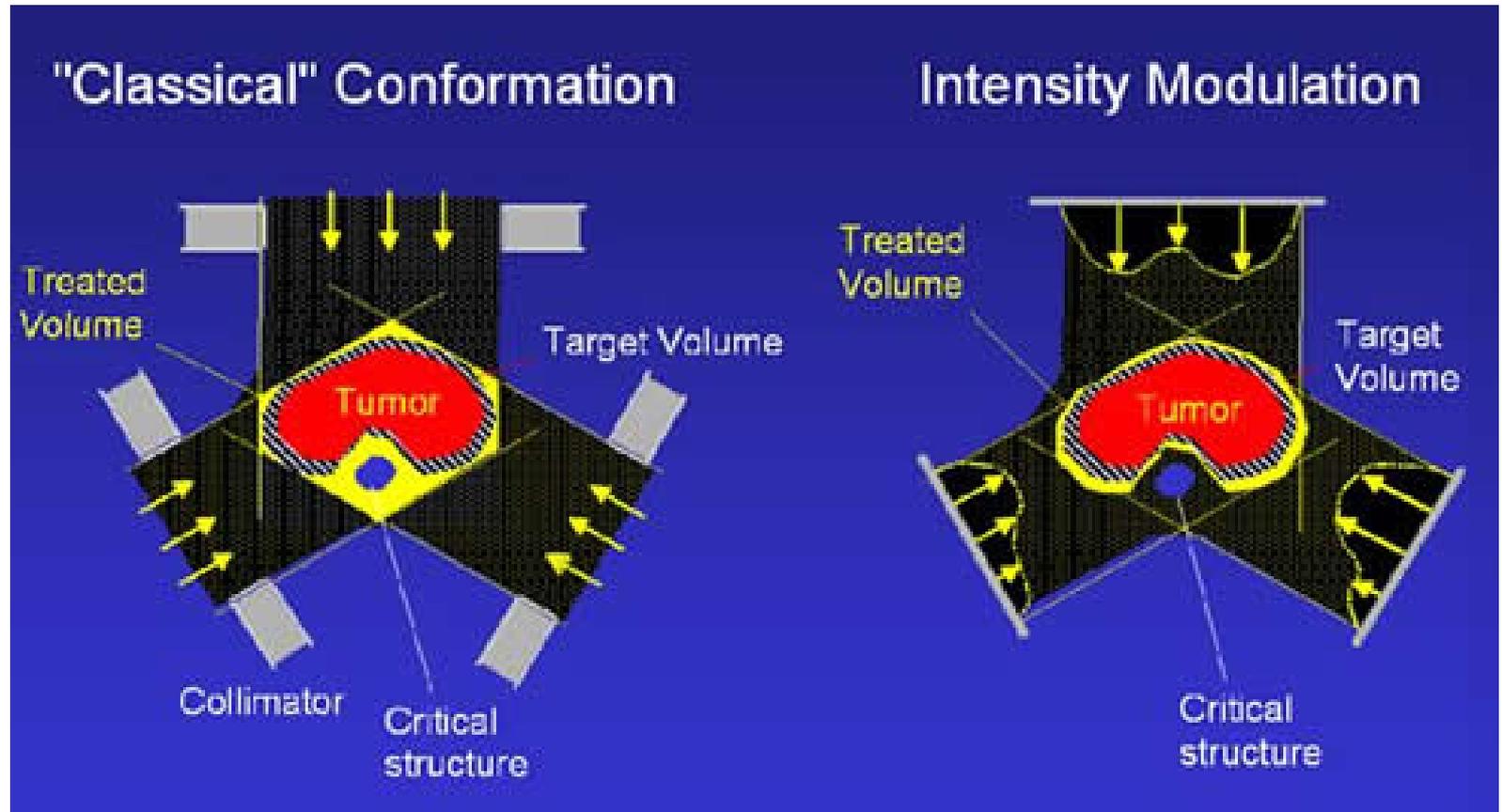
# Optimizando la radiación en pacientes de cáncer



# Optimizando la radiación en pacientes de cáncer



# Optimización-Radioterapia



<http://www.libredecancer.com/modalidades-tratamiento/intensidad-modulada.php>

# Módulo simple optimización-radiación

*Minimizar*  $f(Dosis)$

*Sujeto\_a*  $Dosis(i) = \sum_k x_k Dosis_k(i)$

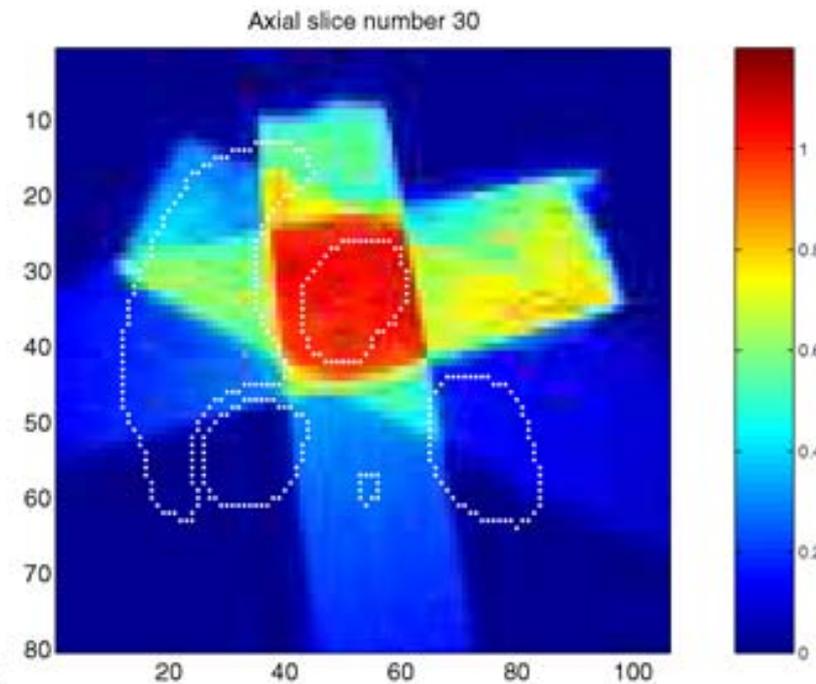
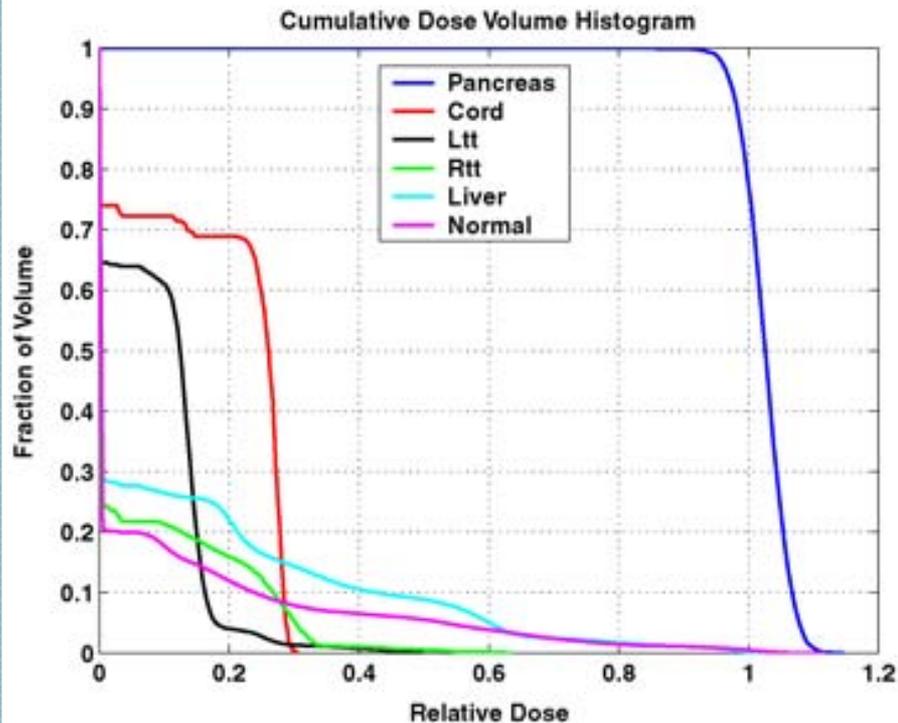
$Dosis(i) > L_i$  ,  $i \in Tumor$

$Dosis(i) < U_i$  ,  $i \in Riesgo$

$x_k \geq 0$

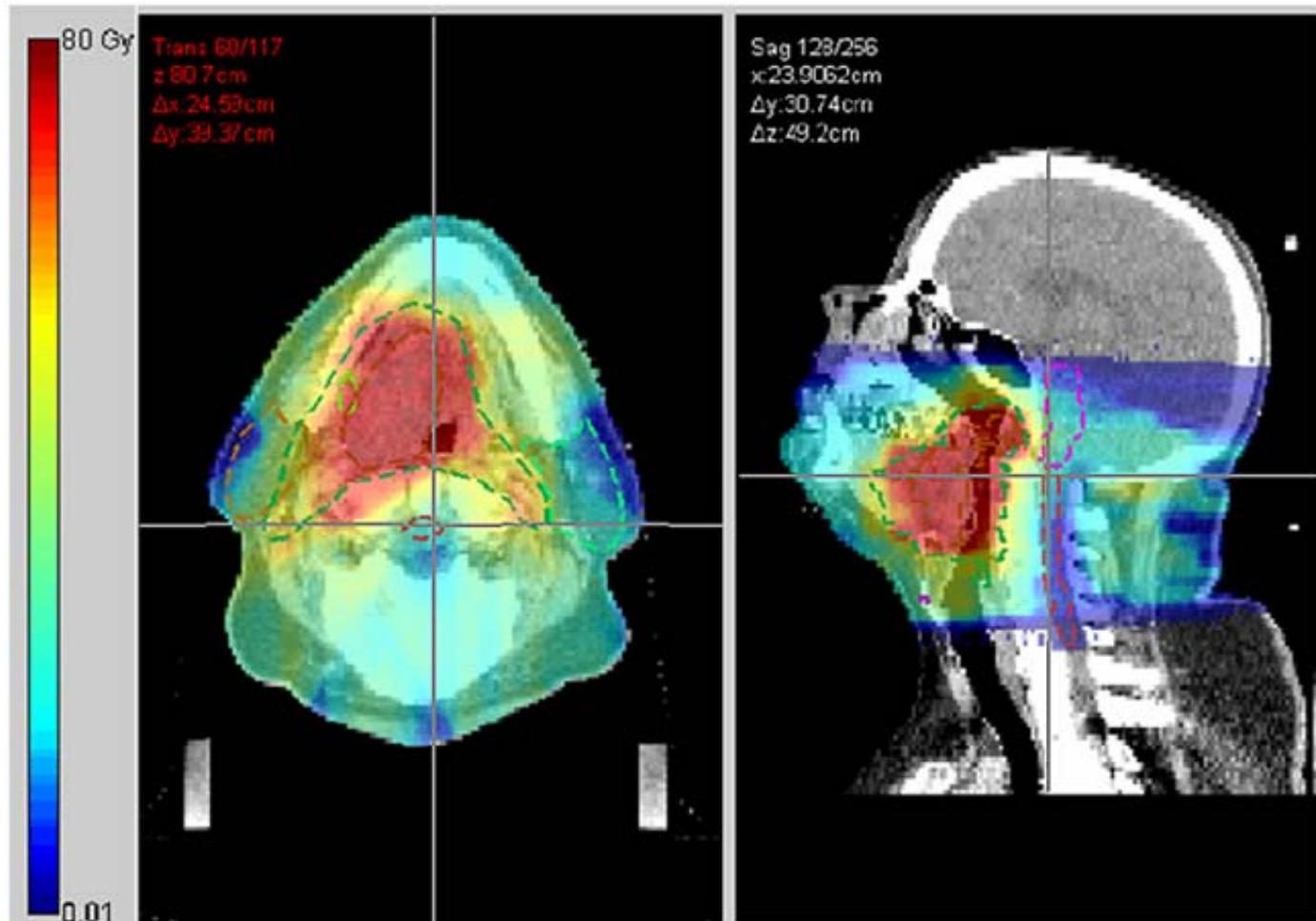
# Sampling issues for optimization in radiotherapy

Ferris · Einarsson · Jiang · Shepard. Ann Oper Res (2006).

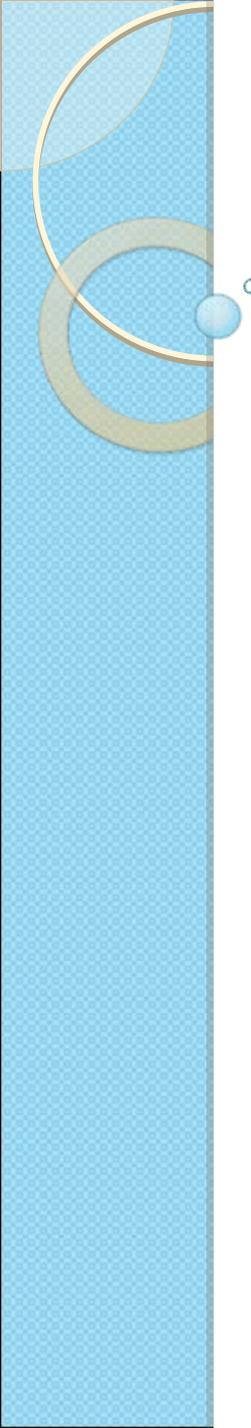


# A collaboratory for radiation therapy treatment planning optimization research

Deasy-Lee-Bortfeld-Langer-Zakarian-Alay-Zhang-Liu-Mohan-Ahuja-Pollack-Purdy-Rardin. Ann Oper Res (2006).



7 haces, 893.200 variables y 938.424 restricciones.



# Ideas para seguir trabajando

**“A new series of conjectures and open questions in optimization and matrix analysis”. Jean-Baptiste Hiriart-Urruty ,  
ESAIM: COCV 15 (2009), 454-470.**

# REFERENCIAS

A continuación se citan las referencias utilizadas para el desarrollo del taller.

En las transparencias se encuentran enlaces a otras referencias que también pueden ser de interés.

## PARA EL APARTADO "ALGUNOS HITOS":

- "History of Mathematical Programming", Eds. J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, A. Schrijver, 1991.
- M. Grötschel, Linear, Integer and Mixed-Integer Programming: a Preview.  
<ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/LinOpt/WS06/FirstLecture.pdf>, 2006.
- R.E. Bixby, "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress", Operations Research, Vol. 50:1, 3-15, 2002.
- H. Kellerer, U. Pferschy, D. Pisinger, "Knapsack problems", Springer, 2004.
- D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, W. J. Cook, "The Traveling Salesman Problem: A Computational Study". Princeton University Press, 2006.

## PARA EL APARTADO "APLICACIONES":

- J. Czyżżyk, T. Wisniewski, S. J. Wright, "Optimization Case Studies in the NEOS Guide", SIAM Review, Vol. 41:1, 148-163, 1999.
- D. M. Shepard, M. C. Ferris, G. H. Olivera, T. R. Mackie "Optimizing the Delivery of Radiation Therapy to Cancer Patients", SIAM Review, Vol. 41:4, 721 -744, 1999.
- "Operations Research in Medicine-Computing and Optimization in Medicine and Life Sciences", Annals of Operations Research, Vol. 148:1, 2006.



# Agradecimientos

Muchas gracias por:

- la invitación,
- la asistencia y
- la atención.