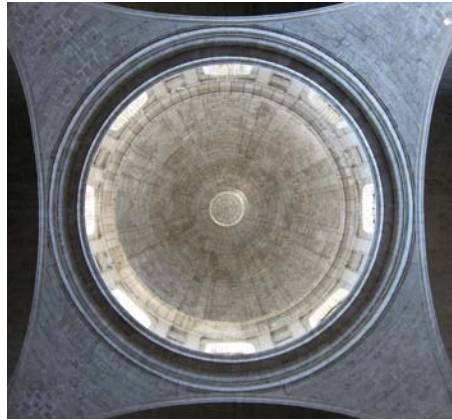


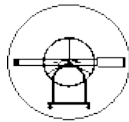
Ciclo de talleres divulgativos “Matemáticas en acción 2009”



Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Aula de la Ciencia
Universidad de Cantabria

Milagros Canga Villegas

Profesora de Dibujo Técnico, Sistemas de Representación y DAO
Departamento de Ingeniería Geográfica y Técnicas de Expresión Gráfica



Departamento de Ingeniería Geográfica
y Técnicas de Expresión Gráfica

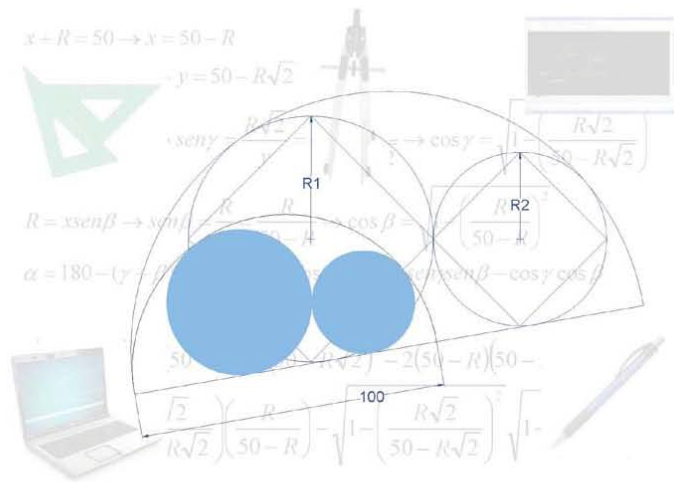


Escuela de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de Cantabria

Coordinadora de Dibujo Técnico para las pruebas de Selectividad



Ciclo de talleres divulgativos
MATEMÁTICAS EN ACCIÓN 2009
Curso 2009-2010



Soluciones gráficas de problemas matemáticos

Milagros Canga Villegas
Dep. Ingeniería Geográfica y Técnicas de
Expresión Gráfica. UC

Día: 3 de Marzo de 2010.

Hora: 18:00 –19:30

Lugar: Salón de Actos de la Facultad de Ciencias

La solución gráfica puede ser, sobre todo en el ámbito de la ingeniería, una forma útil y rápida de resolver un problema geométrico. En este taller vamos a plantear problemas geométricos sencillos, o no tan sencillos, y vamos estudiar distintas herramientas para resolverlos. La geometría se puede estudiar desde muchos puntos de vista y todos ellos son importantes en la formación del técnico ó científico que deberá aprender a decidir cuál es el más adecuado para resolver un problema concreto.

El ciclo completo consta de 14 talleres. Los alumnos de la UC que asistan al menos a 6 (resp. 12) sesiones recibirán la certificación que les permitirá obtener un crédito de libre elección (resp. dos créditos) por curso de corta duración. Del mismo modo, los Profesores de Educación Secundaria que asistan al menos a 6 (resp. 12) sesiones recibirán la certificación que les permitirá obtener un crédito de formación (resp. dos créditos).

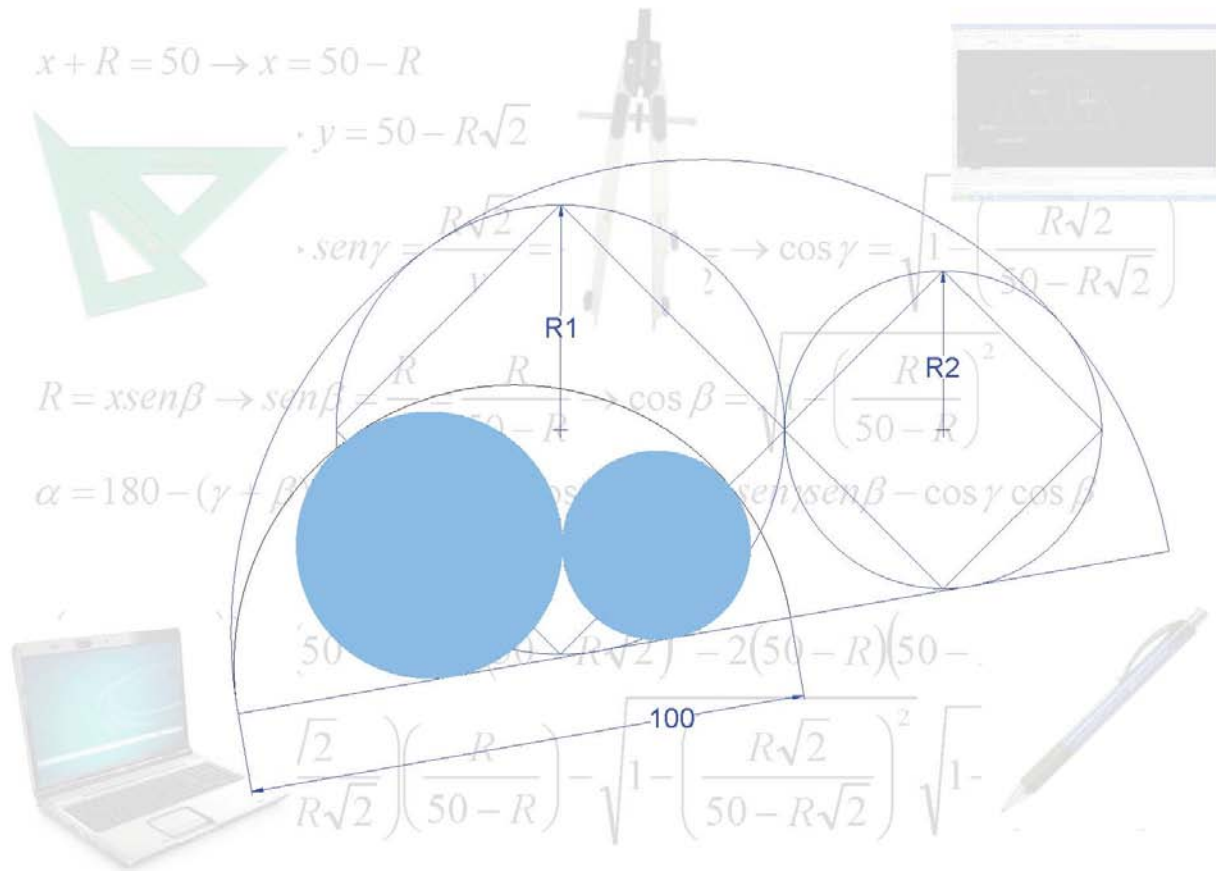
Soluciones gráficas a problemas matemáticos

Resumen:

La **solución gráfica** puede ser, sobre todo en el ámbito de la ingeniería, una forma útil y rápida de resolver un problema geométrico. En este taller **vamos a plantear problemas geométricos** sencillos, o no tan sencillos, y vamos estudiar distintas herramientas para resolverlos.

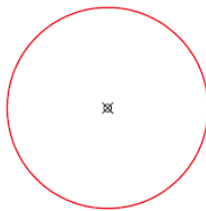
La **geometría** se puede estudiar desde **muchos puntos de vista** y todos ellos son importantes en la formación del técnico ó científico que deberá aprender a decidir cuál es el **más adecuado** para resolver un problema concreto.

¿Qué nos quiere contar esta imagen?

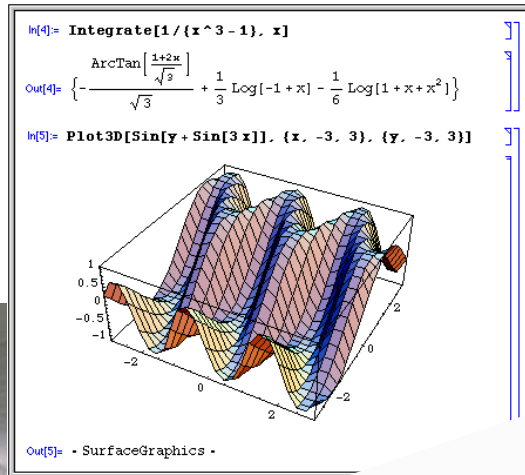


Algunas Reflexiones Previas

La experiencia



=



Algunas Reflexiones Previas

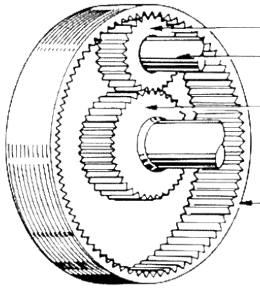
- Los alumnos que llegan a la Universidad tienen **deficiencias** en geometría.
- ¿Se da poca importancia en primaria y secundaria al estudio de la geometría clásica y sobre todo desde un punto de vista gráfico?
- A los alumnos les cuesta mucho **plantear** problemas y **“ver”** la solución
- Están acostumbrados a las **“recetas”**, necesitan soluciones con “protocolo”. Creen que todo lo resuelve una calculadora o un ordenador que la tecnología es la “solución”, no la “herramienta”,
- Los alumnos que no cursan los Dibujo Técnico en bachillerato tienen poca “cultura geométrica gráfica”
- ¿En las asignaturas de matemáticas se “descuida” esta competencia?

Algunas Reflexiones Previas

- Los nuevos retos derivados de la implantación del EEES nos llevan a buscar soluciones de aprendizaje. Debemos “enseñar a aprender”.
- La participación activa del estudiante en su formación es fundamental.
- Los “recortes” en el estudio del Dibujo Técnico y de los Sistemas de Representación clásicos en los nuevos planes de estudio de las ingenierías, pueden solventarse con el conocimiento del DAO, pero nos llevan la necesidad de **conocer mejor la esencia de la geometría.**

Algunas Reflexiones Previas

- Las soluciones gráficas hacen que los problemas entren por los ojos.
- Ayudan a “visualizar” el problema y su solución.
- Los alumnos necesitan desarrollar su capacidad de visualización
- El estudio de la geometría ayuda a aprender a pensar y a resolver



Configuración del Engrai

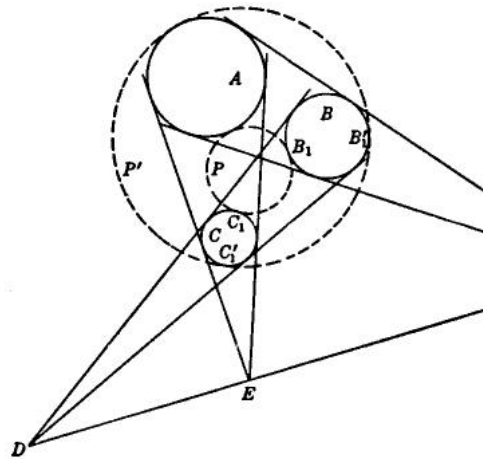
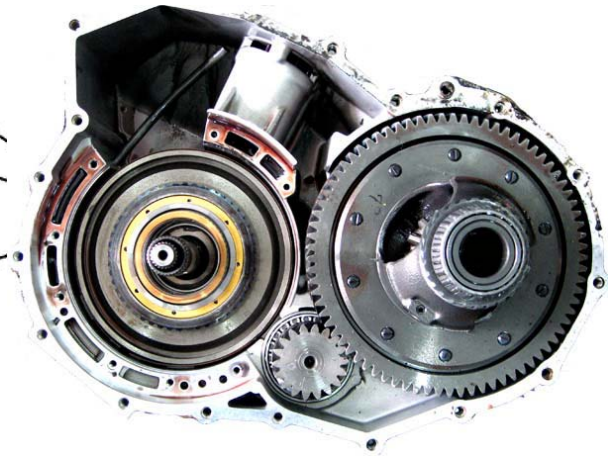


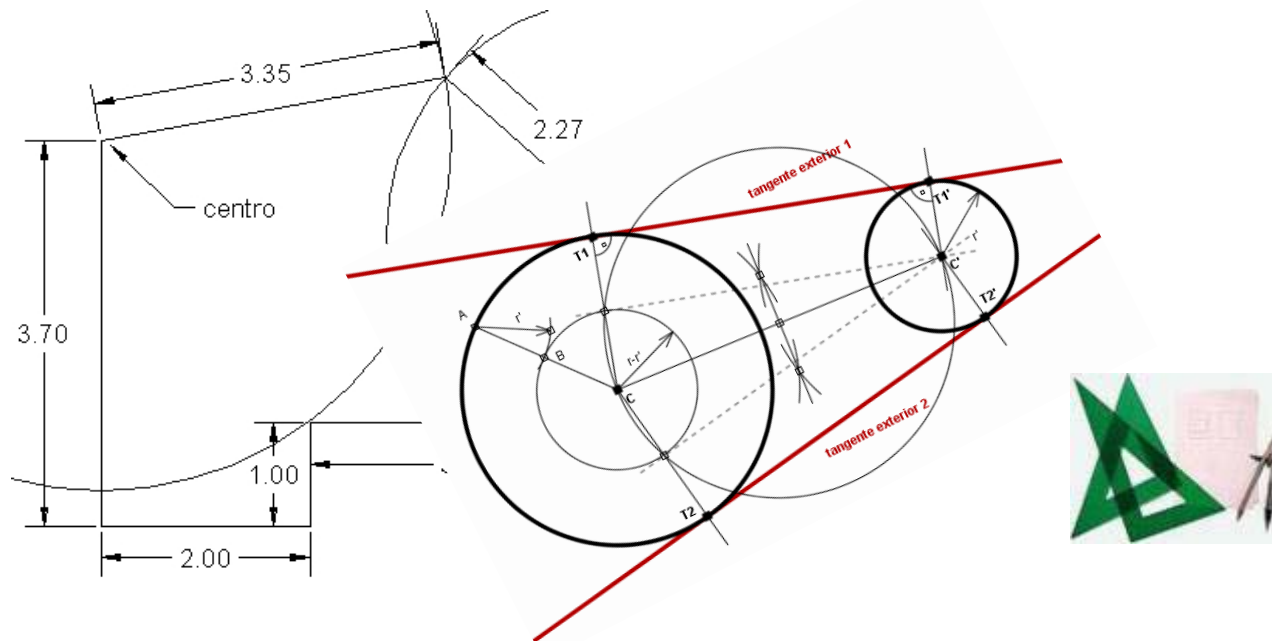
FIG. 118



¿De qué va este Taller?

Tema:

La GEOMETRÍA , una rama importante de las matemáticas



¿De qué va este Taller?

Objetivo:

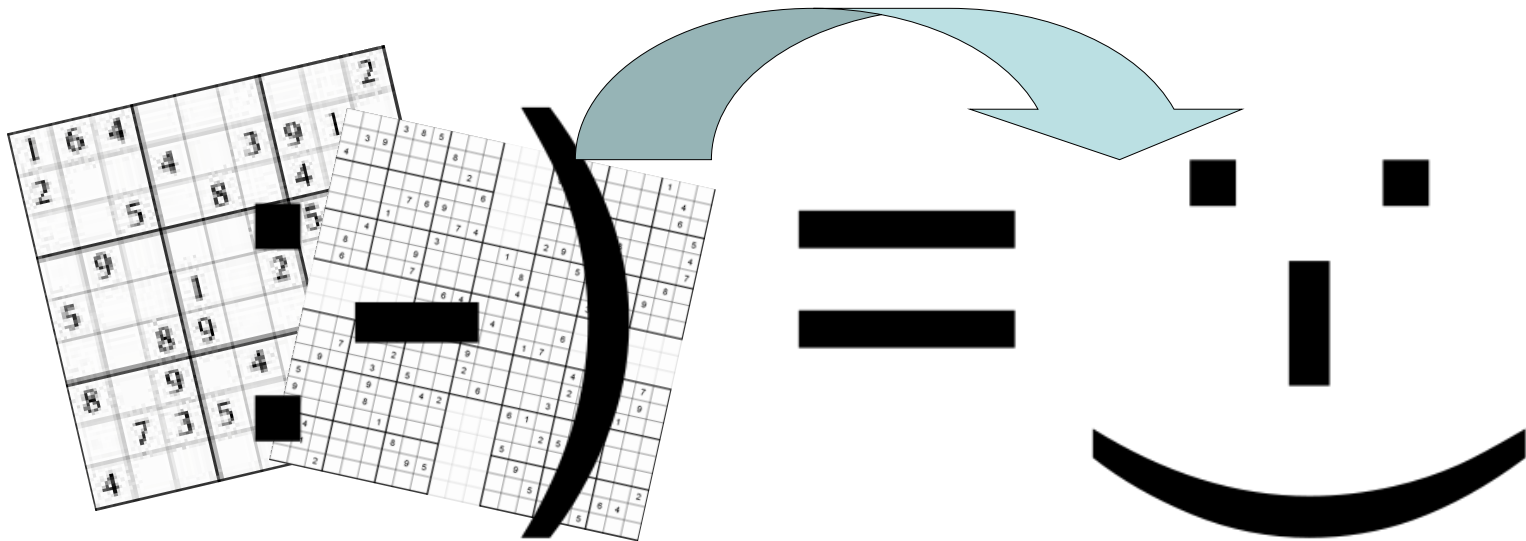
Resolver problemas geométricos. Alguno de los cuales son los que habitualmente se encuentran los ingenieros.



¿De qué va este Taller?

Intención:

Ante todo, que este taller les resulte **entretenido**, y, si puede ser, útil



Un famoso problema de la selectividad china

EL PAÍS.com |

¿Eres capaz de resolver el problema matemático de la Selectividad china?

La Real Academia Británica de Química lanza un reto científico para poner en evidencia el bajo nivel de los estudiantes de ese país

ELPAÍS.com - Madrid - 25/04/2007

La Real Academia Británica de Química ha ofrecido un premio de 500 libras (unos 730 euros) al cerebritito que resuelva un problema matemático que emplean algunas universidades en China como prueba de acceso para sus carreras científicas, según informa la radiotelevisión pública británica (BBC).

Para ilustrar su reto, la academia ha publicado además el acertijo que emplea una universidad británica "muy conocida y respetada" como test de nivel, bastante más sencillo que el otro. En China, los estudiantes aprenden matemáticas hasta los 18 años; lo que la academia quiere poner de relieve es el bajo nivel en esta rama científica de los pupilos británicos.

El último informe trienal de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) sobre el nivel educativo de los estudiantes de Secundaria en todo el mundo muestra que las matemáticas son un problema de orden mayor en España, donde uno de cada cuatro estudiantes (23%) son incapaces de alcanzar un nivel básico y casi ninguno destaca.

[Si resuelves el problema, mándaselo a la academia británica antes del 27 de abril.](#)

© EDICIONES EL PAÍS S.L. - Miguel Yuste 40 - 28037 Madrid [España] - Tel. 91 337 8200

Un famoso problema de la selectividad china

Como se aprecia en el diagrama, en un prisma cuadrado

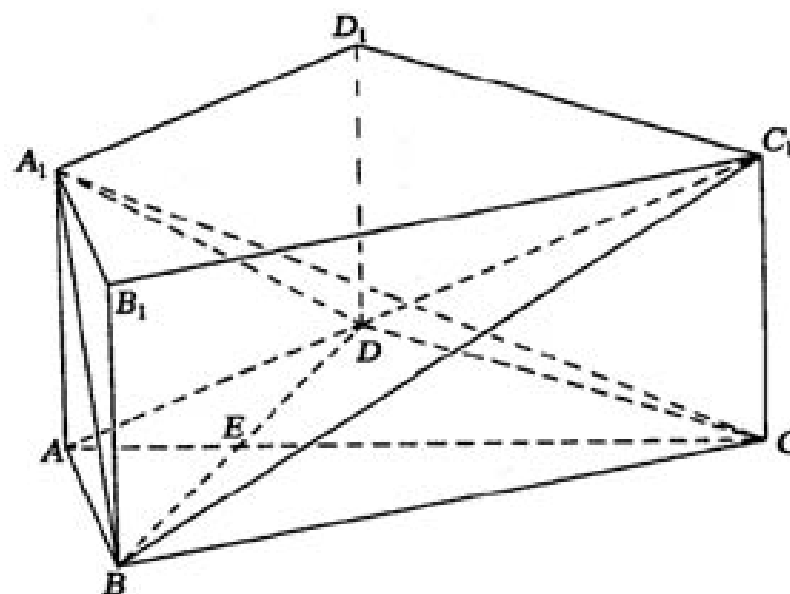
$ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=AD=2$, $DC=2\sqrt{3}$,

$AA_1=\sqrt{3}$, $AD \perp DC$, $AC \perp BD$, y el pie de la perpendicular es E ,

(i) Prueba: $BD \perp A_1C$;

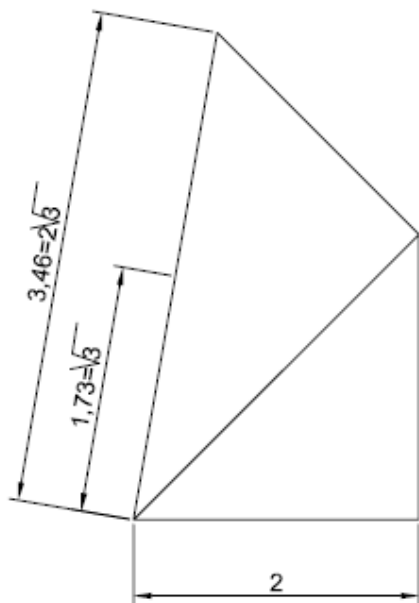
(ii) Determina el ángulo entre los dos planos A_1BD y BC_1D ;

iii) Determina el ángulo formado por las líneas AD y BC_1 , que están en planos diferentes

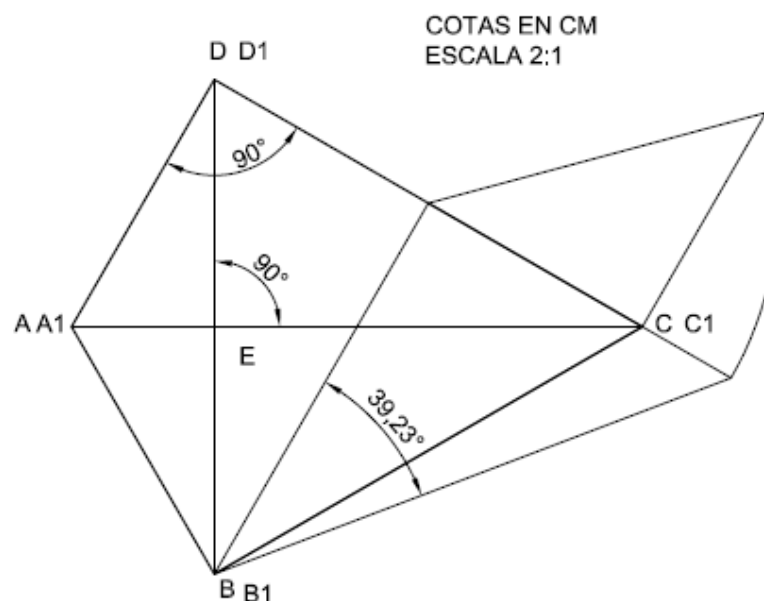
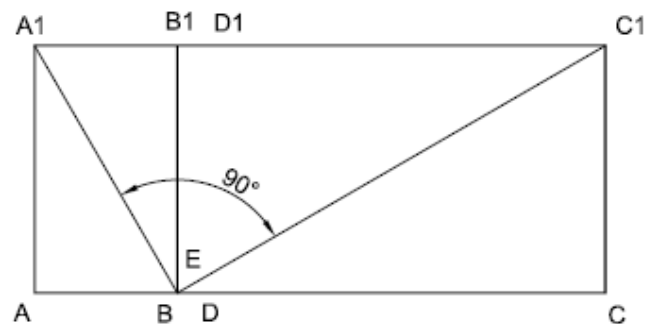


Un famoso problema de la selectividad china

Nuestra solución Gráfica



Construcción auxiliar



Un famoso problema de la selectividad china

Nuestra solución : Explicación

(I) Prueba: BD es ortogonal A_1C

Hay varias formas de demostrarlo:

- BD es perpendicular al plano proyectante horizontal A_1AC de la línea A_1C , por lo cual es ortogonal a todas las rectas de ese plano.
- Las proyecciones horizontales de las dos rectas son perpendiculares, aplicando directamente el conocido teorema de las tres perpendiculares (demostrado en muchos libros de geometría descriptiva), se puede afirmar que las dos rectas son perpendiculares. Por otro lado BD es perpe
- Si no se conocen los teoremas necesarios se puede recurrir al procedimiento utilizado en el apartado (III)

(II) Determinar el ángulo que forman los planos A_1BD y BC_1D

Por la posición de la pieza, dichos planos son perpendiculares al plano vertical de proyección, por lo cual se puede observar directamente que el ángulo que forman es de 90°

(iii) Determinar el ángulo que forman las líneas AD y BC_1

Para medir el ángulo, se ha abatido el plano que contiene a la línea BC_1 y una paralela a AD por el punto B, obteniéndose un valor de 39.23°

Todos los resultados se pueden comprobar fácilmente modelando el cuerpo con cualquier software con herramientas de modelado 3D.

Un famoso problema de la selectividad china

El ganador

Después de una repercusión mundial, la Academia nombró un ganador



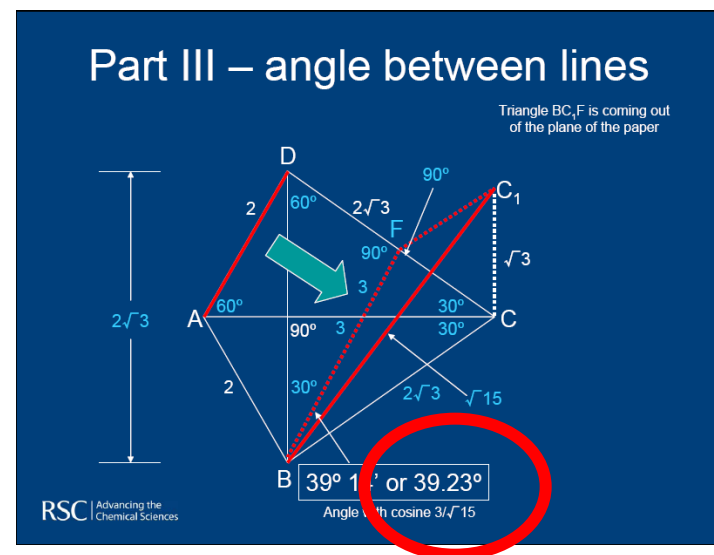
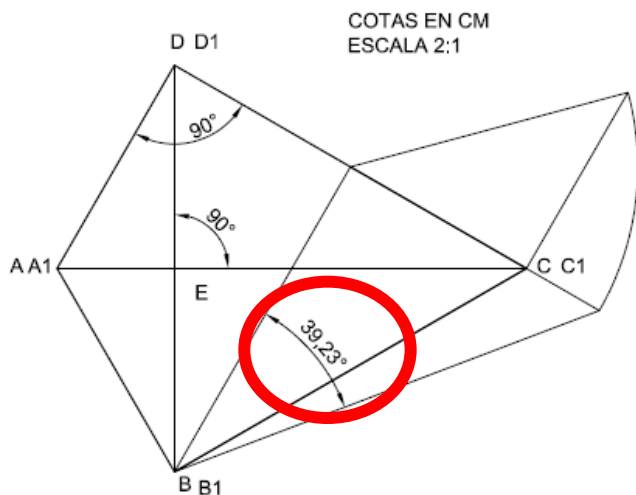
David Brockley

y puso en su página Web la solución oficial.

<http://www.rsc.org/AboutUs/News/PressReleases/2007/CompWinner.asp>

Un famoso problema de la selectividad china

Solución oficial: ¡GRÁFICA!



Entornos de trabajo

Formas de plantear y solucionar un problema geométrico

Problema: Distancia de un punto a una recta

Solución Matemática

Distancia de un punto P (x_p, y_p) a una recta $Ax + By + C = 0$

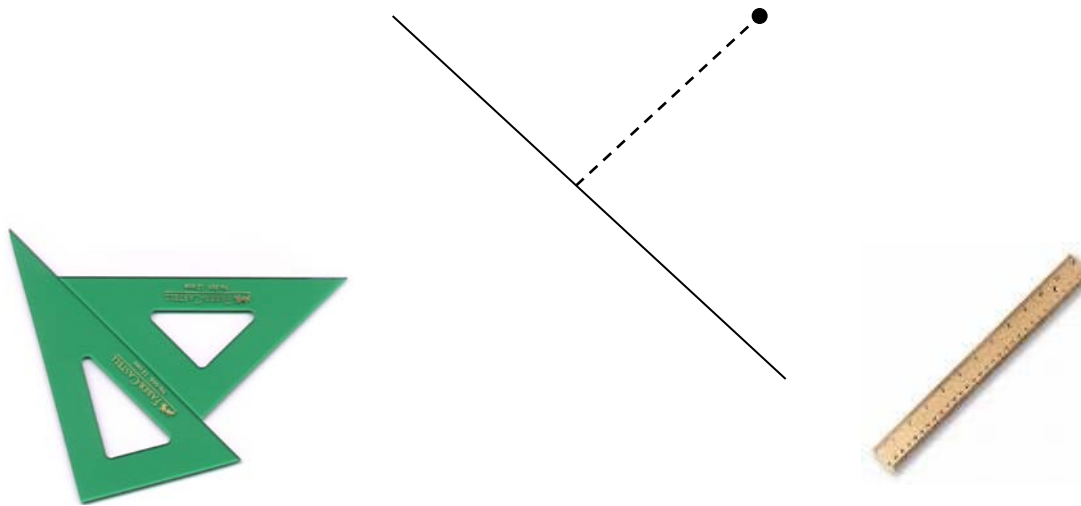
$$d = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Entornos de trabajo

Formas de plantear y solucionar un problema geométrico

Problema: Distancia de un punto a una recta

Solución Gráfica

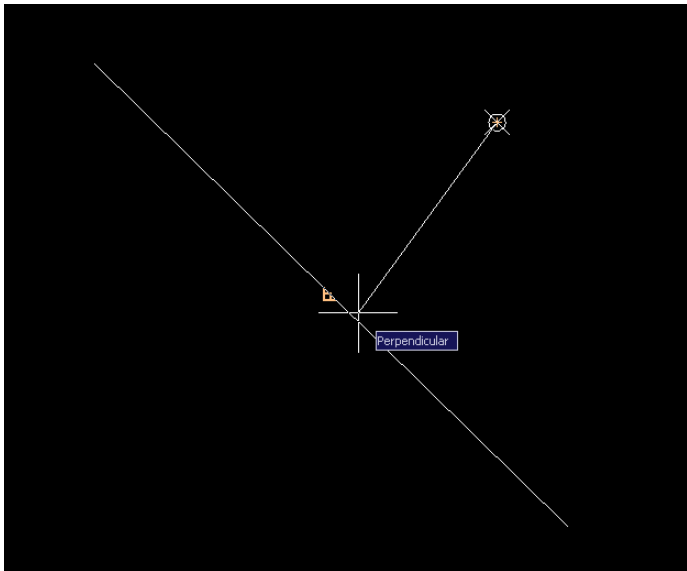


Entornos de trabajo

Formas de plantear y solucionar un problema geométrico

Problema: Distancia de un punto a una recta

Solución Gráfica: DAO



algoritmos
matemáticos

Geometría
computacional

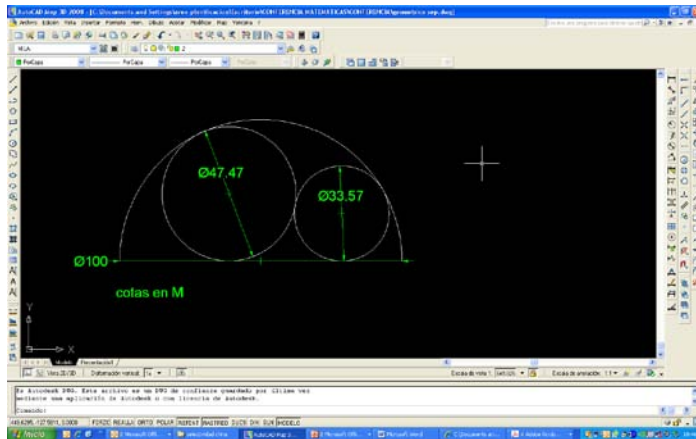


**Solución Matemática
distinta**

Herramientas

Materiales

DAO ó CAD



Herramientas

Materiales

Las normales en Dibujo Técnico



Herramientas

Materiales

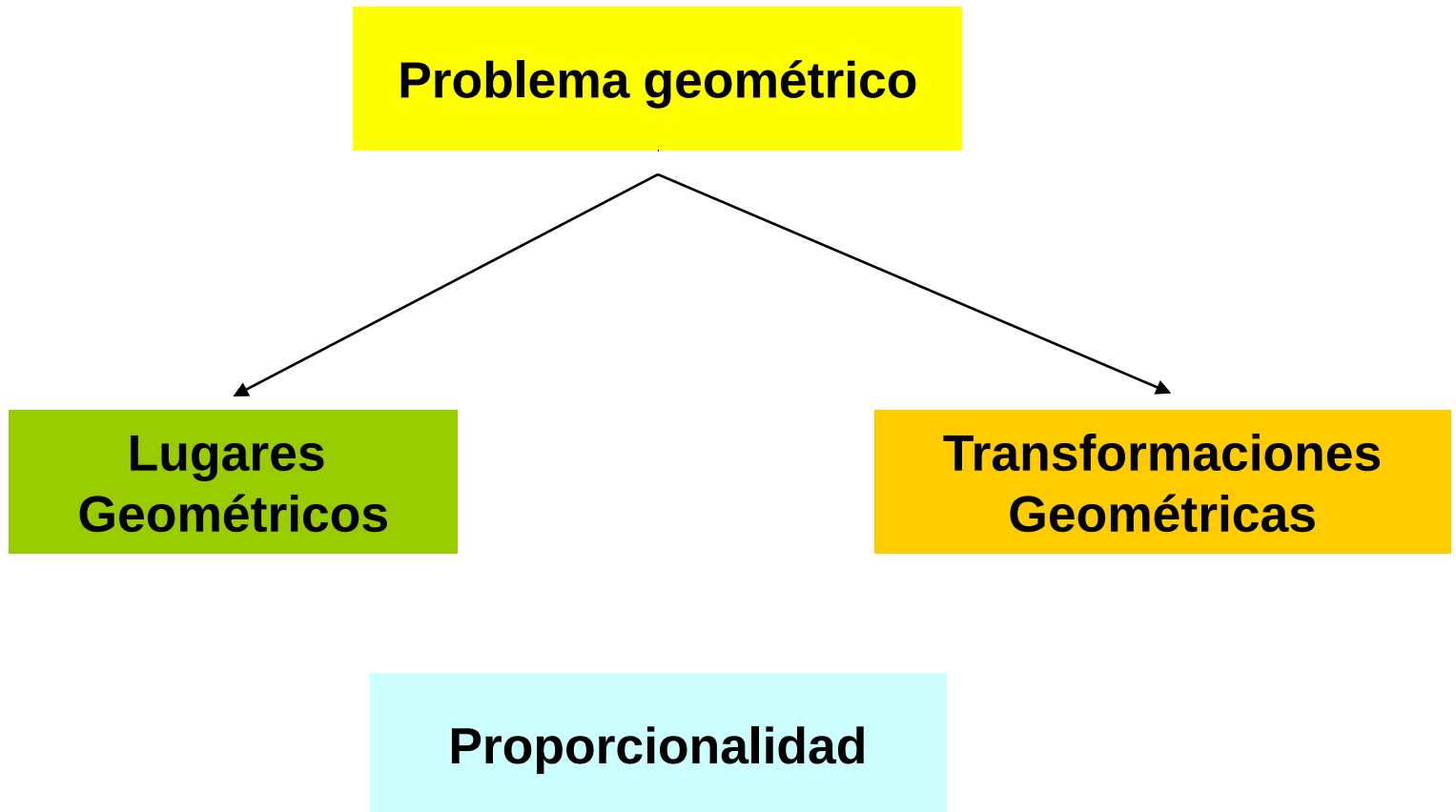
Las que tenemos disponibles hoy para el taller

- ✓ Lápiz,
- ✓ “regla”
- ✓ cuerda,
- ✓ papel,
- ✓ tiza.



Herramientas

“Abstractas”



Metodología

1. Hacer un **Croquis** con todos los elementos del problema
2. Completar el Croquis con el problema resuelto. **Ver la solución**
3. Estudiar las relaciones entre las figuras geométricas. Observar la **geometría**
4. Buscar la manera de llegar a la solución utilizando las **herramientas** abstractas conocidas.
5. Elegimos la mejor herramienta material, en función de la **eficacia de las respuesta**, a veces la mejor es la que tenemos a mano
6. Resolvemos.

NO HAY RECETAS

HAY QUE PENSAR

HAY QUE SABER JUSTIFICAR LA RESPUESTA

Lugares Geométricos

- ¿Qué es un lugar Geométrico?

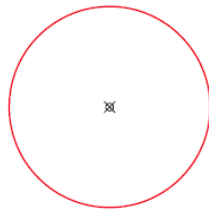
“Cuando una figura contiene todos los puntos que cumplen una determinada propiedad y recíprocamente sólo contiene puntos que la cumplen, se dice que es el lugar geométrico de dichos puntos” ...

Puig Adam, Curso de Geometría métrica. Fundamentos

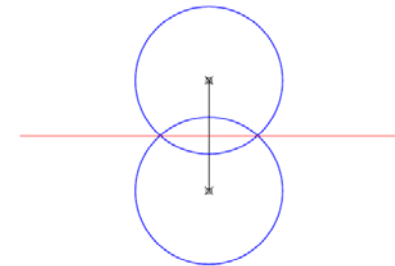
Lugares Geométricos

Los más sencillos

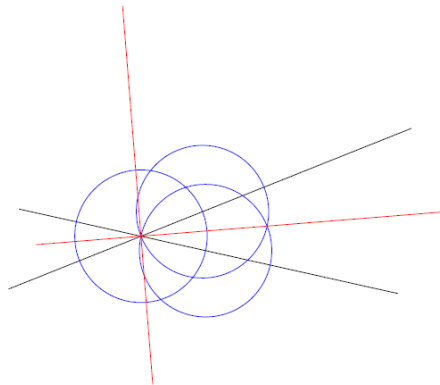
Circunferencia



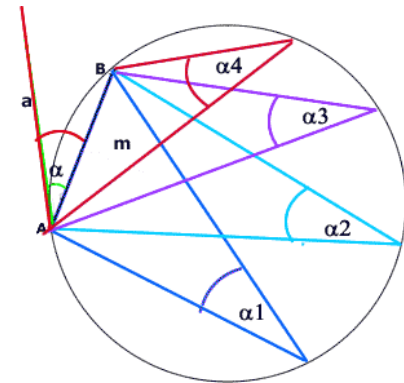
Mediatriz



Bisectriz



Arco Capaz



Taller (I)

¿QUÉ PODEMOS HACER CON LAS HERRAMIENTAS QUE TENEMOS?

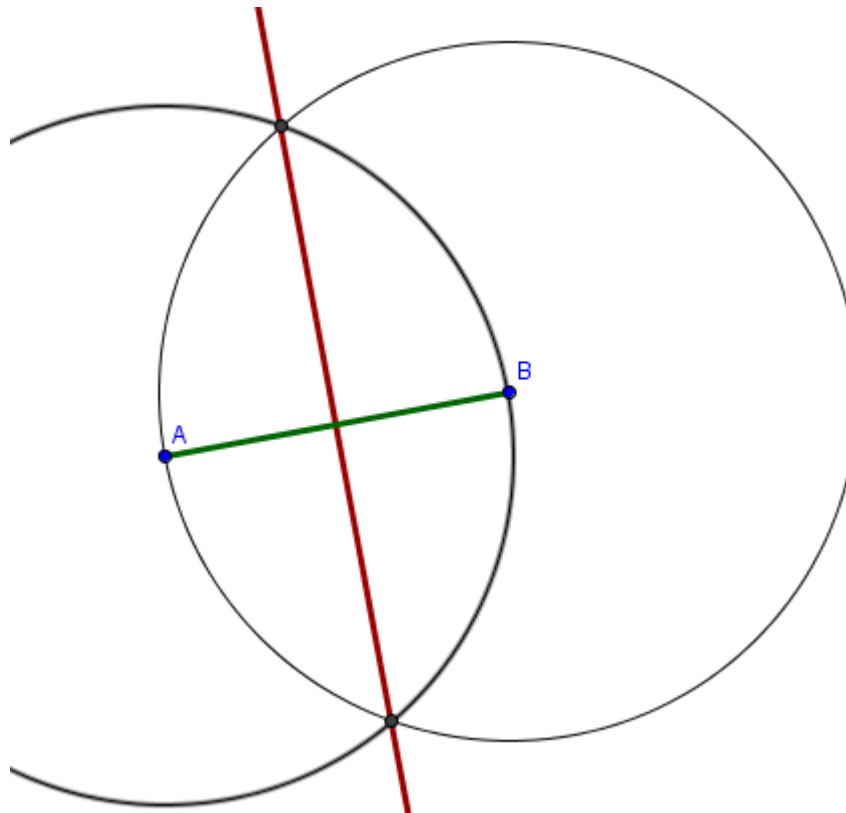
1. Mediatriz de un segmento
2. Perpendicular a una recta por un punto dado
3. Triángulo equilátero
4. Bisectriz de un ángulo
5. Paralela a una recta por un punto dado
6. Perpendicular a una recta por un punto de ella. Cuadrado
7. Hexágono regular
8. Rectángulo áureo

<http://www.geogebra.org/cms/>

<http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/reglaycompas.htm>

Taller (I)

1. Mediatriz de un segmento

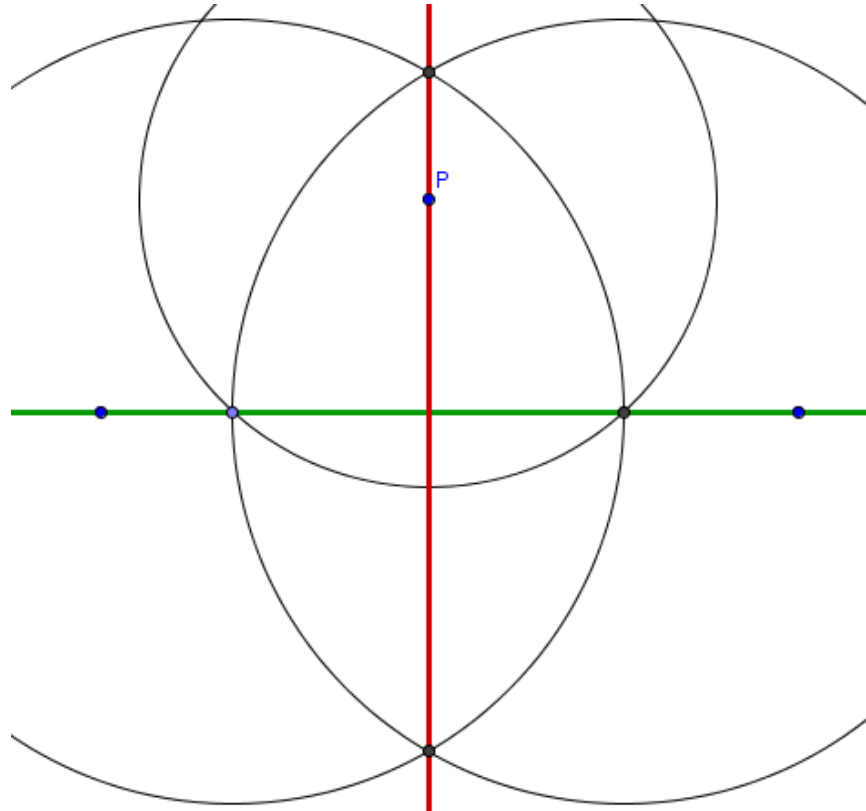


GeoGebra es un software **libre** y de **plataformas múltiples** que se abre a la educación para interactuar dinámicamente con la matemática. Ha recibido numerosas menciones en Europa y USA dedicadas a los programas educativos

http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_01mediatriz.htm

Taller (I)

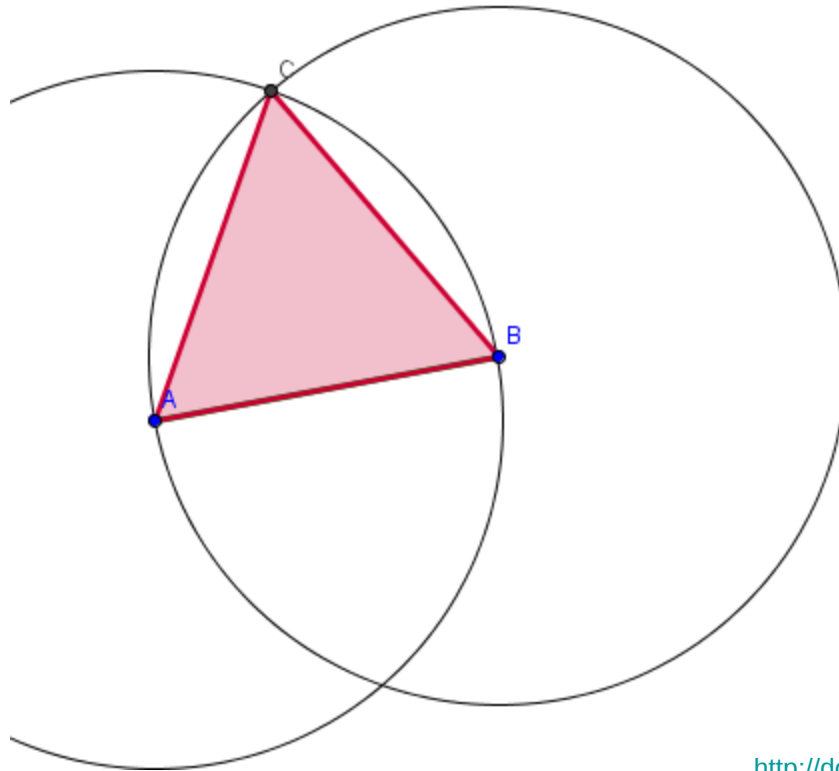
2. Perpendicular a una recta por un punto dado



http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_04perpendicular.htm

Taller (I)

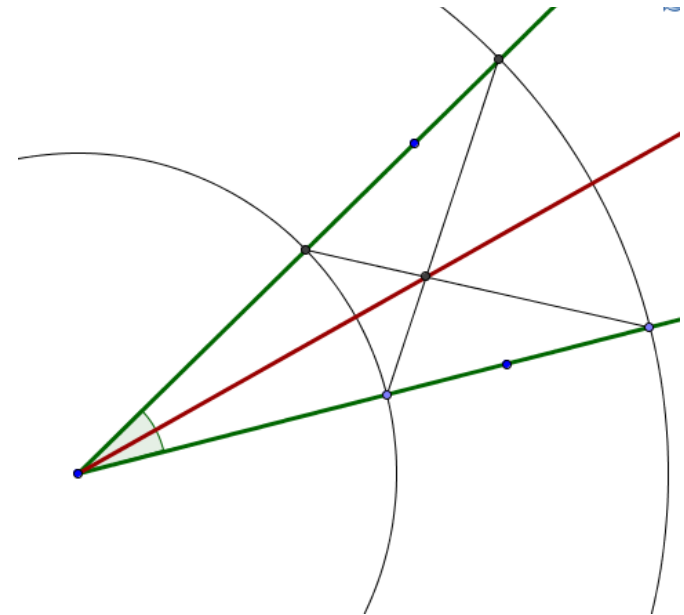
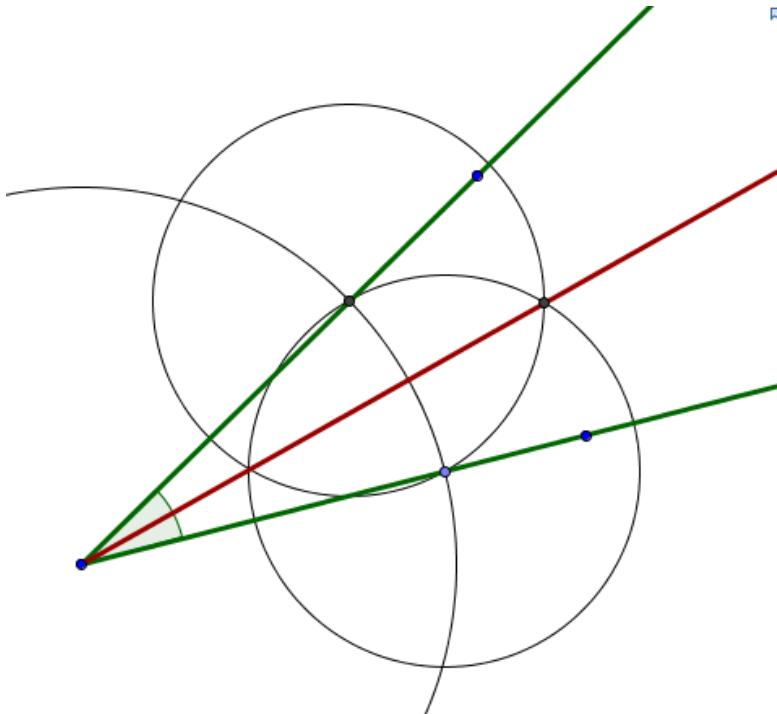
3. Triángulo Equilátero



http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_03triequilatero.htm

Taller (I)

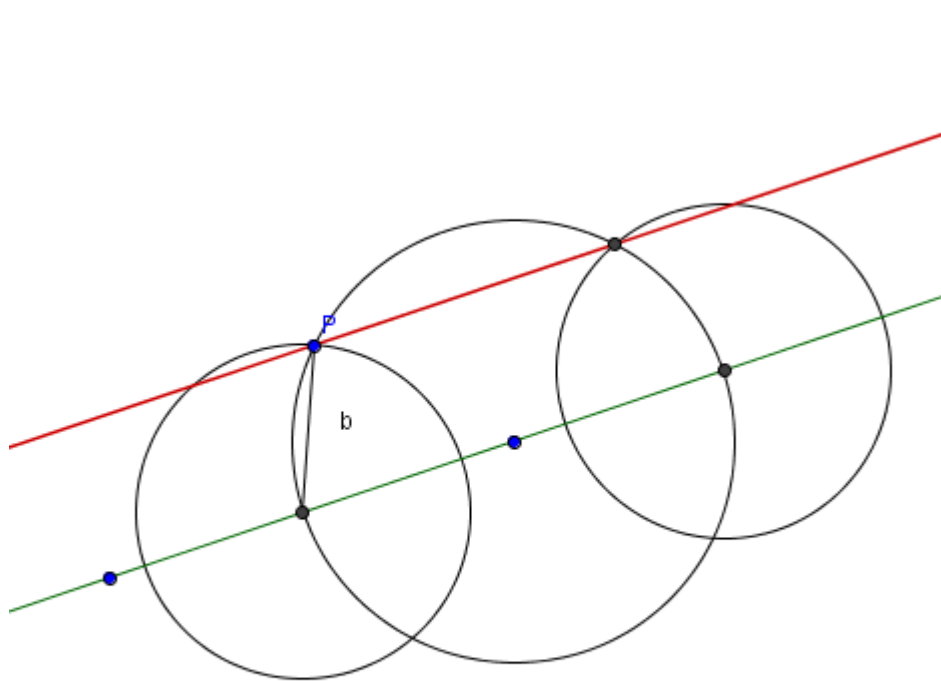
4. Bisectriz de un ángulo



http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_02bisectriz.htm

Taller (I)

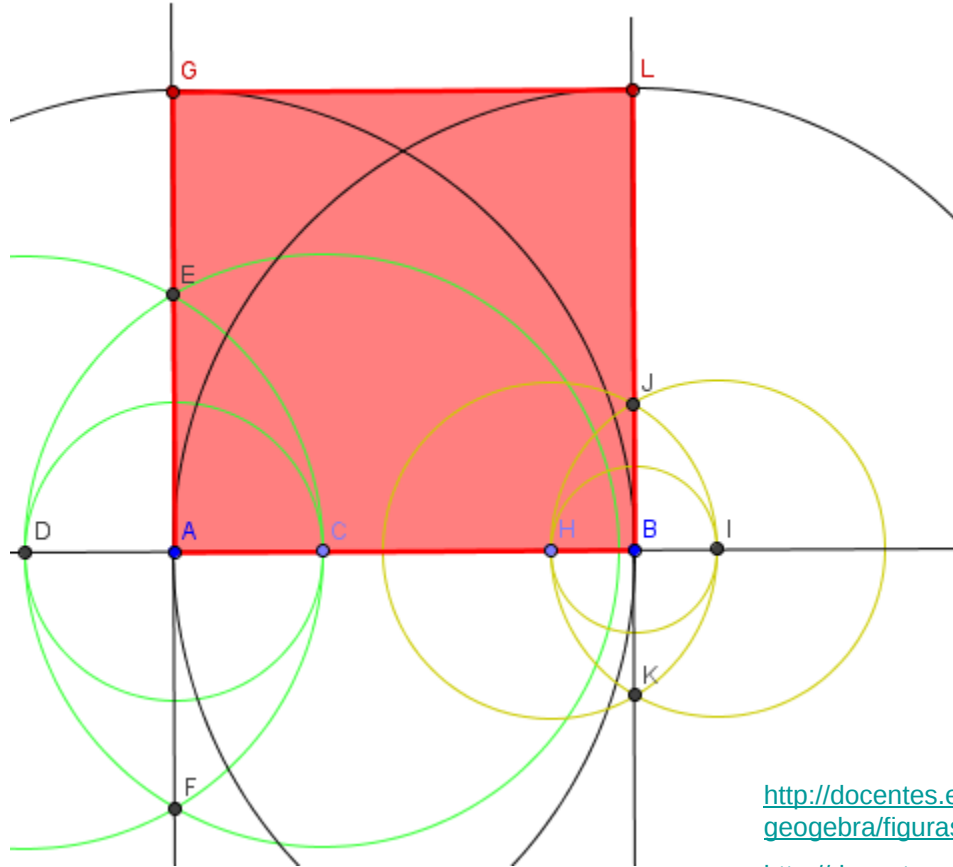
5. Paralela a una recta por un punto dado



http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_06paralela.htm

Taller (I)

6. Perpendicular a una recta por un punto de ella Cuadrado

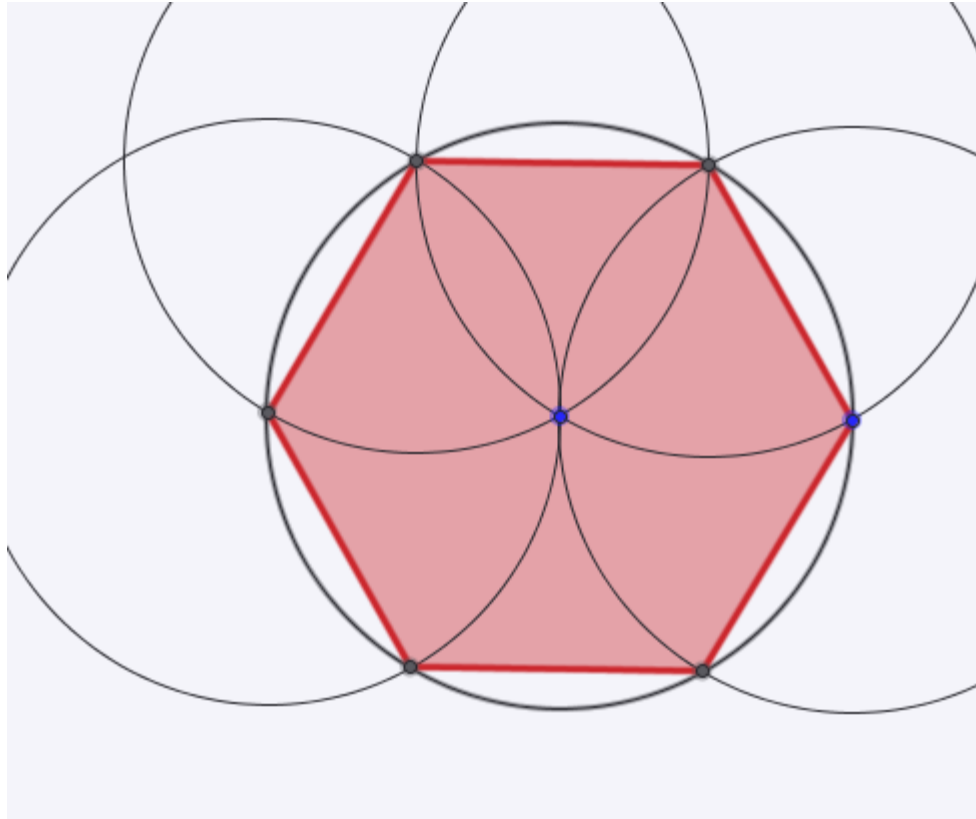


http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_05cuadrado.htm

http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_05cuadrado2.htm

Taller (I)

7. Hexágono regular

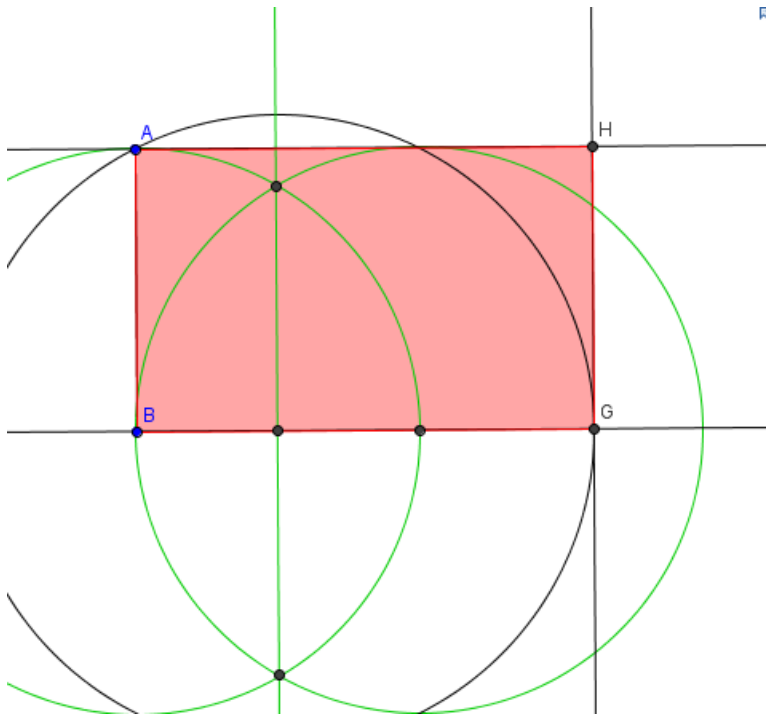


http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_07hexagono.htm

Taller (I)

8. Rectángulo áureo

Los griegos lo consideraban de particular belleza y lo utilizaron asiduamente en su arquitectura. A la mayoría de las personas les parece más agradable a la vista un rectángulo con esas proporciones entre sus lados



$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034..$$

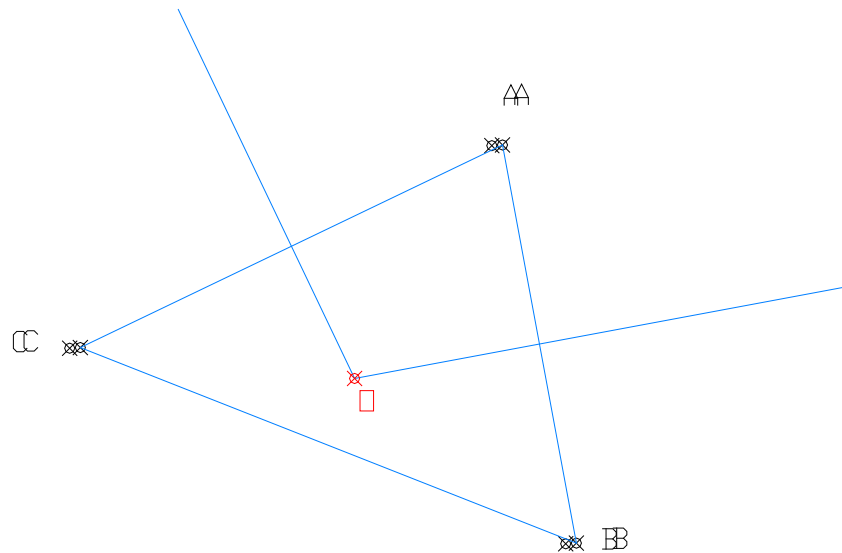
$$BG = \frac{1+\sqrt{5}}{2} AB = \Phi AB$$

<http://rt000z8y.eresmas.net/EI%20numero%20de%20oro.htm>

http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/ryc_07hexagono.htm

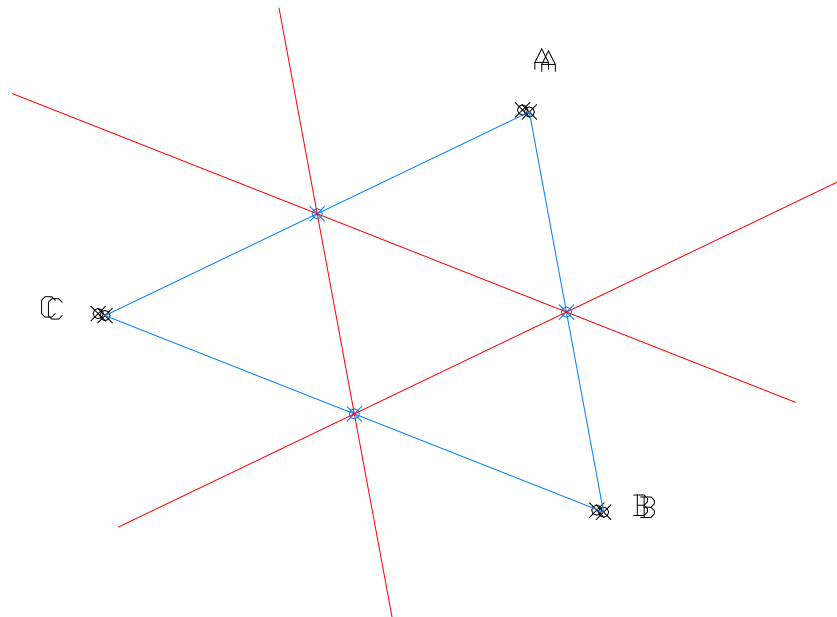
Algunos problemas sencillos

Trazar un punto que equidiste de otros tres dados



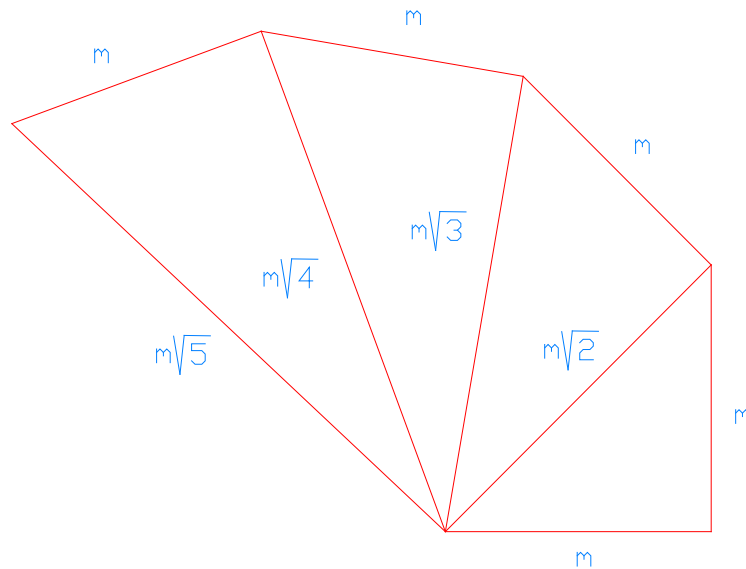
Algunos problemas sencillos

Trazar una recta que equidiste de tres puntos dados



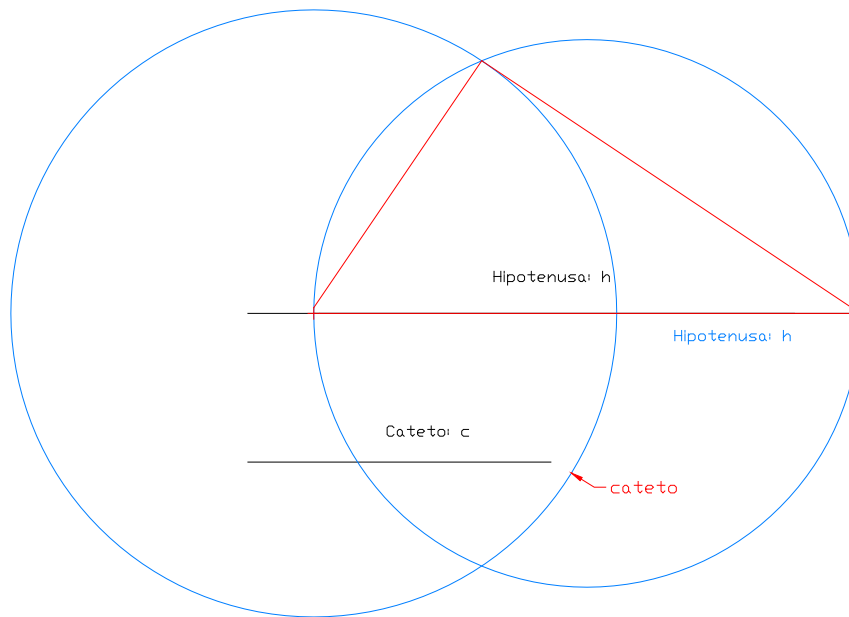
Algunos problemas sencillos

Obtención raíces de 2,3,4,5.....



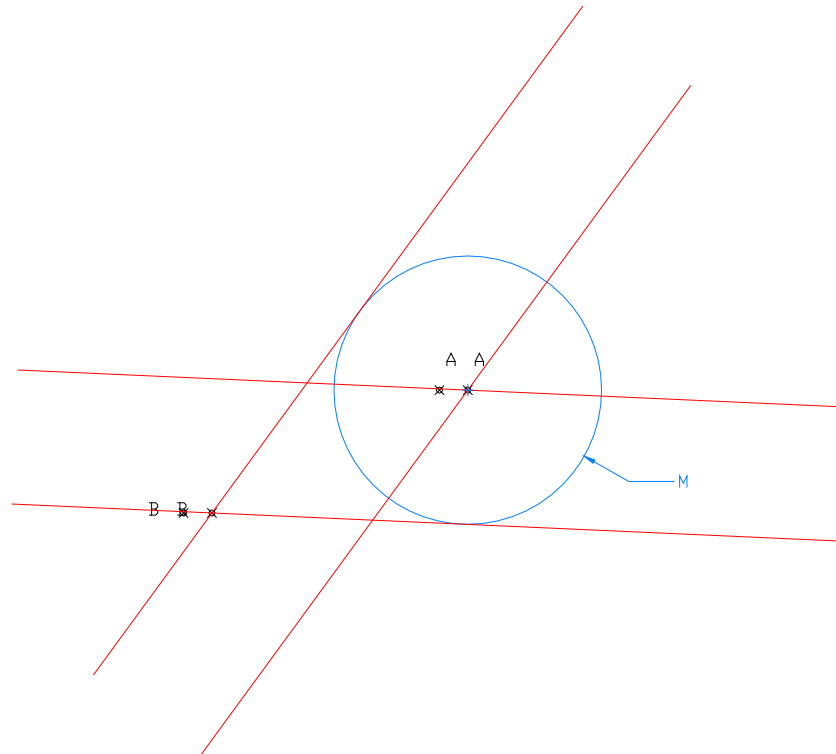
Algunos problemas sencillos

Triángulo rectángulo. Conocida la hipotenusa y un cateto



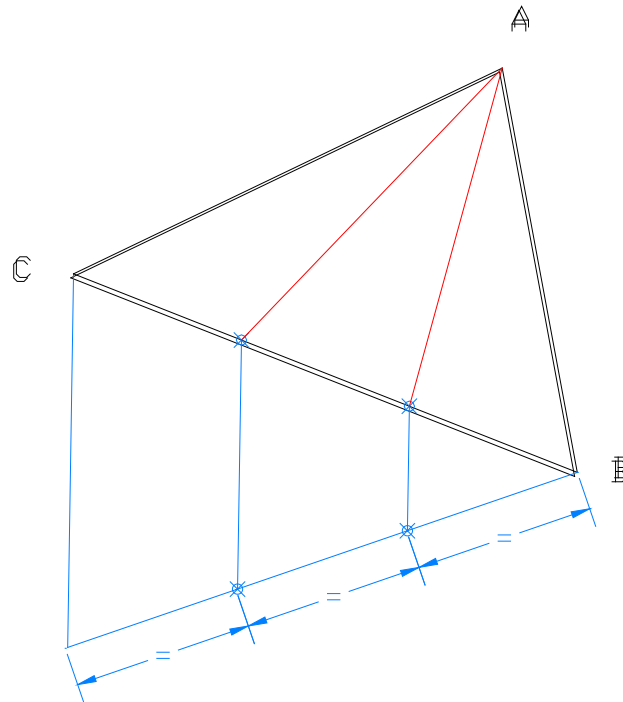
Algunos problemas sencillos

Dados dos puntos, trazar por ellos dos paralelas de que disten una magnitud m



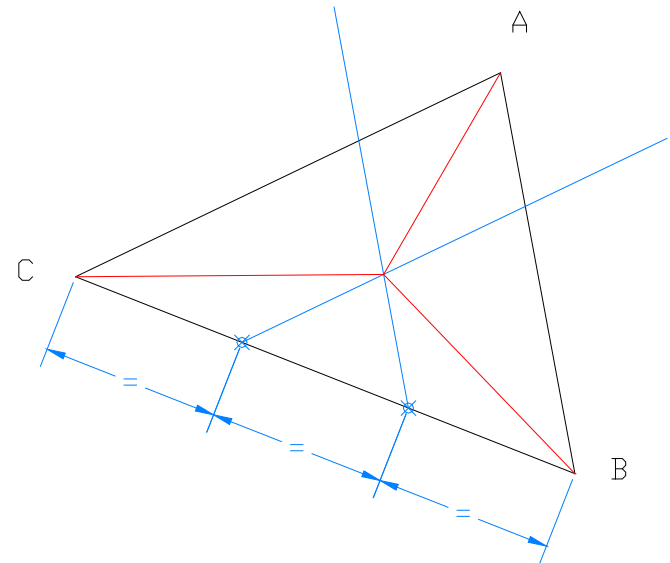
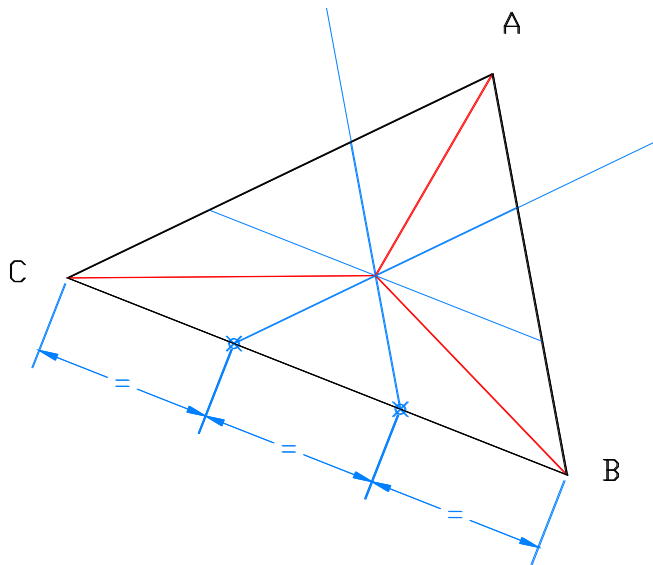
Algunos problemas sencillos

Dividir un triángulo en tres partes equivalentes (igual área), utilizando rectas que concurran en un vértice.



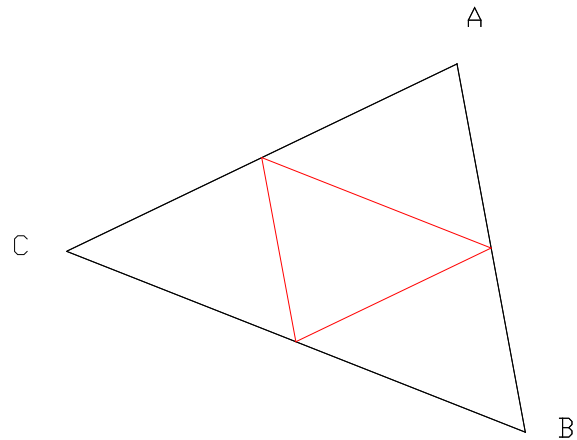
Algunos problemas sencillos

Dividir un triángulo en tres partes equivalente (igual área), utilizando rectas que saliendo de los vértices concurran en un punto interior



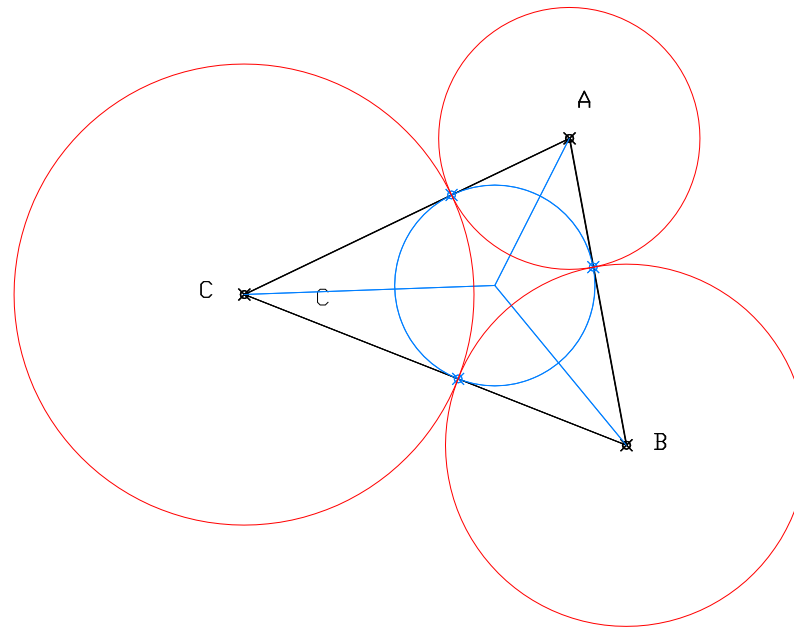
Algunos problemas sencillos

Dividir un triangulo en cuatro partes equivalentes



Y no tan sencillos

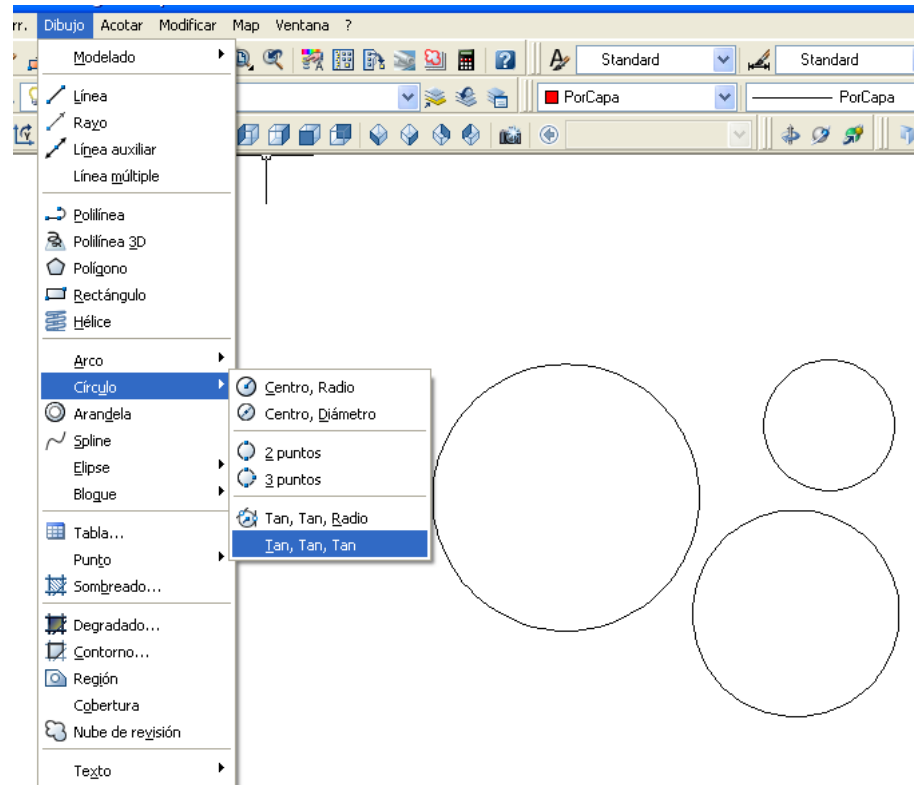
Tres circunferencias tangentes con centros en los vértices de un triángulo dado



Y no tan sencillos

Problemas de trazado

Los problemas de tangencia los resuelve muy fácilmente una aplicación DAO



ESA ES LA MEJOR HERREMIENTA

Otros lugares Geométricos

La geometría y el cine Hipatia dibuja una elipse



Rachel Weisz, caracterizada como Hipatia de Alejandría, en una escena del largometraje riguroso, del cineasta Alejandro Amenábar

Matemáticas en la sala de cine

La nueva película de Amenábar, «Agora», en la que se retrata la vida de Hipatia de Alejandría, nos refresca la aritmética y conceptos como las secciones cónicas

A principios de año (La Voz de la Escuela, 11 de febrero del 2009) ya nos hicimos eco en estas páginas del rodaje de *Agora*, la película en la que el realizador español Alejandro Amenábar retrata la vida de la filósofa, matemática y astrónoma Hipatia de Alejandría. En aquella ocasión nos centramos más en explicar los avatares de la existencia —y sobre todo de la muerte— de esta eminente científica, pero hoy vamos a tratar de adentrarnos en su legado.

Hija del filósofo y matemático Teón, se cree que Hipatia nació a mediados del año 355 y se sabe que murió asesinada en marzo del 415. Vivió en Alejandría, la gran ciudad de Egipto durante el Imperio romano. En la página web del Centro Virtual de divulgación de las matemáticas (<http://divulgmat.es>) encontramos como siempre valiosa documentación para trabajar. En este caso nos fijamos en el apartado de Historia de las matemáticas y vamos a la sección de biografías de matemáticos ilustres.

Allí nos encontramos con la vida y obra de Hipatia. Según estas fuentes, la científica escribió tres obras matemáticas: un comentario a la famosa *Aritmética* de Diófanto de Alejandría, un trabajo propio titulado *Canon astronómico* y un comentario sobre las secciones cónicas del geometa Apolonio de Perga. También se cree que amplió las notaciones de su padre sobre los elementos de Euclides, y el *Almagesto*, de Tolomeo.

SECCIONES CÓNICAS

Vamos a tratar de profundizar en alguno de estos conceptos. Sabes cómo es un cono? Dibuja uno sobre un papel. Ahora trata de imaginar que lo cortas con un cuchillo desde su vértice superior hasta su base formando diferentes ángulos al cortar. Así surgen las secciones cónicas, que estudió siendo Apolonio, que Hipatia revisó y que, curiosamente, luego fueron rescatadas en el olvido hasta que la geometría del siglo XVII les devolvió su protagonismo.

Si cortas el cono poniendo tu cuchillo imaginario paralelo al círculo de la base obtienes un círculo, también paralelo a la base pero de menor diámetro (menor cuanto más subes hacia el vértice). Si inclinas un poco el filo el corte será una elipse y, según aumentes el ángulo de inclinación, surgen otras dos cónicas: la parábola y la hipérbola. Acude a tu libro de matemáticas para ver las definiciones de estos cuatro elementos: círculo, elipse, parábola e hipérbola. A hora vuelve a tu cono, ese cono sobre la definición con lo que habías entendido al trazar tus cortes imaginarios? ¿Por qué se llaman secciones cónicas? ¿Comprendes a hora mejor la definición técnica?

Si ya has visto la película, trata de hacer memoria. Hay una escena en que aparece el plano como de Apolonio. Es una figura de medida para estudiar las secciones que acabamos de revisar.

© Luis Pousa
<http://www.luispousa.es>

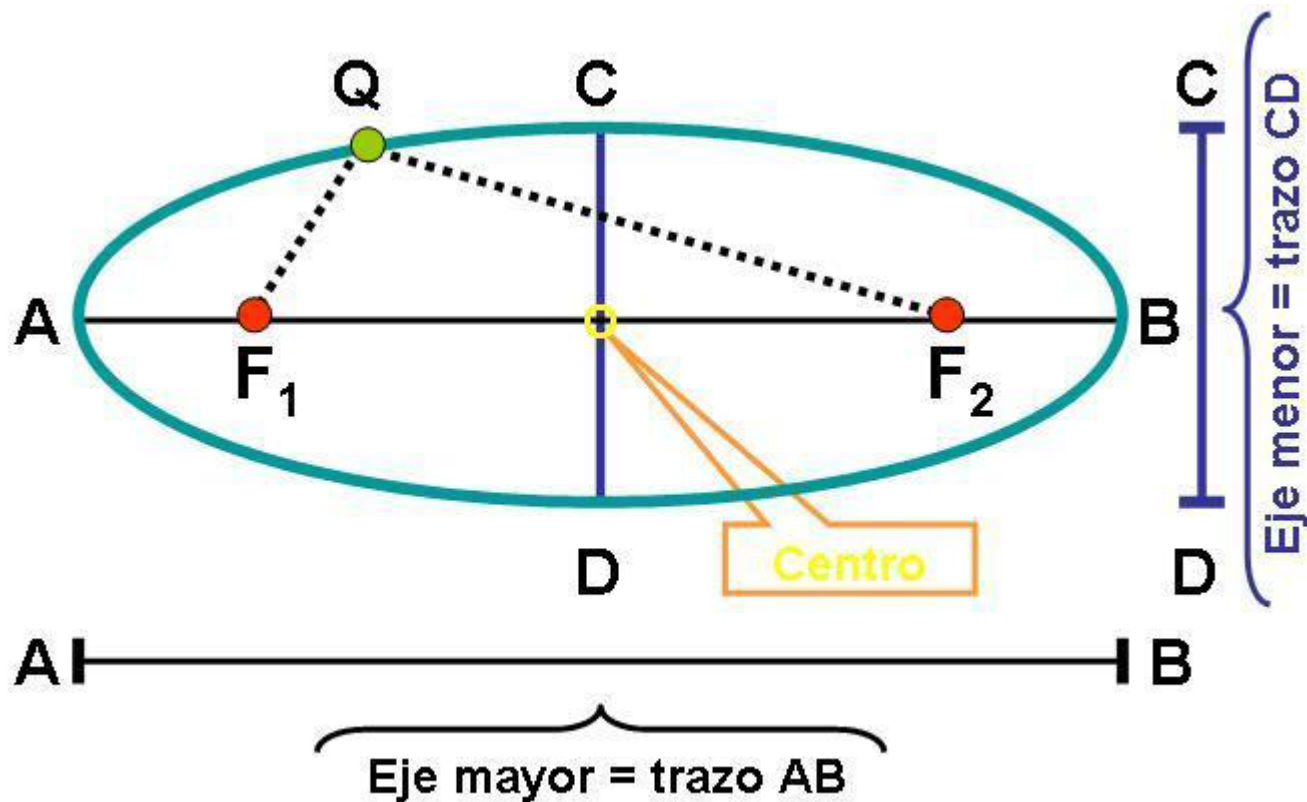
Otros lugares Geométricos

Las cónicas

LA ELIPSE

Hay muchas más formas de definirla:

$$F_1Q + F_2Q = d = 2a$$



<http://es.wikipedia.org/wiki/Elipse>

OTRA FORMA DE DEFINIR LA ELIPSE

Un problema de la Olimpiada de Dibujo Técnico 2009



En la figura 5 se han representado dos circunferencias de radios 8.5 y 3 cm respectivamente, cuyos centros se encuentran a 3.5 cm de distancia.

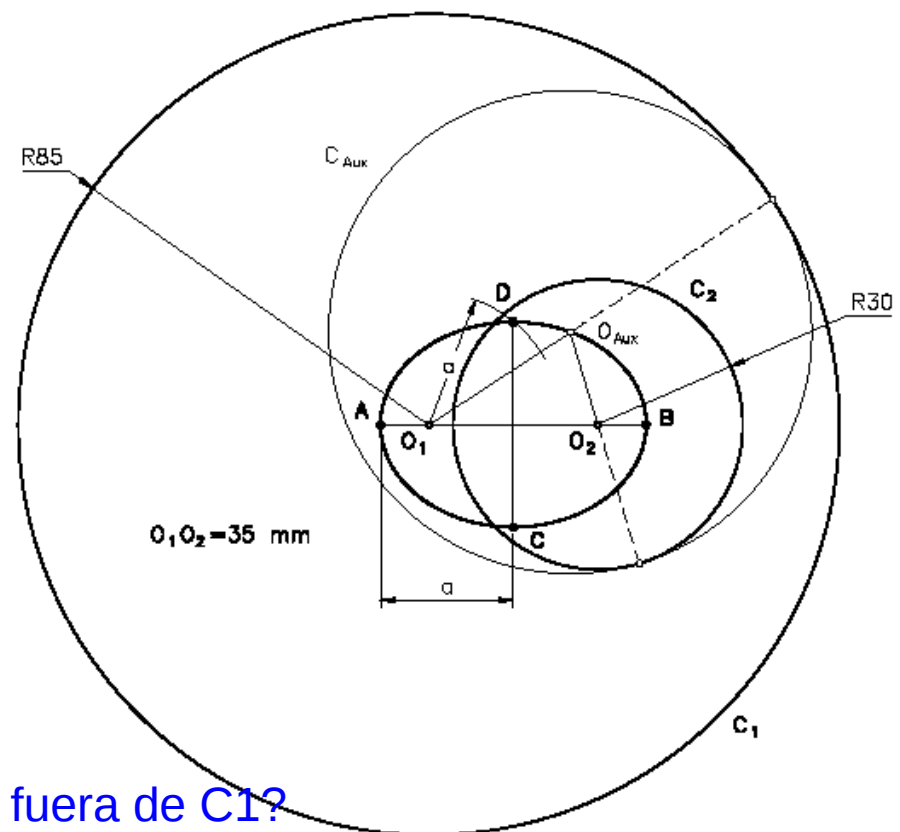
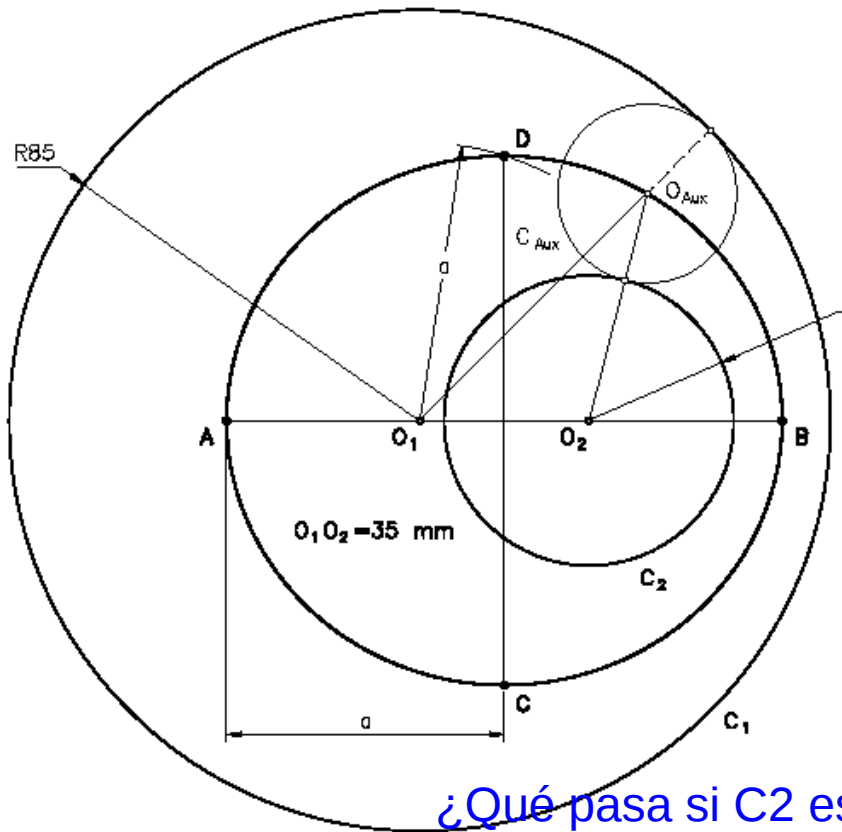
Se pide:

1. Definir de manera justificada cuál es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a las dos dadas. *Se incluirá una breve explicación en la parte posterior de la hoja en la que se resuelva el ejercicio.*
2. Caracterizar los puntos notables de este lugar geométrico.
3. Dibujar el lugar geométrico descrito.

OTRA FORMA DE DEFINIR LA ELIPSE

Un problema de la Olimpiada de Dibujo Técnico 2009

El lugar geométrico pedido se compone de dos elipses que, por claridad, se dibujan en figuras distintas.



¿Qué pasa si C2 está fuera de C1?

Cuando se consideran las circunferencias tangentes que son interiores a C_1 y exterior a C_2 , sus centros describen una elipse de focos O_1 y O_2 y constante $2a=11.5$ cm. Los centros O_1 y O_2 de las circunferencias dadas son puntos fijos y además se verifica que para una cualquiera de las circunferencias C_{AUX} que definen el lugar:

$$O_1O_{AUX} + O_{AUX}O_2 = (R_1 - R_{AUX}) + (R_2 + R_{AUX}) = R_1 + R_2 = cte$$

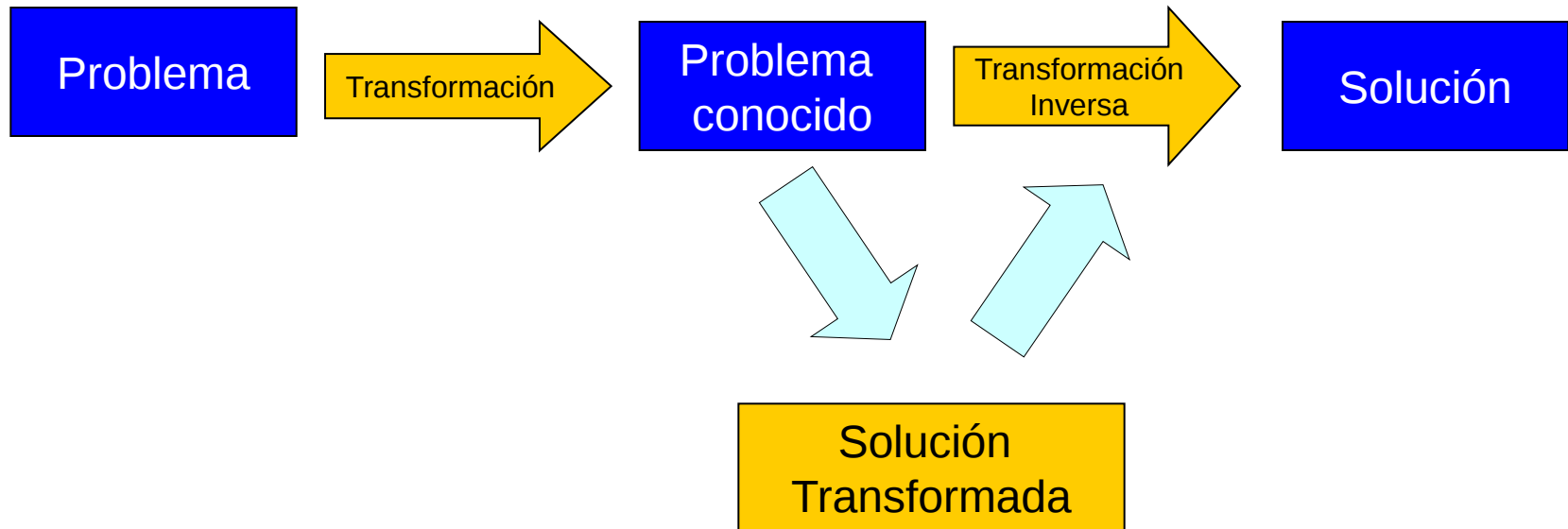
Cuando se consideran las circunferencias tangentes que son interiores a C_1 y dejan en su interior a C_2 , sus centros describen una elipse de focos O_1 y O_2 y constante $2a=5.5$ cm. Los centros O_1 y O_2 de las circunferencias dadas son puntos fijos y además se verifica que para una cualquiera de las circunferencias C_{AUX} que definen el lugar:

$$O_1O_{AUX} + O_{AUX}O_2 = (R_1 - R_{AUX}) + (R_{AUX} - R_2) = R_1 - R_2 = cte$$



Transformaciones Geométricas

Proceso de resolución de problemas mediante transformaciones geométricas

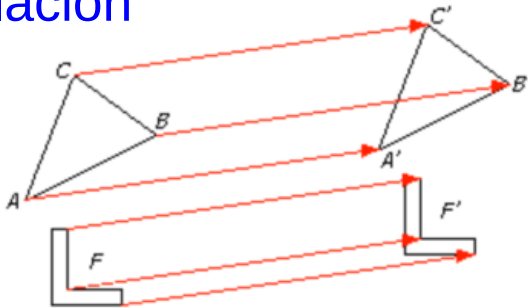


Transformaciones Geométricas Planas

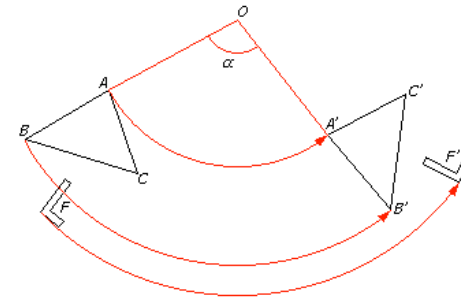
Clasificación según las propiedades que se conservan
Lo que las hace útiles

Isométricas: Conservan la forma: dimensiones y ángulos. “Movimientos”

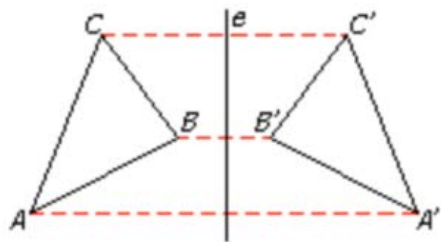
Traslación



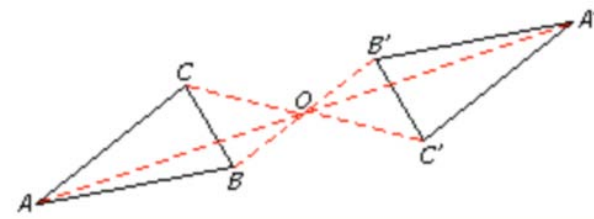
Giro



Simetría axial



Simetría central

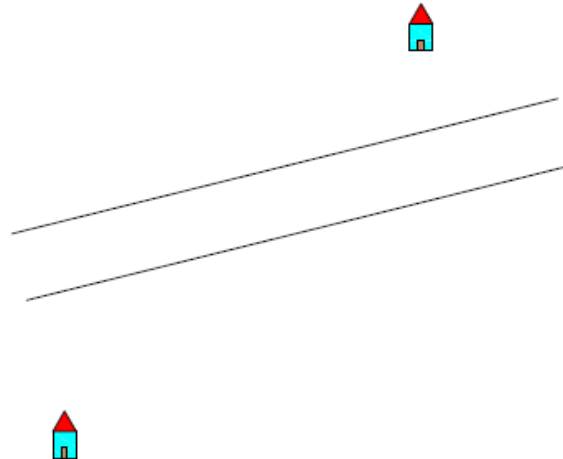


Transformaciones Geométricas Planas

Traslación

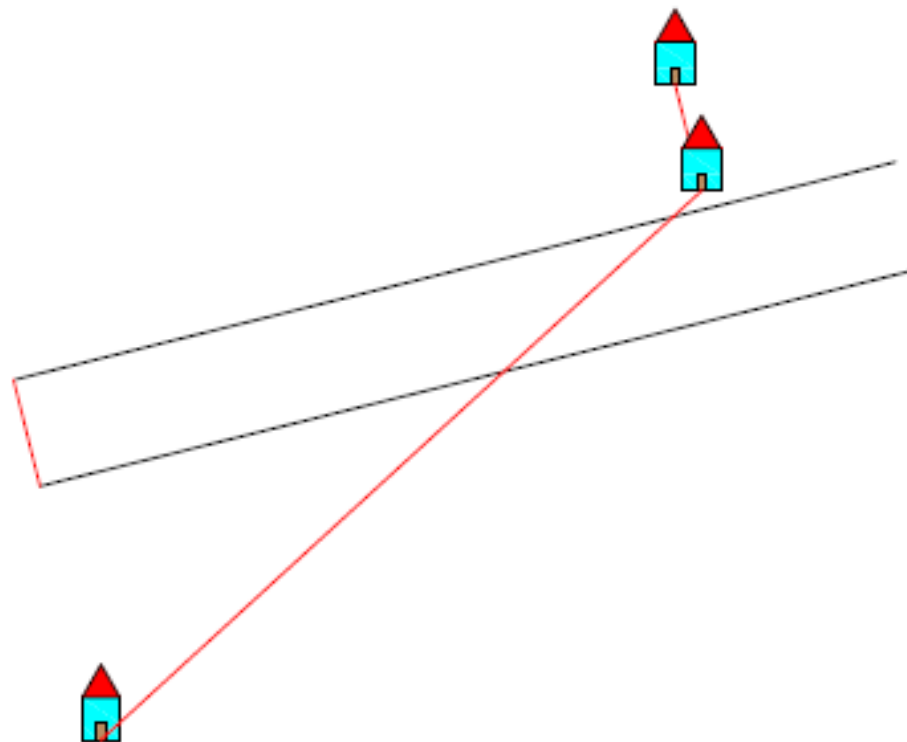
Problema 1: El río, las dos casas y el puente

Se quiere construir un camino entre dos casas separadas por un río. Sabiendo que el puente debe cruzar el río perpendicularmente. ¿Dónde se debe colocar para que la longitud del camino sea la menor posible?



Transformaciones Geométricas Planas

Traslación



Transformaciones Geométricas Planas

Traslación

Problema 2: Examen de selectividad Junio 2009

Dados dos puntos A y D del plano separados 90 mm,

Se pide:

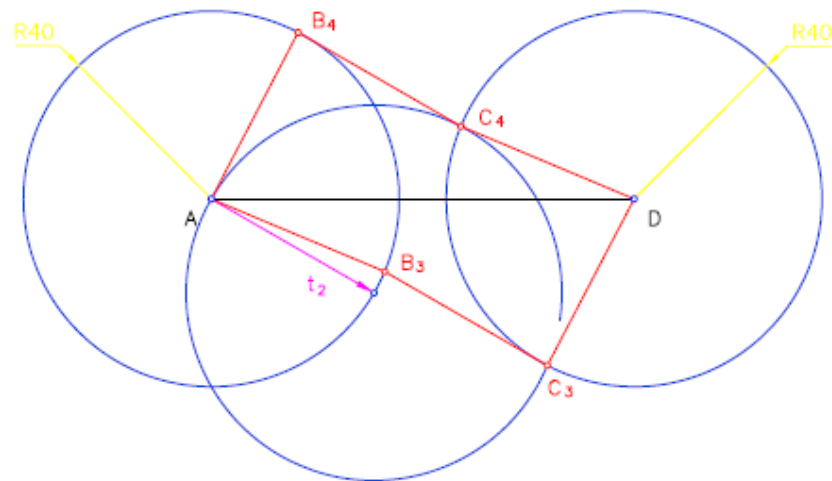
Dibujar una poligonal ABCD compuesta por tres tramos, cada uno de ellos de longitud 40 mm, de forma que el tramo central sea paralelo a una dirección que forma 30° con el segmento AD.

Notas:

1. Se dibujarán todas las soluciones posibles.
2. Se justificará brevemente el procedimiento empleado.

Transformaciones Geométricas Planas

Traslación

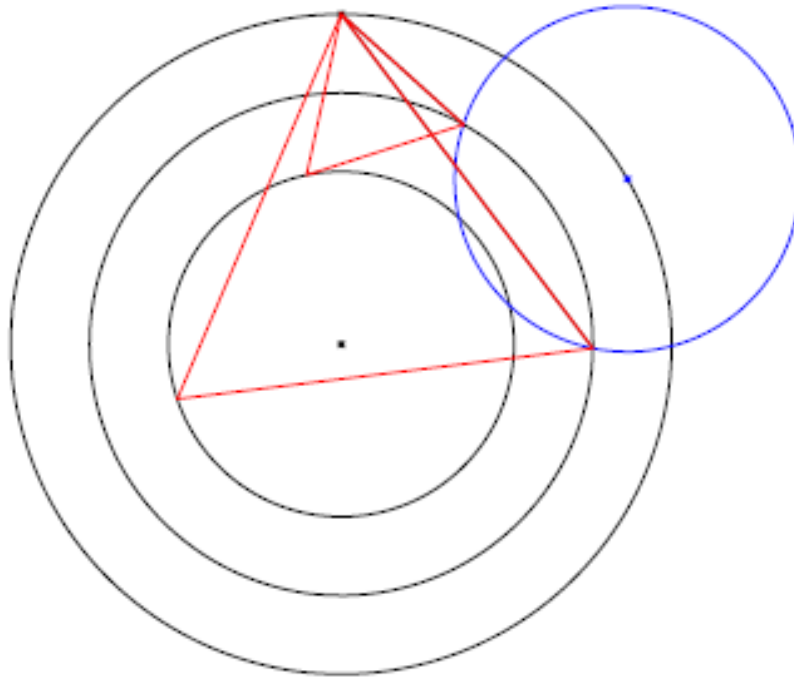


Transformaciones Geométricas Planas

Giro

Problema:

Obtener el lado de un triángulo equilátero que tenga cada uno de sus vértices en tres circunferencias concéntricas dadas.



¿Siempre tiene solución el problema?

Transformaciones Geométricas Planas

Simetría Axial



Problema: OLIMPIADA DIBUJO TÉCNICO 2007.

El rectángulo de la figura representa una mesa de billar americano a escala 1/30.

La última bola (bola 8) se encuentra justo en el centro del tablero. El jugador al que le toca tirar quiere lucirse, él sabrá porqué, y decide que va a hacerlo a tres bandas, esto es, la bola tocará tres bandas antes de colarse en uno cualquiera de los cuatro agujeros de las esquinas, y además lo hará con el recorrido más largo posible.

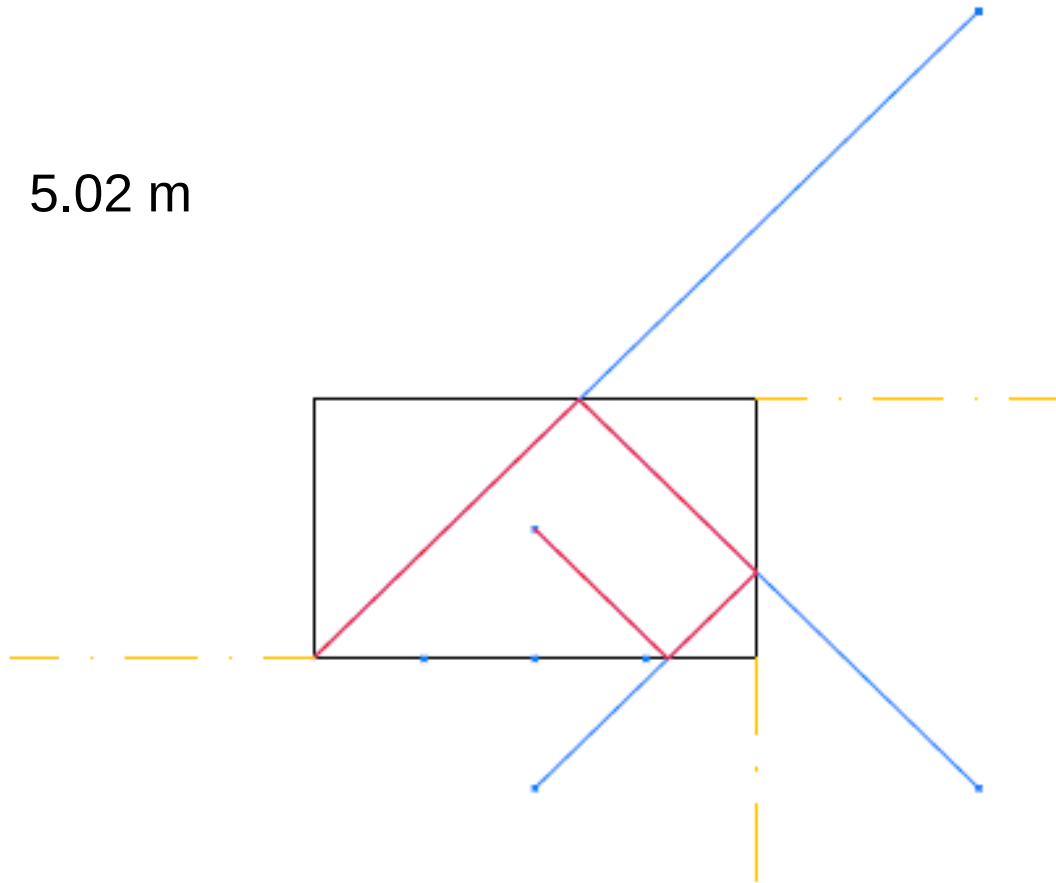
Se pide:

- Dibujar la trayectoria que describe la bola y calcular la longitud en metros de la misma.

Transformaciones Geométricas Planas

Simetría Axial

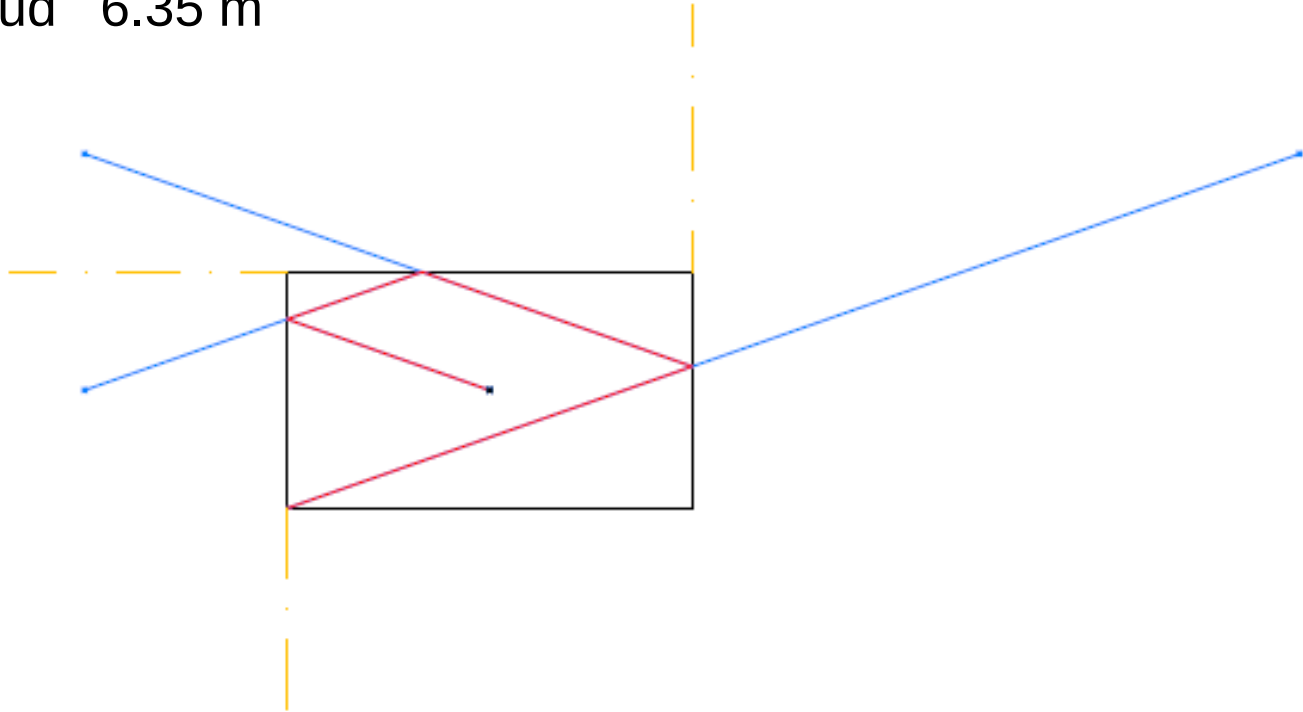
Longitud: 5.02 m



Transformaciones Geométricas Planas

Simetría Axial

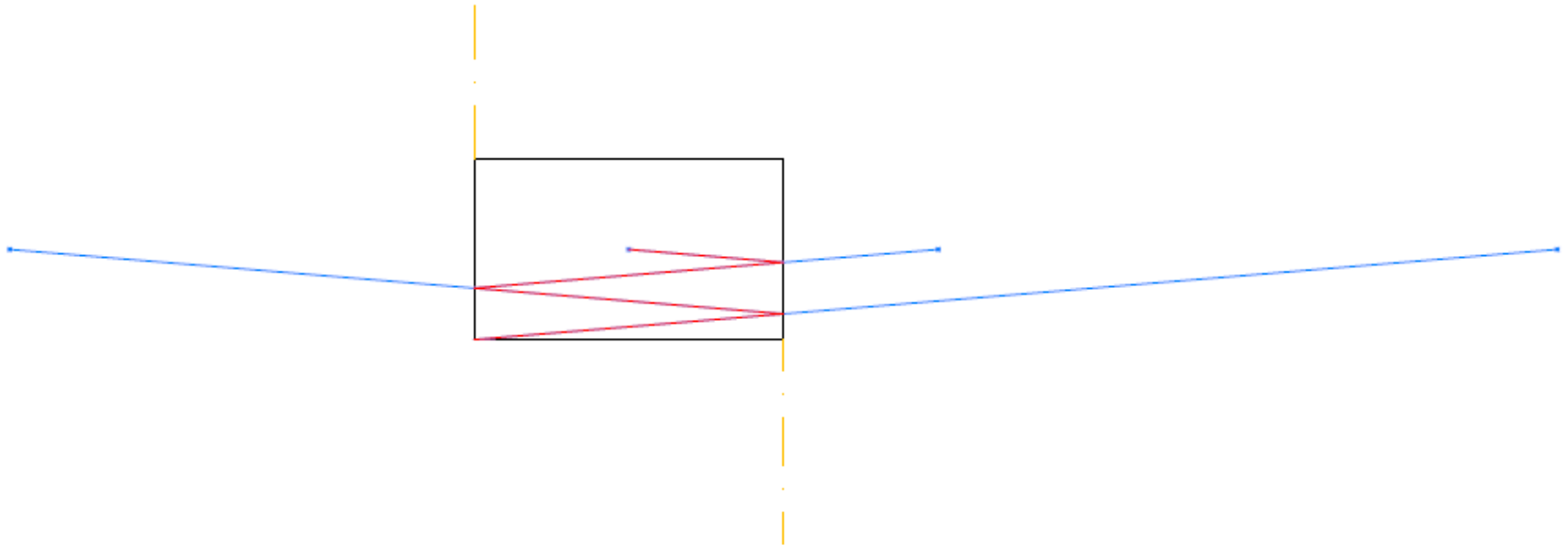
Longitud 6.35 m



Transformaciones Geométricas Planas

Simetría Axial

Longitud 8.42 m



Transformaciones Geométricas Planas

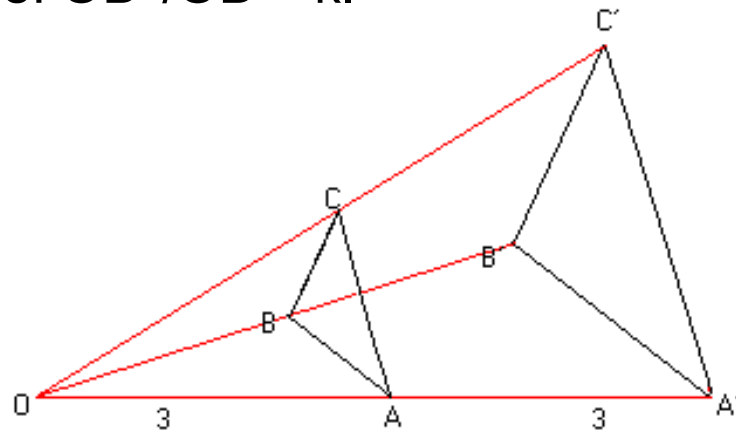
Clasificación según las propiedades que se conservan
Lo que las hace útiles

Isomórficas: Conservan los ángulos y las proporciones.

Homotecia

Se dice que dos puntos B y B' son homotéticos respecto a un centro de homotecia O y con una razón de homotecia k, cuando O, B y B' están alineados y se cumple que: $OB' / OB = k$.

http://www.angelfire.com/ma4/g_transform/



Homotecia de centro O y razón 2.

Transformaciones Geométricas Planas

Homotecia

Problema de ingeniería 2D

La ampliación de la red de saneamiento de una gran ciudad ha obligado al Servicio Municipal de Aguas a la construcción de una galería de hormigón de sección semicircular ($\phi 1$ m) en cuyo interior se alojarán las nuevas tuberías. El estudio inicial impone al ingeniero proyectista las siguientes restricciones:

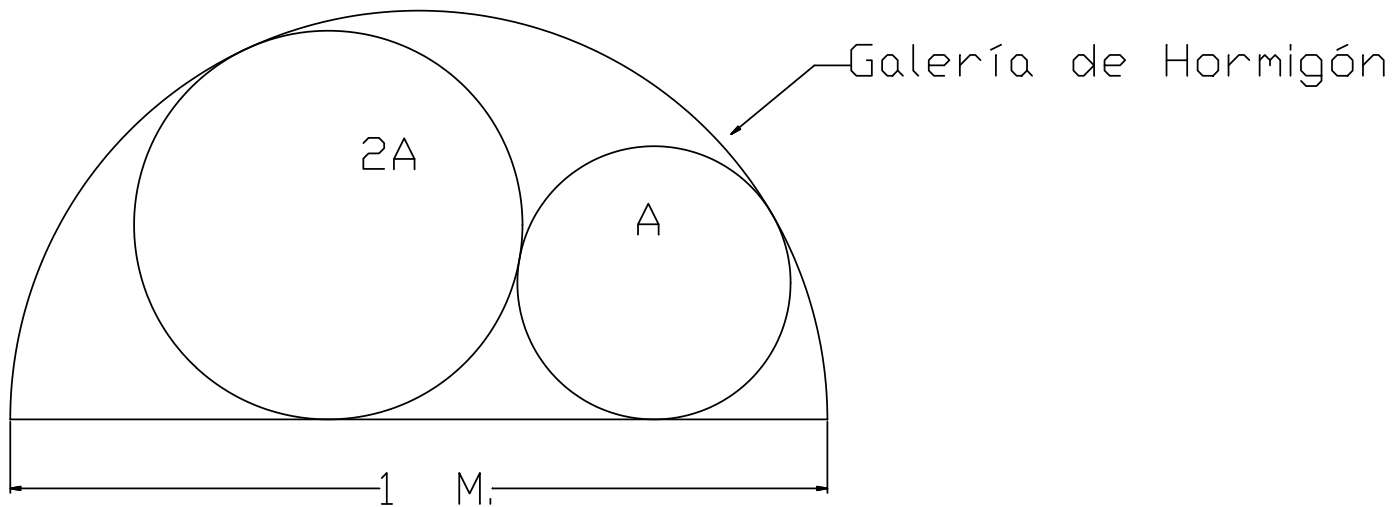
- En el interior de la galería se han de disponer dos tuberías del mayor diámetro posible.
- La sección de la mayor ha de ser el doble que la de la menor.
- Por condiciones de diseño las tuberías han de quedar apoyadas en el piso de la galería (ver croquis adjunto)

Se pide:

Obtener gráficamente los diámetros de las tuberías.

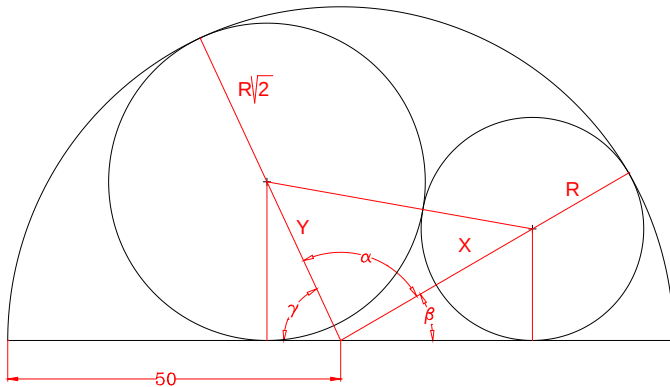
Transformaciones Geométricas Planas

Homotecia



Transformaciones Geométricas Planas

Planteamiento analítico del problema



$$x + R = 50 \rightarrow x = 50 - R$$

$$y + R\sqrt{2} = 50 \rightarrow y = 50 - R\sqrt{2}$$

$$R\sqrt{2} = y \sin \gamma \rightarrow \sin \gamma = \frac{R\sqrt{2}}{y} = \frac{R\sqrt{2}}{50 - R\sqrt{2}} \rightarrow \cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{50 - R\sqrt{2}} \right)^2}$$

$$R = x \sin \beta \rightarrow \sin \beta = \frac{R}{x} = \frac{R}{50 - R} \rightarrow \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{50 - R} \right)^2}$$

$$\alpha = 180 - (\gamma + \beta) \rightarrow \cos \alpha = -\cos(\gamma + \beta) = \sin \gamma \sin \beta - \cos \gamma \cos \beta$$

Según el teorema del coseno

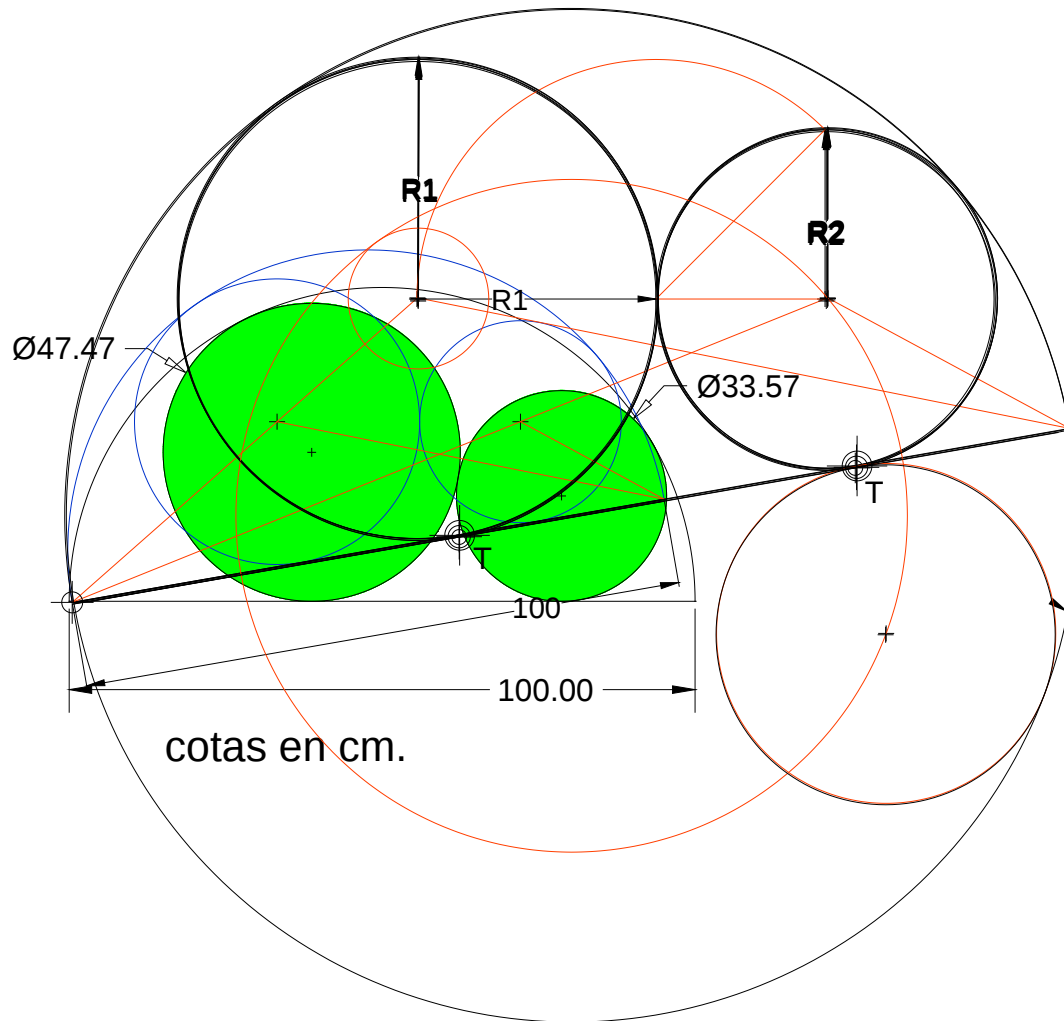
$$(R + R\sqrt{2})^2 = (50 - R)^2 + (50 - R\sqrt{2})^2 - 2(50 - R)(50 - R\sqrt{2}) \cos \alpha$$

$$(R + R\sqrt{2})^2 = (50 - R)^2 + (50 - R\sqrt{2})^2 - 2(50 - R)(50 - R\sqrt{2}) \left[\left(\frac{R\sqrt{2}}{50 - R\sqrt{2}} \right) \left(\frac{R}{50 - R} \right) - \sqrt{1 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{50 - R\sqrt{2}} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{R}{50 - R} \right)^2} \right]$$

Transformaciones Geométricas Planas

Planteamiento gráfico del problema

Homotecia

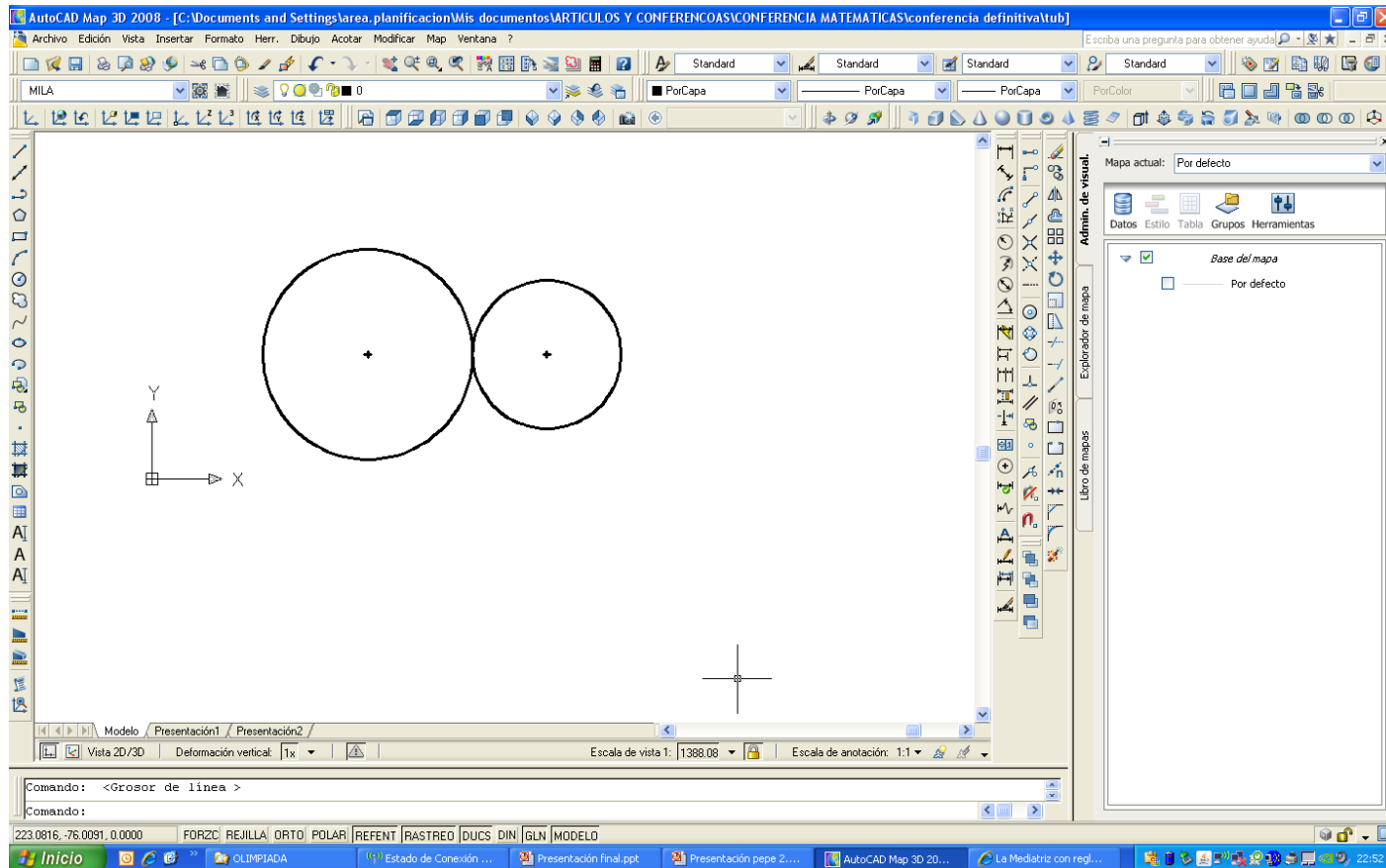


$R2$ cualquier valor

$$R2 = \sqrt{2}R1$$

Problema de ingeniería 2D

Planteamiento DAO



Transformaciones Geométricas Planas

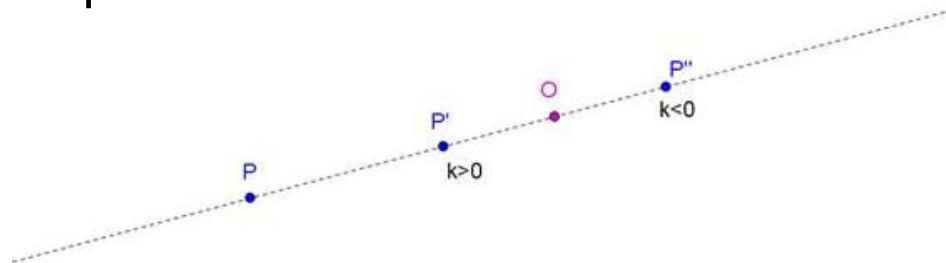
Clasificación según las propiedades que se conservan
Lo que las hace útiles

Anamórficas: Transformación conforme. Cambian la forma.

La inversión

Conservan el valor absoluto de los ángulos.

Se dice que dos puntos P y P' son inversos respecto a un centro de inversión O y una razón de inversión k , cuando O , P y P' están alineados si se cumple que: $OP' \cdot OP = k$.



<http://ocw.upm.es/expresion-grafica-en-la-ingenieria/geometria-metrica-mediante-construcciones-dinamicas>

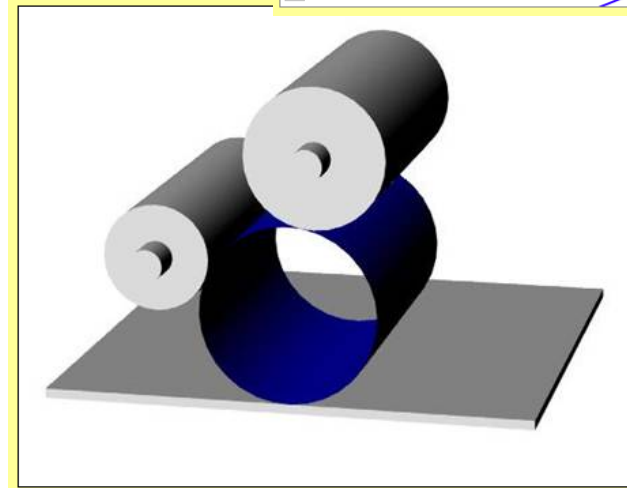
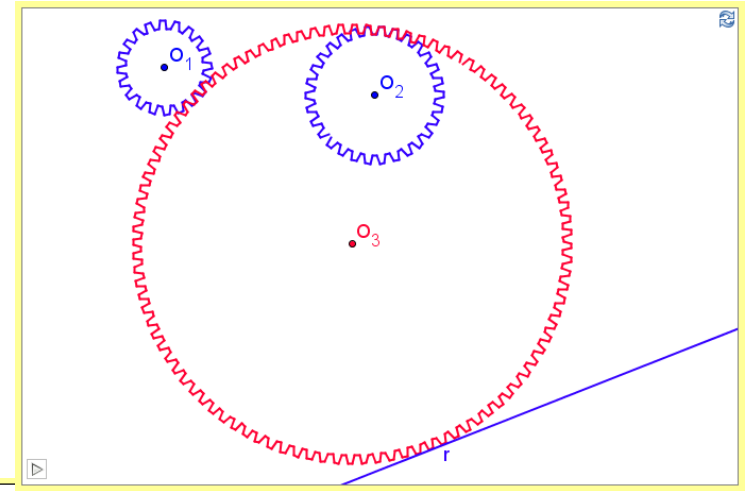
http://debin.etsin.upm.es/~geometria/OCW_06.html

Transformaciones Geométricas Planas

La inversión

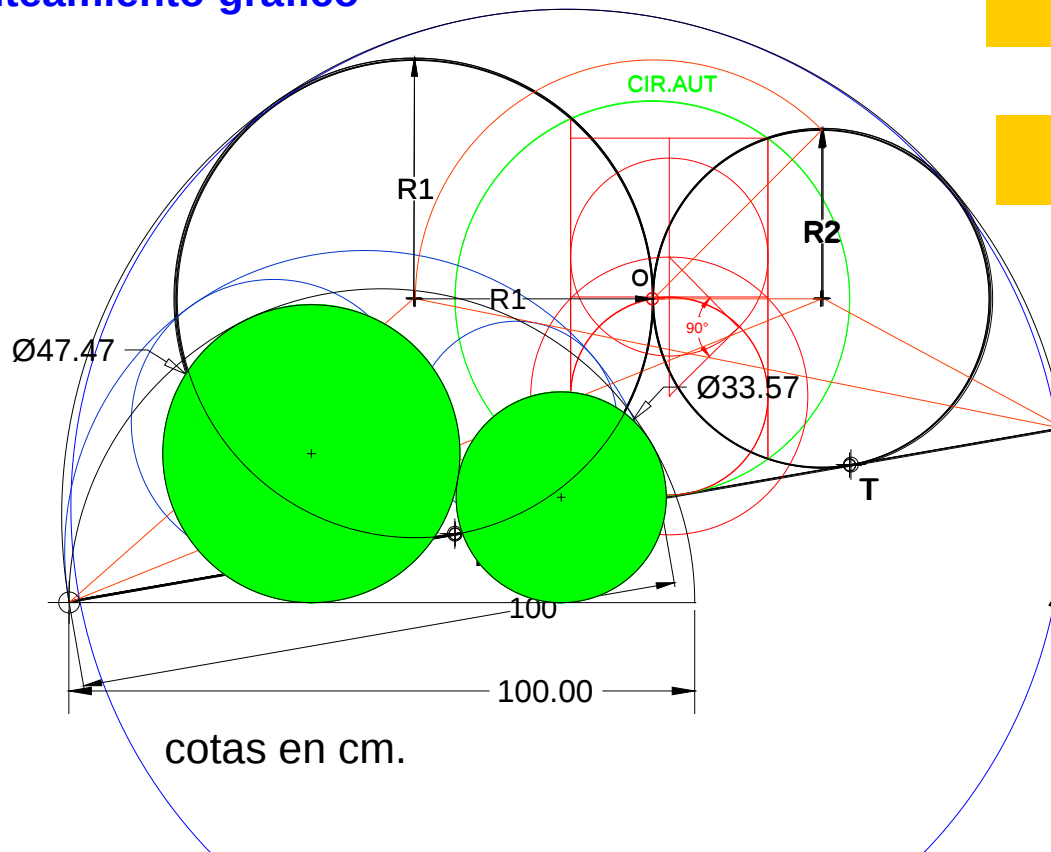
La inversión es una transformación geométrica muy interesante que nos ayuda a resolver problemas que no se había resuelto hasta que Jacob Steiner lo hizo en 1830:

- Engranajes (Problemas de Apolonio)
- Inverso de n° complejo



Transformaciones Geométricas Planas

Planteamiento gráfico



Inversión

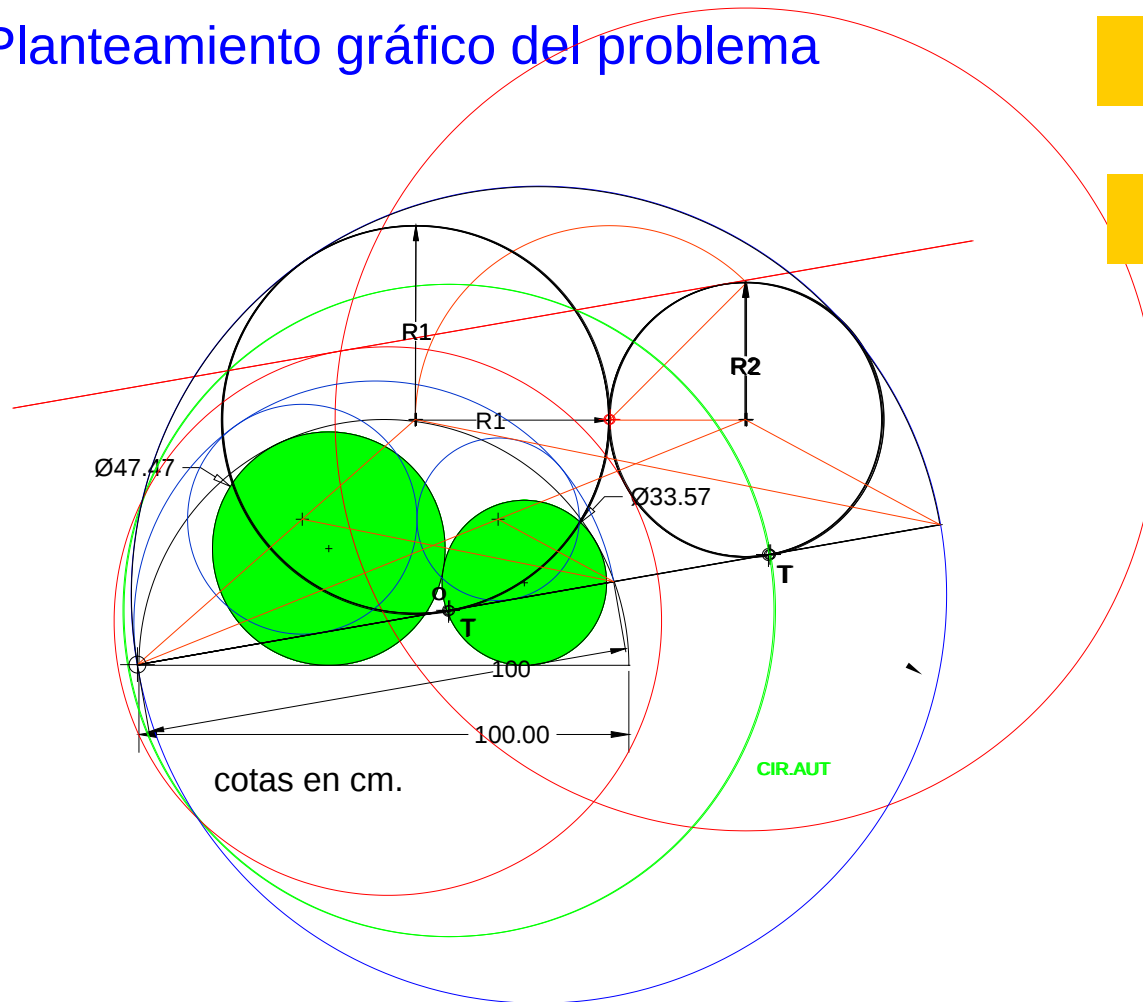
Homotecia

Transformaciones Geométricas Planas

Planteamiento gráfico del problema

Inversión

Homotecia



Problema de ingeniería 3D

Problema: Tubería 3d

Tres tramos de una tubería 200 mm de diámetro se disponen de la siguiente forma:

- El primer tramo, de 50 cm, pertenece a una tubería cuyo eje se sitúa en una recta que pasa por los puntos A y B
- El segundo tramo es perpendicular al primero
- El tercer tramo, de 50 cm, es perpendicular al segundo y su eje se encuentra sobre la recta definida por los puntos C y D.

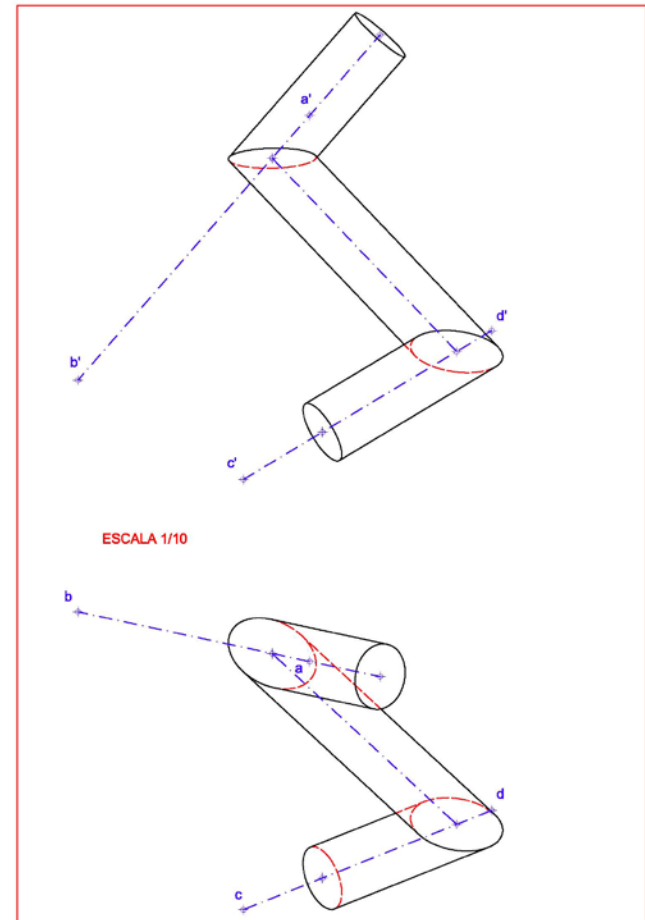
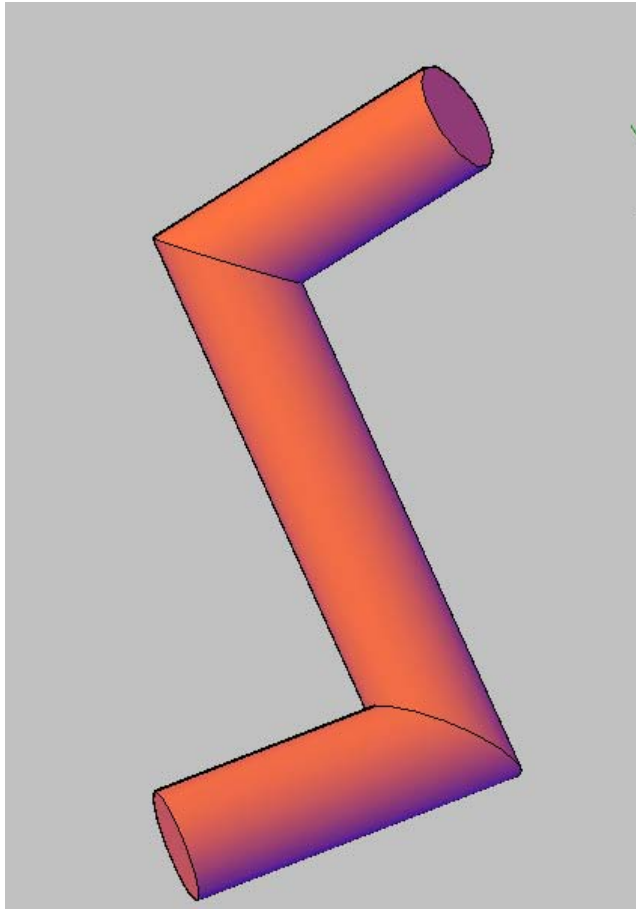
A (20, 45, 120) B (-50, 30, 40) C (0, 120, 10) D (75, 90, 55)

Cotas en cm.

Problema de ingeniería 3D

Problema geométrico implícito:

Mínima distancia entre dos rectas o perpendicular común



Problema de ingeniería 3D

Mínima distancia entre dos rectas o perpendicular común

Un planteamiento analítico

15.18. Hallar la distancia entre las rectas, que se cruzan, dadas por :

$$\begin{cases} r : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u} \\ s : \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v} \end{cases}$$

S O L U C I O N :

Consideremos la siguiente figura.

Sean M y N los puntos que determinan la mínima distancia entre las rectas r y s, que existen tal como se ha visto en el ejercicio 11.3. Más aún, $\vec{MN}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se tiene : $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{AB} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB})$

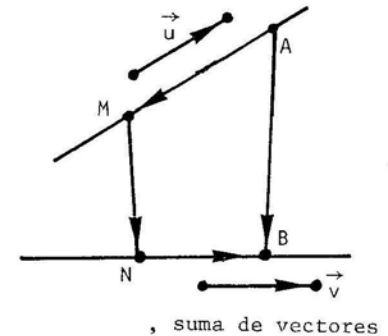
$$\begin{aligned} &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{AM} + (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{MN} + (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{NB} && \text{, p.distributiva} \\ &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{MN} && \text{, } \vec{AM} \parallel \vec{u}, \vec{BN} \parallel \vec{v} \end{aligned}$$

Y tomando módulos ,

$$|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{AB}| = \|(\vec{u} \times \vec{v})\| \|\vec{MN}\| \quad , \text{ ya que } \vec{MN} \text{ es perpendicular a } \vec{u} \times \vec{v}$$

de donde ,

$$d(r,s) = \|\vec{MN}\| = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{AB}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}]|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

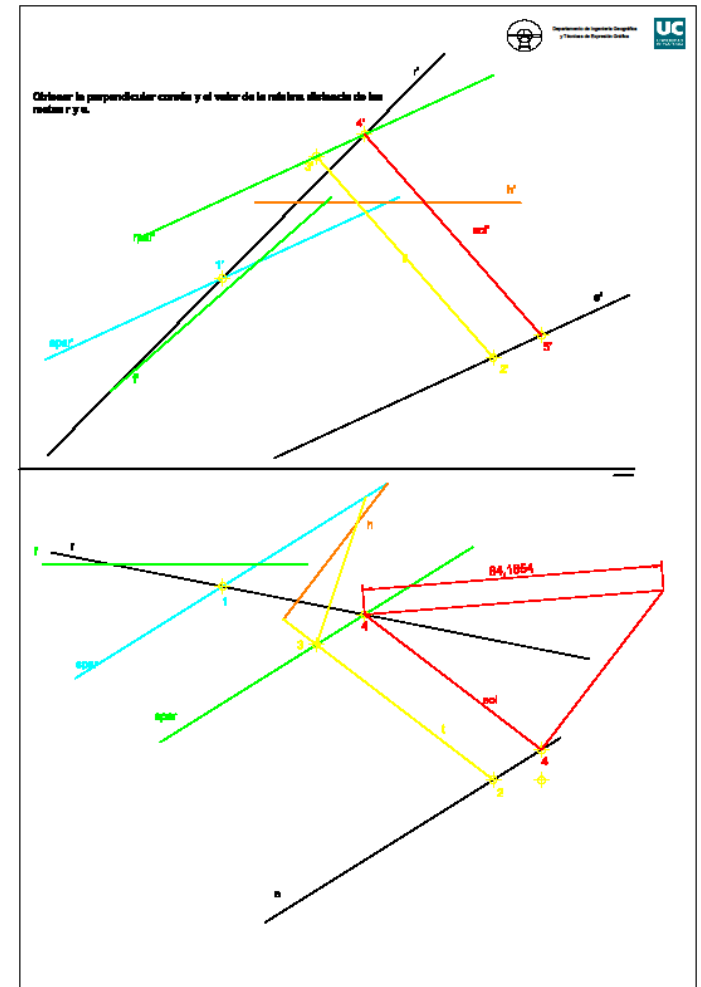
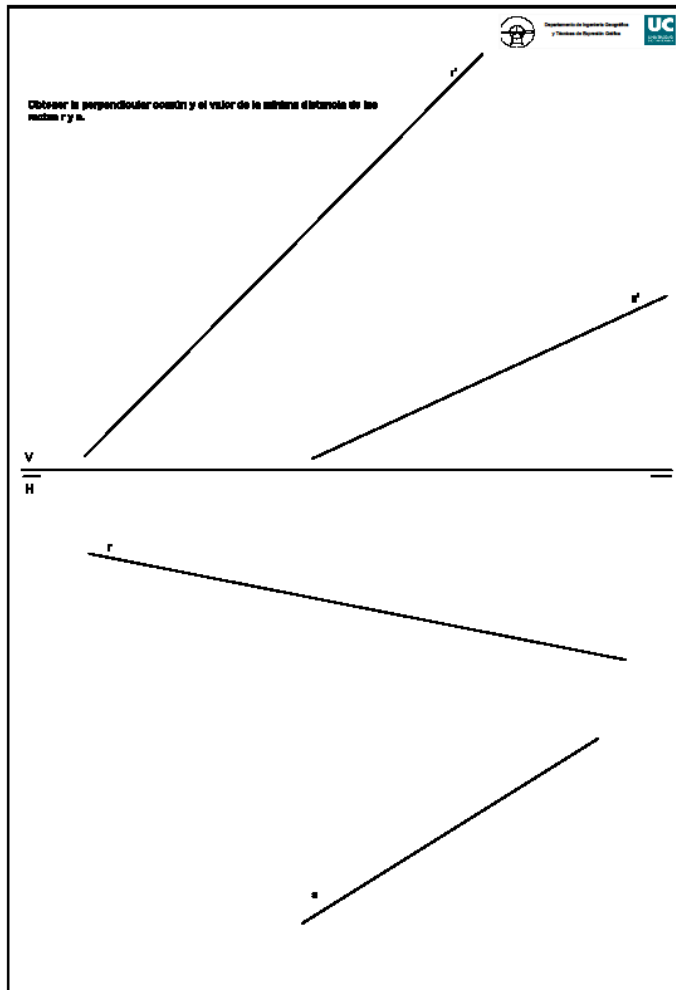


Autor: Máximo Anzola, José Caruncho, G. Pérez-Canales.

Título: Problemas de álgebra

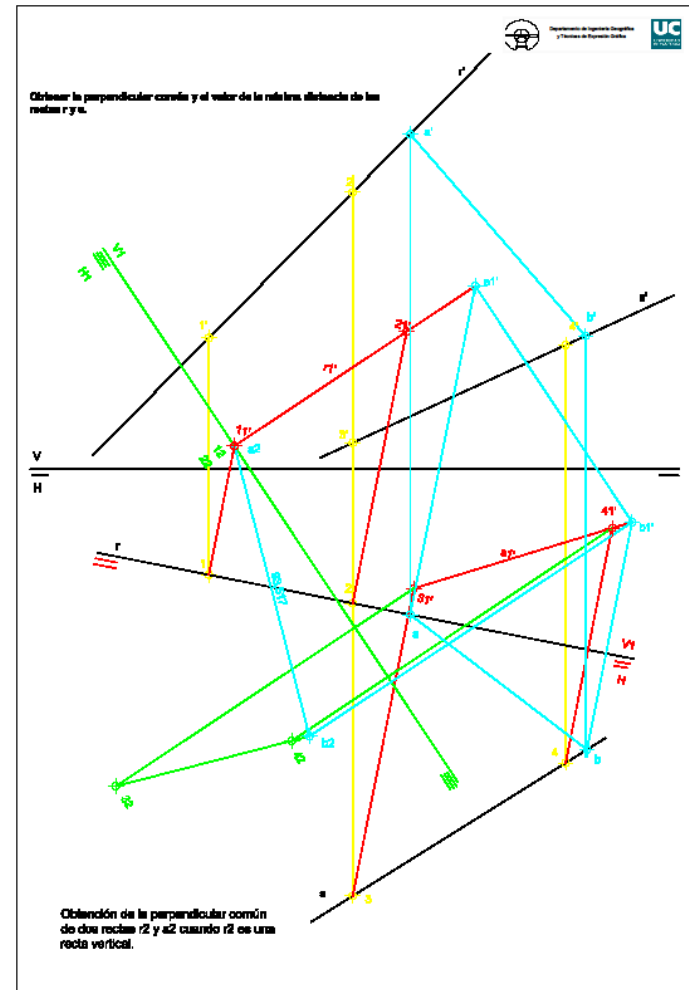
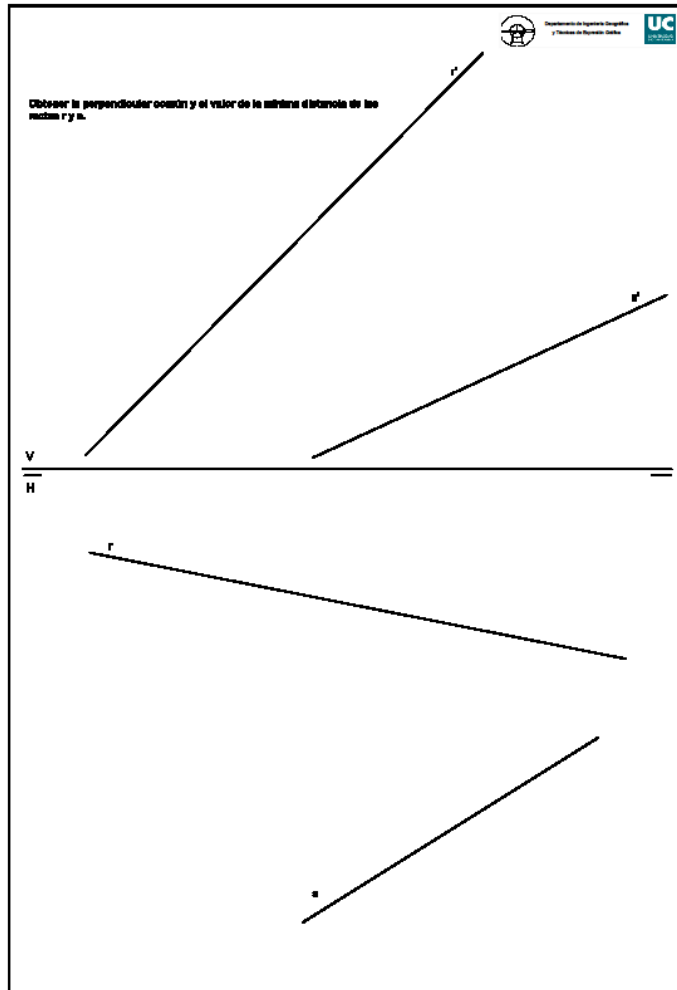
Problema de ingeniería 3D

Planteamiento GRÁFICO 1



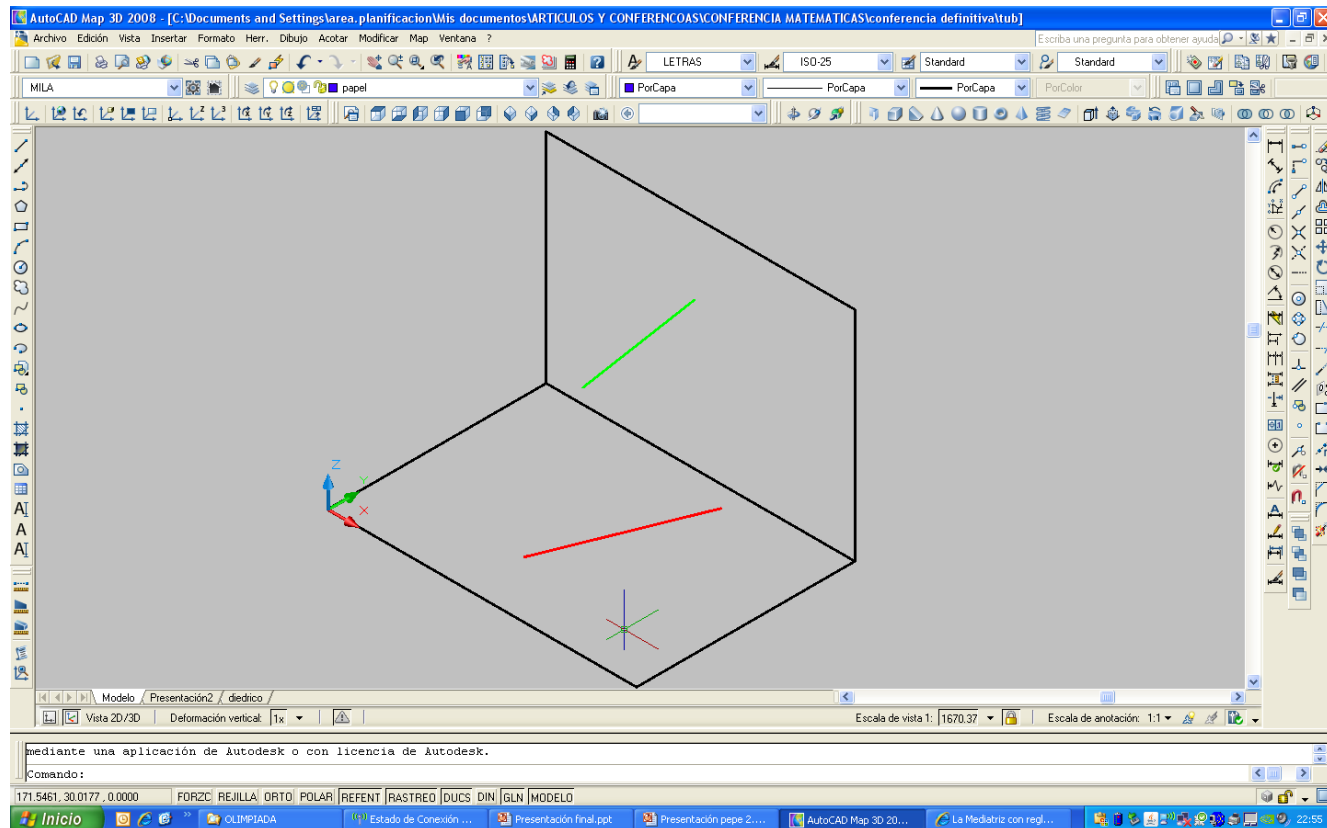
Problema de ingeniería 3D

Planteamiento GRÁFICO 2



Problema de ingeniería 3D

Planteamiento DAO



Conclusiones

La Geometría exige “ver” el problema resuelto para poder encontrar el mejor camino que lleve a la solución.

Los intentos “a ciegas” están condenados al fracaso

La expresión gráfica nos puede ayudar a “ver” la solución, desde un simple croquis hasta la representación gráfica más sofisticada

Espero haber generado alguna inquietud y despertado la curiosidad por la geometría gráfica

Conclusiones

Geometría constituye no sólo una ciencia, sino una forma de pensar e incluso una escuela de vida. La resolución de cualquier problema exige un análisis de las diferentes opciones y la elección de la mejor solución. Esto se debiera aplicar en todas las circunstancias de la vida

En el frontispicio de la Academia fundada por Platón estaba inscrito el famoso lema:

“Nadie entre aquí sin saber
Geometría”

Por algo sería.



Agradecimientos

Quiero dar las gracias a:

- Luis Alberto Fernández y Fernando Etayo
- Mis Compañeros del Departamento
- A todas las personas que comparten sus conocimientos y trabajo en sus WEB
- Y sobre todo a los asistentes a este taller.