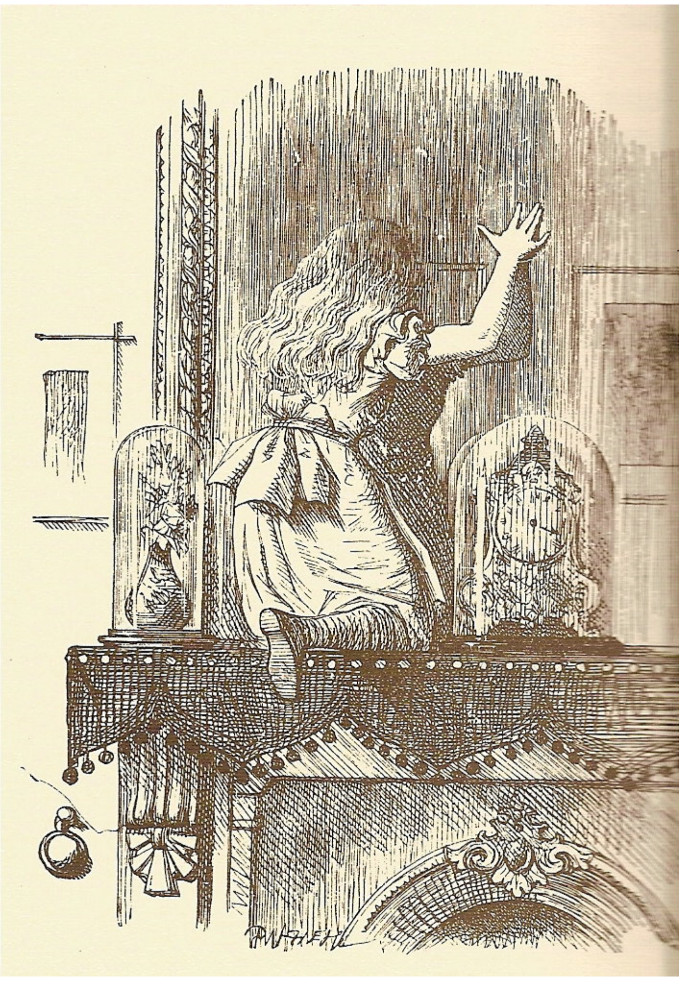
¿Cómo pasó Alicia al otro lado del espejo?

(Reflexiones de un matemático sobre el espacio)

por

Juan Tarrés Freixenet
Universidad Complutense de Madrid



Santander, 23 de Marzo de 2011

Resumen

¿Se puede pasar realmente al otro lado del espejo, o sólo es posible en un mundo de sueños y fantasía? ¿Necesitó Alicia sumergirse en *otro* espacio y utilizar *otra* geometría?

¿Cómo podemos interpretar las diferentes visiones que nos ofrece Internet de una determinada panorámica al ir aproximándonos a la misma?¿Qué conclusión se puede sacar al comprobar que los detalles de aquella zona y las relaciones entre los diferentes objetos son cada vez más nítidas?

¿Qué visión de una ciudad tiene el viajero que se desplaza por ella utilizando solamente el "Metro"? ¿Podrá ser capaz de relacionar entre sí los diferentes lugares que ha visitado? ¿Tendrá conciencia de cómo es aquella ciudad con la simple contemplación del plano del Metro?

¿Qué espacio ha querido representar un pintor al crear y ejecutar su obra? ¿Expresa la misma clase de espacio un cuadro del Renacimiento que otro de Dalí o Magritte, por ejemplo? ¿Qué pensar de los dibujos de Escher?

¿Qué nos quiere decir Euclides en sus *Elementos* cuando postula que "una recta se puede prolongar indefinidamente"? ¿En qué espacio se debe prolongar? ¿Volverá el alguna vez sobre sí misma?

Quiero plantear en esta charla éstas y otras preguntas para que entre todos reflexionemos sobre el espacio. Quiero que pensemos juntos qué entendemos por espacio en Matemáticas y porqué se ha llegado al concepto de espacio que se utiliza en la actualidad.

1. Introducción

Cuando Lewis Carroll saca a la luz sus obras más importantes, *Alicia en el País de las Maravillas* y *Al otro lado del espejo* abre a sus lectores un mundo de fantasía y ensueños al situar sus personajes en un espacio diferente al que vivimos, un espacio en el que cambian las leyes y las relaciones entre los objetos que lo componen. Alicia cambia su tamaño según el lugar en el que se encuentra y, al cruzar la frontera del espejo, se encuentra en un espacio en el que "las cosas van al revés". En realidad, el "otro lado" del espejo nos ofrece un nuevo espacio, un espacio que nos hace pensar que hay "otros mundos", inmersos en "otros espacios".

La poetisa cubana Minerva Salado lleva a Alicia a Madrid y la enfrenta a un espejo y nos explica ese nuevo espacio, el que está "al otro lado del espejo":

Alicia en mi ciudad

Los espejos ocultos están frente al Paseo del Prado
para que tú los atravieses.
Del otro lado esperan todas las ilusiones
las piedras en el centro de otro orden
los rastros y los pasos.

Los espejos descubren los caminos
sin saber demasiado hacia dónde
penetran en las estridencias de los sueños
fantásticos como nunca antes
ilusorios
reales para los que olvidaron la esperanza.
El azogue de los espejos parece
una tentación a la que pocos renuncian
los otros yacen sobre las baldosas
sin tiempo para más
esperando en la raíces de una ciudad
que cada día se evade
sin dejar de ser ella.
Suplantada
acartonada
enmascarada
y sin embargo ella bajo toda escenografía
creada
encallecida
abandonada
hermosa para siempre

Podemos admirar también la maestría de Jorge Luis Borges cuando nos habla en un largo poema de estos objetos ilusorios:

Los espejos

Yo que sentí el horror de los espejos
no sólo ante el cristal impenetrable
donde acaba y empieza, inhabitable,
un imposible espacio de reflejos

sino ante el agua especular que imita
el otro azul en su profundo cielo
que a veces raya el ilusorio vuelo
del ave inversa o que un temblor agita

Y ante la superficie silenciosa
del ébano sutil cuya tersura
repite como un sueño la blancura
de un vago mármol o una vaga rosa,

Hoy, al cabo de tantos y perplejos
años de errar bajo la varia luna,
me pregunto qué azar de la fortuna
hizo que yo temiera los espejos.

Espejos de metal, enmascarado
espejo de caoba que en la bruma
de su rojo crepúsculo disfuma
ese rostro que mira y es mirado,

Infinitos los veo, elementales
ejecutores de un antiguo pacto,
multiplicar el mundo como el acto
generativo, insomnes y fatales.

Prolonga este vano mundo incierto
en su vertiginosa telaraña;
a veces en la tarde los empaña
el Hálito de un hombre que no ha muerto.

Nos acecha el cristal. Si entre las cuatro
paredes de la alcoba hay un espejo,
ya no estoy solo. Hay otro. Hay el reflejo
que arma en el alba un sigiloso teatro.

Todo acontece y nada se recuerda
en esos gabinetes cristalinos
donde, como fantásticos rabinos,
leemos los libros de derecha a izquierda.

Claudio, rey de una tarde, rey soñado,
no sintió que era un sueño hasta aquel día
en que un actor mimó su felonía
con arte silencioso, en un tablado.

Que haya sueños es raro, que haya espejos,
que el usual y gastado repertorio
de cada día incluya el ilusorio
orbe profundo que urden los reflejos.

Dios (he dado en pensar) pone un empeño
en toda esa inasible arquitectura
que edifica la luz con la tersura
del cristal y la sombra con el sueño.

Dios ha creado las noches que se arman
de sueños y las formas del espejo
para que el hombre sienta que es reflejo
y vanidad. Por eso no alarman.

En un tono mucho más intimista, el bonito poema de Joan Margarit nos habla de los espejos cuando nos dice que las cartas de amor y los rostros sensuales, inteligentes, bellísimos, cuando haya pasado el tiempo y el deseo se haya borrado, se ocultarán en un espejo situado dentro de nosotros

NO LLENCIS LES CARTES D'AMOR

Elles no t'abandonaran.

Passarà el temps, s'esborrarà el desig

-aquesta fletxa d'ombra-

i els rostres sensuals, intel•ligents, bellíssims,

s'ocultaran en un mirall dins teu.

Cauran els anys i avorriràs els llibres.

Davallaràs encara,

i perdràs, fins i tot, la poesia.

El soroll fred de la ciutat als vidres

anirà esdevenint l'única música,

i les cartes d'amor que hauràs guardat

la teva última literatura.

¿Cuál es el misterio que encierran los espejos? ¿Dónde está ese "otro espacio" que nos muestran? Cuántas veces nos hemos sentido el deseo de mirar justo detrás de ese espejo en busca del nuevo espacio; si lo hacemos, nos damos cuenta de que allí no hay nada que no sea "nuestro espacio". No hay ningún rastro del espacio en el que "todo va al revés" (fig. 1).

Por otra parte, en la litografía de M.C. Escher, *Naturaleza muerta con espejo*, de 1934, (ver fig. 2) se puede contemplar la presencia de un espejo que ofrece una visión de un espacio que solamente se puede ver reflejado . Gracias a este efecto tenemos noticia de un espacio cuya existencia ignoraríamos si no se contara con la presencia del espejo

Fig. 1

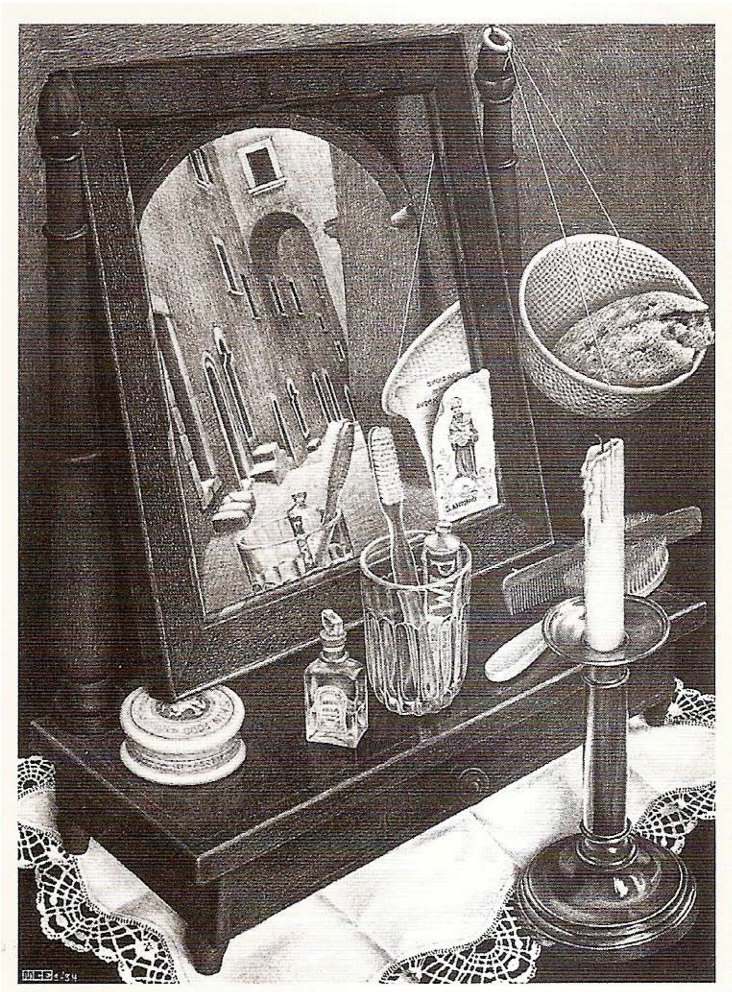


Fig. 2

Algo parecido podemos decir de la imagen reflejada del propio Escher en un espejo esférico (*Autorretrato en espejo esférico,* 1935) que podemos ver en la figura 3.

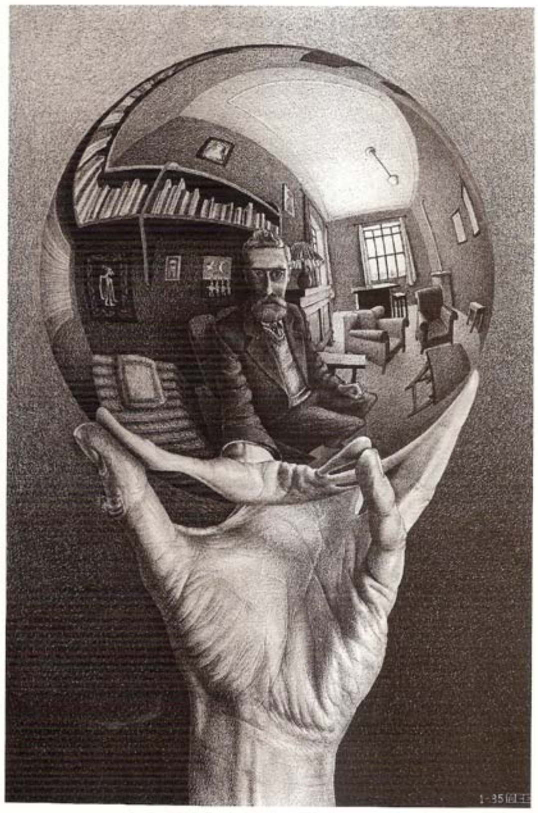


Fig.3

La figura 4 representa una reproducción de una litografía de 1946, debida también a M.C. Escher: *El espejo mágico*. Con independencia de los efectos visuales que quiso plasmar el artista, se puede observar como las imágenes que se ven “al otro lado del espejo” tienen una circulación invertida alrededor de la esfera reflejada con respecto a la que se puede ver a la derecha del dibujo.

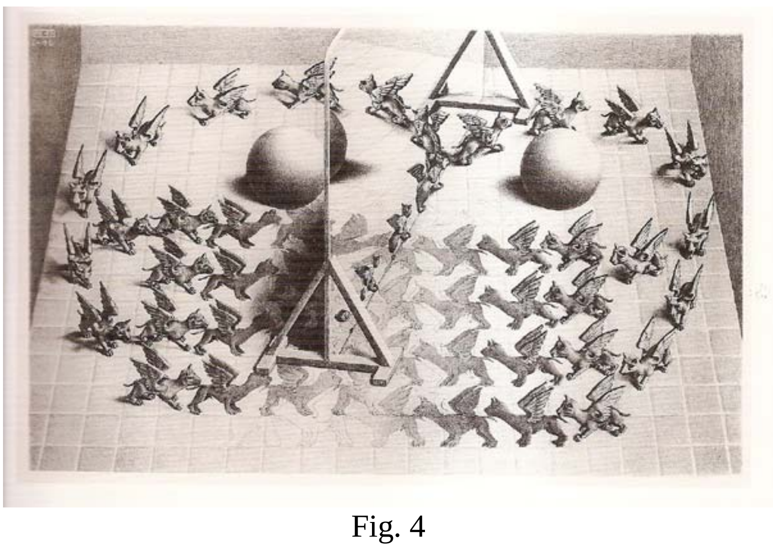


Fig. 4

Unas ilusiones distintas nos presenta el artista estadounidense Richard Estes en unos cuadros en los que los propios espejos nos invitan a contemplar un espacio en el que se entremezcla el espacio real y el virtual (Figs.5, 6 y 7):

Fig. 5


TELEPHONE
TELEPHONE
TELEPHONE
DIRECTORIES
R·H·MACY

Fig. 6

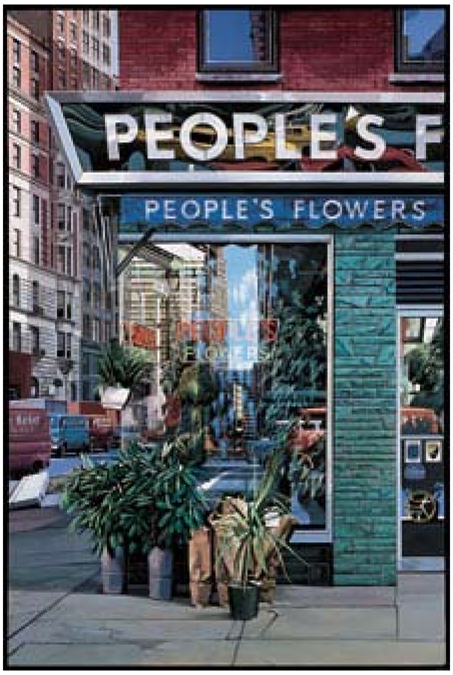

PEOPLE'S F
PEOPLE'S FLOWERS

Fig. 7

Otro tipo de espacio es el que podemos imaginar en el mito de Orfeo, cuando desciende a los infiernos en busca de su amada Eurídice. Ese espacio que guarda el perro Cancerbero y en el que las normas son diferentes del mundo de los vivos, mundo al que se dirige la barca de Caronte en ese lienzo maravilloso de Patinir, *El paso de la Laguna Estigia*:

Fig. 8

Estos y otros muchos ejemplos nos hacen reflexionar sobre la verdadera naturaleza del espacio. Vivimos en un mundo que llamamos el Espacio Físico, el espacio de tres dimensiones en el que se desenvuelve la vida; no obstante, el propio mundo nos invita a pensar en la necesidad de que existan otros espacios, con leyes diferentes y relaciones nuevas entre los objetos que los forman.

Centrando nuestra atención en las Matemáticas, la necesidad de crear nuevos espacios ha sido una fuente de nuevas ideas y avances. Pero todo ello ha sido el fruto de un sinnúmero de consideraciones que llevaron a la creación de los espacios abstractos a comienzos del siglo XX. La evolución de estas ideas y las conclusiones a las que llegaron matemáticos y filósofos a través del tiempo serán el objeto de esta charla.

2. Una visita a una exposición

En la visita que realicé hace pocos días a la exposición *Monet y la abstracción* en el Museo Thyssen-Bornemisza de Madrid y en la Sala de Exposiciones de la Fundación Caja Madrid, la contemplación de los cuadros expuestos me llevó, una vez más, a una reflexión sobre la relación entre lo que se considera la realidad y las imágenes plasmadas por los artistas en los lienzos pretendiendo expresar su propia visión de esa realidad. Esta reflexión me conduce siempre a plantearme una y otra vez qué es lo que podemos entender como espacio, entendido no tanto como la consideración del mundo que nos envuelve cuanto como una abstracción progresiva de nuestra propia realidad circundante.

El propio *Claude Monet*, en la obra de la figura 9 propone la visión del río Sena a su paso por la localidad de Vétheuil. El espacio aquí representado ofrece una visión global del paisaje que sitúa al espectador frente a la escena del borde de un río.

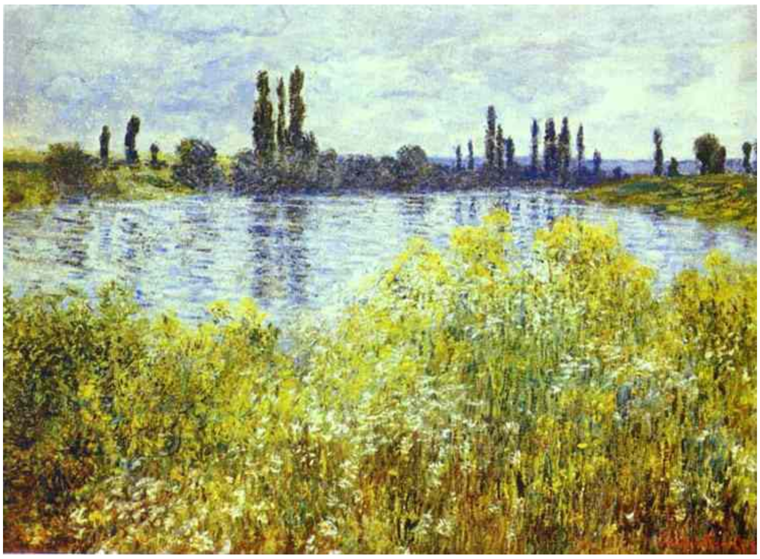


Fig. 9
C.Monet
El banco del Sena. Vétheuil

La figura 10, en cambio, muestra la situación concreta de unos nenúfares, que se suponen situados en un estanque de algún parque, sin que podamos asegurar l contexto global en el que se encuentran. La mirada del artista está fijada en una parte limitada de la escena y su visión no va más allá de esas plantas acuáticas que le han llamado la atención. Es una visión local de una panorámica más amplia; aquí sólo interesan los nenúfares y su entorno inmediato.

Queda todavía un paso más: la abstracción. En la figura 11, el artista plasma en su lienzo la impresión personal de los reflejos en el agua. La contemplación del cuadro puede sugerirnos la idea del pintor, pero también puede llevarnos a otras realidades y otros contextos en los que los objetos que intervienen son de otra naturaleza. Este paso se da con más fuerza, por ejemplo, en el cuadro de la figura 12, que representa una obra de 1987 de la pintora expresionista abstracta Joan Mitchell

El proceso que acabamos de ver, que puede servirnos de modelo como paso de lo global a lo local y de lo concreto a lo abstracto puede ejemplificar el proceso matemático que permite pasar de una contemplación del espacio tridimensional en el que estamos inmersos a una nueva concepción del espacio, que llamaremos *espacio abstracto* o también, de una manera más habitual, *espacio topológico*.

Fig. 10
C. Monet
Nenúfares azules

Fig. 11
C. Monet
Reflejos en el agua

Fig. 12
Joan Mitchell
Chords-VII

El estudio de estos espacios se substancia en Matemáticas en lo que se denomina *Topología General* o *Topología de Conjuntos*, que se ocupa del estudio de los espacios abstractos tomando como base un conjunto cuyos elementos carecen de una naturaleza determinada y entre los cuales se establecen ciertas relaciones que fijan la proximidad existente entre los mismos.

Estamos así ante una concepción del espacio más en consonancia con las ideas de *Leibniz* que con las de *Newton*, pues si bien el conjunto soporte de la estructura puede considerarse de alguna manera como el espacio absoluto (en una idea puramente newtoniana), no se puede hablar de espacio topológico hasta tanto no se establezcan las oportunas relaciones de proximidad entre sus elementos, siguiendo por tanto la noción de espacio de *Leibniz*, para quien el espacio no es una realidad absoluta sino que se reduce a la "verdad de las relaciones". De esta manera, en un mismo conjunto se pueden crear distintas estructuras que indiquen la proximidad entre sus objetos, lo que da lugar a espacios esencialmente distintos.

2. Dos ejemplos sencillos

1. Al sobrevolar un determinado paisaje con un avión, la visión que se tiene del mismo es una visión global. Desde la altura, lo que se contempla es la totalidad del conjunto sin que se pueda entrar en la consideración de los detalles que nos ofrece. Si vamos volando cada vez a menor altura, irán apareciendo más detalles y estaremos en disposición de observar características del suelo que, desde una altura superior, éramos incapaces de ver. Si lo que se quiere es agotar todas las posibilidades y captar todos los detalles lo que se debe hacer es descender hasta el suelo y recorrer la totalidad del panorama observado desde las alturas.

Al ir caminando por el terreno propio del paisaje observado desde el avión se pierde la visión global del conjunto a cambio de un mayor conocimiento del detalle y las características más especiales que ofrece. Hemos pasado así de un concepto global de un cierto espacio geográfico a un conocimiento minucioso de cada punto del mismo y las características de su entorno más inmediato así como las relaciones que existen entre cada una de las partes: se trata de una visión local del mismo espacio.

En las figuras 13.1 a 13.4 podemos ver algunos aspectos de esta circunstancia en un ejemplo tomado del programa *Google Earth*. Se trata de un determinado paisaje del que las imágenes nos van mostrando cada vez más detalles a medida que nos acercamos más y más al mismo.

Fig. 13.1

Fig. 13.2

Fig. 13.3

Fig. 13.4

El fenómeno que observamos en el análisis de estas últimas figuras se expresa en el lenguaje de los espacios topológicos diciendo que las topologías respectivas de las imágenes sucesivas del mismo paisaje son cada vez “más finas” queriendo expresar con ello el hecho de que los detalles y las relaciones entre los elementos que aparecen el cada una de ellas se pueden observar con mayor precisión.

2. Cuando se visita por primera vez una gran ciudad (por ejemplo, Madrid) es bastante natural utilizar la red del *Metro* para desplazarse de un lugar a otro de la misma. Esto supone que se va realizando la visita de una manera parcial, dependiendo en cada caso de la estación en la que nos hemos apeado. El conocimiento que proporciona una visita en estas condiciones es, evidentemente, muy fragmentario: se conocen diferentes partes de la ciudad sin tener una idea clara de cómo están relacionadas entre sí.

Se puede interpretar esto diciendo que hemos visto la ciudad de una manera *local*. Se puede alcanzar una visión global de la misma si recorremos todas y cada una de las partes. Así, podremos ir reuniendo barrios, distritos y otras secciones del conjunto hasta llegar a abarcar su totalidad. Es una manera de analizar un cierto *espacio* pasando de lo local a lo global.

Además, al acercarse al *Metro*, lo más probable es que el visitante pida un plano de la red con todas las líneas y estaciones. Le ofrecerán un mapa esquemático como el de la figura 14:

Este mapa no es más que una abstracción de la estructura de la ciudad, vista con el criterio de una visita a través de la red del *Metro*. Es un ejemplo poco riguroso de un *espacio abstracto* en el que los *puntos* vienen determinados por las estaciones de las diferentes líneas.

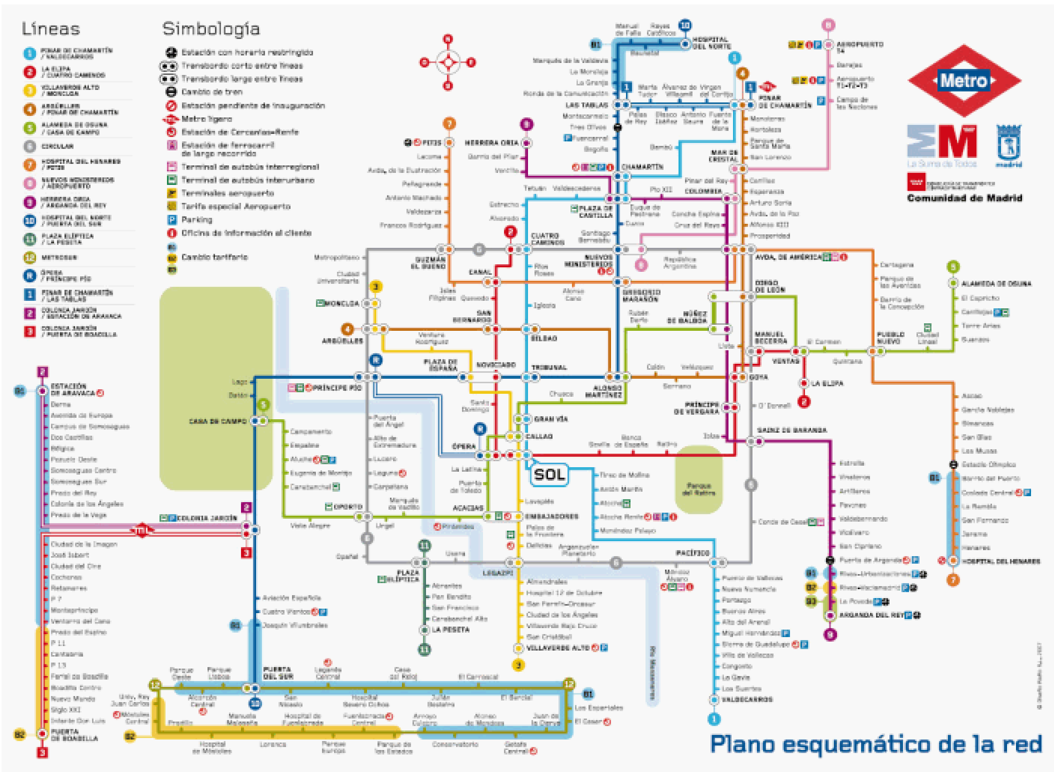


Fig. 14

Este mapa no es más que una abstracción de la estructura de la ciudad, vista con el criterio de una visita a través de la red del *Metro*. Es un ejemplo poco riguroso de un *espacio abstracto* en el que los *puntos* vienen determinados por las estaciones de las diferentes líneas.

3. Una representación del espacio

El espacio pictórico

Una de las actividades desarrolladas por el hombre a través de los tiempos en la que ha intervenido de manera importante el concepto de espacio ha sido la pintura, en tanto que arte visual. Sus orígenes están en la contemplación del espacio en que vivimos y su plasmación en alguna superficie, ya sea la de una roca en una cueva, un muro, una tabla, un lienzo, etc. Como ya hemos visto antes, el espacio que nos rodea no es sino una ilusión sujeta muchas veces a la percepción de nuestros sentidos. El manejo de esta percepción da lugar a imágenes como la de la figura 15, correspondiente a una obra de *Dalí*.

Fig. 15
S. Dalí
El primer día de la primavera

En la contemplación de este cuadro nos podemos preguntar si lo que vemos en él refleja la realidad que nos ha querido transmitir el artista. De hecho, el pintor ha tenido que plasmar una escena tridimensional, que él percibió al realizar su obra, en una superficie plana. ¿Qué técnica utilizó para lograrlo?.

Ya en el Renacimiento, los artistas consiguieron alcanzar un alto grado de perfección en la representación de figuras y objetos. Para ello inventaron la *perspectiva lineal* - o simplemente, *perspectiva* - que surge como un instrumento geométrico con el que llevar a cabo las composiciones pictóricas. Con esta técnica se lograron resultados de tan alto nivel como el fresco de la figura 16, pintado por *Rafael*, titulado *La escuela de Atenas*.

La realización de obras como éstas exige una profundización en el conocimiento del propio espacio. Para ello hay que recurrir a la ayuda de la Geometría, que da un contenido matemático al mismo, facilitando dicho conocimiento a la vez que un mejor manejo de los elementos que lo constituyen. La Geometría pretendía, de alguna manera, dar una interpretación racional de del mundo que nos envuelve mediante figuras y las relaciones existentes entre ella, puestas de manifiesto en un sin fin de propiedades y teoremas

Fig. 16
Rafael
Escuela de Atenas

La construcción del espacio en el arte se ha llevado a cabo de muchas maneras a lo largo de los tiempos. Desde las pinturas planas del hombre antiguo, pasando por las representaciones llevadas a cabo en el antiguo Egipto, el espacio pictórico ha ido evolucionando, pasando de una perspectiva rudimentaria en la Grecia clásica a una representación del espacio natural en Roma, tal como se puede observar en algunos de los frescos conservados en Pompeya.

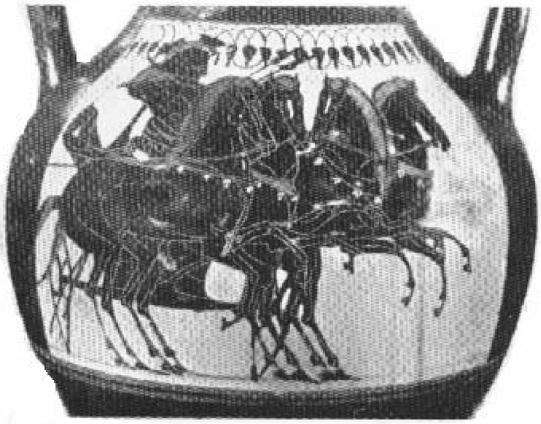


Fig.. 17
Ánfora griega de figuras negras. Siglo VI a.C.

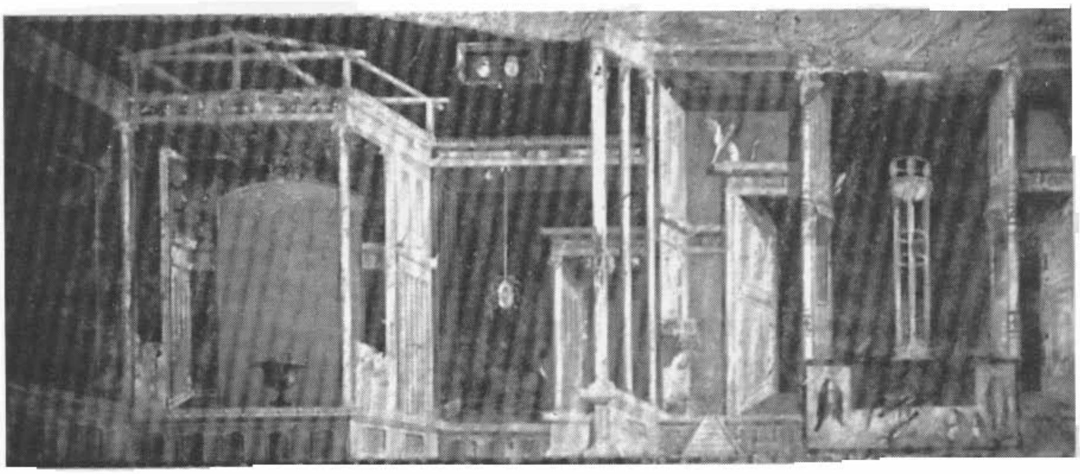


Fig. 18
Fresco Pompeyano

En la Edad Media se vuelve a un espacio plano con representaciones simbólicas como la que podemos ver en la figura 19. Es una pintura plana en la que la sensación de tridimensionalidad apenas está sugerida en los pies del ángel y la Virgen

Fig. 19

La Anunciación. (Incunable Suabo)
Biblioteca Comarcal de Würtenberg. Stutgart

Con la llegada del gótico, el espacio se va abriendo y las figuras comienzan a tener un volumen que las acerca a la realidad, en un intento de aproximar el espacio pictórico a la realidad visual captada por el artista. Podemos observar esta característica en la Santa Cena, conservada en el Museo Diocesano de Solsona (fig. 20).

Fig. 20

***Santa Cena*. Maestro de Albatàrrec. Siglo XV**
Museo Diocesano de Solsona.(Lleida)

La llegada del Renacimiento supuso una vuelta al humanismo clásico y a un intento de representación de la realidad circundante. La revolución vino de la mano de *Giotto* en los siglos XIII y XIV (fig. 21), precursor de la perspectiva artificial, desarrollada en el siglo XV por artistas de la talla de *Brunelleschi*, *Leon Battista Alberti* o *Piero della Francesca* entre otros y continuada por *Leonardo da Vinci, Rafael* o *Miguel Ángel.*

Fig. 21
Giotto
Entierro de Cristo
Capilla degli Scrovegni. Padova

En la *perspectiva*, el espacio se observa como si el pintor mirara con un solo ojo (desde el que *proyecta* los rayos de luz) detrás de una ventana transparente. Es precisamente lo que se ve en esta ventana (cuyo plano representa una *sección* de la llamada pirámide de luz) lo que el artista debe representar en su obra. Todo se reduce, por tanto, a dos sencillas operaciones geométricas: **proyectar y cortar**.

Proyección y sección; éstas son las dos operaciones que hicieron que los artistas del Renacimiento consiguieran plasmar las imágenes tridimensionales del mundo en el plano de un lienzo, una tabla o en los muros de un edificio, revolucionando así el arte de la pintura. Se trata, claro está, de una "geometría de la visión". Lo que vemos en un cuadro no es más que una sección de la proyección de los rayos luminosos que parten del ojo del pintor y limitan los diferentes objetos representados. Es decir, los planteamientos teóricos de la perspectiva se basan en propiedades ópticas que ya habían expresado autores como *Euclides*, *Vitruvio* o *Alhazen*.

La posibilidad de que puedan existir secciones diferentes de una misma proyección o también secciones de dos proyecciones de una misma escena real, tomadas desde dos puntos de vista distintos, llamó la atención a algunos geómetras del siglo XVII acerca de la cuestión de averiguar qué propiedades de las figuras se conservan en cada una de ellas. El estudio de las propiedades matemáticas de las figuras que se conservan en cada uno de estos dos casos constituyó la base de una nueva geometría, distinta de la desarrollada en los *Elementos* de *Euclides* y que con el tiempo adoptó el nombre de **Geometría Proyectiva**, en clara alusión a sus orígenes.

Ya en la época de *Leonardo* se planteó la posibilidad de crear el espacio mediante diferentes gradaciones del color: es la llamada **perspectiva aérea**, que tendrá su máximo exponente ya en el siglo XIX con *Cezanne* (fig. 22)

Fig. 22
P. Cezanne
El monte de Santa Victoria

En el siglo XIX, el descubrimiento de las geometrías no euclídeas y el estudio de los espacios matemáticos de dimensión superior a tres condujeron a lo que en un principio se le dio el nombre de **espacios abstractos** y que en la actualidad conocemos como **espacios topológicos**. Para la determinación de dichos espacios, el matemático debe establecer relaciones entre los objetos que forman parte de los mismos, de la misma manera que *Magritte*, en el cuadro de la figura 23, sugiere el método que permite al artista crear su propio espacio pictórico al propio tiempo que surge su obra.

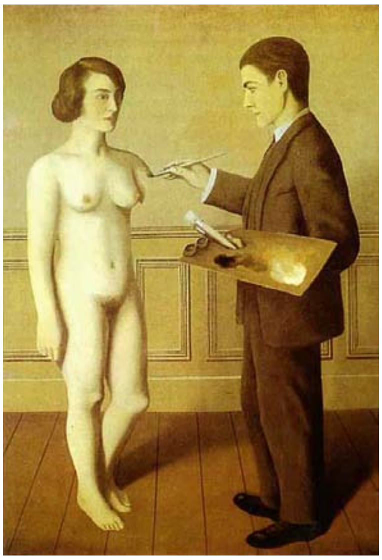


Fig. 23
R. Magritte
Intentando lo imposible

La composición de Cezanne de la figura 24 nos muestra como la disposición de los objetos del cuadro dan una sensación de volumen que permite crear una ilusión de espacio tridimensional.

Fig. 24
P. Cezanne
Naturaleza muerta con cebollas

Más explícita es la obra de Dalí titulada *El rapto topológico de Europa* en la que se expone una contemplación abstracta de *El rapto de Europa*, de Tiziano. Aquí, Dalí presenta su visión de la escena con una mirada distinta, propia de un espacio topológico, por cuanto lo único que ha interesado al artista son las relaciones entre los diferentes elementos de la misma.

Fig. 25
Tiziano
El rapto de Europa

Fig. 26

S. Dalí.

El rapto topológico de Europa

Tal vez se pueda comprender mejor la profunda abstracción que realizó Dalí en esta última obra si antes contemplamos dos obras de Escher: *Balcón*, de 1945, y *Galería de grabados*, de 1956.

En la primera de ellas, que vemos en la figura 27, el artista ha generado la deformación de una parte del paisaje representado.

Fig. 27
M.C. Escher
Balcón

Para realizar esta operación, Escher se vale de una sencilla transformación geométrica en el esquema del cuadro sin deformar que se aprecia en el borrador de la figura 28 y que viene expresada en el esquema de la figura 29, consiguiendo así el efecto que vemos en el cuadro a través de la deformación que vemos en la figura 30. Con ello ha conseguido crear un nuevo espacio en el que ya no es válido el concepto habitual de distancia, cambiando así las relaciones existentes entre los objetos que forman la obra:

Fig. 28

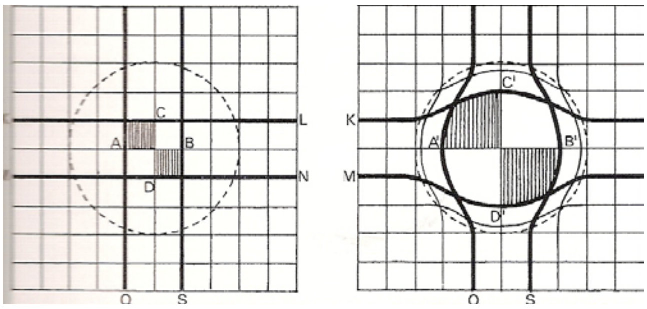


Fig. 29

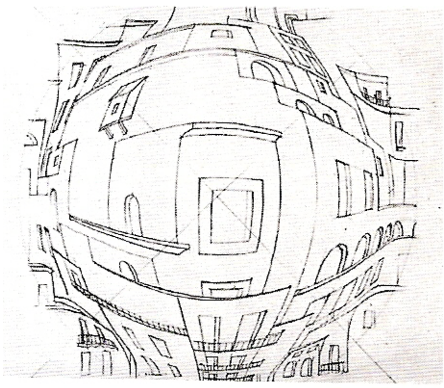


Fig. 30

Utilizando transformaciones geométricas del plano, Escher construye una extraña *Galería de grabados* en la que la deformación del espacio representado alcanza un grado superior al de la obra anterior. En ella se puede ver un personaje (a la izquierda) que contempla un cuadro del que él mismo forma parte. Aquí, cualquier concepto de distancia (al menos desde un punto de vista intuitivo) queda fuera de lugar y el espacio construido por el artista es ya un verdadero "espacio abstracto".

Fig. 31
M.C. Escher
Galería de grabados

4. ¿Debe ser tridimensional el espacio?

A principios del siglo XIX, cualquier teoría que incluyera consideraciones de carácter espacial estaba condicionada por el propio espacio físico, lo que conllevaba la imposibilidad de generalización más allá del espacio geométrico tridimensional. Este fenómeno procedía de una época tan lejana como los tiempos de la Grecia Clásica, toda la geometría griega se desarrolla precisamente en este ámbito determinado de alguna manera por el espacio físico de tres dimensiones. Así siguió durante toda la Edad Media hasta el extremo de que su negación podía acarrear consecuencias lamentables a quien osara afirmar lo contrario.

En el siglo XVIII, *Kant* había apuntado la posibilidad de considerar espacios con más de tres dimensiones, pero todavía en los primeros años del siglo XX se puede leer en un artículo de *Henry Poincaré*,,de 1912: *"De todos los teoremas del 'Analisis Situs' el más importante es el que expresa que el espacio tiene tres dimensiones"*, pese a que hacía ya medio siglo que se habían definido, no sólo los espacios matemáticos de más de tres dimensiones, sino incluso los mismos espacios abstractos, como veremos más adelante.

Pese a lo que hemos dicho acerca de *Kant*, aunque apuntara la posibilidad de otros espacios y otras geometrías, se mantuvo siempre firme en su idea de que el espacio debía tener tres dimensiones. En su artículo *“Reflexiones sobre la verdadera naturaleza de las cosas”*, publicado en 1747 se pregunta:

“Por qué el espacio tiene tres dimensiones”

Tras varias especulaciones, llega a la conclusión de que la respuesta a esta pregunta está relacionada con la ley de la gravedad que afirma que la intensidad de la fuerza de atracción entre dos cuerpos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa y asegura:

Si Dios hubiera decidido crear un mundo en el que dichas fuerzas variaran conforme a una proporcionalidad inversa al ***cubo*** *de la distancia se hubiera hecho necesario un espacio de cuatro dimensiones”*

No obstante, *Kant* creía que

“Una ciencia con estas posibles clases de espacios (con más de tres dimensiones) *sería, sin duda, la mayor empresa que una mente limitada podría abordar en el campo de la Geometría”*

De todas formas, como la ley de la gravedad imponía su criterio, el filósofo de Königsberg se mantuvo firme en su apreciación de que el espacio debía tener tres dimensiones y que la única geometría posible en el mismo era la de los *Elementos* de *Euclides*.

Durante el mismo siglo XVIII los matemáticos habían considerado ya la posibilidad de una cuarta dimensión al observar que un objeto asimétrico podría ser invertido, desde un punto de vista teórico, dentro de un espacio de dimensión superior (Véanse las figuras 32.1 y 32.2).

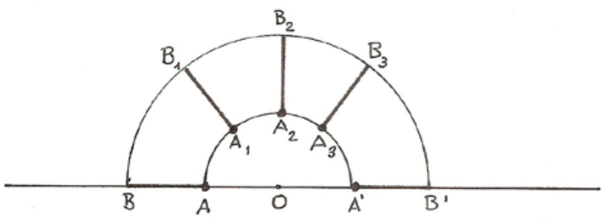


Fig. 32.1

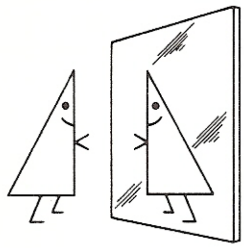


Fig. 32.2

Unos cien años más tarde, en 1872, Lewis Carroll especuló sobre esta idea en su obra *"A través del espejo"* (ver figuras 33.1 y 33.2).

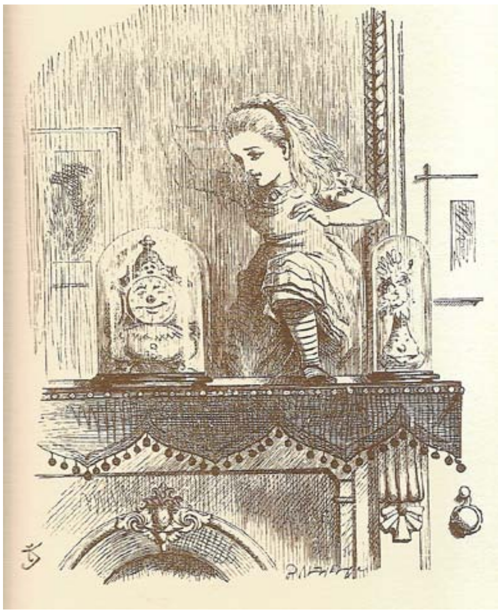


Fig. 33.1

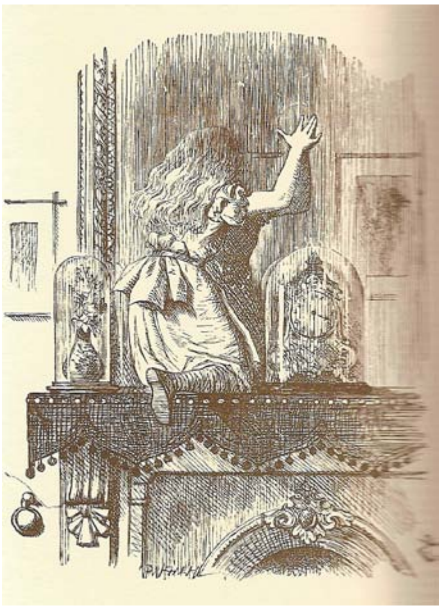


Fig. 33.2

En el siglo XIV se encuentra una excepción a todas estas deliberaciones acerca de la tridimensionalidad del espacio tanto en física como en matemáticas. Se trata de la obra de *Nicolás de Oresme*, matemático y físico perteneciente a la llamada *Escuela de París,* que vivió entre 1323 y 1382.

Entre las contribuciones de *Oresme* a la física matemática hay que tener en cuenta principalmente dos cuestiones: la representación gráfica de las cualidades, la aplicación de esa representación al estudio del movimiento uniformemente acelerado. El estudio de estos temas se encuentra básicamente en el libro titulado *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* que fue escrito por *Oresme* probablemente durante los años 1350, durante su estancia en el Colegio de Navarra. Ese tratado contiene 93 capítulos divididos en tres partes. En la primera, se formula la doctrina de la representación geométrica y se aplica a las cualidades, y se sugiere ampliamente cómo se puede utilizar para explicar muchos fenómenos físicos e incluso psicológicos.

Se trata, como es obvio, de un tema de primer orden con respecto a la formulación efectiva de una ciencia de la naturaleza "matematizada". Si bien ya se habían propuesto desde la antigüedad doctrinas filosóficas según las cuales los números y la geometría desempeñaban una función central en la explicación de la naturaleza, hasta el siglo XIV no eran muchos los ámbitos concretos a los que se habían aplicado tales ideas. Uno de los aspectos más importantes para el nacimiento de la nueva ciencia era, sin duda, la presentación de explicaciones cuantitativas de los fenómenos cualitativos.

En este sentido, se dan dos pasos importantes que preparaban los desarrollos futuros. Uno era conceptual, y se refería a la posibilidad de estudiar de modo matemático aquellos aspectos de la naturaleza que no parecían estar relacionados con lo cuantitativo, o sea, las cualidades. El otro era matemático y consistía en proporcionar instrumentos que, si bien todavía debían mejorarse, ampliaban notablemente las posibilidades efectivas de la física matemática. En ambos aspectos, *Oresme* realizó importantes contribuciones.

En el comienzo de su tratado sobre la representación de las cualidades, *Oresme* presenta sus trabajos como un desarrollo de sus propias ideas y de quienes antes de él han abordado ese tipo de estudios, sin pretender una originalidad absoluta. La idea básica de *Oresme* es que toda cualidad que puede adquirir sucesivamente diferentes intensidades puede ser representada mediante una línea recta levantada verticalmente sobre cada punto del sujeto afectado por dicha cualidad. Sobre una línea horizontal se representa la extensión del cuerpo en la que se estudia la cualidad, y en cada punto de esa línea se levanta una recta vertical cuya altura sea proporcional a la intensidad de la cualidad. De ahí resulta una figura geométrica que ayuda a comprender con facilidad las características del fenómeno que se estudia, ya que, tal como *Oresme* recuerda al tratar esta cuestión, nuestro conocimiento se apoya en los sentidos y es ayudado mediante el recurso a la imaginación.

El pensamiento que guía a *Oresme* es que todo lo que puede ser medido puede ser imaginado a la manera de una cantidad continua, tal como las líneas y las superficies. Por eso, las intensidades que pueden ser adquiridas de modo sucesivo pueden ser imaginadas mediante una línea recta elevada verticalmente sobre cada punto del sujeto al que afectan, de manera que la medida de esas líneas proporcionará la medida de las intensidades. Las cualidades que se estudian pueden ser las que habitualmente suelen considerarse como tales, como es el caso del color, pero también otras que no suelen comprenderse bajo ese concepto, como la velocidad. Este último caso es especialmente importante para la representación del movimiento.

En el estudio de la velocidad, *Oresme* propone una representación en la que el tiempo está situado en una semirrecta horizontal y, en cada punto de la misma se levanta una línea vertical (latitud), proporcional a la velocidad instantánea de un móvil en el instante representado por tal punto. Los extremos de estas líneas, que recuerdan a nuestros vectores actuales, dibujan una línea que permite identificar las características del movimiento estudiado. Por otra parte, el espacio recorrido por el móvil en un determinado intervalo de tiempo queda determinado por el área del recito encerrado por dicha línea, la semirrecta en la que se representa el tiempo y las líneas verticales que expresan la velocidad en los instantes extremos del intervalo en cuestión (fig. 34).

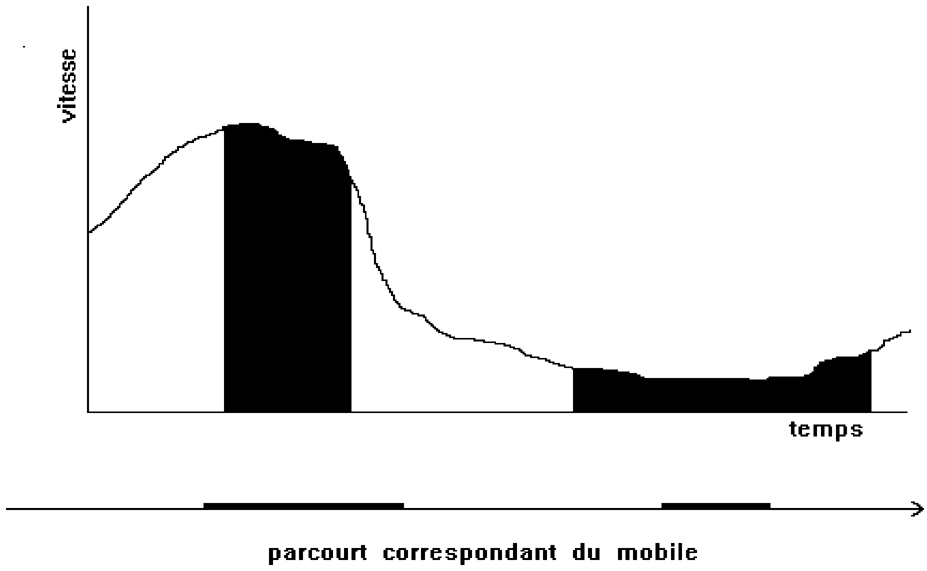


Fig. 34

Así, en el caso de un movimiento rectilíneo uniforme, la línea trazada por las latitudes es una semirrecta paralela a la línea de los tiempos, mientras que en el caso de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la línea característica del mismo es una línea recta inclinada respecto de la semirrecta de los tiempos (fig. 35).

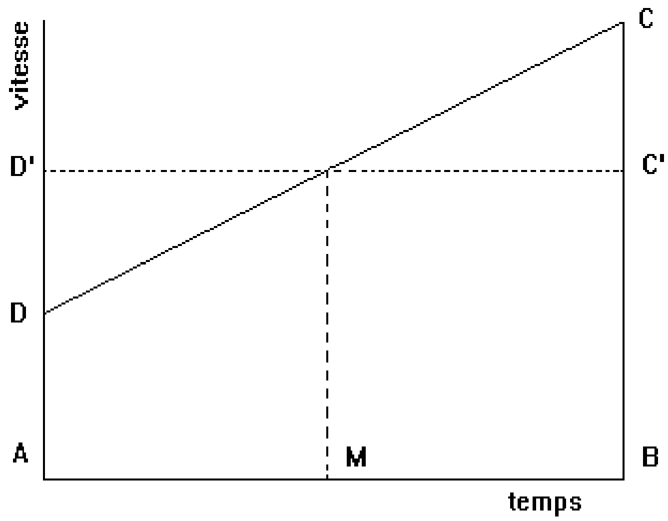


Fig. 35

Oresme afirma expresamente que la representación que propone se extiende, de modo universal, a toda intensidad imaginable, tanto por lo que se refiere a los tipos de cualidades como a los sujetos, que pueden ser sensibles o no serlo; y, como se ha señalado, se refiere de modo expreso también a fenómenos psicológicos. Se trata de un esfuerzo por aplicar el método cuantitativo, característico de la ciencia experimental, a un ámbito de fenómenos enormemente amplio; no se trata sólo, pues, de una contribución parcial a problemas específicos, por muy importantes que éstos sean, sino que además se ha de subrayar la mentalidad implicada en esos planteamientos y lo que esa mentalidad supone para el afianzamiento del método cuantitativo de la ciencia moderna.

Este uso de estas coordenadas rectangulares implícitas en la representación es una contribución original de *Oresme*, como también lo es su aplicación al estudio matemático de las cualidades y, de modo especial, al estudio del movimiento. Por este motivo, muchos autores han atribuido a *Oresme* una importancia decisiva, como autor de una revolución conceptual que permitió, por vez primera en la historia, estudiar el movimiento según las exigencias de la física matemática.

El estudio se extiende a las propiedades geométricas de los seis tipos posibles de configuraciones simples, pero *Oresme* estudia también las figuraciones compuestas, que admiten 62 especies. Aunque no expone una formulación algebraica de su representación geométrica, si se traducen sus consideraciones a un lenguaje algebraico se obtiene, en el caso de dos dimensiones, la ecuación de la línea recta. Existe, pues, una justificación para considerar a *Oresme* como precursor, si no inventor, de la geometría analítica.

Oresme extiende su estudio a figuras de más dimensiones. Lo dicho sobre cualidades lineales, que dan lugar a representaciones mediante figuras planas, puede extenderse a cualidades superficiales. En el contexto de esas consideraciones, *Oresme* se refiere incluso a una cuarta dimensión que permitiría extender a las cualidades corporales la representación utilizada para las lineales y superficiales. Advierte claramente el carácter imaginario de esa dimensión, pero abre el camino a un trabajo matemático que, si bien no traduce de modo inmediato las propiedades de los cuerpos, es un instrumento útil para su estudio científico.

Desde el punto de vista de las Matemáticas propiamente dichas, los espacios de más de tres dimensiones no aparecen hasta *Gauss*, que fue el matemático más importante que trató la geometría de los hiperespacios durante los primeros cuarenta años del siglo XIX. *Gauss* concebía el espacio como una abstracción y, en consecuencia, la geometría no tenía por qué limitarse al espacio físico tridimensional. De hecho, se puede considerar que *Gauss* es el puente que condujo la teoría matemática de los hiperespacios desde su creación hasta su madurez, ya en la segunda mitad del siglo XIX.

En su trabajo de 1831, *Theoria Residuorum Mathematicorum* describe la representación usual de los números complejos en el plano, pero expresa que tal representación precisa una justificación mediante un modelo geométrico. Así, los enteros complejos forman una *sucesión de sucesiones* (variedad de dimensión dos). Al final, menciona variedades de más de dos dimensiones, aunque no entra en la discusión de las mismas. Deja claro, no obstante, que su teoría específica de los números complejos y las variedades bidimensionales está relacionada con una teoría más general de variedades que hace referencia a los sistemas de hipernúmeros y variedades de dimensión *n*, teoría que daría lugar a una rama de la geometría abstracta.

En *Über die Methode der Kleinsten Quadrate*, de los años 1850-51 justifica el uso de variedades abstractas de dimensión arbitraria como el vehículo natural para llevar a cabo sus investigaciones sobre el método de los mínimos cuadrados. Tales espacios producen una geometría analítica generalizada basada en *n* coordenadas, con la distancia euclídea generalizada.

Las ideas de *Gauss* sobre los espacios multidimensionales están estrechamente vinculadas a sus conceptos filosóficos de la geometría. En su *Jubiläumschift*, de 1849: *Beitrage zur Algebraischen Gleinchungen*, en donde hace una importante revisión de su primer intento de demostración del teorema fundamental del álgebra dice:

Presentaré la demostración en íntima relación con la geometría de la posición, ya que ello proporciona la máxima simplicidad y brillantez. Sin embargo, el verdadero contenido del argumento en su totalidad pertenece en esencia al dominio de la teoría general abstracta de la cantidad, con independencia de objetos espaciales, cuya característica es la combinación de cantidades conectadas teniendo en cuenta la continuidad; un dominio que está muy poco cultivado y *que puede desarrollarse con un lenguaje que no esté basado en imágenes.*

La visión de una geometría abstracta divorciada de la intuición espacial está relacionada con el deseo de Gauss de desarrollar una *Geometría Situs* y, en realidad, su actitud señala el comienzo de una nueva visión sobre esta cuestión: Para él, la Geometría, en su sentido más amplio, aparece liberada del espacio físico, ya que considera que se puede razonar sobre figuras, pero en el análisis final, éstas deben suprimirse en favor de la formulación de teorías geométricas abstractas.

Entre los años 1840 y 1860 se publicaron gran cantidad de trabajos sobre hiperespacios y fueron muchos los matemáticos de la época que se interesaron por esta cuestión. La mayoría de ellos introdujeron tales espacios de dimensión superior sin más que considerar sistemas de *n* coordenadas al tiempo que investigaban la geometría métrica y proyectiva de los mismos. Quienes adoptaron una actitud filosófica ante los fundamentos de la geometría de tales espacios fueron Hermann Grassmann (1809-1877) y Bernhard Riemann (1826-1866).

En 1844, Grassmann publicó la obra *"Die Lineale Ausdenungslehere"* en la que se puede observar el enorme contenido filosófico de la misma así como su gran dificultad conceptual, lo que hace que la teoría matemática contenida en ella resulta sumamente oscura. No obstante, es una obra de gran valor debido a que en ella se introduce la nueva *"teoría de la extensión"* .

Veamos las palabras del propio Grassmann en la presentación que hace de la misma:

Mi teoría de la extensión constituye la base de la teoría de espacio (Geometría); es decir, es una teoría matemática pura independiente de cualquier intuición espacial, cuya principal aplicación al espacio es la Geometría.

Los teoremas de la geometría tienden siempre a la generalización, pero ésta no es posible debido a su limitación a las tres dimensiones del espacio ordinario; esto es posible en la teoría de la extensión.

Aunque el estilo de Grassmann es muchas veces opaco, su línea es transparente: *Ausdenungslehre;* o la geometría abstracta, no está limitada a nuestro conocimiento del espacio físico, sino que es anterior a tal conocimiento. Es anterior a la magnitud física e incluso al número, ya que estos conceptos pueden obtenerse a partir de las cantidades continuas objeto de estudio en la Teoría.

En este contexto, Grassmann estudia los espacios abstractos de dimensión superior tras tratar el espacio ordinario tridimensional. La definición que da de ellos tiene cierta analogía con la antigua teoría del flujo *sobre la generación de figuras:*

"Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos por la que un elemento generador pasa a través de un cambio continuo".

El conjunto de todos los elementos extendidos a lo largo de una dimensión es entonces un sistema de primer orden. Para originar formas de orden superior se procede a crear una forma de primer orden a partir de un elemento y, a continuación, tiene lugar un proceso de cambio continuo por el que se forma una sucesión de sistemas paralelos de primer orden; se tiene así un sistema de segundo orden. Mediante cambios sucesivos es posible obtener sistemas de cualquier orden finito.

Bernhard Riemann trata la cuestión de los hiperespacios en su obra *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* escrita el año 1854 con motivo de su *Habilitationsvortrag* y que no fue publicada hasta el año 1868, después de la muerte de su autor.

Igual que en el caso de Grassmann, el tratamiento dado por Riemann a la cuestión de los espacios de dimensión superior es extremadamente oscuro y el lenguaje empleado, esencialmente filosófico. Sin embargo, su trabajo es de una gran profundidad y en él se trata la generalización a *n* dimensiones de la curvatura de Gauss, los fundamentos de la Geometría que hoy llamamos Riemanniana así como la versión elíptica de la geometría no euclídea. Contiene asimismo una discusión acerca de las relaciones entre el espacio físico y la geometría pura.

En la primera sección del libro se discute el concepto de variedad n-dimensional, que trata como variedades topológicas generales. De ellas, se examinan dos aspectos fundamentales: De una parte, se analiza un método de construcción, y de otra, un método de reducción para determinar puntos de las mismas mediante coordenadas.

El método de construcción de Riemann es más complejo que la antigua teoría del flujo extendida a *n* dimensiones: El verdadero carácter de una variedad unidimensional es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto, se obtiene una variedad de dimensión dos. En general, podemos continuar el proceso para obtener variedades de cualquier dimensión finita.

En la determinación de posiciones en una variedad n-dimensional, el proceso se invierte: Se fija una variedad unidimensional que se toma como referencia y en ella se destaca uno de sus puntos, que se toma como origen. Los restantes puntos de esta variedad unidimensional quedan caracterizados por su distancia a este origen. Se considera ahora una función continua de posición entre la n-variedad y la variedad unidimensional de la referencia, de manera que no sea·constante en una región de la *n*-variedad. De acuerdo con esto, todo sistema de puntos para los cuales la función es constante forma una subvariedad continua de dimensión *n-l,* y a medida que esta función varía, estas *(n-1)*-variedades pasan de unas a otras de manera continua. Así, podemos reducir la posición de un punto en una variedad de dimensión *n* al cálculo de un número y una variedad de dimensión *n-1*. Continuando el proceso, la determinación de un punto queda fijada por *n* números reales que son sus coordenadas.

Es evidente que el estudio de una geometría de espacios de dimensión superior a tres no sentó las bases para el establecimiento de una teoría de los espacios abstractos. No obstante, el salto del espacio físico ordinario a otros de dimensión superior supuso un paso adelante notable en el proceso de abstracción al tener que considerar que los objetos que se manejaban no eran ya los puntos del espacio geométrico habitual con su distancia ordinaria, sino entes de otra naturaleza con los que se podían establecer relaciones que generalizaban otras ya conocidas en el espacio tridimensional.

5. Las geometrías no euclídeas

Como hemos podido ver, la noción de espacio va ligada a la de la geometría que subyace en el mismo. En realidad, las relaciones que se establecen entre los elementos del espacio son las que determinan su propia geometría.

Durante muchos siglos se daba por cierto que la única geometría posible era la de los *Elementos*. Las teorías de Kant sobre el espacio son una buena muestra de ello. Sin embargo, ya en el siglo XVIII se comenzó a dudar de la conveniencia o no de dar por cierto el axioma V de Euclides. En los *Elementos* se da la definición de rectas paralelas:

Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

En esta definición hay algunos términos que llevan a confusión, por su ambigüedad. El primer concepto que no queda claro es el de recta: basta ver la definición que de la misma da Euclides en sus *Elementos*:

Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

Del mismo tipo es la definición de plano, que en realidad no hace sino seguir los mismos pasos de la definición anterior:

Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.

Es obvio que las definiciones tanto de recta como de plano expresadas en estas dos últimas definiciones son tremendamente imprecisas y completamente ambiguas. Una persona a la que nunca se la haya dado la idea intuitiva de ambos conceptos sería incapaz de concebir una u otra conforme a nuestra idea de las mismas. Menos de un siglo más tarde, Arquímedes dio una definición algo más manejable de recta al considerarla como la línea que determina la menor distancia entre dos puntos cualesquiera de la misma; no hace ninguna referencia a la noción de plano.

Volviendo a los *Elementos*, aun dando por buena las ideas intuitivas de recta y plano, se nos presentan algunas dificultades al leer los Postulados que nos plantea Euclides. Así, los postulados 1 y 2 dicen:

1. *Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*

2. *Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta*.

El primero de estos dos postulados afirma que dos puntos cualesquiera determinan siempre una recta. El segundo, más problemático, afirma que toda recta se puede prolongar de manera indefinida.

Algunas preguntas que surgen tras la lectura del segundo postulado son: ¿Cómo prolongar una recta? ¿Dónde prolongarla? ¿Es cualquier recta indefinida?

¿Debemos prolongar un segmento rectilíneo siguiendo la superficie de la Tierra (supuesta esférica)? En tal caso, la prolongación no tendría lugar en lo que habitualmente consideramos como *plano*, sino en la superficie de una esfera. Pero, en esta esfera, ¿qué debe considerarse como una *recta*? Si tenemos en cuenta la definición de Arquímedes, las “rectas” de la esfera serán lo que en la actualidad llamamos sus geodésicas; es decir, los círculos máximos de la misma.

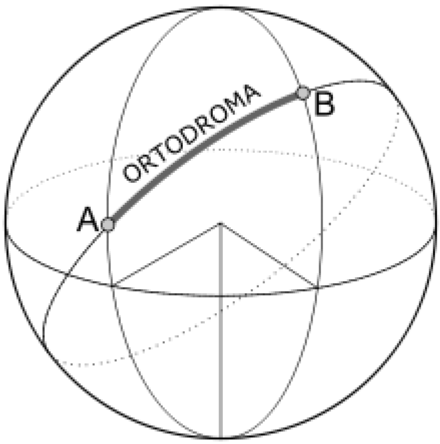


Fig. 36

Pero en una superficie esférica, dos “rectas” tienen siempre dos puntos en común; es decir, no hay “rectas” paralelas. Pero todavía hay más: cualquier “recta” de esta superficie esférica tiene longitud finita y no se puee prolongar de manera indefinida.

Si la prolongación se realiza en el plano tangente a la esfera en uno de sus puntos y tomamos como referencia la idea intuitiva de recta tal como la consideraba Euclides, esta “prolongación” se alejará cada vez más de la superficie terrestre para ir surcando el espacio. Este procedimiento nos puede llevar también a muchas sorpresas habida cuenta de nuestra ignorancia acerca del espacio que alberga el Universo.

Estas y otras ideas han llevado a muchos matemáticos a través de la historia a plantearse la verdadera naturaleza del postulado 5 de Euclides:

5. *Y* [postúlese] *que si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.*

Este postulado, como todos sabemos, hace referencia al paralelismo. Así, el propio Euclides enuncia la siguiente proposición, que es una versión equivalente del postulado anterior:

Proposición 27. *Si una recta, al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas.*

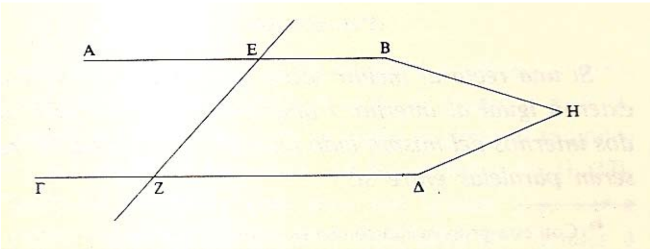


Fig. 37

Proposición que utiliza para probar la siguiente:

Proposición 31. *Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.*

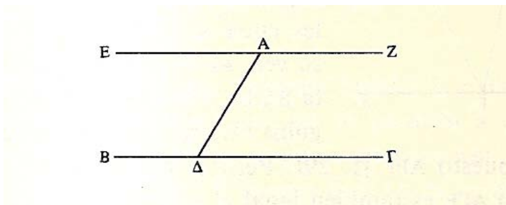


Fig. 38

De forma implícita, esta última proposición dice que por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una única recta paralela a ella.

Con estos datos, puede demostrar la proposición 32, que indica que los ángulos interiores de un triángulo suman dos rectos:

Proposición 32. *En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.*

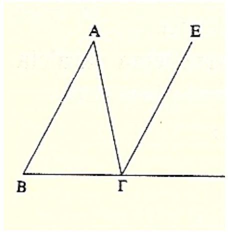


Fig. 39

No obstante, a finales del siglo XVIII, Gauss se dio cuenta de que al realizar la triangulación de la llanura europea en Francia, los triángulos (esféricos) obtenidos eran tales que sus ángulos sumaban más de dos rectos:

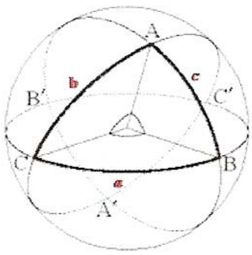


Fig. 40

Estos hechos activaron las alarmas de algunos matemáticos de finales del siglo XVIII y principio del XIX acerca de la validez absoluta del axioma 5 de Euclides sobre las paralelas. El primero en manifestarse en este sentido fue Gauss, pero quienes obtuvieron resultados efectivos al respecto fueron Janosz Bolyai y Nicolás Ivanovich Lobachevski, que establecieron la consistencia de una geometría que prescindía del axioma 5 de los *Elementos* y en la cual la suma de los ángulos de un triángulo es menos que dos rectos y a la que se llama Geometría Hiperbólica.

No vamos a entrar en la discusión de tales geometrías. Lo que nos interesa es poner de manifiesto que, al contrario de lo que afirmaba Kant, la geometría de Euclides no es la única posible, y la existencia de otras geometrías (no euclídeas) da lugar a otros espacios.

6. La noción de continuo

A comienzos del siglo XIX, el concepto de continuo era sumamente vago e impreciso. Ya en el siglo XVII, Isaac Newton, en su *"Tractatus de Quadratura Curvarum"* afirmaba:

No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos.

Podemos apreciar en estas frases una idea bastante difusa de continuo al considerar que las líneas quedan determinadas por un *"flujo continuo"* de puntos; es decir, la idea de continuo matemático quedaba ligada al movimiento de un punto ya que, de alguna manera, las líneas quedan descritas como la trayectoria de un punto móvil. Esta misma noción de continuo, obtenida a partir del movimiento de un punto, la podemos apreciar en la *"Enciclopedia Metódica. Matemáticas"* de D' Alembert (siglo XVIII) en la que en el artículo *"Punto"* se puede leer:

"Si imaginamos que un punto se desplaza, trazará una línea; y una línea que se desplazara engendraría una superficie, etc .... ".

Otra corriente existente entre ciertas escuelas filosóficas del siglo XVIII acerca de la definición de continuo consideraba que dicha noción debía establecerse sin tener en cuenta ninguna idea de movimiento, por considerar que éste es ajeno al propio espacio. Así, en la *"Metaphisica"* de A.G. Baumgarten podemos encontrar algunas frases que pretenden dar una definición de continuo.

"Una serie de puntos con puntos intermedios que da lugar a una línea es un continuo ... ".

Una obra que tuvo mucho eco en la segunda mitad del siglo XVIII, con seis ediciones entre 1758 y 1800 fue el libro de A.G. Knaster, *"Anfausgründe der Aritmetik, Geometrie, ebenen und spharischen Trigonometrie und Perspectiv",* en el que se da la siguiente definición:

" *Una cantidad continua* (continuo) *es algo cuyas partes están conectadas de tal forma que, al detenerse, otras comienzan inmediatamente y entre un extremo y otro no hay ninguna que no pertenezca a esta cantidad".*

Obsérvese la gran analogía de esta definición, ciertamente imprecisa, y la construcción de los números irracionales dada por R. Dedekind a mediados del siglo XIX mediante sus célebres cortaduras.

En oposición a Baumgarten, Knaster sostenía que una línea no era un conjunto de puntos yuxtapuestos:

"Si una línea estuviera formada por un conjunto de puntos yuxtapuestos, cualquiera de ellos tendría un punto inmediatamente próximo. Pero estos puntos vecinos, pese a ser distintos, no estarían separados por distancia alguna : .. ".

Otro autor de esa época interesado por esta cuestión fue Karl Christian Langsdorff, que definía las líneas como el borde de una superficie al mismo tiempo que las concebía como conjuntos de puntos situados unos próximos a otros. Asimismo, Johan Schultz, amigo personal de Kant y profesor de Matemáticas en Konigsberg, toma como correcta la definición de línea como borde de superficies y éstas, como borde de un cuerpo sólido.

Aparece entonces Bernhard Bolzano (1781-1848), profesor en Praga y que junto a una gran base matemática presentaba una excelente formación filosófica y teológica. Por este motivo, Bolzano consideraba de las Matemáticas lo que éstas tienen de especulativo y, en consecuencia, no debe extrañar su obsesión por el rigor a la hora de establecer definiciones o dar demostraciones de los resultados obtenidos.

En lo que concierne a sus investigaciones geométricas, Bolzano toma como cuestión primordial dar definiciones rigurosas de línea, superficie y cuerpo sólido así como el de dar el concepto matemático de continuo. En este empeño, rompió los límites tradicionales de la Geometría y consiguió formular una teoría que puede considerarse como un claro antecedente de la moderna Topología de Conjuntos.

Bolzano consideraba el concepto de flujo o movimiento como algo ajeno a la Geometría ya que, según él, dicha idea presupone la existencia del propio espacio, o lo que es lo mismo, de la Geometría, de manera que para probar la posibilidad de un determinado movimiento usado para demostrar algún teorema se debe utilizar el propio teorema, lo que constituye un círculo vicioso. Se trata pues de buscar propiedades intrínsecas de las líneas, superficies, cuerpos sólidos y continuo que permitan caracterizar sin ambigüedades tales conceptos y ésta es la tarea que se propone Bolzano, y que resuelve con un éxito mayor del que pueda parecer en un principio.

En esta línea de actuación, Bolzano da una definición de distancia:

"Lo que se asocia a un punto b en relación con el punto a, de manera que es independiente de a recibe el nombre de distancia al punto b tomada desde a".

Evidentemente, esta definición es bastante imprecisa y, por otra parte, no se dan propiedades de la misma; no obstante, podemos considerada como un primer intento de dar una formulación intrínseca de tal noción. Por supuesto, la distancia habitual entre puntos del espacio queda comprendida dentro de este concepto más general y, de hecho, es la que utiliza Bolzano en sus ejemplos.

Considera también que las figuras geométricas son conjuntos de puntos con una estructura interna inducida por su concepto de distancia, lo que le permite hablar de puntos próximos a otros en función de la distancia existente entre ellos.

En este orden de ideas, da la siguiente definición de línea:

"Un objeto espacial con la propiedad de que todo punto del mismo tiene exactamente un número finito de puntos vecinos correspondientes a cada distancia menor que una distancia dada recibe el nombre de línea".

Se entiende que "vecino" de un punto de un objeto espacial respecto de una distancia dada significa un punto de la intersección de dicho objeto con la superficie de una esfera de radio igual a la distancia considerada. Vemos así como Bolzano considera entorno s esféricos de un punto, si bien contempla en los mismos exclusivamente los puntos de su frontera que pertenecen al objeto espacial considerado.

Particularmente interesante es el concepto de *punto aislado* de un objeto espacial como aquél para el cual existen distancias arbitrariamente pequeñas tomadas desde el mismo de manera que no tiene puntos vecinos en dicho objeto para cada una de ellas.

Este concepto no coincide con el actual ya que presenta algunas dificultades, observadas por el propio Bolzano, como podemos encontrar en su libro *Paradoxien des Unendlichen*

Consideremos el segmento de recta az. Sea b, el punto medio entre a y Z ; c, el punto medio entre b y z ; d, el punto medio entre c y z, y así sucesivamente. Si tomamos el conjunto formado por el segmento az excluyendo los puntos medios citados e incluyendo z, éste es un punto aislado en nuestro objeto espacial.

Observemos que todo punto aislado en el sentido de Bolzano verifica la condición de que, en él, el conjunto es de dimensión cero, aunque no recíprocamente, pues el conjunto formado por todos los números racionales del intervalo [-1,0] junto con todos los números irracionales de [0,1] es 0-dimensional en el punto O mientras que no es aislado en el sentido de Bolzano. No obstante, todo punto aislado en el sentido actual, lo es también en el sentido que Bolzano da a este concepto.

Define entonces un *continuo* como un objeto espacial que no tiene puntos aislados. Se trata sin duda de la primera definición intrínseca de dicho concepto dada desde una perspectiva estrictamente matemática. Sin embargo, la definición no se ajusta exactamente a lo que la intuición nos dice que debe ser un continuo, pues, por ejemplo, dos intervalos lineales separados son un continuo de acuerdo con la definición de Bolzano, o incluso, si en e! conjunto descrito anteriormente eliminamos el punto *z* obtenemos un continuo de Bolzano que, por supuesto, no responde en absoluto a lo que manda la intuición. Ahora bien, todo conjunto que cumple las condiciones para ser un continuo conforme a la definición actual de dicha noción verifica también la definición de Bolzano.

Es cierto que en los trabajos de Bolzano que tratan estas cuestiones no se dan soluciones enteramente satisfactorias, pero no es menos cierto que los caminos utilizados permiten establecer las bases para construir una estructura interna en los conjuntos de puntos que es un antecedente de lo que ha sido la Topología de los espacios abstractos.

7. La teoría de conjuntos lineales de puntos de Cantor

Como ya hemos dicho, entre los años 1879 y 1884, Georg Cantor publicó una serie de seis artículos en los Mathematische Annalen bajo el título *"Uber unendliche, lineaire Punktmannifaltigkeinten"* ("Sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos"). Estos trabajos constituyen los pilares sobre los que se asentaron más tarde las ideas conducentes a las distintas definiciones de espacio abstracto y son sin duda la piedra angular en la evolución de este concepto.

El origen de estos trabajos habría que buscarlo en el año 1869, cuando Cantor abandona Berlín para convertirse en *Privatdozent* de la Universidad de Halle. Allí se encuentra Cantor con el profesor Edward Heine, quien le propone el siguiente problema: "Si una función arbitraria puede representarse mediante una serie trigonométrica, ¿es dicha representación única?". El propio Heine había dado alguna solución parcial a la cuestión, imponiendo ciertas restricciones, como que la función dada fuera continua en casi todos los puntos así como que la serie trigonométrica fuera uniformemente convergente en el mismo conjunto.

Cantor se propuso dar dicho teorema de unicidad con la mayor generalidad posible. En una primera demostración, dada en 1870, supone que la serie es convergente para todo valor de *x,* pero en 1871 consigue probar que el teorema era posible incluso si, bien la representación de la función, bien la convergencia de la serie, no eran posibles para una cantidad finita de puntos. Finalmente, en 1872 demuestra que se pueden llegar a admitir una cantidad infinita de puntos excepcionales siempre que el conjunto de los cuales verifique ciertas propiedades.

Con el fin de caracterizar estos puntos, establece Cantor el concepto de *punto límite,* llamado más tarde *punto de acumulación,* de un conjunto conforme a la definición siguiente:

"Un punto p es un punto límite de un conjunto lineal de puntos P si todo entorno del mismo, arbitrariamente pequeño, contiene varios puntos de P".

Este concepto era conocido ya con anterioridad y la referencia más significada del mismo la encontramos en el teorema de Bolzano- Weierstrass, que expresa que todo conjunto limitado, con infinitos puntos, tiene algún punto límite. No obstante, la gran idea de Cantor fue la de reunir todos los puntos límite de un conjunto *P* en otro conjunto, llamado *conjunto derivado* de *P,* y que designa como *P'*. Puesto que estos puntos constituyen a su vez un conjunto, se puede hablar de su conjunto derivado *P"* Y así sucesivamente. Se definen así los *conjuntos de primer género y especie n* como aquéllos para los cuales el conjunto derivado de orden $n+1$ es vacío. Los conjuntos cuyos derivados son todos distintos del vacío reciben el nombre de *conjuntos de segundo género.* El teorema de unicidad de la representación de una función en forma de serie trigonométrica lo establece Cantor de forma tal que los puntos excepcionales para los que o bien la representación de la función o bien la convergencia de la serie no se verifican, constituyen un conjunto de primer género.

En lo que concierne a nuestro interés, la idea de colocar en un mismo conjunto todos los puntos límite de un conjunto dado supone un avance fundamental en la evolución del concepto de espacio, pues en ella está, como veremos más adelante, el gérmen de las primeras definiciones de espacio topológico.

Pero Cantor fue más allá en la estructura interna de los conjuntos lineales de puntos. Se da la definición por la que un conjunto *P está condensado en un intervalo [a,b]* si cualquier intervalo *[c,d],* arbitrariamente pequeño, incluído en *[a,b]* contiene puntos de *P.* Este concepto se corresponde con el actual de conjunto denso en dicho intervalo, y el propio Cantor prueba que es equivalente a que el primer conjunto derivado de *P* coincida con *[a,b]*. Es evidente que si *P* es un conjunto de primer género, no está condensado en ningún intervalo.

El interés de Cantor se vuelve ahora al concepto de continuo matemático, con lo que retornamos de alguna manera las ideas expresadas por B. Bolzano. El planteamiento que da a la cuestión lo podemos ver reflejado en sus propias palabras:

La noción de continuo no sólo ha jugado un papel importante en el desarrollo de las ciencias en general sino que también ha provocado grandes divergencias y, en consecuencia, vivas discusiones. Seguramente, esto es debido a que la idea tomada como punto de partida ha sido muy distinta según los autores a causa de que no tenían *una definición rigurosa del concepto ...*

Asimismo, en lo que concierne a la resolución del problema, sus ideas están también muy claras:

... me veo obligado únicamente a desarrollar aquí, de manera lo más breve posible y solamente desde el punto de vista de la teoría matemática de sistemas, esta noción ...

Para Cantor, igual que lo fue para Bolzano, era imprescindible descartar cualquier idea de tiempo para establecer la de continuo, por ser éste un concepto anterior a dicha idea. Cree también Cantor que no se puede llegar al continuo a través de una idea intuitiva del espacio, pues tanto éste como las figuras contenidas en él pueden describirse mediante un continuo ya formado de manera abstracta.

Se define así, en el ámbito del espacio aritmético de todos los sistemas de n números reales ordenados, la noción de *conjunto perfecto* como el que coincide con su conjunto derivado. Observa Cantor que todo continuo debe ser un conjunto perfecto, pero no obstante, estos conjuntos no pueden caracterizar dicho concepto ya que, por ejemplo, dos intervalos separados en una recta constituyen un conjunto perfecto y, en cambio, no encajan en la idea intuitiva de continuo. Asimismo, el propio Cantor da un ejemplo de un conjunto lineal de puntos que, siendo perfecto, es un conjunto no condensado en toda la extensión de un intervalo, por pequeño que éste sea. Se trata del conocido *conjunto discontinuo de Cantor* formado por todoslos números reales del intervalo [0,1] cuya expansión triádica está formada exclusivamente por las cifras 0 ó 2.

Cantor pensaba que en el concepto de conjunto perfecto estaba una de las cualidades intrínsecas de un continuo matemático. Para superar las dificultades que acabamos de ver introduce una nueva noción: la de *conjunto bien encadenado:*

"Se dice que un sistema T de puntos está bien encadenado cuando dados dos puntos arbitrarios t y t' del mismo y un número positivo r, existe siempre un número finito de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de T tales que las distancias $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_nt'$ son todas menores que r.

Con este nuevo concepto, que como sabemos, está íntimamente relacionado con la conexión, se puede dar ya una definición de continuo de manera que un conjunto P es un *continuo* si es simultáneamente *perfecto* y *bien encadenado.* Esta definición es evidentemente distinta de la dada por Bolzano y no da lugar a situaciones paradójicas como las que producía la definición de este último. El propio Cantor destacó las diferencias entre ambas definiciones, destacando las ventajas de su definición frente a la de Bolzano. Por supuesto, todo continuo en el sentido de Cantor se ajusta a la definición de Bolzano, pero no es cierto el enunciado recíproco. Si, por otra parte, pensamos que Cantor se estaba refiriendo a continuos aritméticos y, en particular, a conjuntos lineales de puntos, y nos limitamos a conjuntos acotados, todo conjunto perfecto es compacto y, en este caso, los conjuntos bien encadenados son también conexos, con lo cual, la definición de Cantor se ajusta perfectamente a la que manejamos en la actualidad.

Dice Cantor:

Sé perfectamente que la palabra "continuo" no ha tomado hasta ahora, en Matemáticas, un sentido preciso; la definición que yo he dado será demasiado corta para algunos y excesivamente amplia para otros; espero haber alcanzado el justo medio.

Digamos finalmente que, en el transcurso de una correspondencia con el matemático sueco Ivar Bendixson acerca de un contraejemplo de este último referido a un resultado erróneo de Cantor, éste define un nuevo concepto, que iba a resultar también trascendental en la teoría de los espacios topológicos abstractos: el de *conjunto cerrado*, establecido como un conjunto que contiene todos sus puntos límite.

Por supuesto, a la vista de lo que acabamos de exponer, Cantor no consideró la Topología de Conjuntos como una estructura propia e independiente, pero sus ideas son, sin ningún género de dudas, el punto de partida para el establecimiento de dicha teoría de una manera sistemática, por cuanto profundizó de manera definitiva en las propiedades intrínsecas de los conjuntos lineales de puntos. Estas son las que constituyen los pilares básicos de la teoría de los espacios abstractos, que apareció veinte años más tarde de la mano de M. Fréchet.

8. La transición de Cantor a los espacios abstractos

La aparición de los trabajos de Cantor, junto con la propia dinámica de las Matemáticas de la época, llevó consigo que de manera inmediata surgieran trabajos de diversa índole en los que se consideraban conjuntos de objetos distintos de los puntos de un espacio aritmético, pero a los que se pueden aplicar los conceptos introducidos por Cantor de manera análoga a como éste lo hace en los conjuntos lineales de puntos. Tales trabajos constituyen la transición entre las teorías de Cantor y los espacios abstractos propiamente dichos.

Así, en 1883, G. Ascoli, en su trabajo *"Le Curve Limite di una Varietá data di Curve"* (Atti della Reale Accademia dei Lincei. Roma 1883) estudia conjuntos cuyos elementos son curvas. En 1887, Vito Volterra publica sus primeros trabajos sobre funcionales (íntimamente relacionados con el nacimiento del análisis funcional) en el que se trata la estructura de conjuntos cuyos elementos son "funciones que dependen de otras funciones" o "funciones de línea", términos que Volterra utiliza como sinónimos *("Sopra le Funzioni che Dipendono da altre Funzioni"* y *"Sopra le Funzioni da Linee"*. Atti della Reale Accademia dei Lincei Rendiconti. Roma 1887). Asimismo, en 1889, Césare Arzelá, en su trabajo *"Funzioni di Linee"* (Atti della Reale Accademia dei Lincei Rendiconti. Roma, 1889) aporta nuevas contribuciones sobre esta cuestión.

Ya en 1897, en el Primer Congreso Internacional de Matemáticas, Jacques Hadamard propone el estudio del conjunto E de las funciones continuas en el intervalo [0,1] con valores prefijados en los extremos y sugiere el siguiente camino para llevar a cabo dicha investigación *("Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles"*. Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses. Leipzig. 1898):

Divídase el conjunto E en subconjuntos E' tales que dos funciones pertenecientes a uno cualquiera de ellos están a una distancia (en el sentido de Weierstrass) menor que un número determinado r. Se puede decir entonces que el conjunto cuyos elementos son los conjuntos E' "numera" el conjunto E. Son precisamente las propiedades de ese conjunto las que deben estudiarse ...

Se trata, pues, de llevar a cabo un estudio de la estructura interna del conjunto de tales funciones, estructura que viene marcada por los conjuntos *E'* y, más concretamente, por la idea de proximidad o distancia entre funciones del conjunto *E*.

En 1903, Emil Borel propone el estudio de conjuntos cuyos elementos son líneas o planos *("Quelques remarques sur les ensembles de droites ou plans* ". Bulletin de la Societé Mathématique de France. Paris. 1903) y manifiesta:

Dada una línea fija D, *diremos que la línea variable* D' *está infinitamente próxima a* D *si, elegidos dos puntos arbitrarios A y B en* D, *para cada número positivo r, se puede encontrar una posición de* D' *de manera que la distancia de* D' *a cada uno de los puntos A y B es menor que r.*

Con esta definición no resulta complicado dar en estos conjuntos nociones tales como las de *conjunto derivado, conjunto cerrado, conjunto perfecto,* etc. de la misma manera que lo hace Cantor en sus conjuntos de puntos.

Queda claro, pues, que las ideas de Cantor pueden trasladarse a conjuntos cuyos elementos no son puntos, sino objetos de otra naturaleza. Lo único que resulta imprescindible para ello es dar una definición de "proximidad" entre tales elementos. Este es el camino que lleva de manera inexorable a la definición de un espacio abstracto, que veremos en la sección siguiente.

9. Las primeras formulaciones

La primera formulación axiomática de un espacio abstracto tomó como concepto clave el de límite de una sucesión de elementos. Esto ocurre en 1906, cuando M. Fréchet publica su tesis doctoral: *"Sur quelques points du Calcul Fonctionnel"* (Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, 22 (1906), 1-74).

El planteamiento general de Fréchet lo podemos sacar de sus propias palabras:

... diremos que una operación funcional está definida en un conjunto E de elementos de naturaleza arbitraria (números, curvas, puntos, etc.) cuando, a cada elemento A de E le corresponde un valor numérico U(A) perfectamente determinado. El examen de las propiedades de estas operaciones constituye el objetivo del Cálculo Funcional.

La observación de Fréchet está en que para poder realizar un estudio adecuado del cálculo funcional es necesario desarrollar primero una teoría de conjuntos. Así, la generalidad de los resultados obtenidos va a depender de la generalidad de la teoría de conjuntos desarrollada.

Al abordar el estudio de los espacios abstractos, Fréchet toma como concepto fundamental, tal como hemos dicho ya, el de límite de una sucesión y define los conjuntos de clase *(L)* conforme a los axiomas siguientes:

a)Es posible determinar si dos elementos de (L) son distintos.

b)Es posible definir el concepto de "límite de un conjunto de elementos de (L)" de manera que, para un conjunto infinito de miembros $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ de (L) se puede determinar si existe o no un elemento límite A del mismo, con las restricciones siguientes:

i) Si $A_i = A$ (i= 1 ,2, ...),{ A_i } *tiene límite A.*

ii) Si *{ A_i }* *tiene límite A, todas sus subsucesiones infinitas, tomadas en el mismo orden, tienen límite A.*

Se define entonces el concepto de *elemento límite* de un conjunto *E* si existe una sucesión *{ $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ }* de elementos de *E,* distintos entre sí, que tiene como límite *A* Análogamente a como se hace para los conjuntos de puntos, se pueden definir con facilidad las nociones de *conjunto derivado, conjunto cerrado, conjunto perfecto,* etc. Se define también los elementos de condensación de un conjunto *E* como aquéllos que son límite del conjunto que resulta de suprimir en *E* un número finito de elementos.

En la teoría de conjuntos lineales de puntos de Cantor, el conjunto derivado de orden *n* de un conjunto *E* contiene el derivado de orden *n*+ 1. Esto no ocurre en los conjuntos abstractos de clase *(L),* lo que dificulta la extensión a los mismos de diversos teoremas que resultan ser ciertos para los conjuntos de puntos. A la vista de estos problemas, Fréchet pasa a considerar los conjuntos *(E*) de clase *(V),* en los que se da una primera definición axiomática de distancia:

a)Se puede distinguir si dos elementos de (E) son iguales o no.

b)A cada par A,B de elementos de (E) se asigna un número (A,B) con las propiedades:

i) $(A,B) = (B,A) > 0$ *si A es distinto de B.*

ii) $(A,B) = (B,A) = 0$ *si A=B.*

iii) Si (A,B)<r y (B ,C)<r, entonces (A,C)<f(r) donde f(r) tiende a cero con r y f es independiente de A,B y C.

El número *(A,B*) recibe el nombre de distancia entre *A* y *B.*

Se dice entonces que el conjunto de elementos *{ $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ }* tiene límite A si la distancia (A_n, A) tiende a cero con $1/n$. Esta definición de límite verifica las condiciones (i) y (ii) impuestas a tal noción en los espacios *(L);* no obstante, no todas las definiciones de límite que cumplan esas condiciones pueden obtenerse a partir del concepto de "distancia":

Demuestra Fréchet que el conjunto derivado de un conjunto de esta última clase es un conjunto cerrado, lo que no sucede con los conjuntos de clase *(L).* El resto de la memoria de Fréchet se dedica exclusivamente a los conjuntos *(L)* cuya definición de límite pueda deducirse de la de "distancia".

En 1908, F. Riesz presentó un trabajo en el IV Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Roma, con el título "Continuidad y Teoría de Conjuntos Abstractos" *("Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre")* en el que da una nueva formulación de los espacios abstractos tomando como idea de referencia la de *"punto de condensación"*, conforme a las restricciones siguientes:

a) Todo elemento que es punto de condensación de un conjunto M es también punto de condensación de todo conjunto que contiene a M.

b) Cuando se divide un conjunto en dos subconjuntos, cada punto de condensación del primero es punto de condensación de, al menos, uno de los dos subconjuntos que lo constituyen.

c)Un conjunto de un único elemento no tiene puntos de condensación.

d)Todo punto de condensación de un conjunto está unívocamente determinado por la totalidad de los subconjuntos del mismo que lo tienen como punto de condensación.

En realidad, Riesz intentaba desarrollar toda su teoría de espacios abstractos a partir de los tres axiomas que aparecen en primer lugar. Sin embargo, observó que tal pretensión no le permitía ir demasiado lejos, lo que le indujo a introducir la cuarta condición.

Para probar que el último axioma es independiente de los tres anteriores, Riesz puso el siguiente ejemplo: Sea *M* un conjunto infinito, de manera que todo elemento de *M* es punto de condensación de cualquier subconjunto infinito de *M* y de tal forma que los conjuntos finitos no tienen puntos de condensación. El espacio que se deriva de esta definición verifica las tres primeras condiciones, pero no cumple la última

Una vez fijados los axiomas, no resulta complicado establecer una teoría análoga a la de Cantor o Fréchet, tomando como conjunto derivado de *P* el de todos sus puntos de condensación. Con la formulación de Riesz se verifica que si *A* es un subconjunto de *B*, sus conjuntos derivados están relacionados de la misma forma (años más tarde, Fréchet introdujo esta condición como un axioma y le dió el nombre de "primera condición de Riesz"). Asimismo, en esta teoría se cumple que todo conjunto derivado es cerrado y con ello, cada conjunto derivado contiene los derivados sucesivos. Por otra parte, la teoría enunciada por Riesz no exige condiciones de numerabilidad al no contemplar la convergencia de sucesiones numerable s en la definición de punto de condensación.

Los axiomas de Fréchet y Riesz no contemplan la noción de entorno de un punto, concepto que era esencial en la Teoría de Conjuntos de Cantor. Fue H. Weyl quien, en 1913, llamó la atención sobre la conveniencia de introducir los entornas de un punto a la hora de dar una estructura de espacio abstracto. En su libro sobre superficies de Riemann puede leerse:

" ... *cualquier descripción de una variedad bidimensioinal requiere:*

1. Establecer los objetos concretos que deban considerarse puntos de la variedad.

2. Una exposición del concepto de entorno ".

Aparece así por primera vez la necesidad de definir la idea de proximidad entre los elementos de un conjunto (en este caso, en una superficie de Riemann) a través del concepto de entorno, que queda descrito como sigue:

"A cada punto p de la variedad F le asociamos ciertos conjuntos de puntos de la misma, definidos como 'entornos de p sobre F' con la condición de que cada entorno U_o *de un punto po* :

a) Debe contener a p_o *.*

b) Existe una transformación biunívoca que permite que U_O *se transforme en el conjunto de los puntos interiores de un círculo euclídeo* K_o *con las propiedades siguientes:*

i) Si p es un punto de U_a y *U, un entorno de p sobre F formado exclusivamente por puntos de* U_a*, el interior de la imagen de U contiene el punto imagen de p.*

ii) Si K es un círculo cuyo centro es la imagen del punto p, contenido en K_0*, existe un entorno U de p sobre F cuya imagen está completamente contenida en K.*

Con estos axiomas queda bastante clara la idea de entorno en un conjunto del que no se conoce la naturaleza de sus elementos. No obstante, la definición de Weyl se refiere, por una parte, a variedades bidimensionales y, por otra, queda sujeta a la estructura euclídea del plano a través de las transformaciones que aparecen en su enunciado. Era, por tanto, indispensable deshacerse de tales condicionantes si se quería dar una teoría que fuera suficientemente general.

Un paso adelante en este sentido lo dió, finalmente, F. Hausdorff quien, en 1914, publica su libro *"Grundzüge der Mengenlehre"*, en el que se dan los axiomas del concepto de *entorno* y que podemos considerar como definitivos ya que es a partir de entonces cuando se puede decir que comienza el verdadero desarrollo de la teoría de los Espacios Topológicos, que toma como punto de partida, precisamente, los axiomas de Hausdorff.

Puede comprobarse que los planteamientos iniciales de Hausdorff difieren muy poco de los de Weyl:

... *Podemos asociar a cada punto del conjunto determinadas partes del mismo, llamadas 'entornos', que pueden permitir la construcción de la teoría con la eliminación del concepto de distancia….*

Una observación interesante de Hausdorff es el orden de jerarquía que se establece entre los conceptos de *distancia, entorno* y *punto límite:*

Partiendo de la definición de distancia, se puede llegar a los conceptos de entorno y punto límite; una definición de entorno permite establecer la noción de punto límite, pero ya no es posible, en general, definir una distancia en el conjunto total que permita obtener la misma estructura que la proporcionada por los entornos; finalmente, si se parte de la idea de punto límite o punto de condensación, no es posible formalizar en todos los casos las nociones de distancia y entorno de manera que den lugar a un espacio equivalente.

A la vista de estas consideraciones, Hausdorff opta por tomar como punto central de su teoría de los espacios abstractos el concepto de entorno de un punto. Llama entonces *espacio topológico* a un conjunto en el que se han definido los entorno s de cada uno de sus puntos de acuerdo con esta definición:

"Un 'espacio topológico' es un conjunto E compuesto de elementos x, junto con determinados subconjuntos U_x *, asociados a cada x; los subconjuntos* U_x *reciben el nombre de 'entornos de x'* y *están sometidos a las condiciones siguientes:*

a) A cada punto le corresponde al menos un entorno U_x*. Todo entorno* U_x *contiene el punto x.*

b) La intersección de dos entornos de un elemento x contiene un entorno de x.

c) Si *y es un elemento de* U_x*, existe un entorno* V_y *de y contenido en* U_x

d) Si x e y son dos elementos distintos de E, existen entornos respectivos U_x *y* U_y *sin elementos en común*

Esta formulación representa, como hemos dicho, el punto de partida de la teoría de los espacios topológicos o espacios abstractos y que en la actualidad conocemos con el nombre de Topología de Conjuntos o Topología General. En realidad, el axioma (d) de Hausdorff da lugar a un caso particular de espacios topológicos, que conocemos como Espacios de Hausdorff.

En los años sucesivos, la teoría de los espacios topológicos se fue asentando de manera progresiva en el contexto de las Matemáticas para tomar carta de naturaleza como una parcela específica de las mismas. Hay que destacar los esfuerzos que se hicieron en este sentido por parte de matemáticos como Kuratowski, que dio una nueva axiomática de tales espacios a través del concepto de *punto adherente* de un conjunto (1918), así como Alexandroff y Urysohn, que dieron la formulación actual a partir de los conjuntos abiertos. Sin embargo, éstos no son más que la punta de un enorme iceberg, ya que fueron muchos los matemáticos de la época que contribuyeron al desarrollo inicial de dicha teoría y cuya enumeración sería excesivamente prolija.