Matemáticas jugando con agua

Emiliano Gómez, Risa Wolfson • University of California, Berkeley

Ciclo de talleres divulgativos “Matemáticas en acción”

Depto. de MATESCO, Universidad de Cantabria

23 de febrero, 2011

Matemáticas jugando con agua

- **Primera investigación**
  - La intersección del cubo con el plano

- **Segunda investigación**
  - Botellas con agua

Primera investigación:
La intersección del cubo con el plano

- Si cortamos un cubo con un plano, ¿qué figuras podemos obtener (sobre ese plano)?
- ¿Cómo debemos cortar el cubo para obtener ciertas figuras?
- ¿Podemos deducir la imposibilidad de obtener ciertas otras figuras?
- Si vertemos agua en un cubo, ¿qué relación existe entre la cantidad de agua que hay dentro del cubo y las figuras que se pueden obtener sobre la superficie del agua?

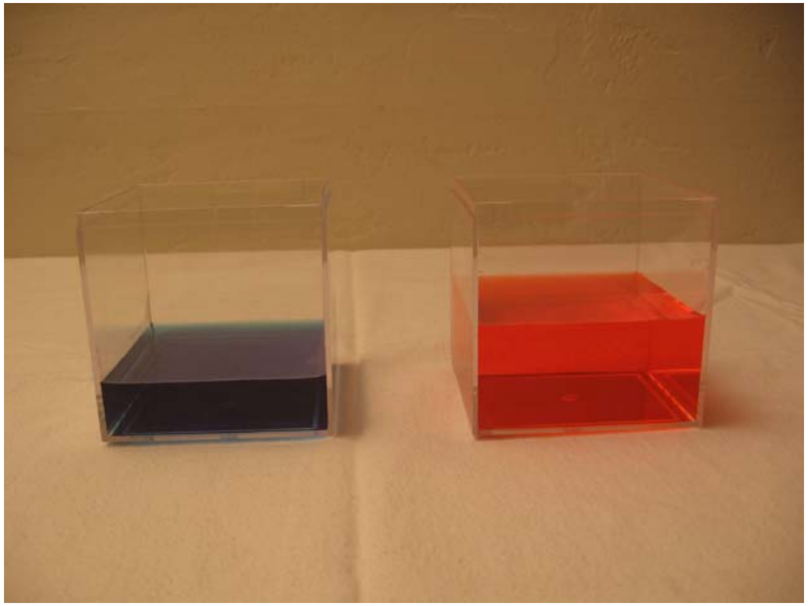
La intersección del cubo con el plano

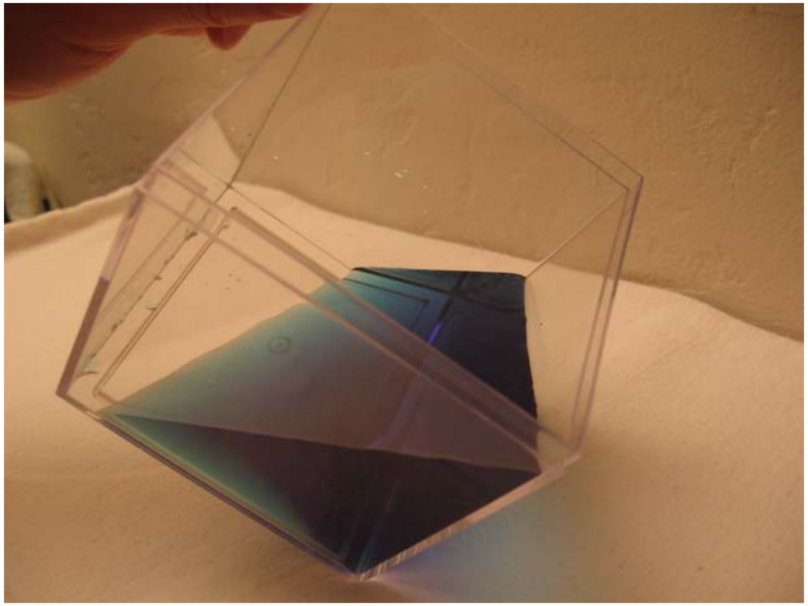
¿Cuáles de las siguientes figuras podemos obtener?

- Triángulo equilátero
- Triángulo isósceles no equilátero
- Triángulo escaleno
- Triángulo rectángulo
- Cuadrado
- Rectángulo no cuadrado
- Rombo no cuadrado
- Romboide*, no un rombo
- Trapecio
- Pentágono regular
- Pentágono irregular
- Hexágono regular
- Hexágono irregular
- Heptágono
- Polígono con más de 6 lados
- Polígono cóncavo

La intersección del cubo con el plano

Jugando con agua





La intersección del cubo con el plano

Bandas elásticas

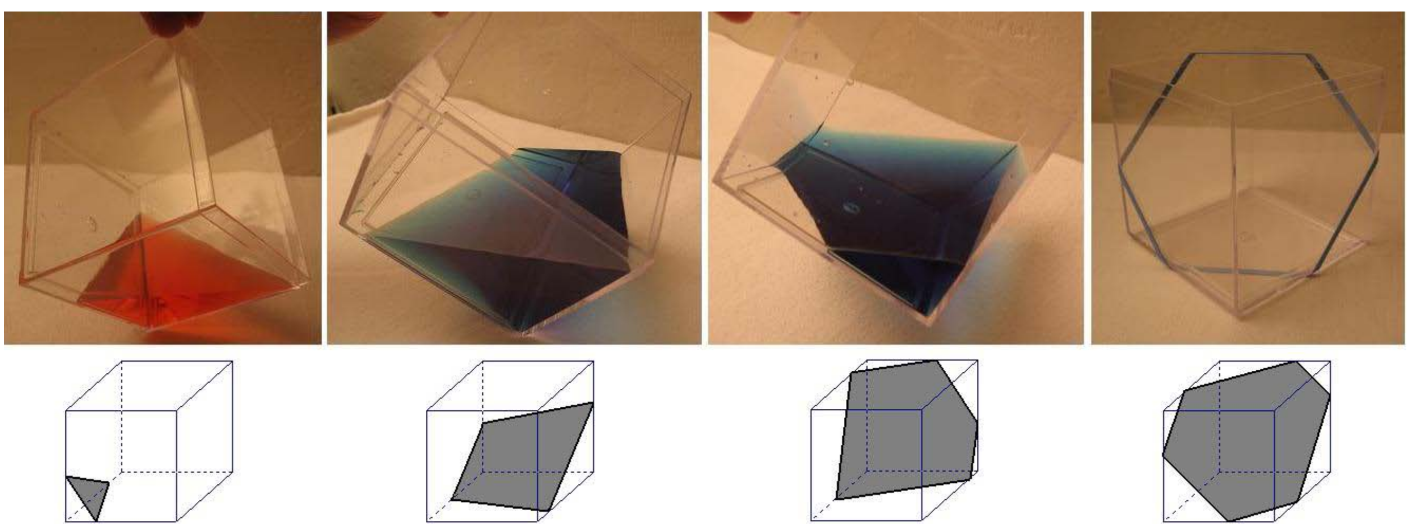
¡Cuidado!

La intersección del cubo con el plano

Algunos resultados

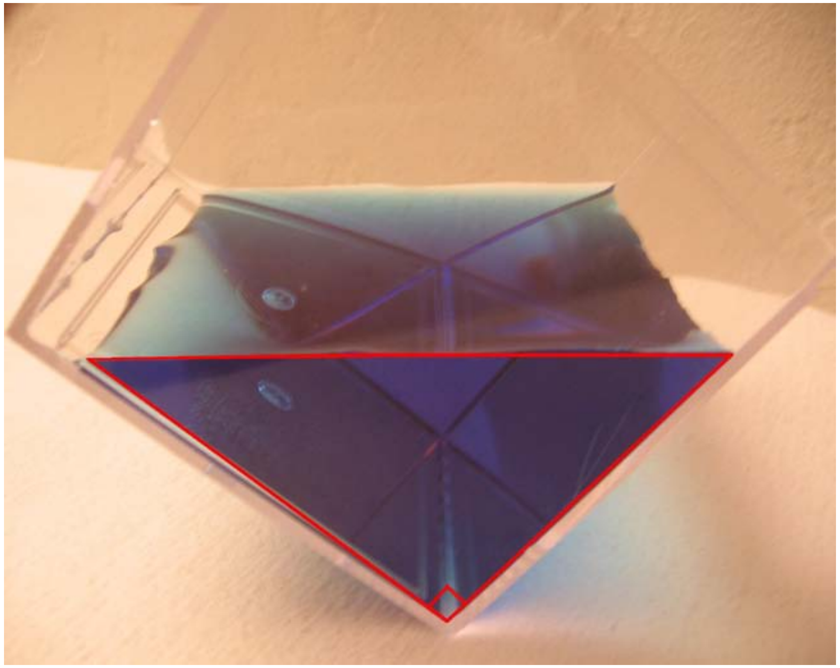
- La intersección es plana.
- El plano y el cubo[1] son ambos convexos. Por lo tanto, la intersección es convexa.
- La intersección del plano con cada cara es un segmento.[2]
- El plano debe cortar 3, 4, 5 o 6 caras del cubo.[3]

La intersección debe ser un polígono con 3, 4, 5 o 6 lados.



La intersección del cubo con el plano

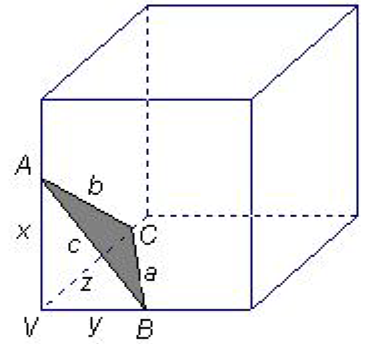
Algunos resultados



¿Obtuvimos un triángulo rectángulo?

¡No! Esto no vale.

La intersección del cubo con el plano
Algunos resultados

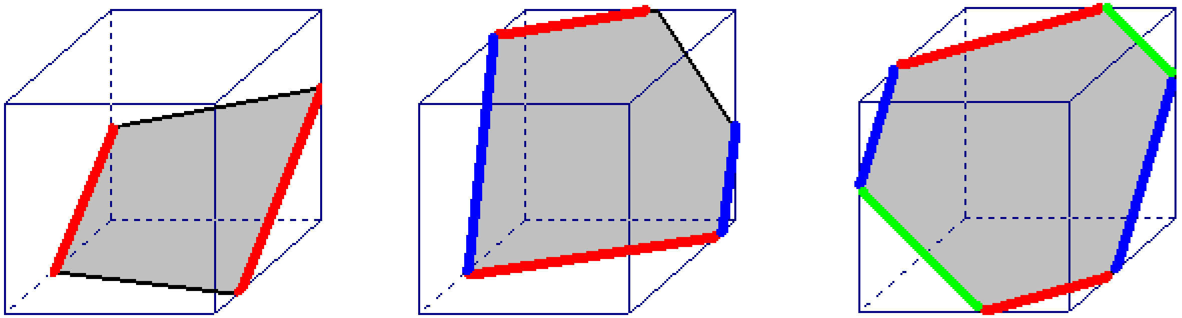


- Supongamos que se puede obtener un triángulo rectángulo *ABC* donde *C* es el ángulo recto.
- *AVB*, *AVC* y *BVC* también son triángulos rectángulos (*V* es el ángulo recto para los tres). Por lo tanto

$$c^2 = a^2 + b^2 = (y^2 + z^2) + (x^2 + z^2) = (x^2 + y^2) + 2z^2 = c^2 + 2z^2$$

y obtenemos una contradicción: $z = 0$.

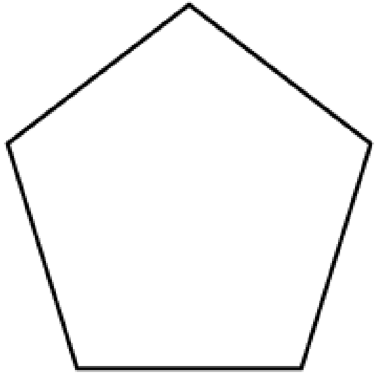
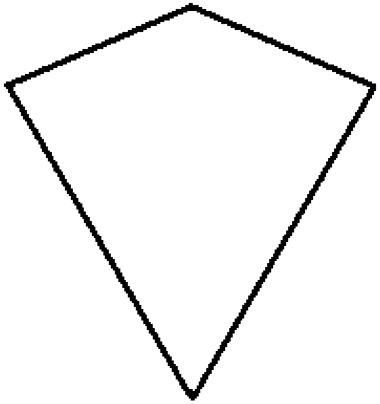
La intersección del cubo con el plano
Algunos resultados



- El cubo tiene tres pares de caras opuestas paralelas.
- Si un plano corta dos planos paralelos, las rectas obtenidas son paralelas.
- Por lo tanto, la intersección del cubo con el plano debe tener
  - al menos un par de lados paralelos si es un cuadrilátero.
  - dos pares de lados paralelos si es un pentágono.
  - tres pares de lados paralelos si es un hexágono.

La intersección del cubo con el plano

Algunos resultados

- El pentágono regular no tiene lados paralelos.
- El romboide (que no es un rombo) tampoco.
- Por lo tanto, estas dos figuras no se pueden obtener.

La intersección del cubo con el plano

Figuras sobre la superficie del agua

- Cualquier figura que se puede obtener como un corte plano del cubo, también puede obtenerse sobre la superficie del agua dentro del cubo, dada una cantidad adecuada de agua.
- Más aún, siempre es posible hacerlo usando una cantidad de agua menor o igual a la mitad del volumen del cubo.
- De hecho, si

$$p = \frac{\text{volumen de agua dentro del cubo}}{\text{volumen del cubo}},$$

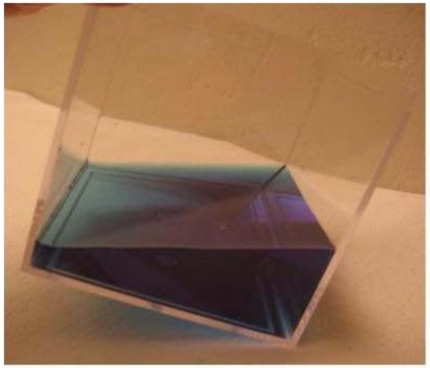
entonces las figuras que pueden obtenerse con un valor de p son exactamente las mismas que pueden obtenerse usando un valor de $1 - p$.

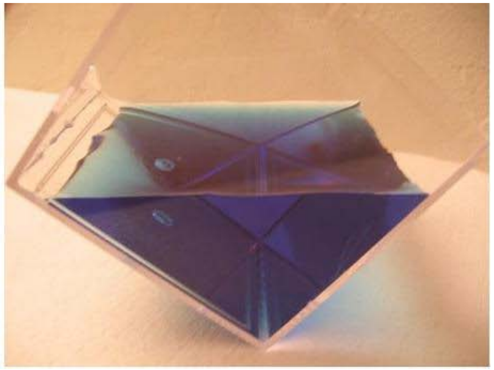
La intersección del cubo con el plano
Figuras sobre la superficie del agua

- Consideremos solamente el número de lados del polígono:

¿con qué cantidad de agua se puede obtener un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono o un hexágono?

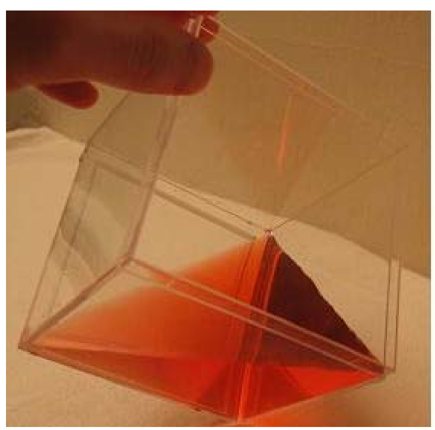
- Es suficiente considerar valores en el intervalo $0 < p \leq 1/2$.
- Si una arista del cubo se ubica de modo horizontal, entonces solo se pueden obtener rectángulos.
- Por lo tanto, para obtener un triángulo, pentágono o hexágono, es necesario poner al cubo de modo que haya un vértice por debajo de todos los demás.

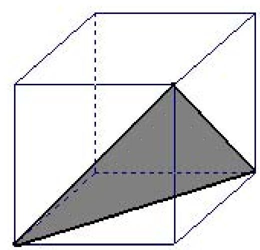




La intersección del cubo con el plano
Figuras sobre la superficie del agua

- Cuando $p = 1/6$, obtenemos el triángulo equilátero más grande posible.
- Si $1/6 < p \leq 1/2$, el agua rebasará al menos un vértice más, resultando en una figura con más de tres lados.





La intersección del cubo con el plano

Figuras sobre la superficie del agua

- Un triángulo puede obtenerse si $0 < p \leq 1/6$.
- Un cuadrilátero puede obtenerse con cualquier $0 < p \leq 1/2$.
- Un pentágono **no** puede obtenerse si $p = 1/2$ (simetría).
- Un hexágono puede obtenerse si $1/6 < p \leq 1/2$.

El caso del hexágono complementa al del triángulo:

Si $p \leq 1/6$, entonces el agua no puede alcanzar todas las caras de arriba (las tres caras que comparten el vértice más alto).

La intersección del cubo con el plano
Figuras sobre la superficie del agua

Polígonos que se pueden obtener con diferentes cantidades de agua p = volumen de agua dentro del cubo / volumen del cubo			
	$0 < p \leqslant 1/6$	$1/6 < p < 1/2$	$p = 1/2$
Triángulo	sí	no	no
Quadrilátero	sí	sí	sí
Pentágono	sí	sí	no
Hexágono	no	sí	sí

Segunda investigación:
Botellas con agua

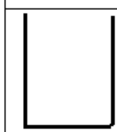
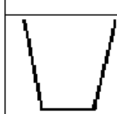
- Si vertemos agua en una botella, ¿cómo cambia el nivel del agua a medida que aumenta el volumen de agua en la botella?

- Si graficamos el nivel del agua a medida que vamos llenando una botella, ¿qué relación existe entre las propiedades de la gráfica y la forma de la botella?

- Por ejemplo, ¿qué botellas producen una gráfica lineal?, ¿qué propiedad determina si la gráfica es convexa o cóncava?, ¿debe la gráfica ser necesariamente continua?, ¿diferenciable? Si no, ¿en qué casos se produce una discontinuidad o un punto no diferenciable?

Botellas con agua

Preparación

Botella/ Grupo	Altura (aproximada)	Volumen (aproximado)	Definición de 1 drip
 Grupo 1	9 cm	300 ml	30 ml
 Grupo 2	16 cm (usar < 14 cm)	400 ml (usar 350 ml)	35 ml
 Grupo 3	13 cm	375 ml	40 ml
 Grupo 4	13 cm	450 ml	45 ml
 Grupo 5	11 cm	475 ml	45 ml

Botellas con agua

Nivel vs. volumen de agua en la botella

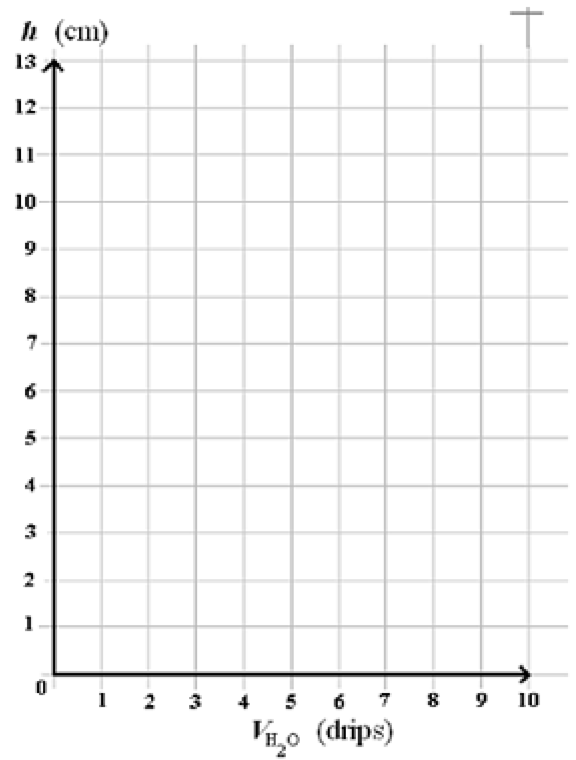
Definición de un “drip” para tu grupo: 1 drip = ____ ml

Dibujo de la botella

Tabla

V_{H_2O} (drips)	h (cm)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Gráfica



Botellas con agua
Primera botella

Botellas con agua

Segunda botella

Botellas con agua
Tercera botella

Botellas con agua

Cuarta botella

Botellas con agua

Quinta botella

Botellas con agua

Cinco botellas diferentes

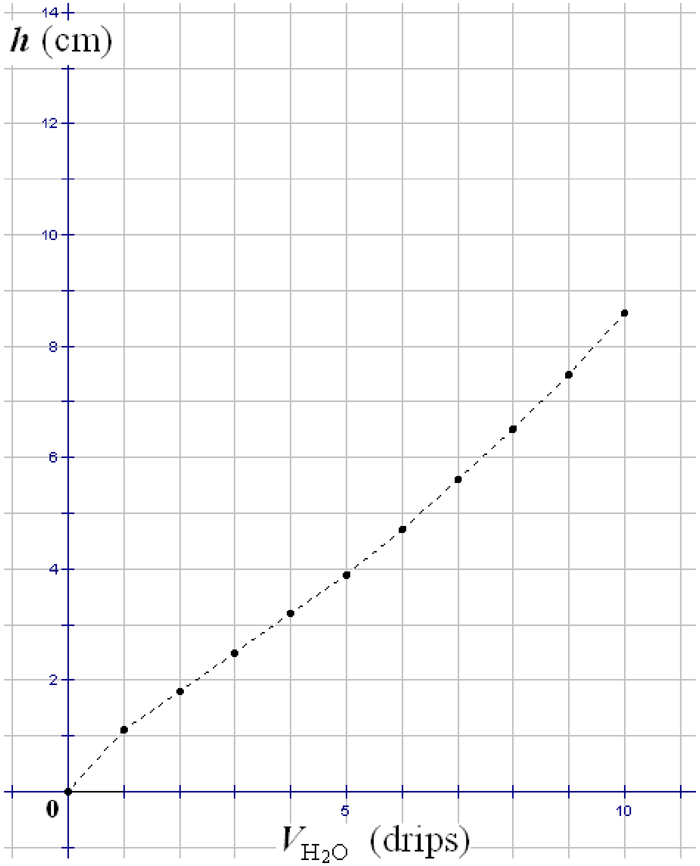
Botellas con agua

Pósters de las gráficas

- Cada grupo hace un póster con la gráfica de su botella, pero sin ningún otro dato que pueda identificarla.
- Entre todos, se discute hasta emparejar a cada póster con su botella correspondiente.
- El grupo de cuyo póster se esté hablando se abstiene de participar en ese momento.

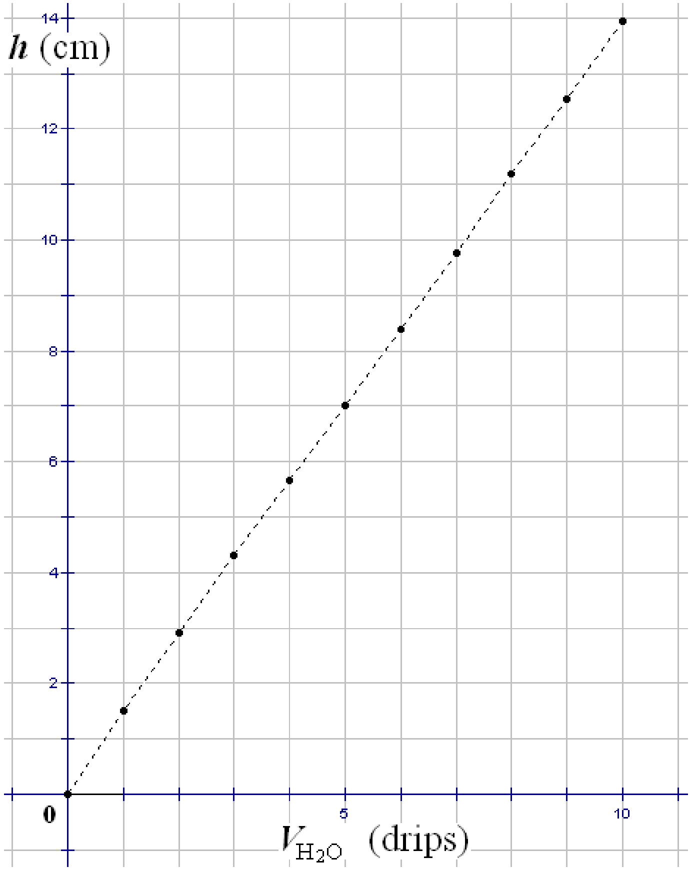
Botellas con agua

Gráficas – primera botella



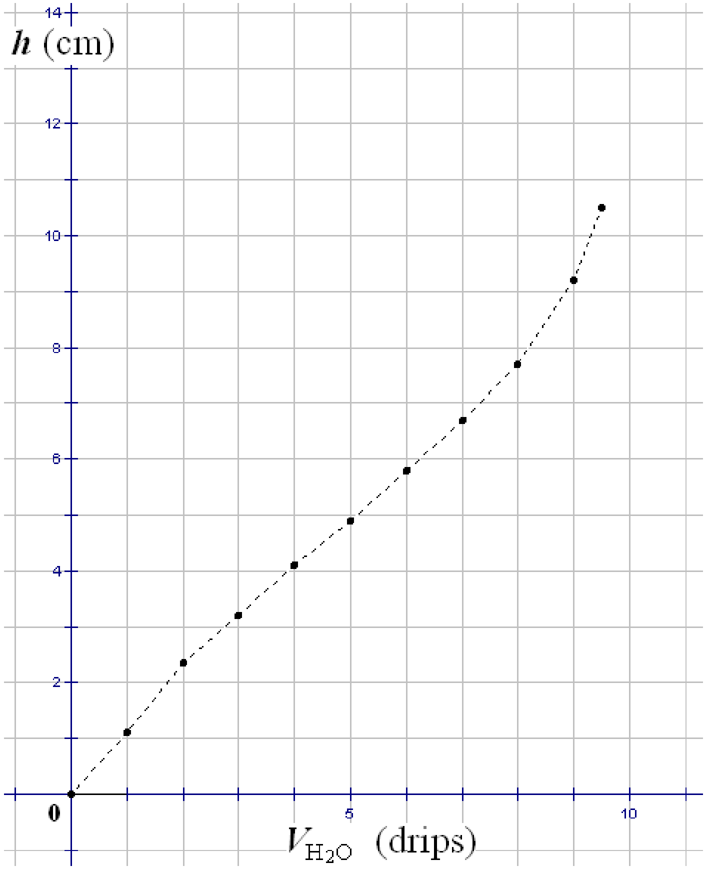
Botellas con agua

Gráficas – segunda botella



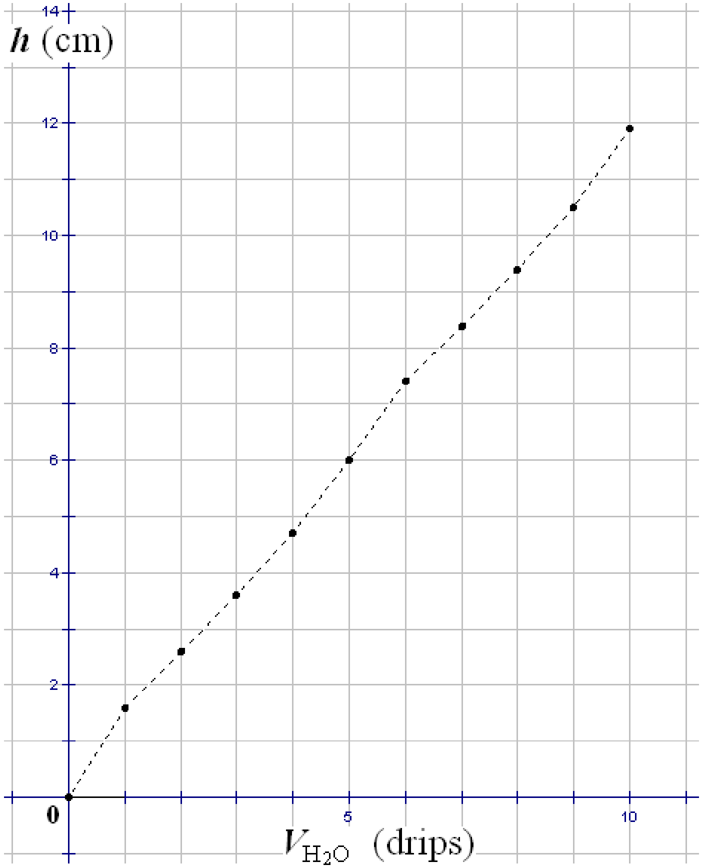
Botellas con agua

Gráficas – tercera botella



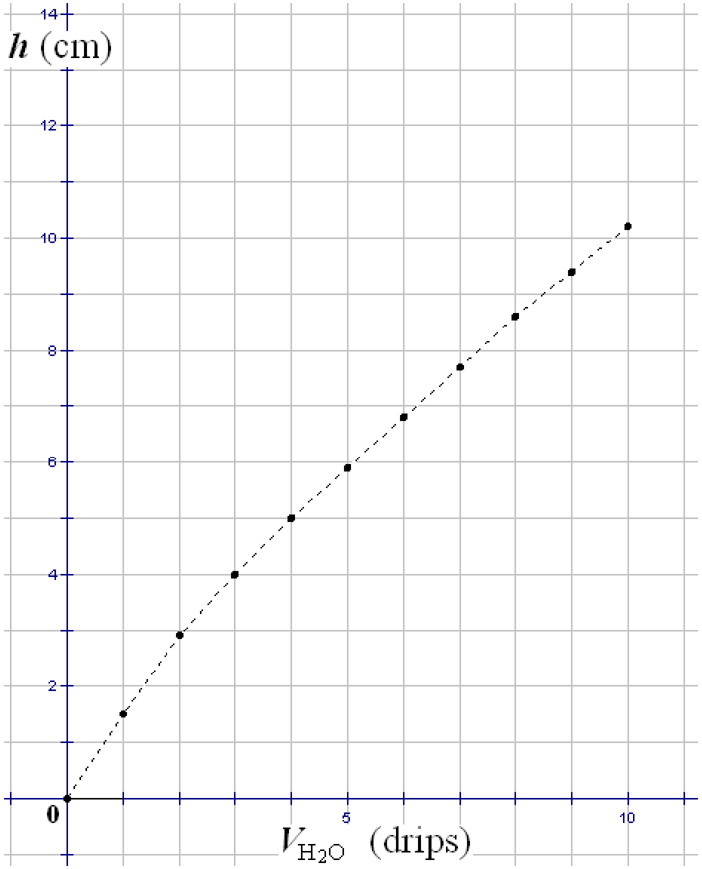
Botellas con agua

Gráficas – cuarta botella



Botellas con agua

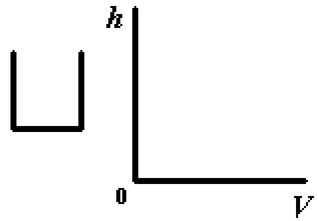
Gráficas – quinta botella

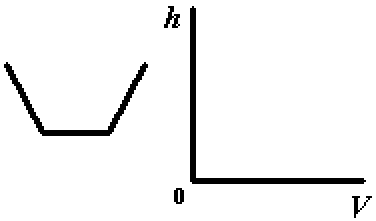


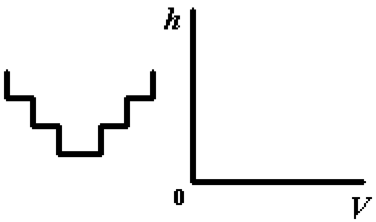
Botellas con agua

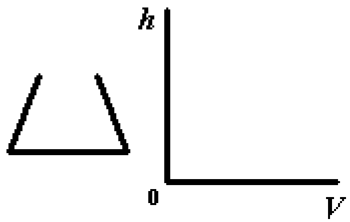
De la botella a la gráfica

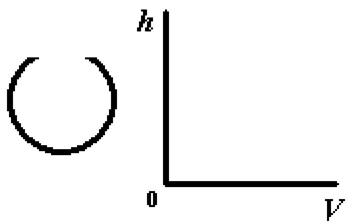
- Para cada botella que se muestra a continuación, dibuja una gráfica del nivel vs. el volumen de agua en la botella.
- Presta atención a la forma de las botellas, no a su tamaño.
- Todas estas botellas tienen secciones horizontales circulares.

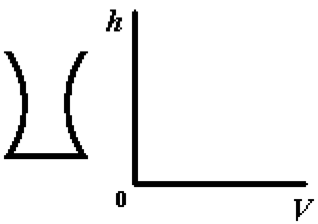








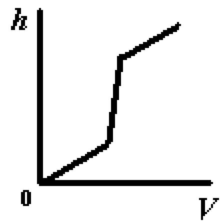


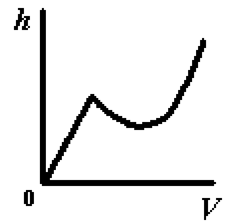


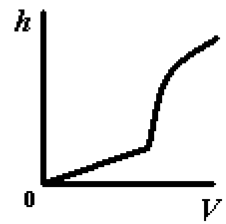
Botellas con agua

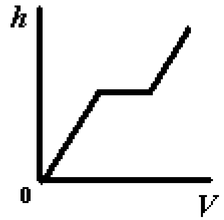
De la gráfica a la botella

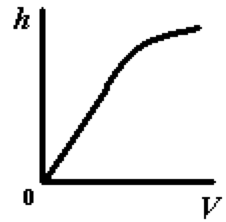
- A la izquierda de cada gráfica que se muestra a continuación
  - dibuja una botella correspondiente, o
  - explica por qué no existe una botella capaz de producir tal gráfica.

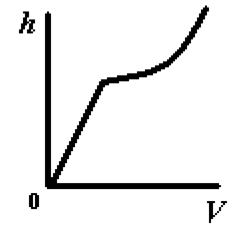








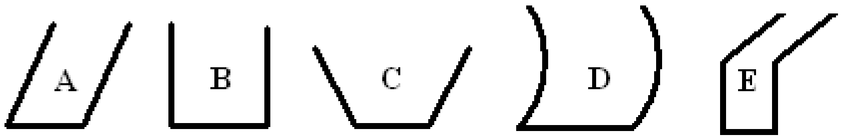




Botellas con agua

Propiedades de las gráficas

- Gráficas lineales
  - ¿Cuáles de las botellas que se muestran a continuación tienen gráficas lineales? Todas ellas tienen secciones horizontales circulares.
  - De las botellas con gráficas lineales, ¿cuál gráfica tiene la pendiente mayor? ¿Cuál tiene la pendiente menor? [Aquí sí importa el tamaño de las botellas.]



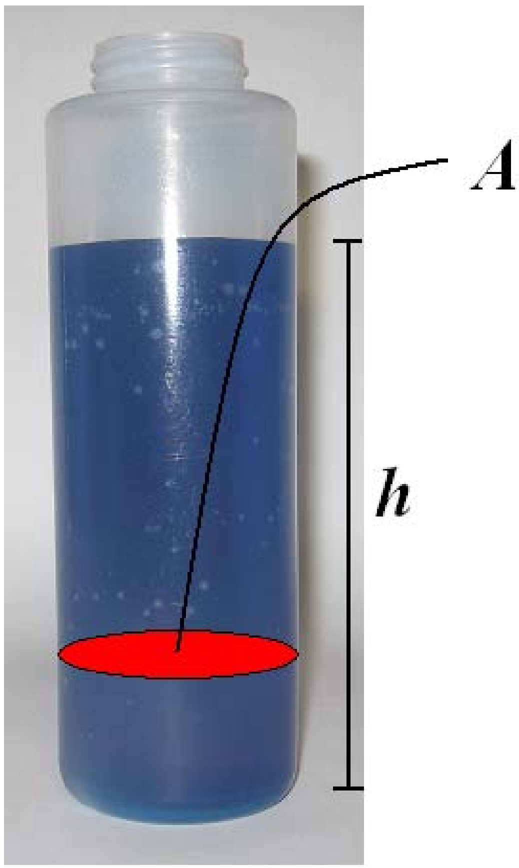
Botellas con agua
Propiedades de las gráficas

- Gráficas lineales
  - ¿Qué propiedad debe tener una botella para producir una gráfica lineal?
  - Si una botella produce una gráfica lineal, o con una parte lineal, ¿qué representa, exactamente, la pendiente de la gráfica? Es decir, ¿qué tiene que ver con la botella y cómo se podría calcular tomando medidas de la botella?

Botellas con agua
Propiedades de las gráficas

- Otras propiedades para estudiar:
  - ¿Debe la gráfica ser creciente para cualquier botella? ¿Debe ser estrictamente creciente?
  - ¿Debe la gráfica ser continua para cualquier botella?
  - ¿Cuándo la gráfica es convexa en un intervalo? ¿Cuándo es cóncava?
  - ¿Debe la gráfica ser diferenciable para cualquier botella? Si no, ¿cuándo se produce un punto no diferenciable?

Botellas con agua
Algunos resultados



constante

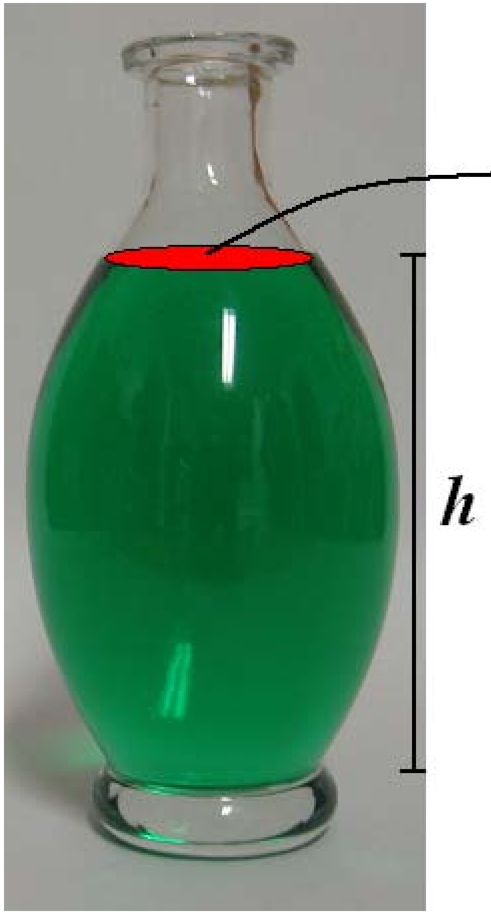
$$V = Ah$$

$$h = (1/A)V$$

- Las botellas que producen gráficas lineales son aquéllas cuyas secciones horizontales tienen todas la misma área, A = constante.

- La pendiente de la gráfica es el recíproco de A, y por lo tanto es inversamente proporcional a A.

Botellas con agua
Algunos resultados



$$A(h)$$

$$V(h) = \int_0^h A(t)\,dt$$

$$V'(h) = A(h)$$

$$V' = A$$

$$h' = \frac{1}{A}$$

- Más generalmente, podemos integrar el área de la sección horizontal para obtener el volumen *V* en función del nivel del agua, *h*.
- El teorema fundamental del cálculo nos dice que si el área varía continuamente con *h*, entonces V*'* = *A*.
- Nuestra gráfica representa la función inversa, *h* en función de *V*.
- Por lo tanto *h*' = 1/*A*.
- Es decir, la pendiente de la gráfica sigue siendo el recíproco de *A*.

Botellas con agua

Algunos resultados

- Por lo tanto, si *A* crece a medida que vertemos más agua, la gráfica es convexa. Esto ocurre cuando la botella se va haciendo más ancha de abajo hacia arriba.

- Si *A* disminuye, la gráfica es cóncava. Esto ocurre cuando la botella se va haciendo más angosta de abajo hacia arriba.

- Si en algún punto *A* es discontinua, entonces se produce un punto no diferenciable en la gráfica. Esto ocurre cuando hay un cambio brusco en el ancho de la botella.

Matemáticas jugando con agua

Gracias

Emiliano Gómez emgomez@berkeley.edu

Risa Wolfson rwolfson@berkeley.edu

Center for Mathematics Excellence and Equity

The Lawrence Hall of Science, UC Berkeley

http://lawrencehallofscience.org