

Jesús De Loera

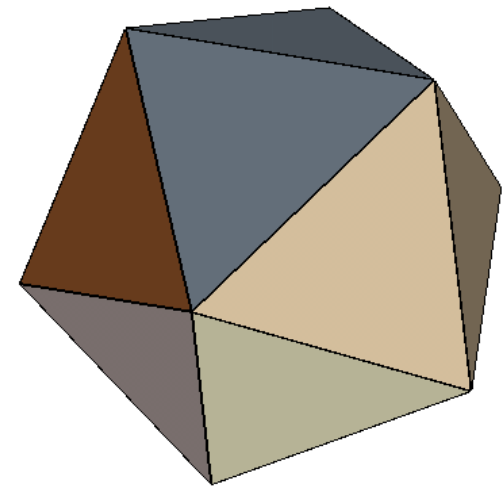
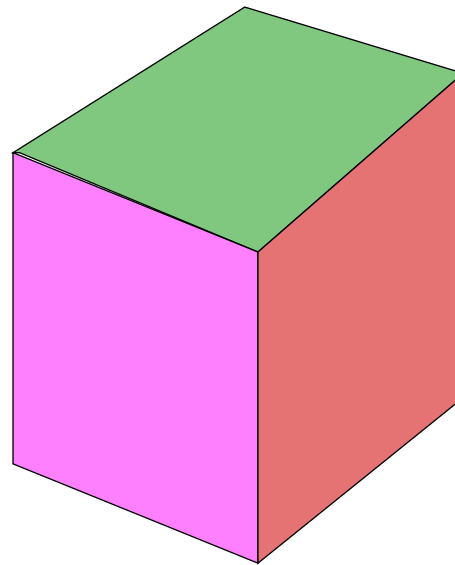
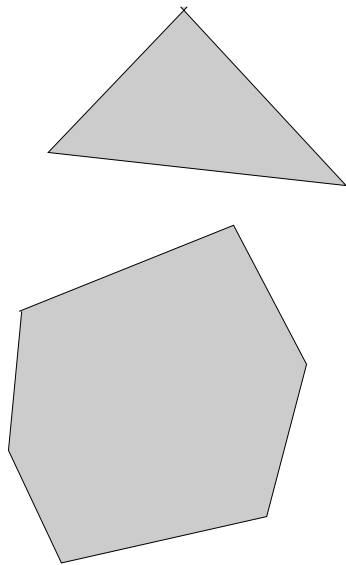
Fáciles de explicar, pero difíciles de resolver: un popurrí de problemas de Geometría.

Jesús A. De Loera

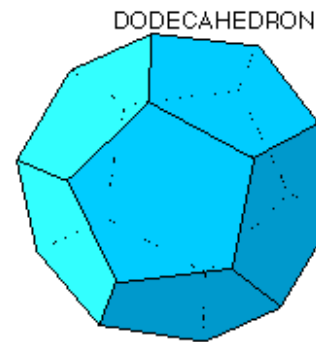
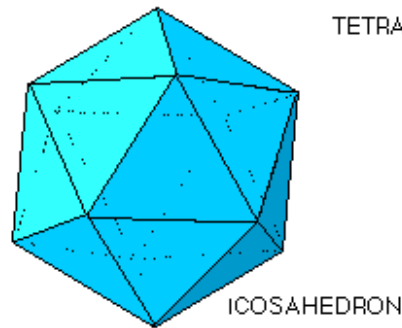
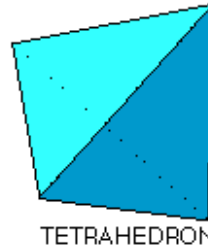
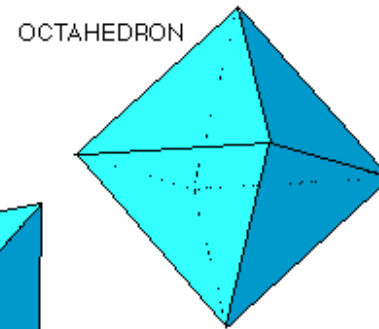
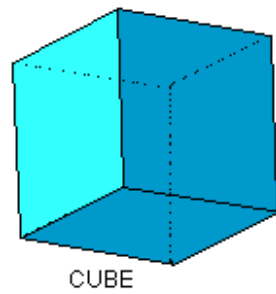
Department of Mathematics

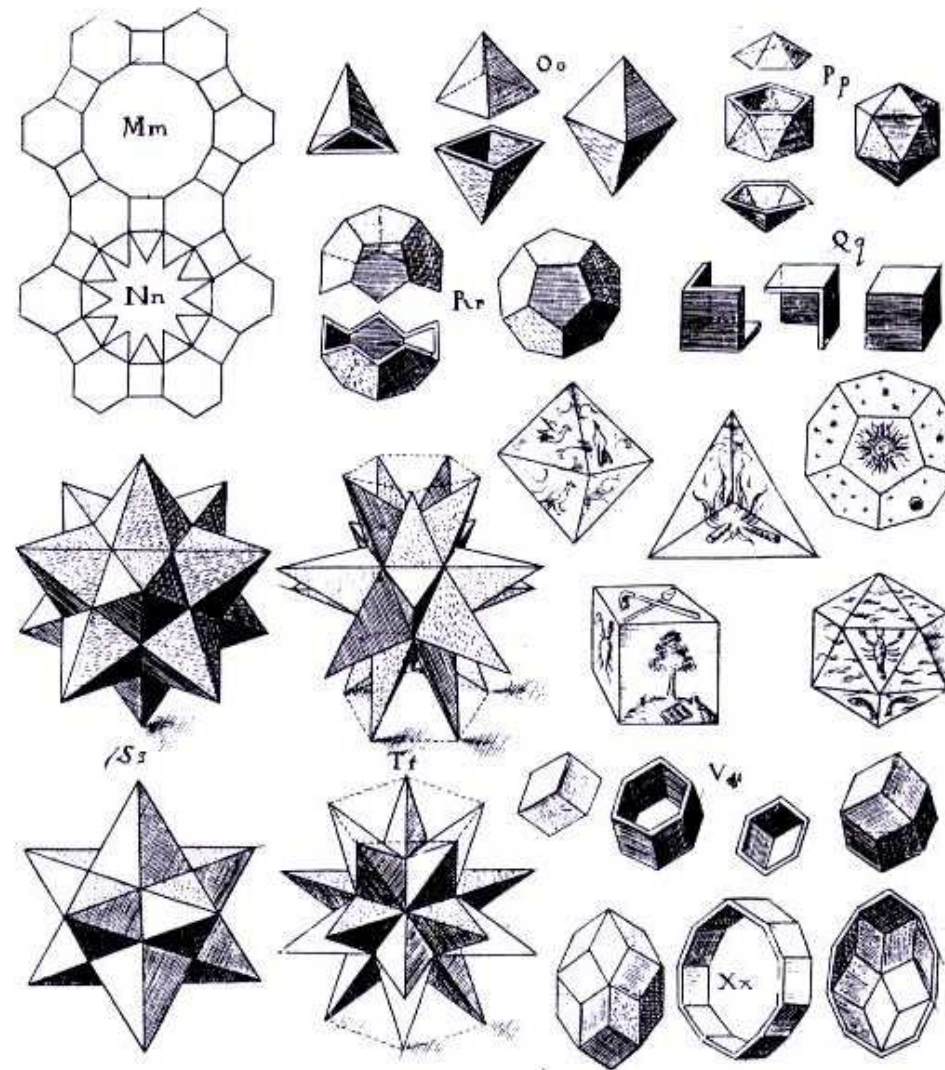
Univ. of California, Davis

<http://www.math.ucdavis.edu/~deloera/>



POLITOPOS...por todas partes





¿ Qué es un politopo convexo?

Como estos...

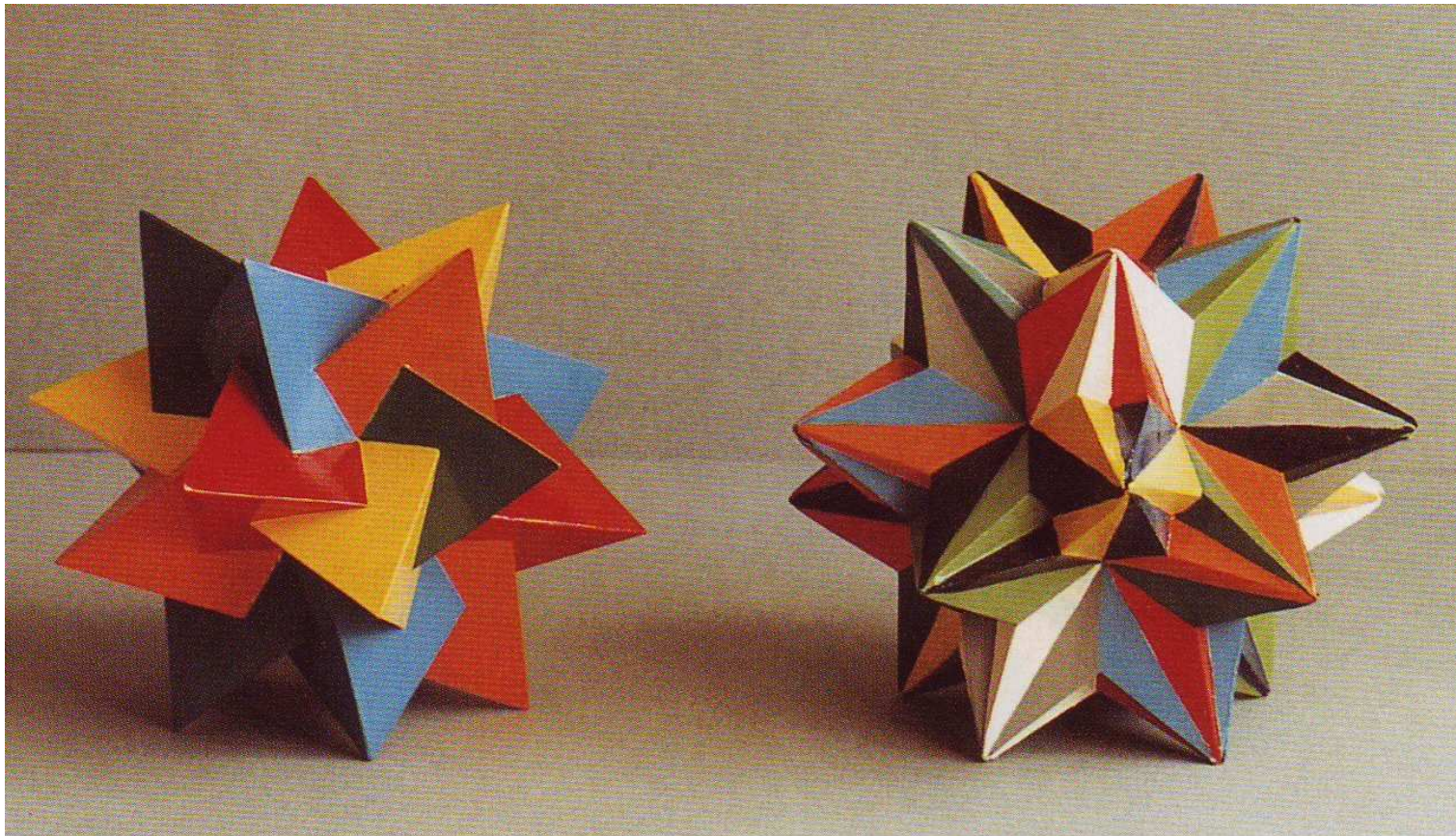


o como estos



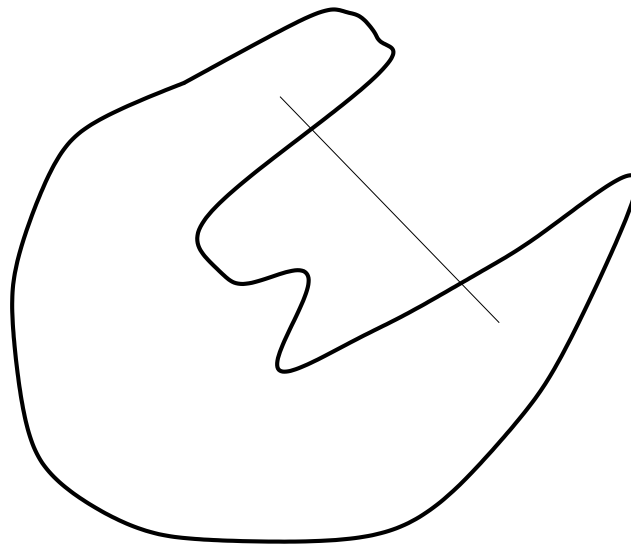
Jesús De Loera

pero no como estos!

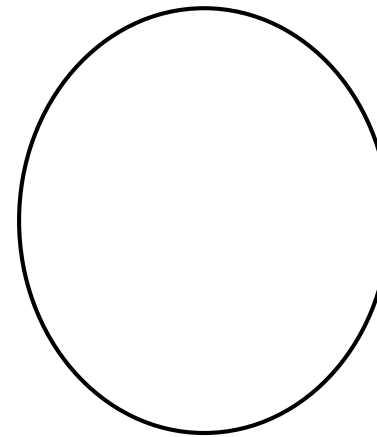


una definicion

CONVEXO significa que dados cualquier par de puntos dentro del conjunto el segmento de linea que los conecta esta tambien dentro del conjunto.



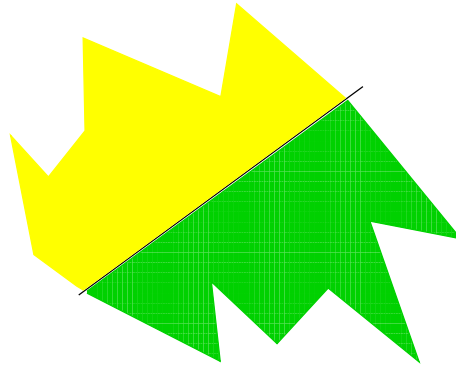
NOT CONVEX



CONVEX

un (hiper)plano divide el espacio en dos *semi-espacios*. Los Semi-espacios son convexos!

Ejercicio La intersección de convexos es un convexo!



Formalmente un semi-espacio esta dado por una *desigualdad lineal*:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d \leq b.$$

Definición: Un **politopo** es un conjunto acotado del espacio Euclidean que es la intersección de un conjunto finito de semi-espacios.

Formulación algebraica de politopos

Son la solución de un sistema de desigualdades lineales...

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

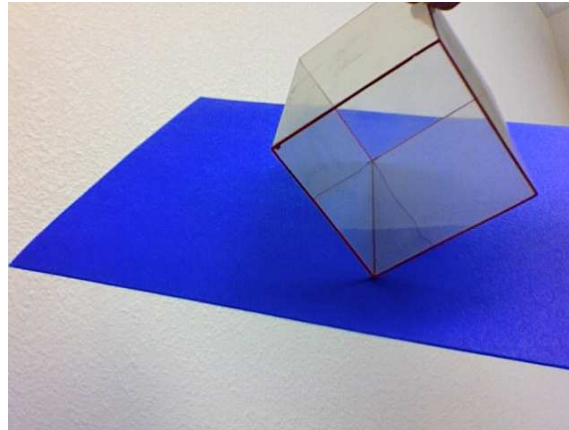
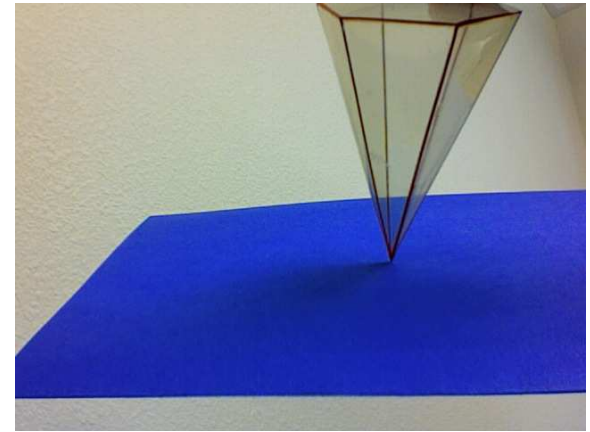
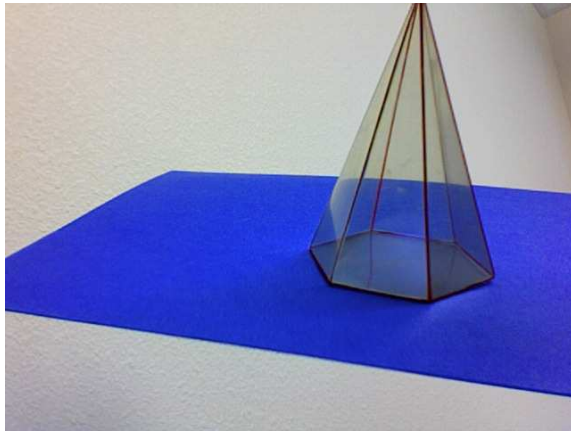
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,d}x_d \leq b_k$$

Lo podemos escribir usando notacion de matrices.

Las Caras de un Politopo



Contando Caras

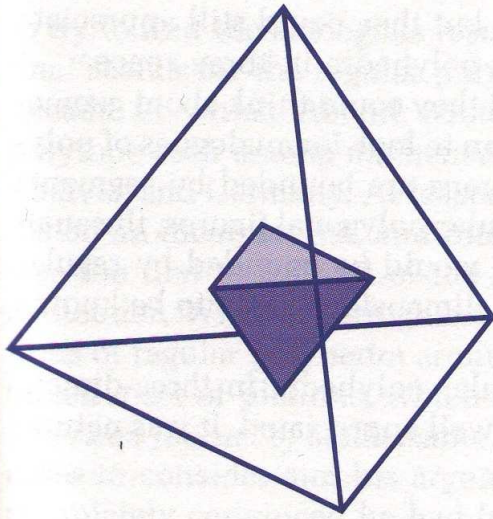


- **Formula de Euler** $V - E + F = 2$, relaciona los numeros de vertices V , aristas E , y facetas F de un politopo 3-dimensional.

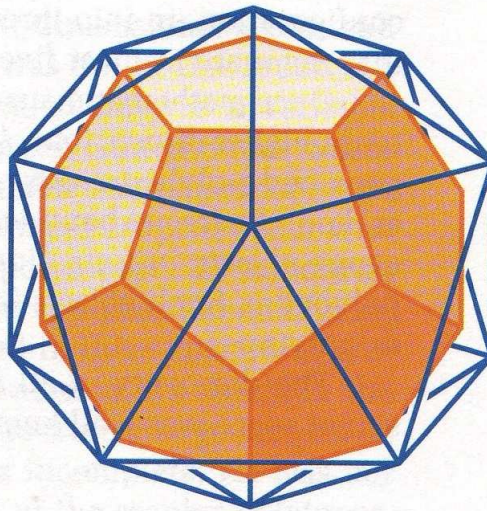
Dado un 3-politopo P , si $f_i(P)$ es el numero de caras i -dimensionales tenemos un vector $(f_0(P), f_1(P), f_2(P))$ de caras. el **f -vector** of P .

- **Teorema** (Steinitz 1906) un vector de numeros enteros no negativos $(f_0(P), f_1(P), f_2(P)) \in \mathbb{Z}^3$ es el f -vector de un politopo 3-dimensional si y solo si
 1. $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = 2$
 2. $2f_1(P) \geq 3f_0(P)$
 3. $2f_1(P) \geq 3f_2(P)$
- **Problema 1:** Encuentre condiciones similares para 4-dimensiones. El f -vector tiene components (f_0, f_1, f_2, f_3) .

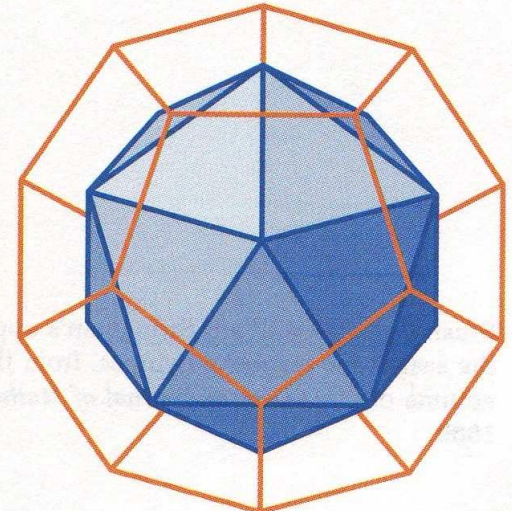
Dualidad



The self-dual tetrahedron.

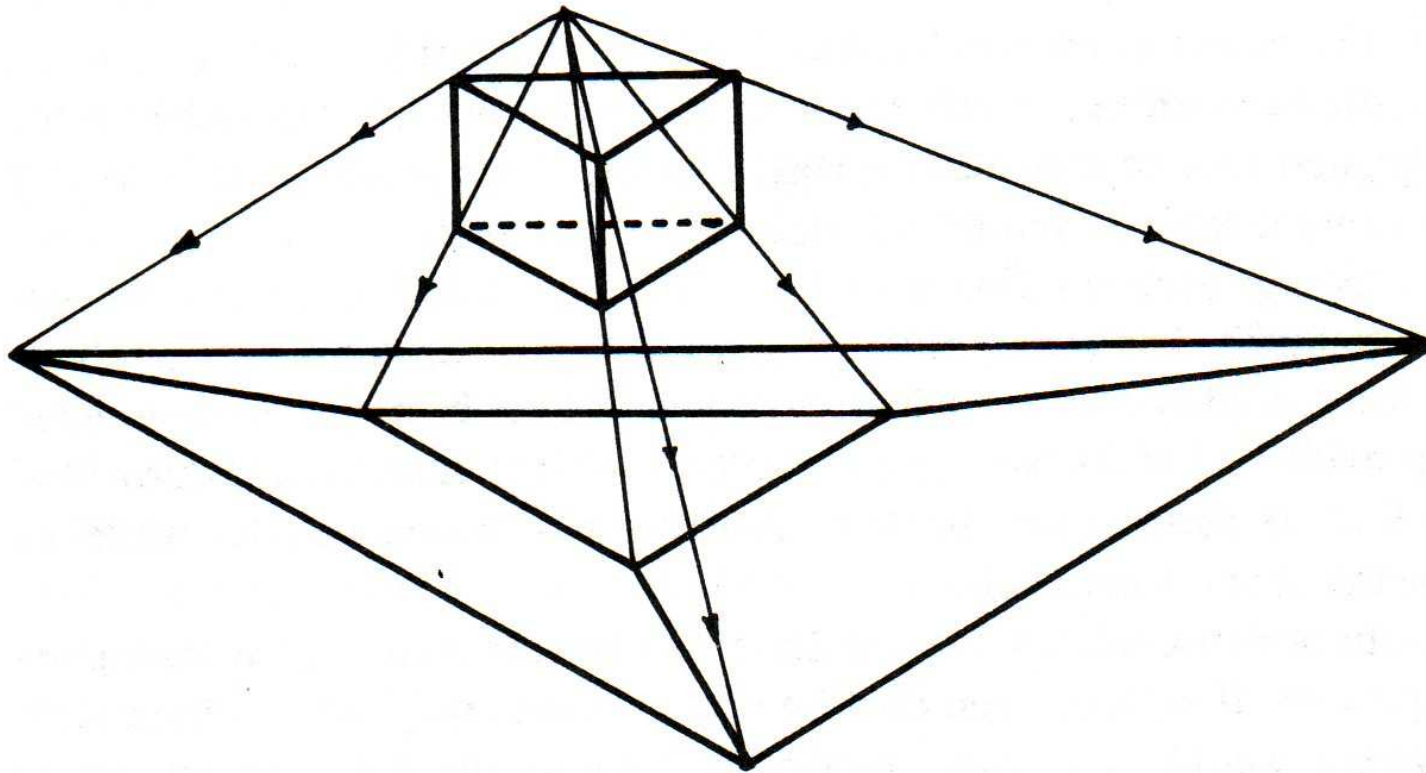


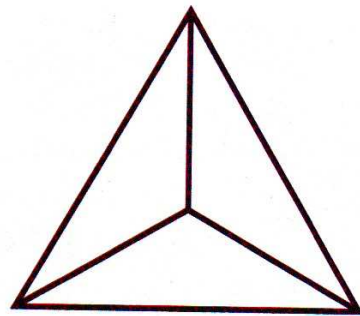
The dodecahedron is dual to the icosahedron.



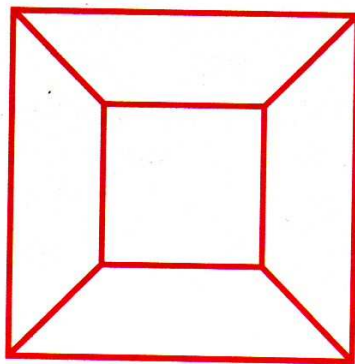
The icosahedron is dual to the dodecahedron.

Visualizando Politopos en 4-dimensiones

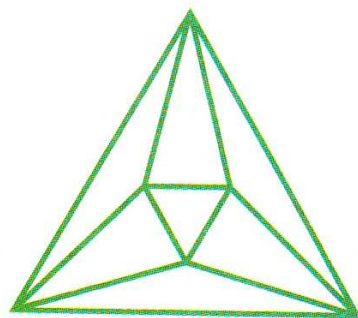




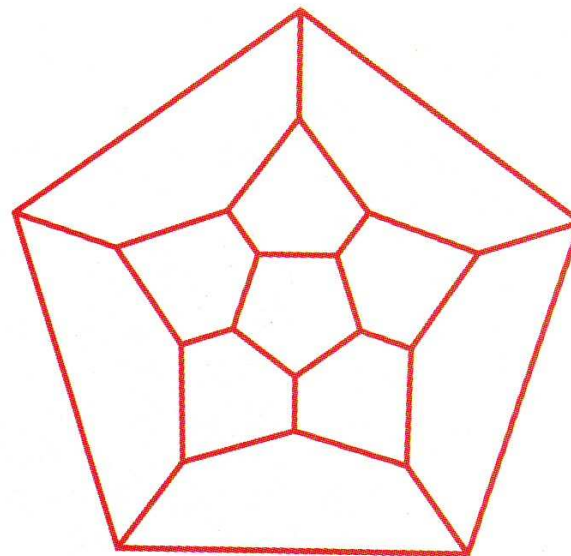
Tetrahedron



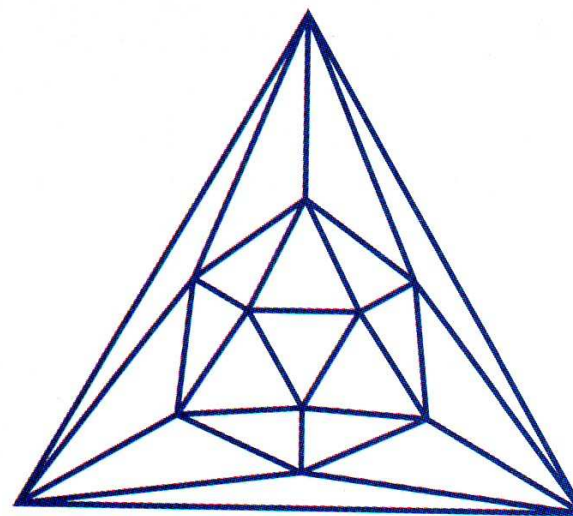
Cube



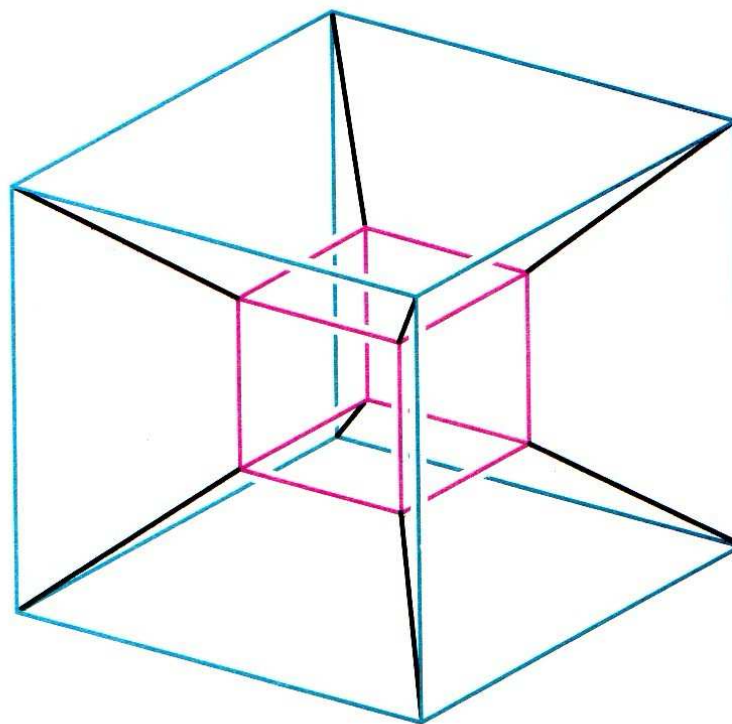
Octahedron



Dodecahedron



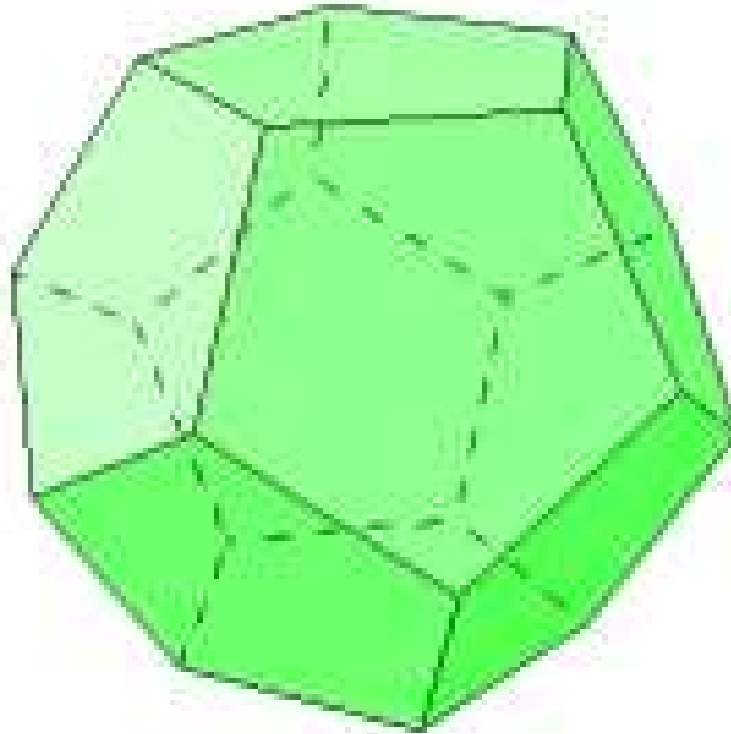
Icosahedron

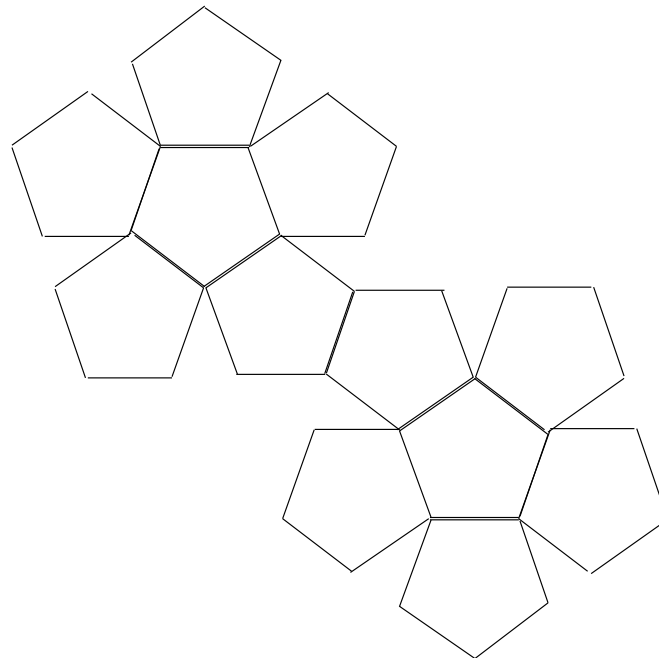
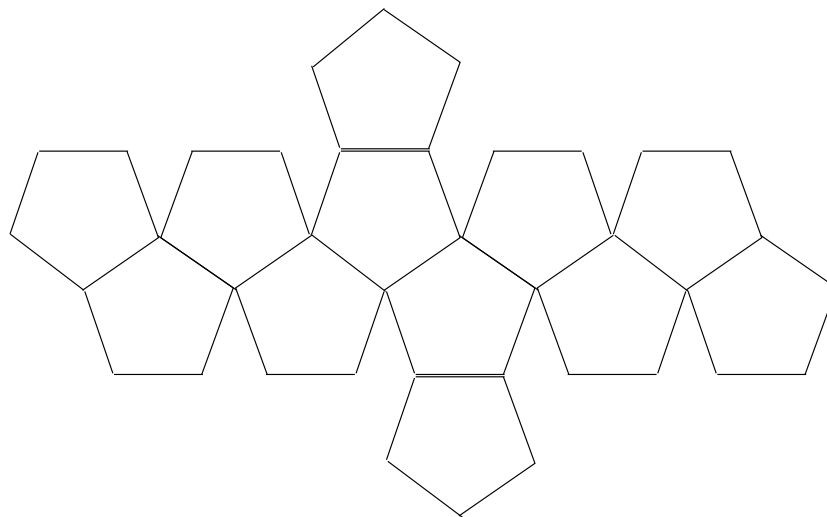


The central projection of a hypercube from four-space to three-space appears as a cube within a cube.

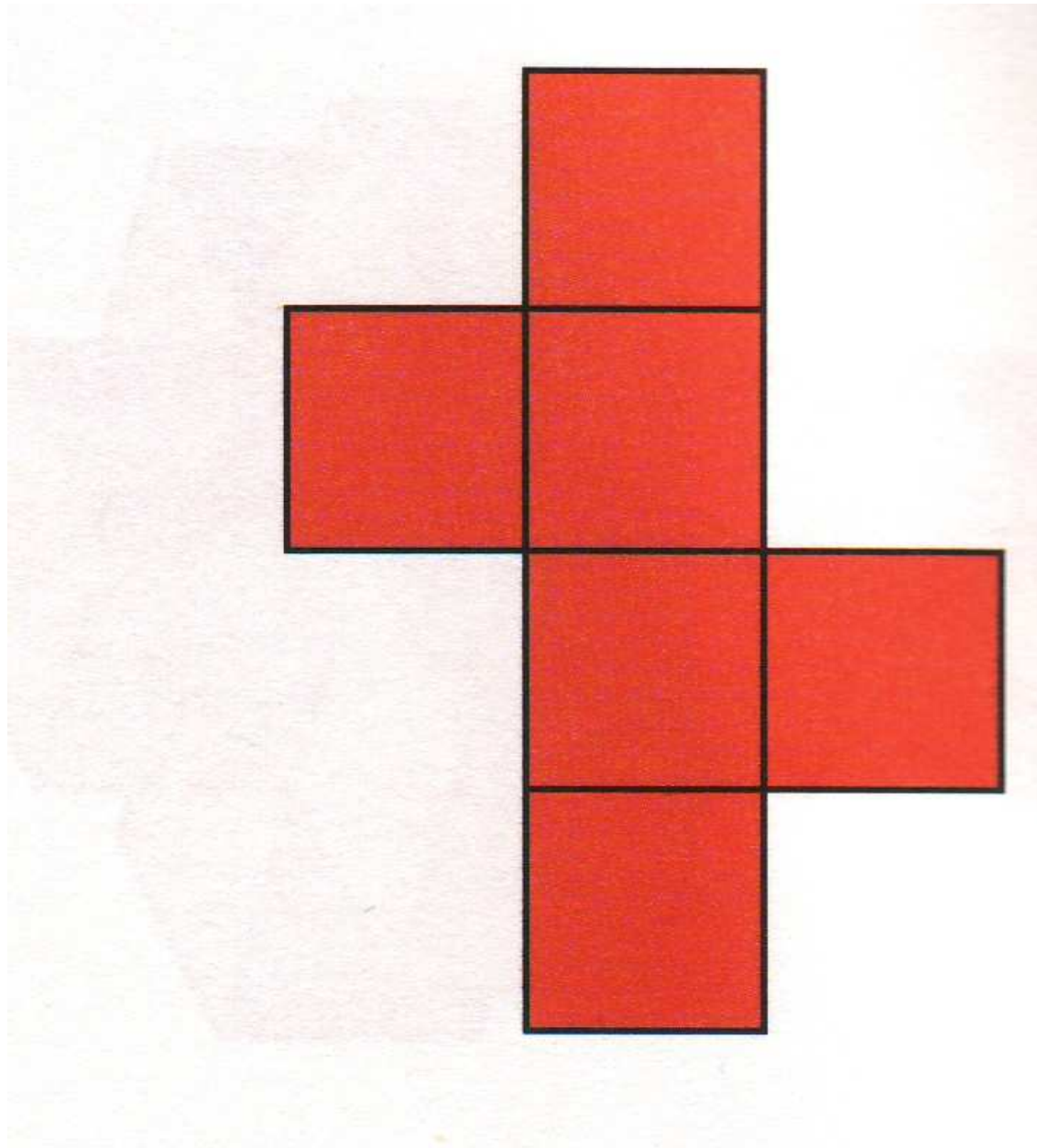
Abriendo Regalos Politopales

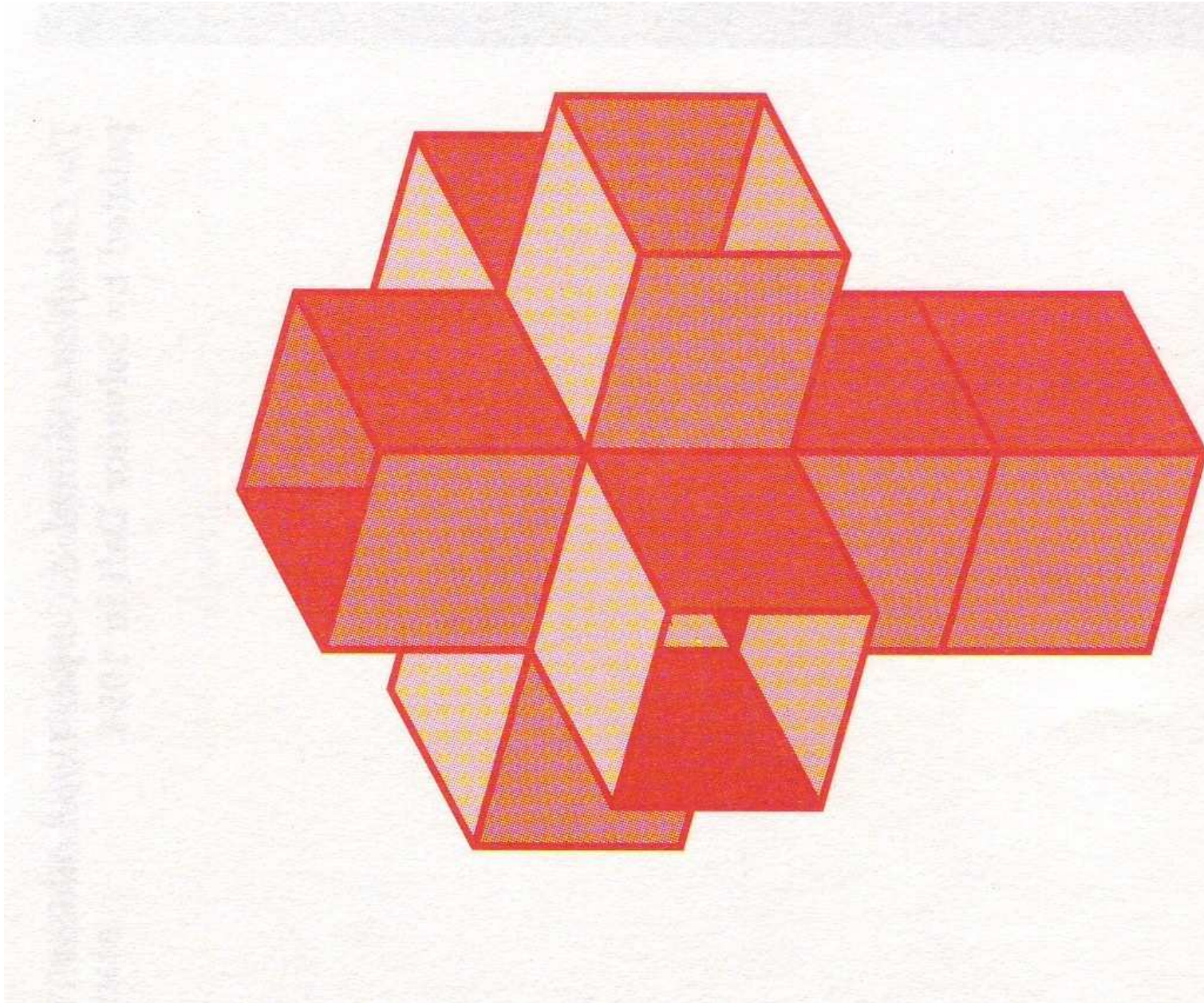
Usamos tijeras para cortar el dodecahedro por sus aristas.

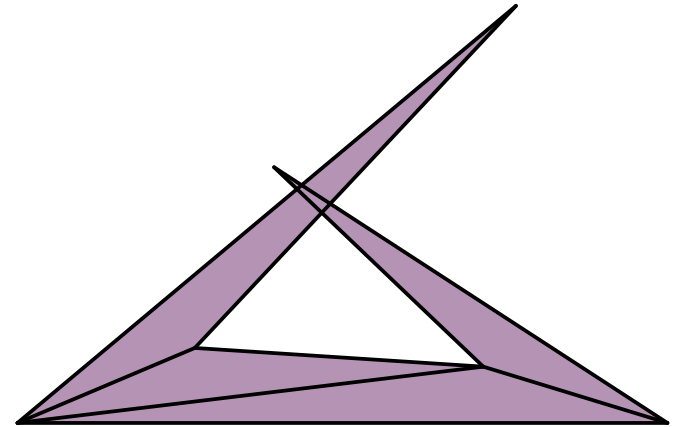
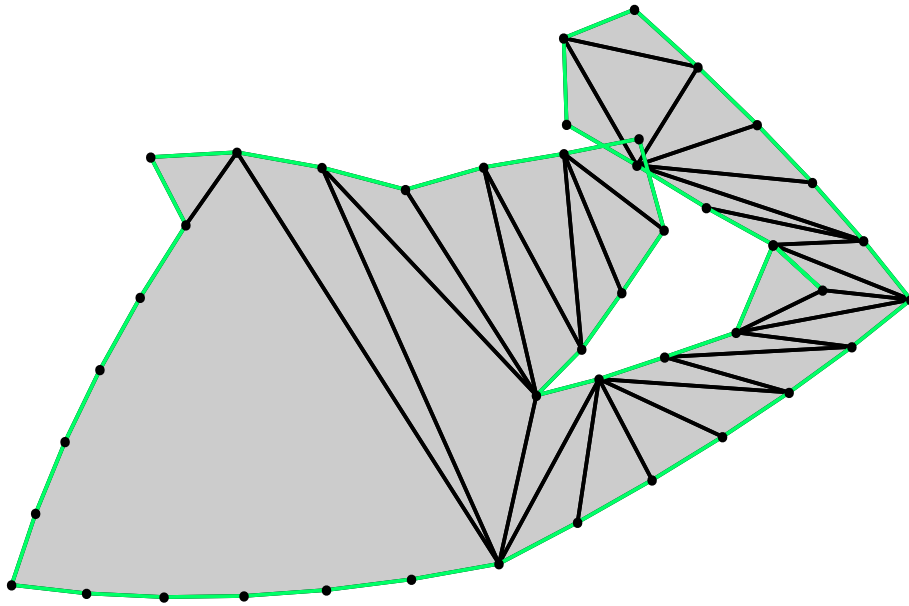




Jesús De Loera



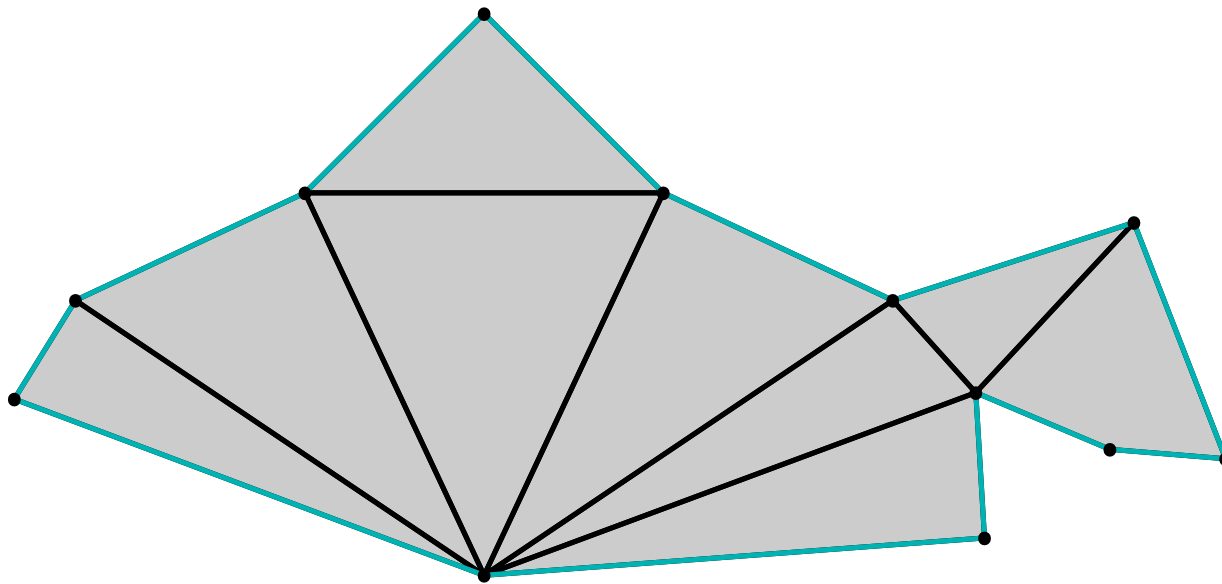




Problema 2: Dado un 3-politopo ¿ se puede siempre desenvolver de modo que no se crucen las caras?

¿ Cual es su intuición?

Pregunta: Si yo pego de vuelta lo que corté sin instrucciones ¿puedo lograr dos politopos distintos?



Respuesta al final de la conferencia!

Los politopos son útiles

Un modelo matemático muy versátil es el de la **programación lineal**:

$$\text{maximizar } C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_dx_d$$

con valores $x_1, x_2, \dots, x_d$, que satisfacen

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,d}x_d \leq b_1$$

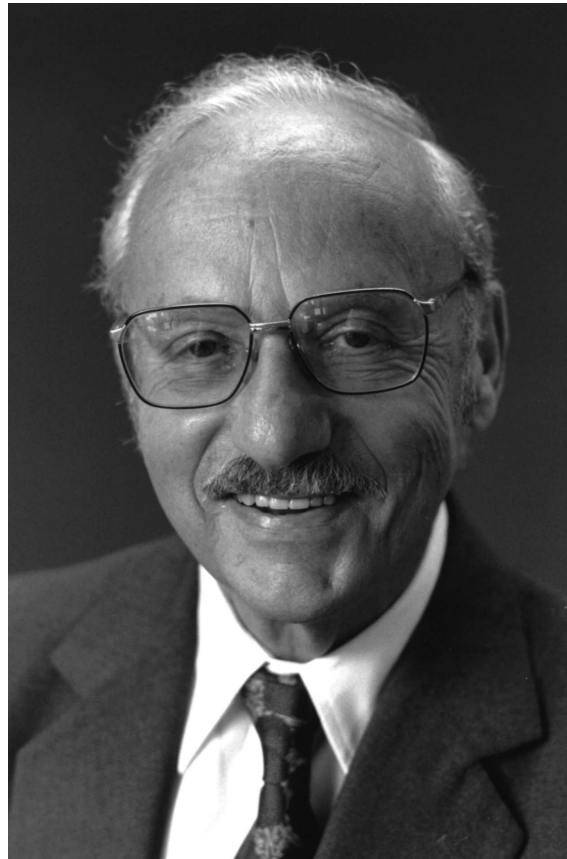
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,d}x_d \leq b_2$$

$$\vdots$$

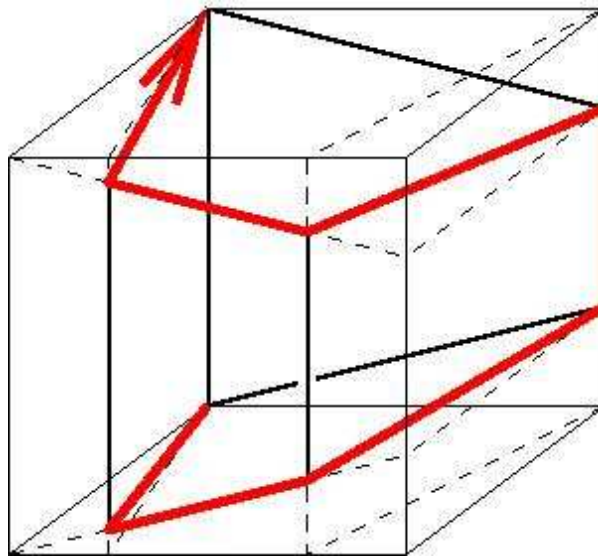
$$a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \dots + a_{k,d}x_d \leq b_k$$

el método Simplex

George Dantzig, inventor del método simplex



- **Lema:** La solución óptima de un programa lineal siempre corresponde a un vertice. Así que solo tenemos que encontrar un vertice especial.
- El método simplex **camina** a lo largo de las aristas del politopo, saltando de un vertice a otro, cada vez mejorando el valor que tienen las variables.



Pero ¿ Qué tan rapido puedo llegar?

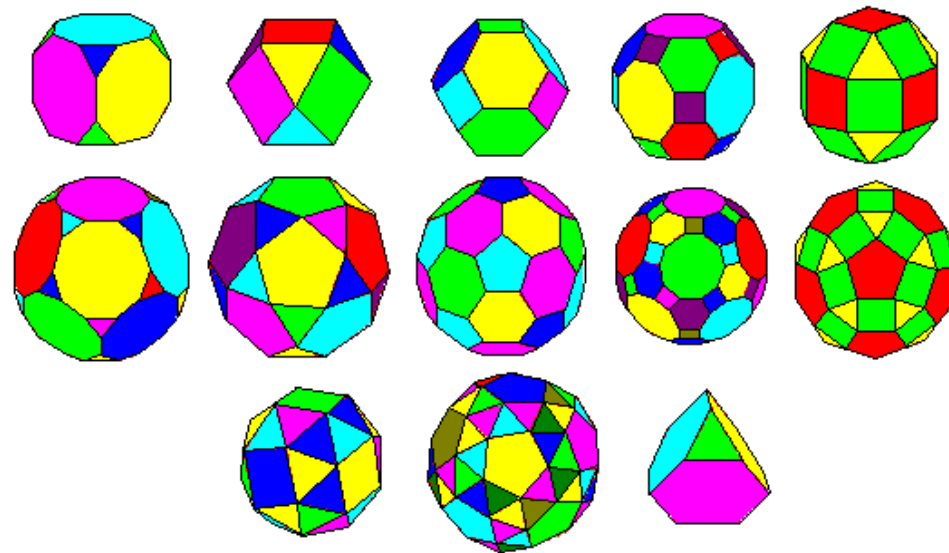
- La rapidez de llegar de un vertice a otro depende del **diámetro** del grafo del politopo: la distancia mas larga entre un par de vertices.
- ([La conjetura de Hirsch](#)) El diámetro es a lo mas $\# \text{ facetas}(P) - \dim(P)$.



Problema 3: ¿ Cual es la cota verdadera? Un intento con BLOGS...

Coloreando Facetas

Queremos colorear las facetas de un 3-politopo con el mínimo número de colores de modo que dos facetas vecinas tengan color distinto.



Theorem[El teorema de los cuatro colores] Cuatro colores son suficientes!

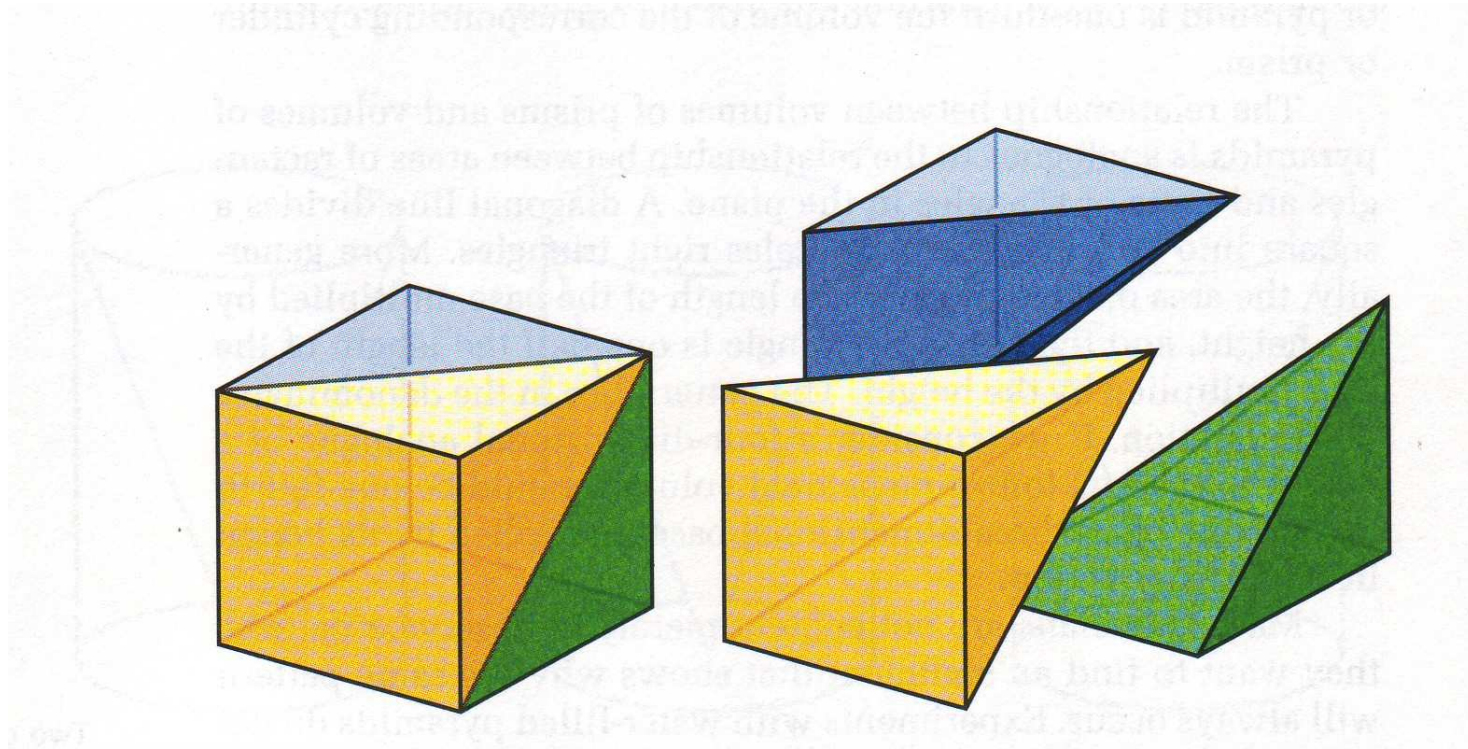
Problema 4: ¿ Se puede dar una demostración sin ordenador?

¿ Cómo calcular el volumen de un politopo?

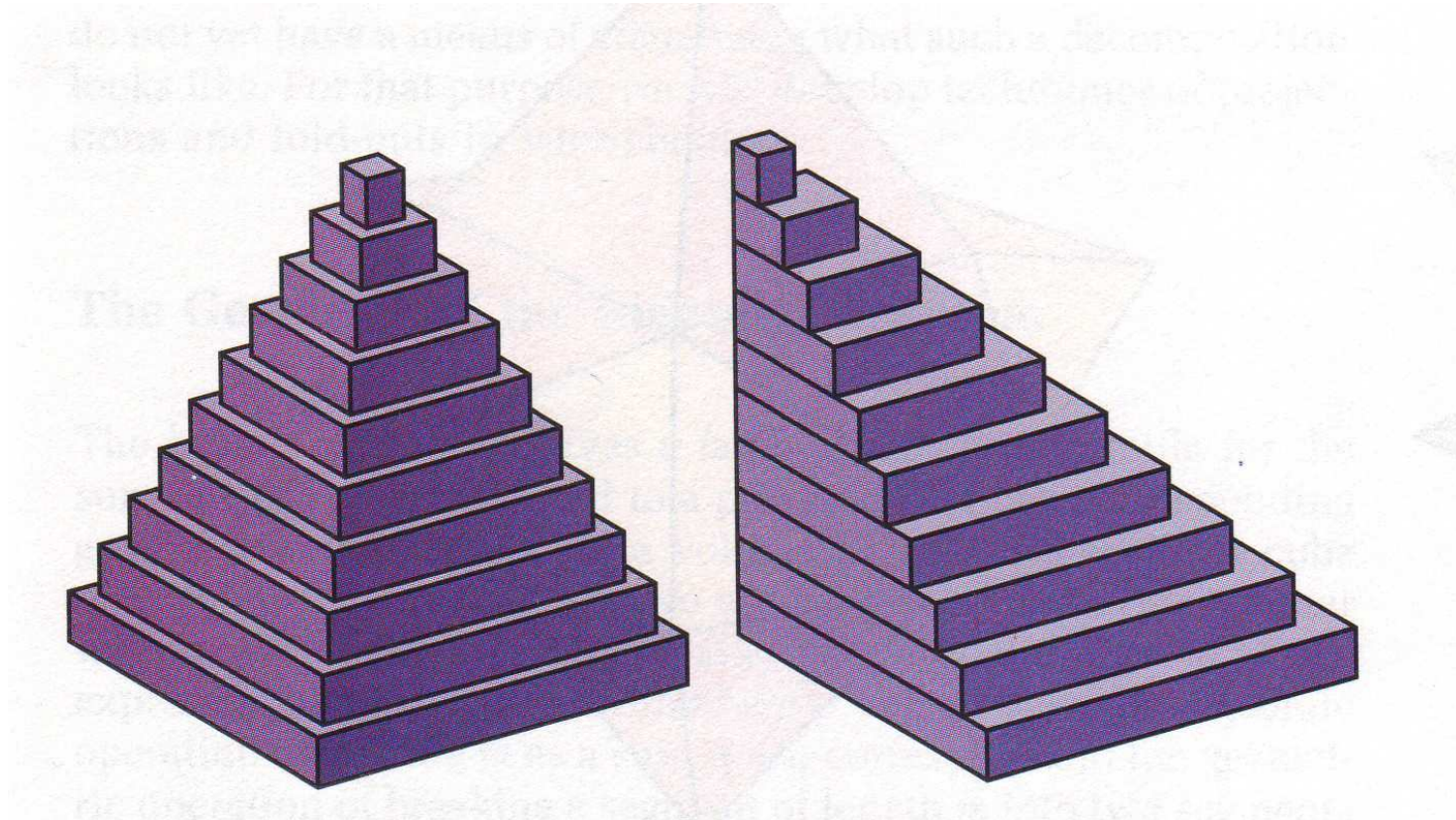


$$\text{volumen la de pirámide egipcia} = \frac{1}{3}(\text{área de base}) \times \text{altura}$$

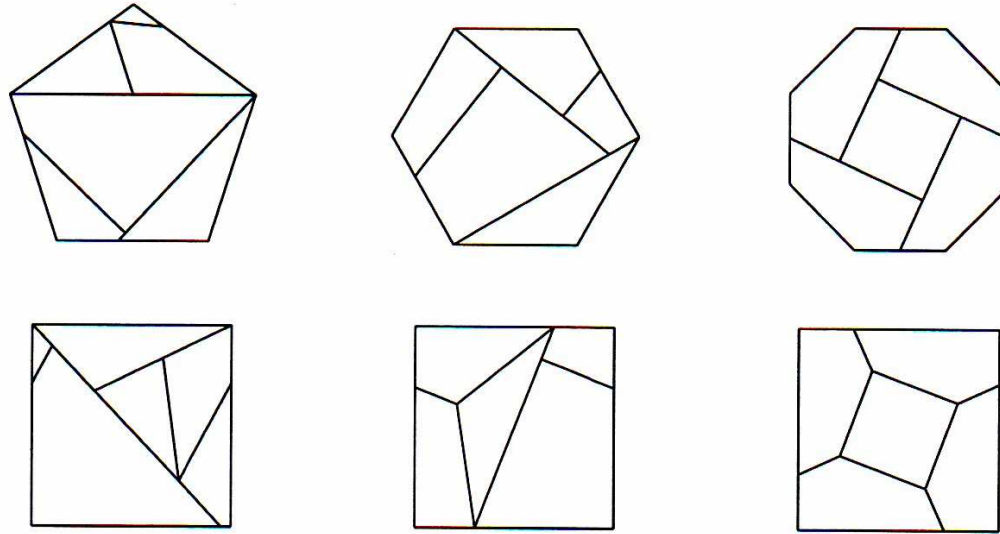
Facil en algunos casos...



Pero en general necesitamos **LIMITES!**



Pero no en DOS dimensiones!



Poligonos de la misma area son equidescomponibles, i.e., un objeto se pueden partir en varias piezas que se re-arman donde el otro objeto

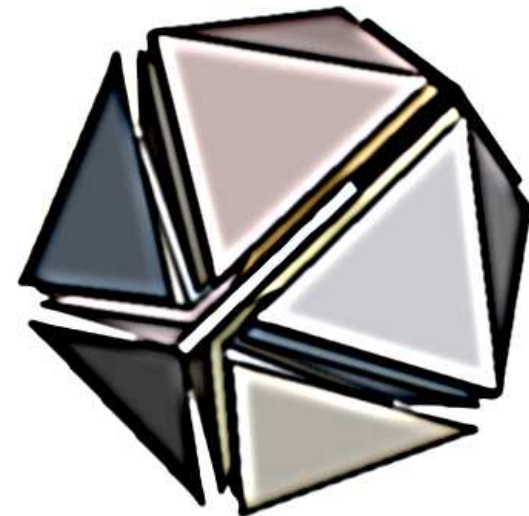
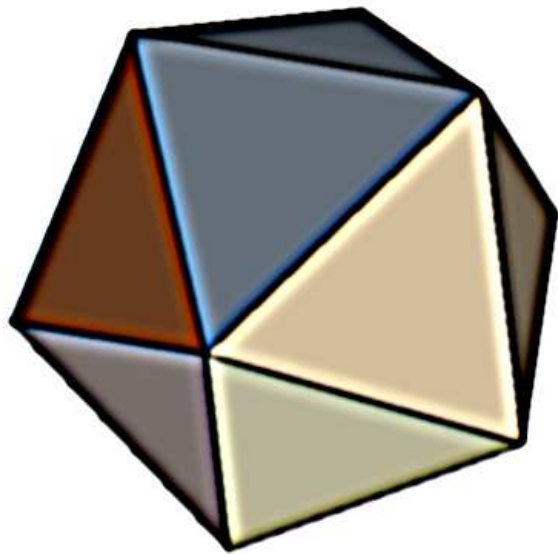
el Tercero problema de Hilbert

¿Son dos 3-politopos del mismo volumen equidescomponibles?

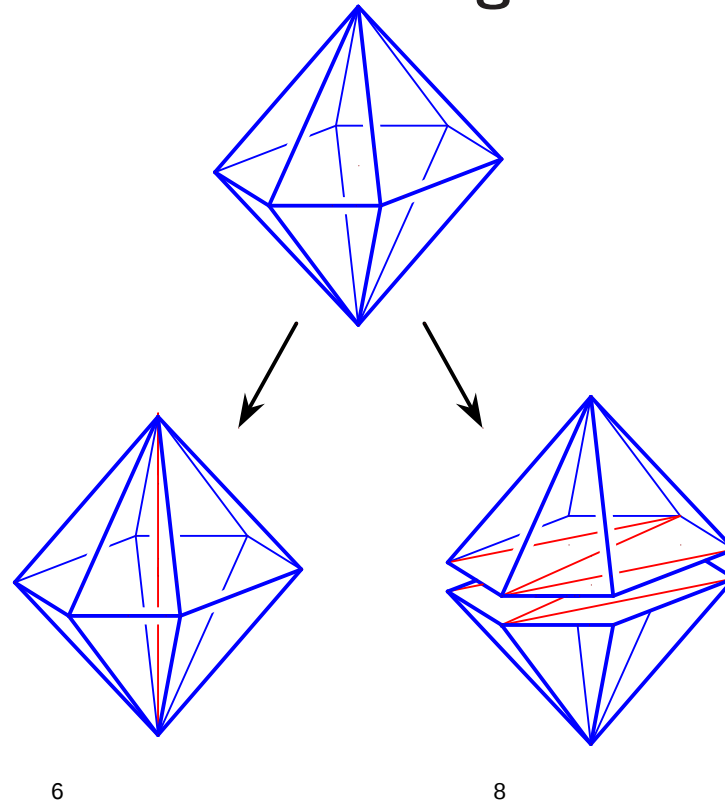


¡Suficiente saberlo para simplejos!

Para calcular el volumen divide el politopo como la unión disjunta de tetraedros. Calcula el volumen de cada tetraedro (un determinante) y súmalos.



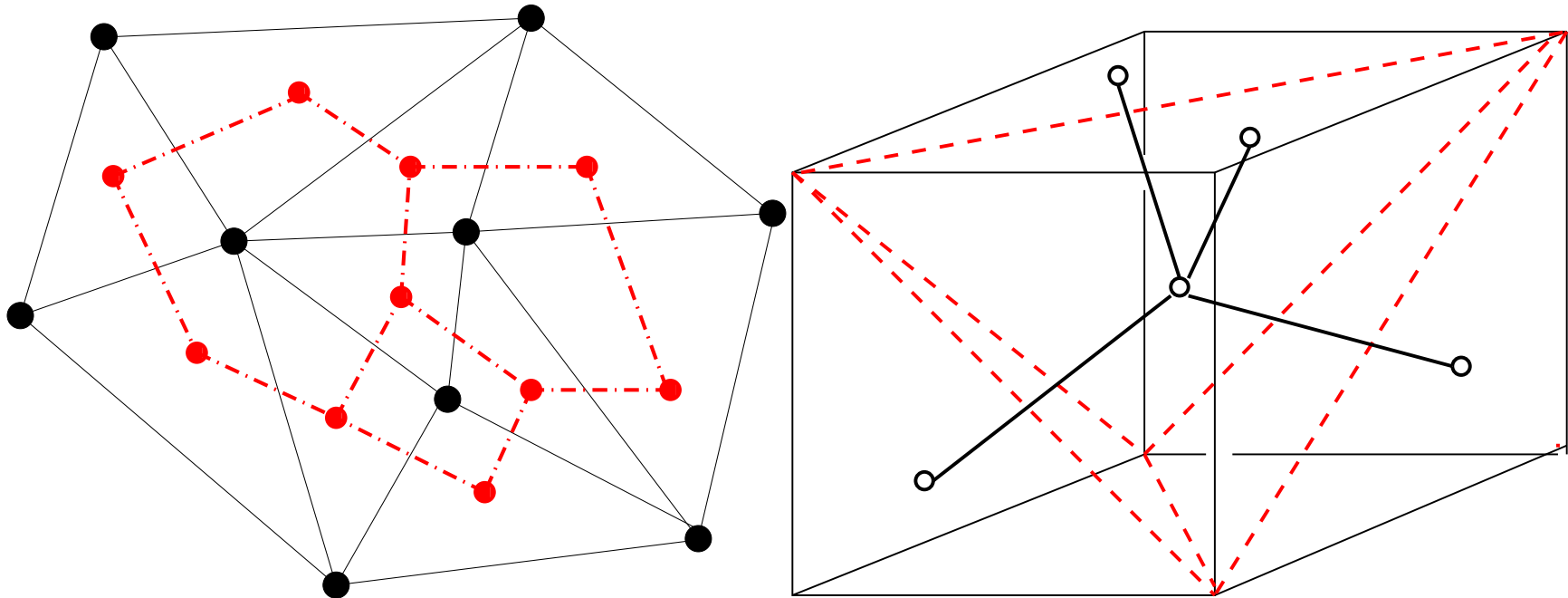
Tamaño de triangulaciones



Problema 5: Si un politopo 3-dimensional tiene triangulaciones de tamaño k_1, k_2 con $k_2 > k_1$. ¿ Hay una triangulación de tamaño k , $k_1 < k < k_2$?

Triangulaciones Hamiltonianas

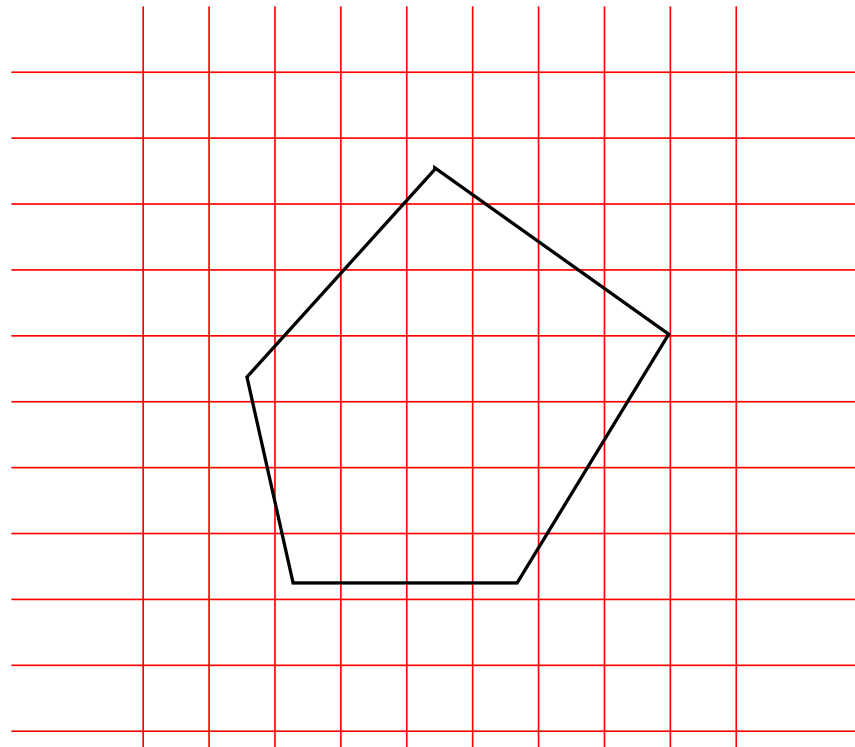
El **grafo dual de una triangulación**: un vertex por cada tetrahedro y una arista uniendo vertices adjacentes que comparten un triángulo.



Problema 6: ¿ Es cierto que siempre hay una triangulación cuyo grafo dual es hamiltoniano?

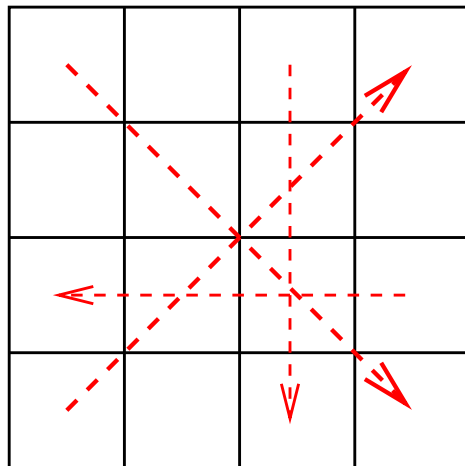
Contando puntos enteros

Queremos contar puntos enteros dentro un politopo



Combinatoria via Usando Geometría

Muchos objetos interesantes pueden contarse, si se cuentan puntos enteros. E.g., Configuraciones Sudoku y **CUADRADOS MAGICOS**:



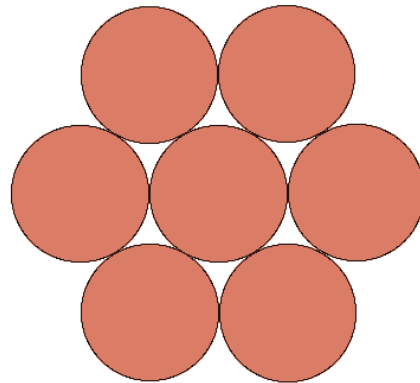
12	0	5	7
0	12	7	5
7	5	0	12
5	7	12	0

5

Problema 7: Encuentre una fórmula $f_n(k)$ para el número de $n \times n$ cuadrados magicos de suma k . EXISTE una cuya forma es un (casi)-polinomio, pero no sabemos la respuesta a más de $n = 6!!!$

Las Esferas que se besan

- ¿Cuál es el número más grande de esferas con el mismo radio que se puede colocar tangentes a la superficie de una esfera central? la respuesta se llama $k(d)$ (número de besos).



- Sabemos $k(1) = 2, k(2) = 6, k(3) = 12, k(8) = 240, k(24) = 196560$ pero solo $24 \leq k(4) \leq 25$.

Problema 8: ¿Cuál es el valor exacto de $k(d)$?

Paul Erdős y sus problemas...



- Un gran matemático ambulate, sin casa ni posesiones, nunca paraba de proponer problemas interesantes...

- Sea S un conjunto de n puntos en el plano. Erdős probó que existe un número mínimo $f(k)$ tal que todo conjunto de puntos con $f(k)$ o más puntos tiene de seguro k puntos que forman los vértices de un k -gono. Se sabe que $2^{k-2} + 1 \leq f(k) \leq \binom{2k-4}{n-2} + 1$.

EJERCICIO: Construya un conjunto de puntos que no tiene un solo pentágono!

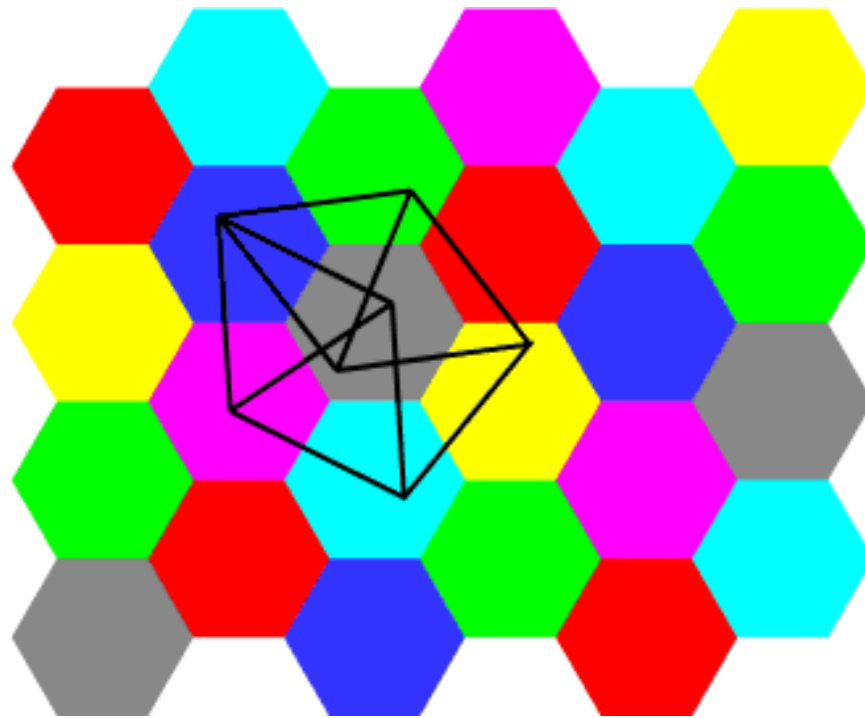
Problema 9a: ¿Cuál es el verdadero valor de la función $f(k)$?

- Sea $g(k)$ el número más pequeño tal que todo conjunto de puntos con $g(k)$ o más puntos tiene k -gono convexo **vacío** en la configuración. Vacío significa no otro punto dentro.

Problema 9b: ¿Cuál es el verdadero valor de la función $g(k)$? Aun más difícil, no se conoce $g(6)$.

Pintando el plano

Problema 10: ¿Cuál es el número más pequeño de colores que pintan los puntos del plano y no hay dos puntos del mismo color a distancia uno? Propuesto por Hadwiger and Nelson 1950. La respuesta esta entre 4 y 7...pero...



BIBLIOGRAFIA

- J. Matousek *Lectures on Discrete Geometry* Springer Verlag, graduate texts in Mathematics 2003.
- V. Klee and S. Wagon *Old and New Unsolved problems in plane geometry and number theory* Mathematical Association of America
- G. Ziegler *Lectures on Polytopes* Springer Verlag, graduate texts in Mathematics 2003.
- P.R. Cromwell *Polyhedra* Cambridge University press.
- G. Lekkerker *Geometry of Numbers* Elsevier-Holland.
- J.H. Conway and N. Sloane *Spheres Lattices and Codes* Springer Verlag

¡ Muchas Gracias!

