

ANDANZAS DE UN JOVEN
(E INGENUO)
ESTADÍSTICO EN UNA
CENTRAL TÉRMICA

Manuel Febrero Bande

Un problema medioambiental

- ❑ La Unidad de Producción Térmica (UPT) de As Pontes constituye uno de los centros productivos propiedad de Endesa Generación S.A., situado en el municipio de As Pontes, al noroeste de la provincia de A Coruña.



Descripción general

- ❑ Inició su actividad en 1976 con la puesta en marcha de un grupo de generación de energía, disponiendo en la actualidad de cuatro.
- ❑ Fue diseñada para utilizar los lignitos extraídos de la mina a cielo abierto situada en sus proximidades con alto contenido de azufre.
- ❑ Puede generar el 5% de la demanda nacional

En la lista de las instalaciones más contaminantes (10.4 M. de Tm de CO₂ ~ 2.4 M. de coches (2004))



As Pontes de García Rodríguez

Image © 2009 DigitalGlobe
© 2009 AND
© 2009 Tele Atlas
© 2009 Cnes/Spot Image
elev. 264 m

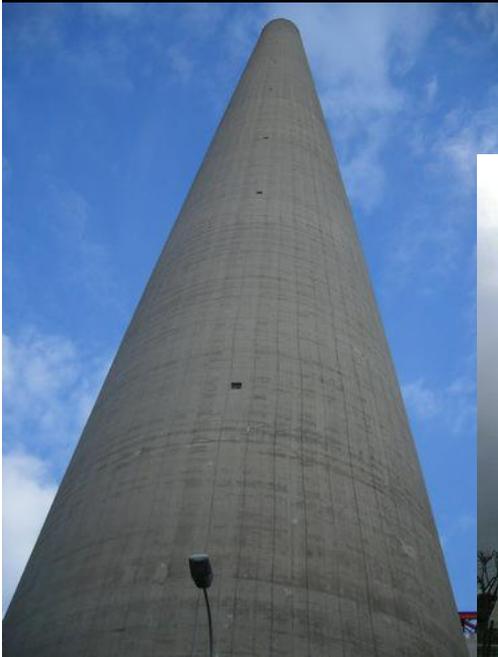
©2008 Google

43°27'29.86" N 7°53'14.95" O

12 Oct. 2003

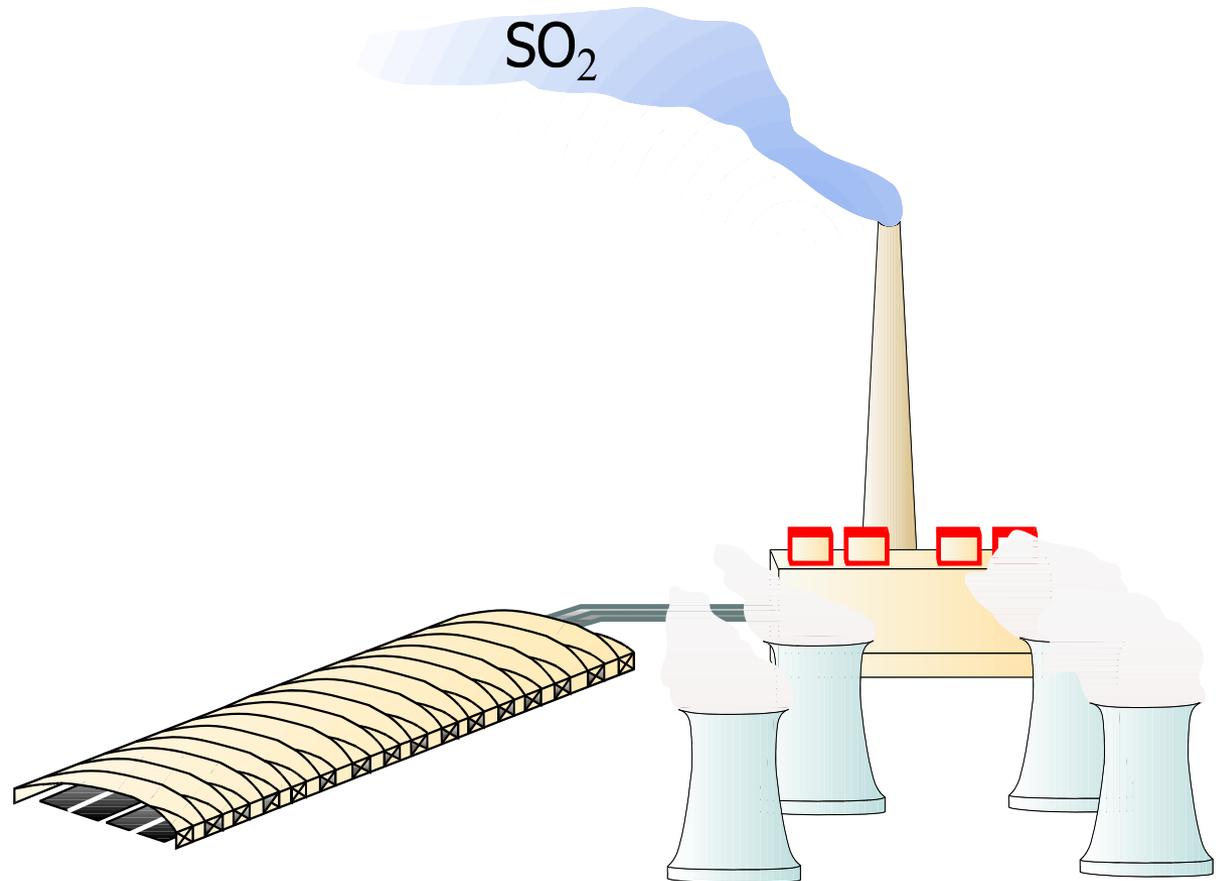
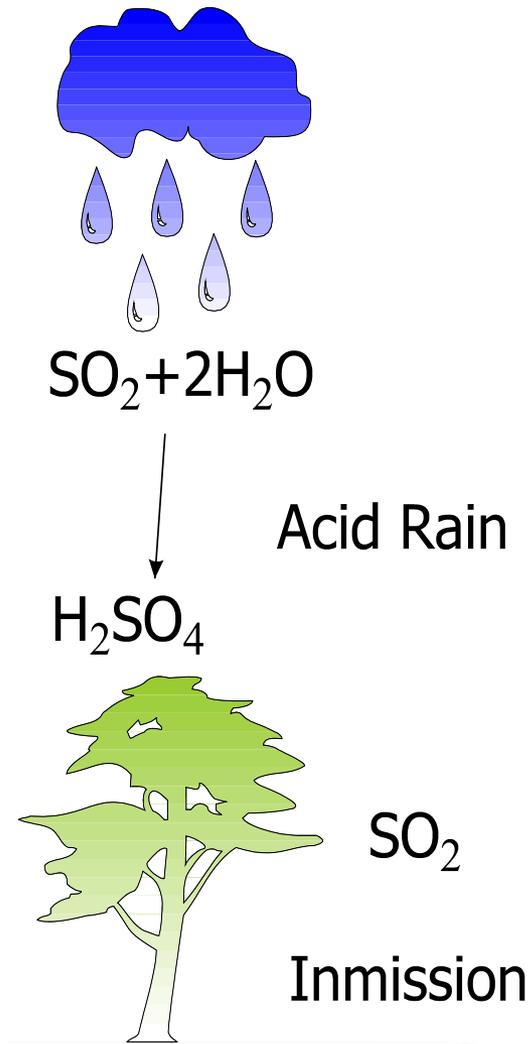
Alt. ojo 15.67 km

Un problema medioambiental



Name	Pinnacle height	Year	Country	Town
<u>Chimney of GRES-2 Power Station</u>	419.7 m	1987	<u>Kazakhstan</u>	<u>Ekibastuz</u>
<u>Inco Superstack</u>	380 m	1971	<u>Canada</u>	<u>Sudbury, Ontario</u>
Chimney of <u>Homer City Generating Station</u>	371 m	1977	<u>United States</u>	<u>Homer City, Pennsylvania</u>
<u>Kennecott Smokestack</u>	370.4 m	1974	<u>United States</u>	<u>Magna, Utah</u>
Chimney of <u>Berezovskaya GRES</u>	370 m	1985	<u>Russia</u>	<u>Sharypovo</u>
Chimney of <u>Mitchell Power Plant</u>	367.6 m	1971	<u>United States</u>	<u>Moundsville, West Virginia</u>
<u>Trbovlje Chimney</u>	360 m	1976	<u>Slovenia</u>	<u>Trbovlje</u>
Chimney of <u>Endesa Power Station</u>	356 m	1974	<u>Spain</u>	<u>As Pontes, Galicia</u>
Chimney of <u>Phoenix Copper Smelter</u>	351.5 m	1995	<u>Romania</u>	<u>Baia Mare</u>
Chimney of <u>Syrdarya Power Plant</u>	350 m	1975	<u>Uzbekistan</u>	<u>Syr Darya</u>
Chimney of <u>Teruel Power Plant</u>	343 m		<u>Spain</u>	<u>Teruel</u>
Chimney of <u>Plomin Power Station</u>	340 m		<u>Croatia</u>	<u>Plomin</u>

Descripción general



Un matemático en la empresa...

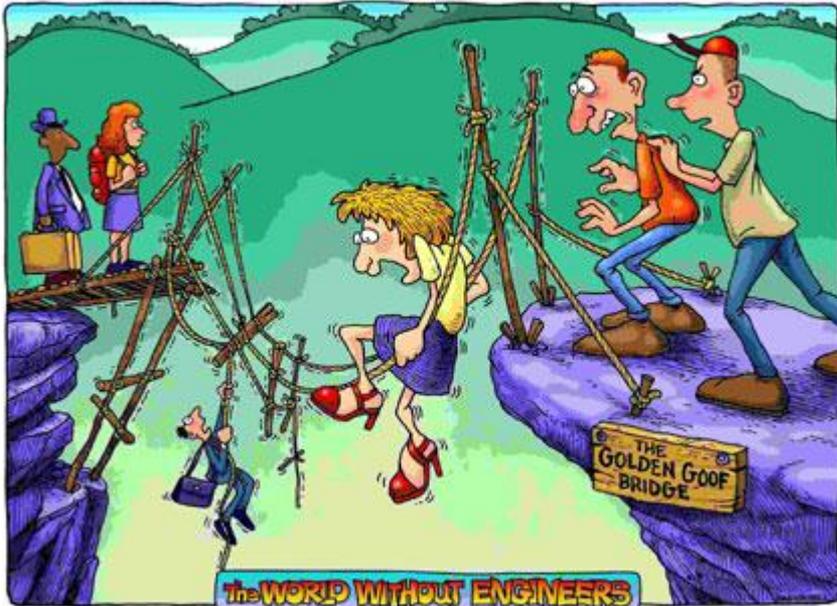
- Adaptación al medio.
- Antes un matemático era de ciencias exactas, ¿y ahora?
- Tengo muchos datos pero, ¿me sirven?
- ¿Medimos bien?



Tópicos sobre ingenieros...

- Un Ingeniero no es prepotente, es que está rodeado de inútiles.
- Un Ingeniero no tiene el ego muy grande, es que la habitación es muy chiquita.
- No es que un Ingeniero quiera tener la razón siempre, es que los otros siempre se equivocan.
- Un Ingeniero no es que carezca de sentimientos, es que los otros son unas nenas lloronas.
- Un Ingeniero no tiene vida desorganizada, es sólo que tiene un ritmo de vida particular.
- Un Ingeniero no ve el mundo, lo cambia.
- Un Ingeniero no es un crecido, es que los simples mortales no lo comprenden.
- Un Ingeniero no es un ser calculador y frío, simplemente, le parece divertido pasar por encima de la gente común.
- Un Ingeniero no es un enredador, es que los usuarios no entienden nada.
- Un Ingeniero no es un crítico, es que los errores de la gente son muy evidentes.
- No es que el trabajo los absorba es que... ¿de qué demonios estaba hablando?
- Un Ingeniero no comete errores, sólo prueba si los demás estaban prestando atención!!

Ingenieros...



The WORLD WITHOUT ENGINEERS

Agilest Technologies

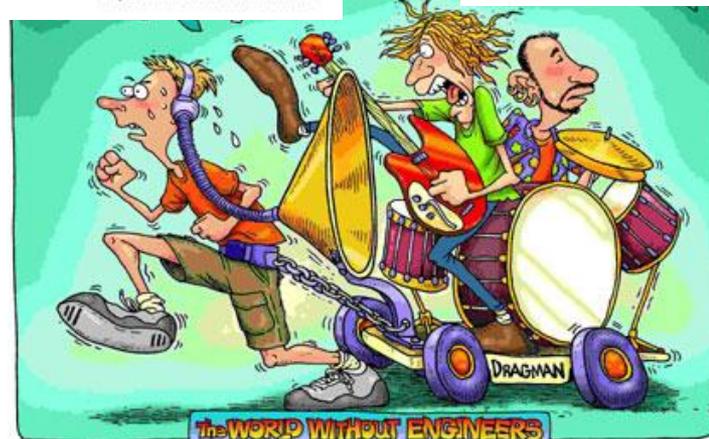
<http://www.educatorscorner.com>



The WORLD WITHOUT ENGINEERS

Agilest Technologies

<http://www.educatorscorner.com>

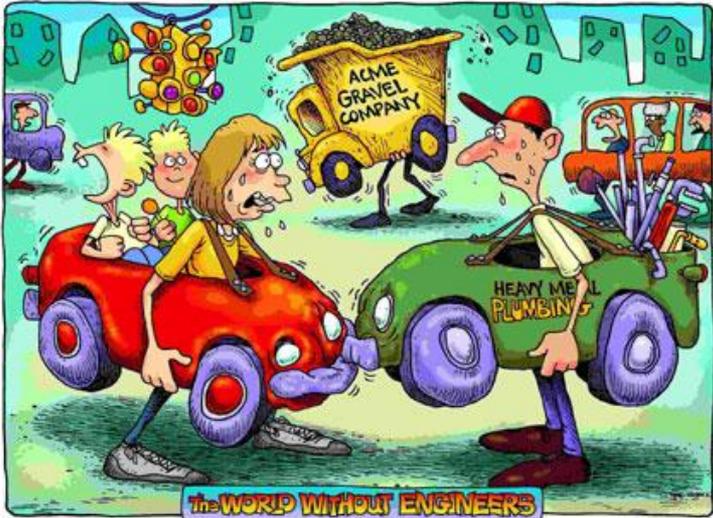


The WORLD WITHOUT ENGINEERS

Agilest Technologies

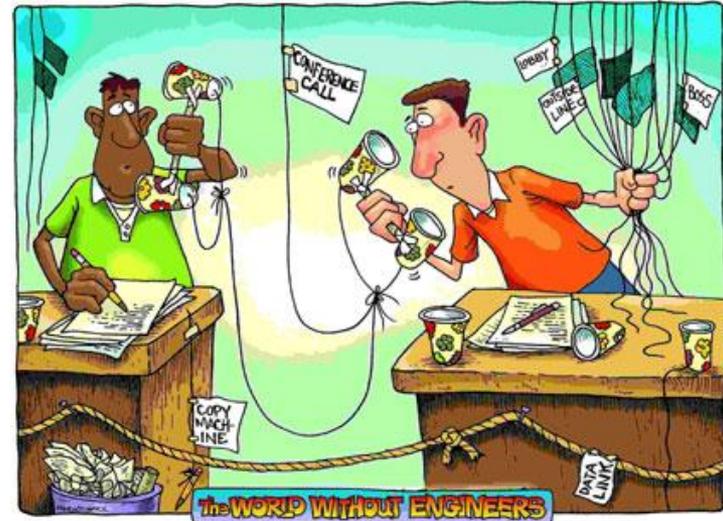
<http://www.educatorscorner.com>

Ingenieros...



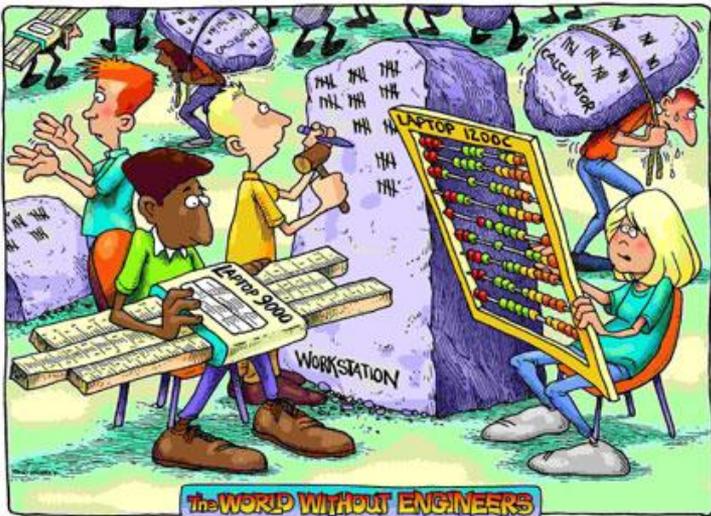
Agilent Technologies

<http://www.educatorscorner.com>



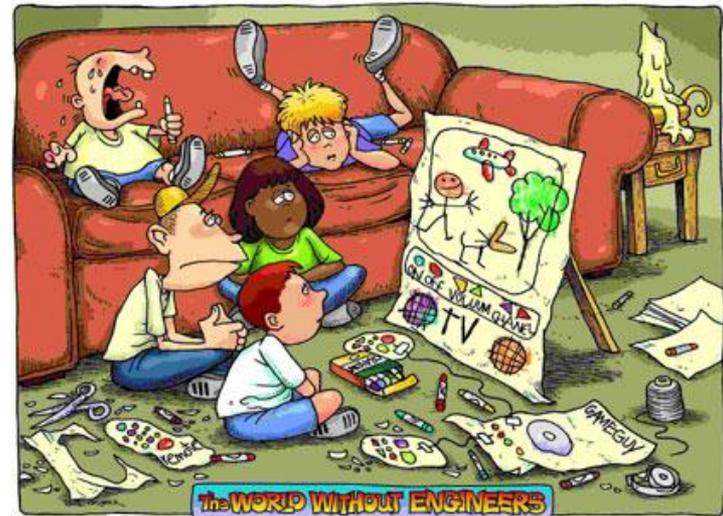
Agilent Technologies

<http://www.educatorscorner.com>



Agilent Technologies

<http://www.educatorscorner.com>



Agilent Technologies

<http://www.educatorscorner.com>

Matemáticos...

Madrid: Congreso Internacional de Matemáticas...

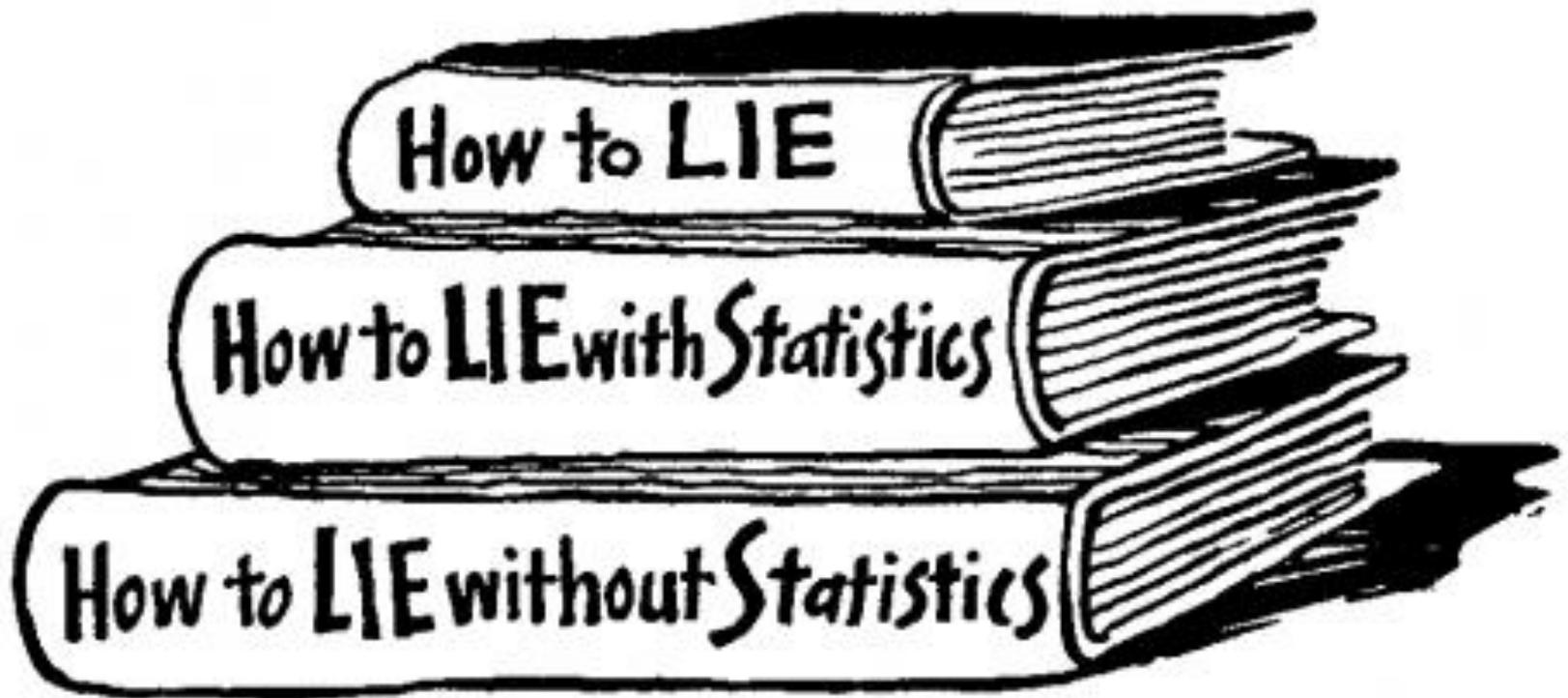
$$\sqrt{3} + \frac{51.3: x + y}{\sqrt{12}: 368} : \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{abd} + 11c}{17\pi: 576} =$$
$$= \frac{db2\sqrt{562+ac^2}}{c^2 - z^3 + 42r^2}$$



...momento culminante del *ligue* entre dos de los ponentes



Estadísticos...



Tópicos sobre estadísticos...

- Aquí confiamos en Dios. Todos los demás deben traer datos
- ¿Sabías que si torturas los datos el tiempo suficiente, terminarán confesando cualquier cosa?
- La estadística es usada como los borrachos usan las farolas: más para apoyarse que para iluminarse
- Oh, la gente puede venir con estadísticas para probar cualquier cosa. El 14% de la gente sabe eso. (Homer Simpson)

Los dos primeros meses (Adaptación)

- ¿Cuál era la herramienta de trabajo de un matemático/estadístico en el año 90?
- ¿Dónde puedo ser útil? ¿Qué otra cosa sé hacer aparte de números?
- Visitas por varios servicios entendiendo el funcionamiento
- Salidas al campo a recoger muestras.
- Relaciones públicas.

Trabajillos, trabajillos...

- El ordenador (con MS-DOS) conectado al espectrómetro de gases de 6 millones de pesetas (36000 €) se ha fundido. ¿Alguien tiene idea de cómo seguir usándolo?
- Informes en la sección de resultados. ¿Es posible mejorarlos?
- Los ingleses dicen que les llega la lluvia ácida de la central, ¿es verdad?
- ¿Sabrás hacer declaraciones de la Renta ya que eres matemático?
- Ciclo Agua-Vapor

Experimento interlaboratorios

- «Tú, que eres estadístico sabrás que significan esas letras griegas de la norma ...»
- Objetivo: Determinar la capacidad del laboratorio para medir alguna variable de interés
- Procedimiento: Se envían partes de una misma muestra a varios laboratorios que deben analizarla y devolver los resultados. Del análisis conjunto de los resultados se determina la **repetibilidad** y la **reproductibilidad**.

Experimento interlaboratorios

- Primer asunto: Traducir a nuestro lenguaje

$$y_{ij} = \mu + B_i + \epsilon_{ij}$$

- Reproducibilidad (σ_R) y repetibilidad (σ_r)
- Segundo: Aplicar con exactitud **toda** la norma
- Tercero: Extraer conclusiones del análisis y traducirlos a lenguaje entendible.



Calibrado de una caseta de medición

- La medición de la concentración de NO_x se hace mediante quimioluminiscencia.
- Este proceso depende de catalizadores químicos y sensores que pueden desgastarse con el tiempo.
- Para asegurar una buena calidad de medida, el aparato debe «calibrarse» cada cierto tiempo.
- Durante el tiempo de calibrado, el aparato proporciona mediciones artificiales que deben ser ignoradas.

Solución original

- Existe muy buena relación lineal entre la longitud de onda y el $\log(\text{NO}_x)$. –lo dicen los manuales–
- $\lambda = a + b \log(\text{NO}_x) \rightarrow \log(\text{NO}_x) = \frac{\lambda - a}{b}$
- Se preparan dos muestras en el laboratorio con $\text{NO}_x=5$ y $\text{NO}_x=600$ (mín. y máx. esperados) y se calculan a y b . (dos ecuaciones, dos incógnitas)
- Una vez calculados a y b . $\rightarrow \text{NO}_x = \exp\left(\frac{\lambda - a}{b}\right)$

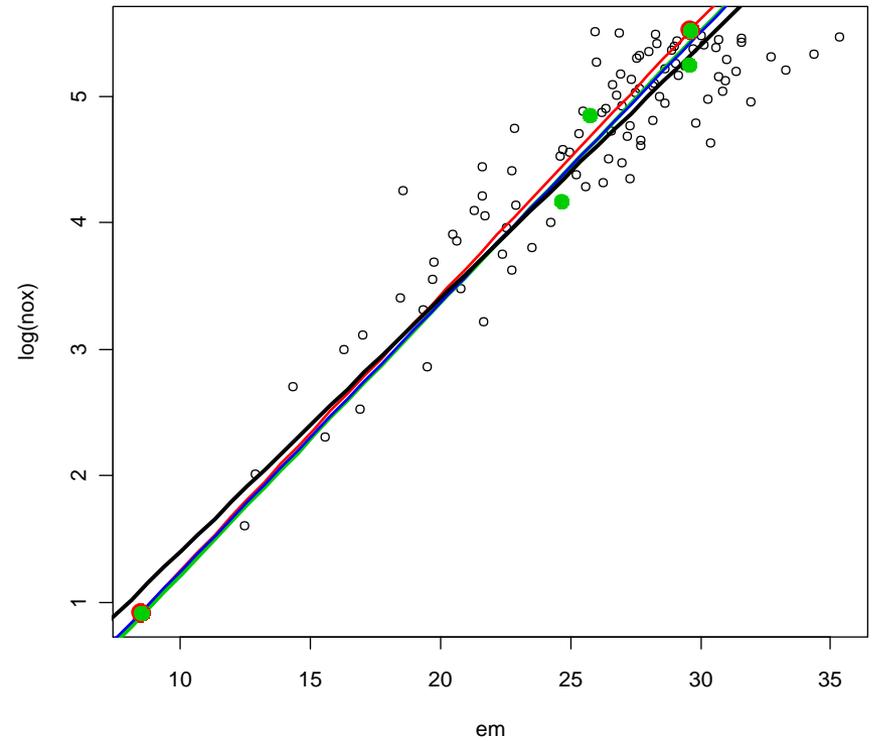
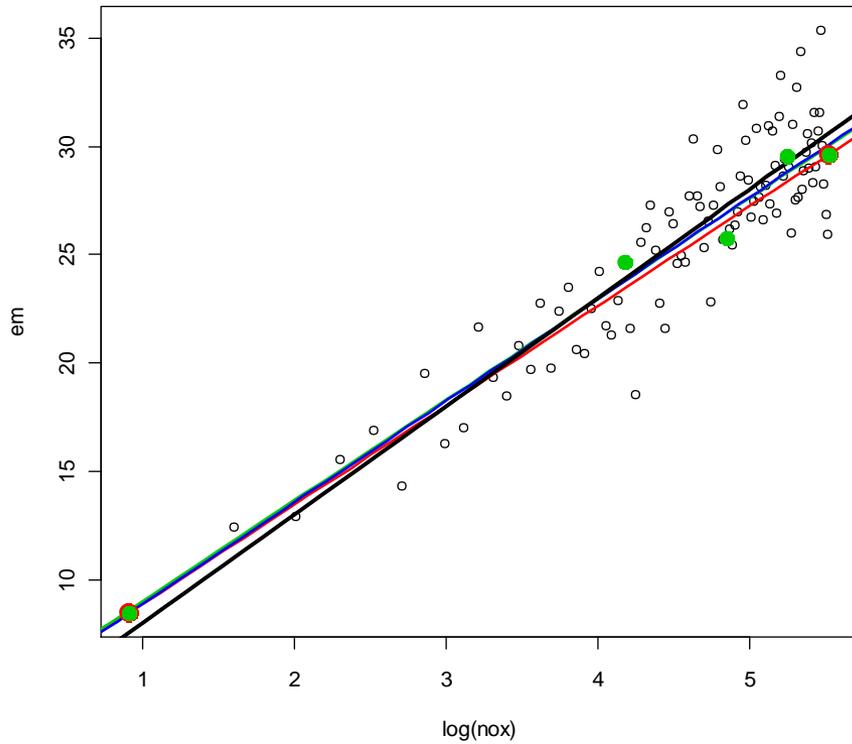
Segundo intento

- Con sólo dos muestras no se calcula bien la relación –me han dicho en una convención–
- Se preparan K muestras en el laboratorio entre $NO_x=5$ y $NO_x=600$ (mín. y máx. esperados) y se calculan a y b mediante la recta de regresión de λ respecto a $\log(NO_x)$.
- Una vez calculados a y b . $\rightarrow NO_x = \exp\left(\frac{\lambda - a}{b}\right)$

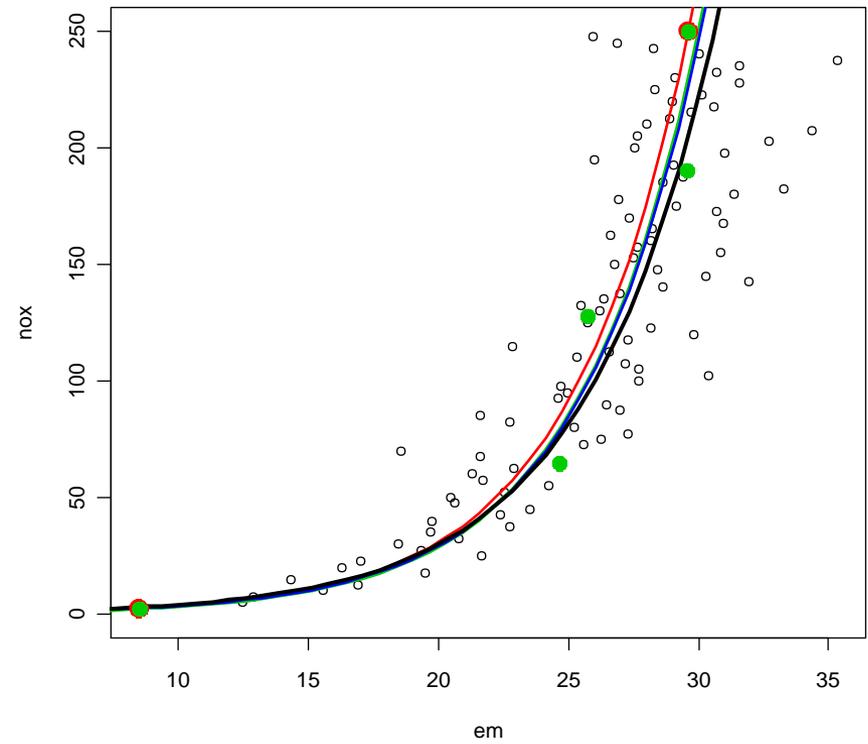
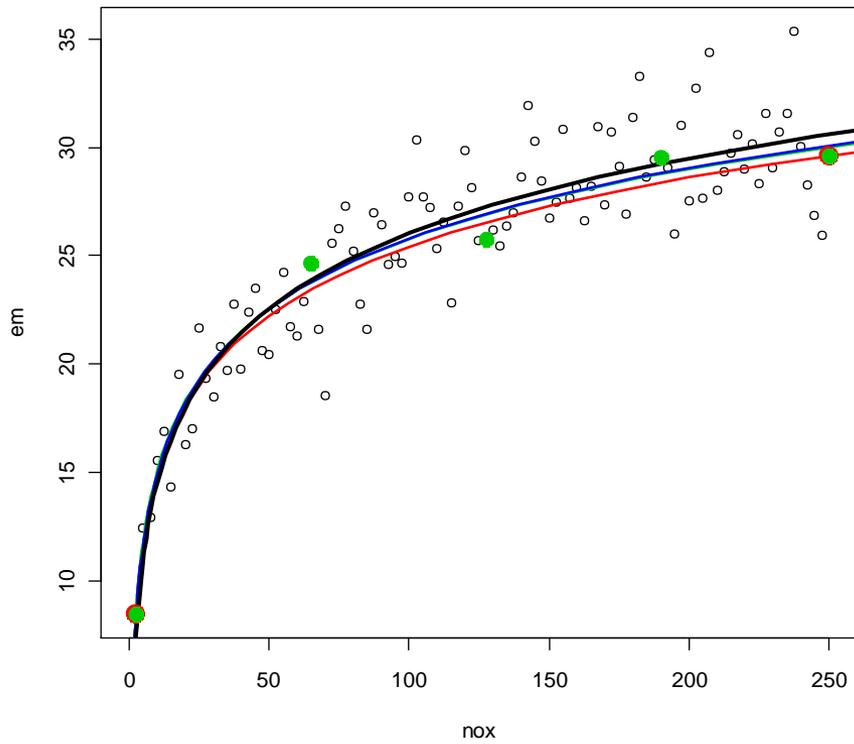
Al revés es como está bien

- Efectivamente, con sólo dos muestras no se calcula bien la relación
- Se preparan K muestras en el laboratorio entre $NO_x=5$ y $NO_x=600$ (mín. y máx. esperados) y se calculan a' y b' mediante la recta de regresión de $\log(NO_x)$ respecto a λ .
- Una vez calculados a' y b' .
$$NO_x = \exp(a' + b'\lambda)$$
- Además, compara los a' y b' obtenidos con los anteriores para saber cuando debe revisarse

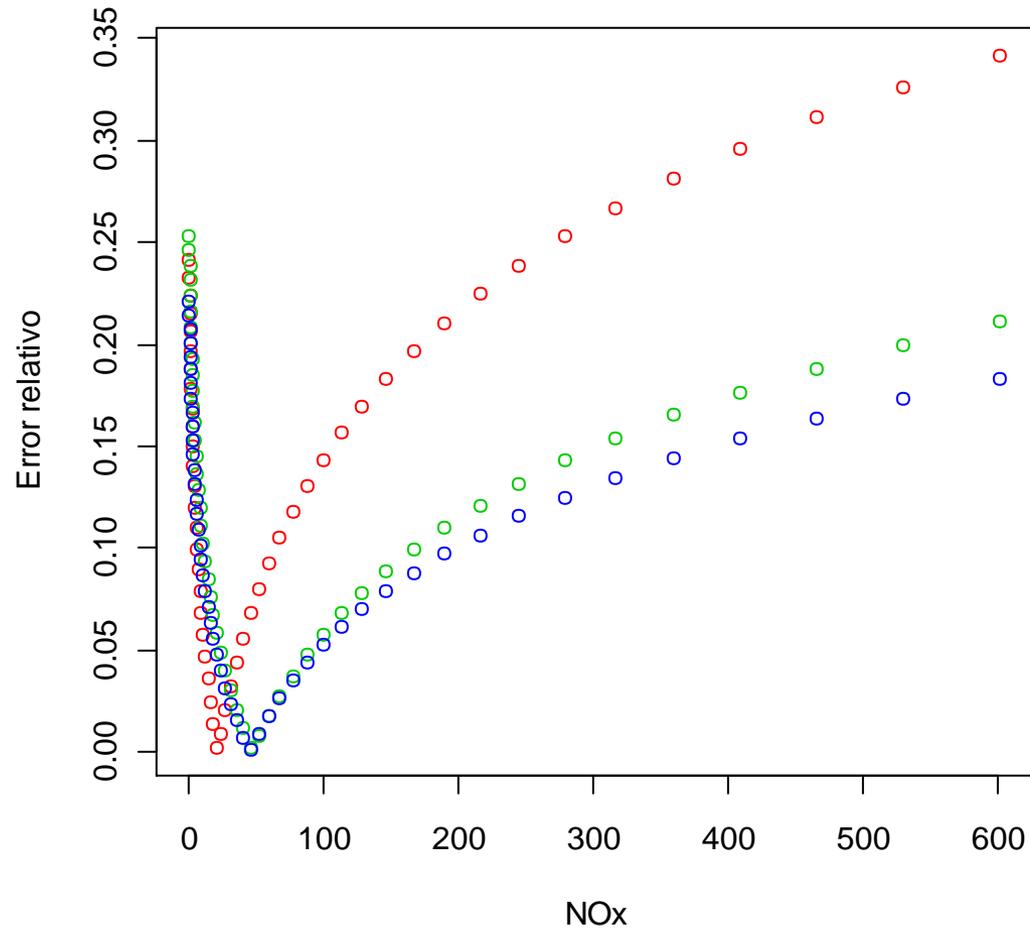
Recta de calibrado



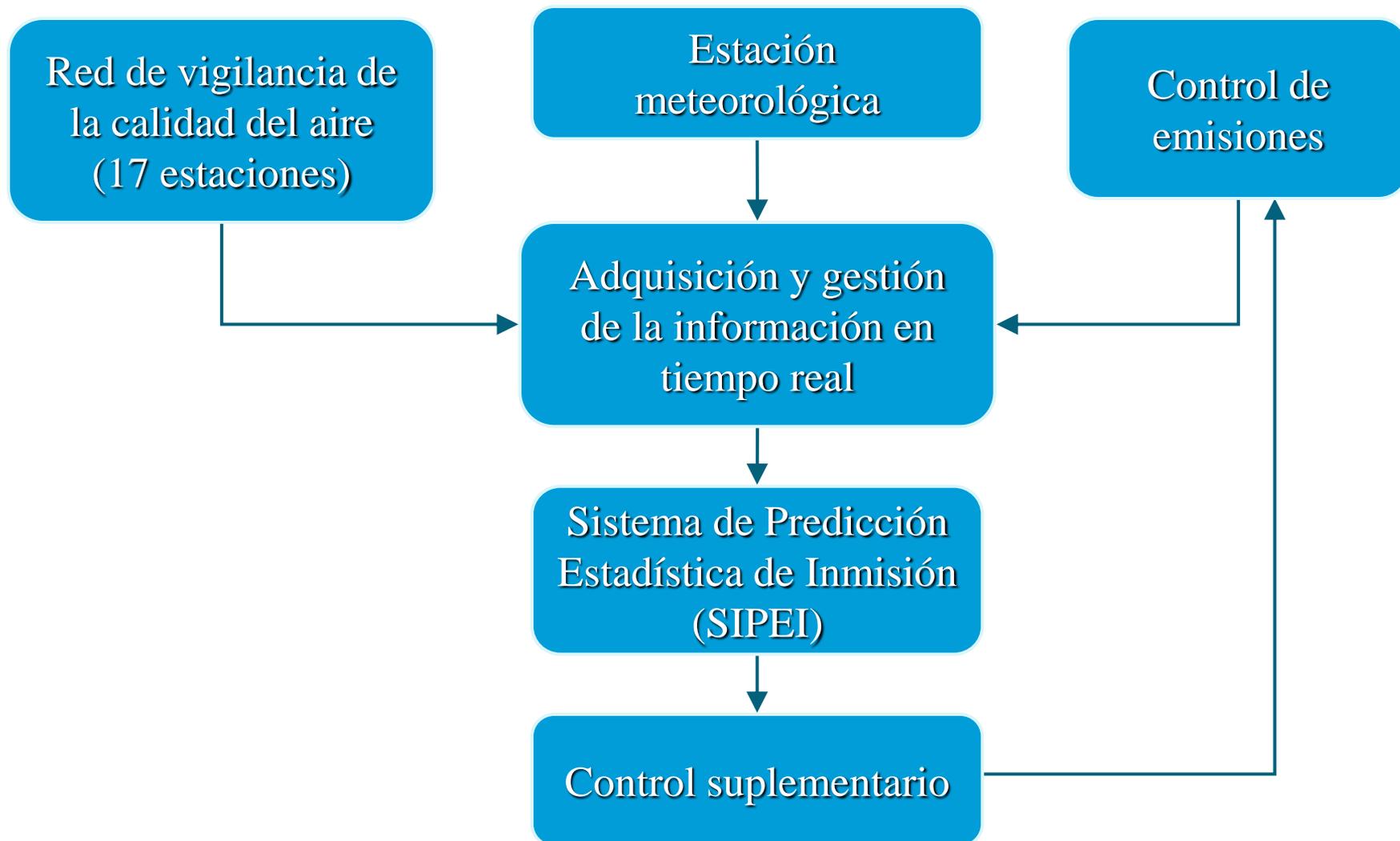
En escala



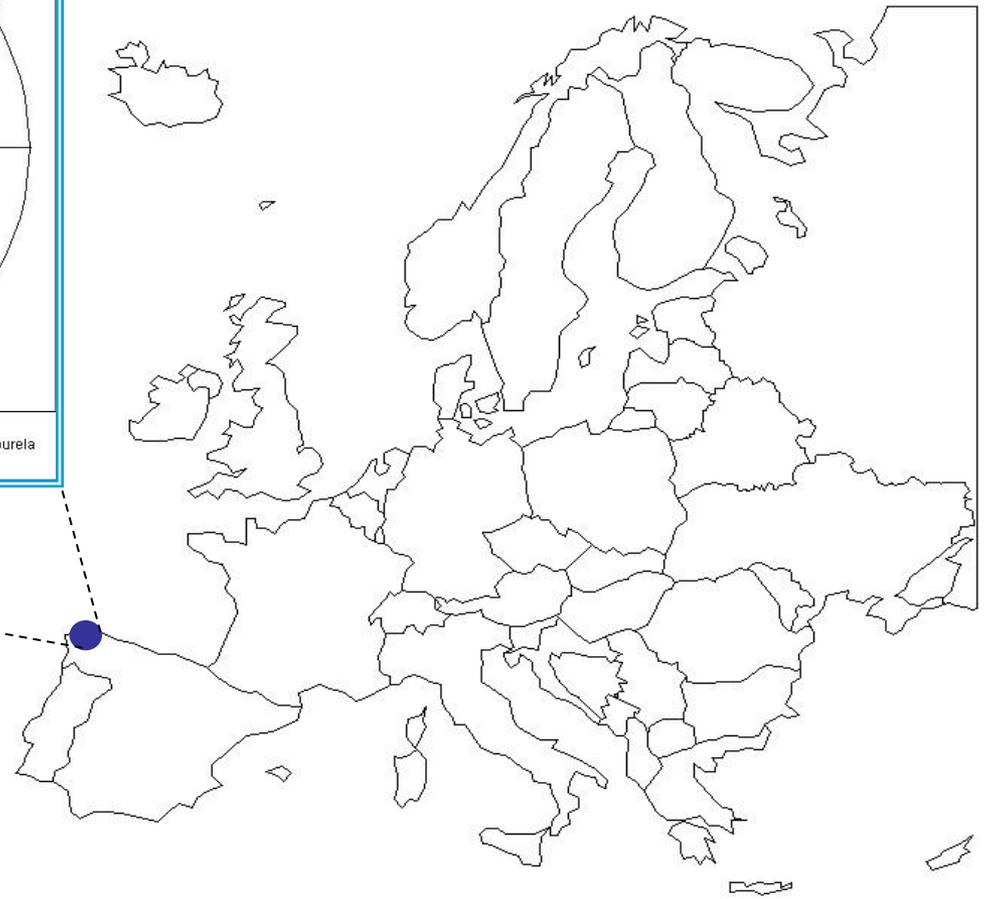
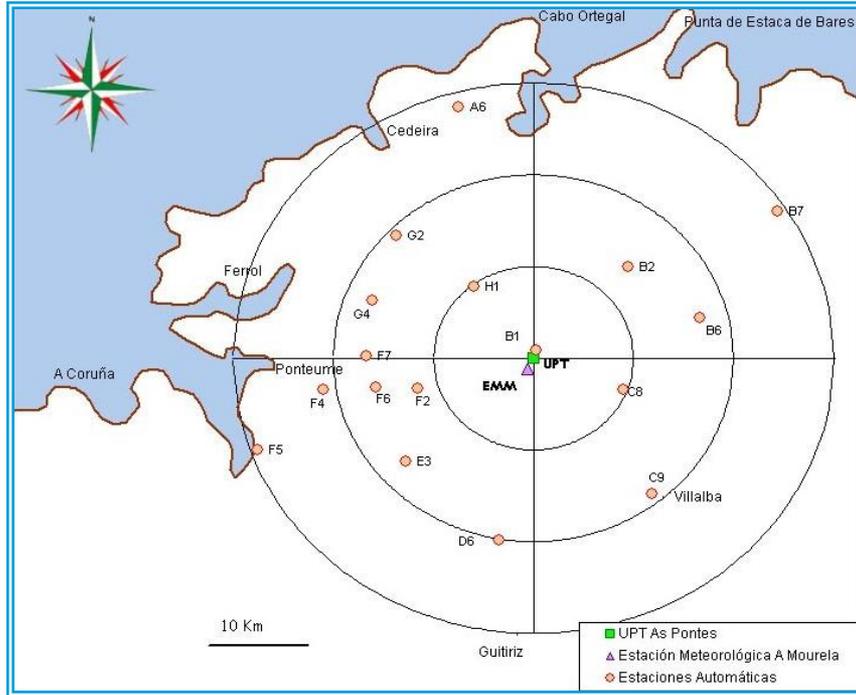
Error absoluto relativo



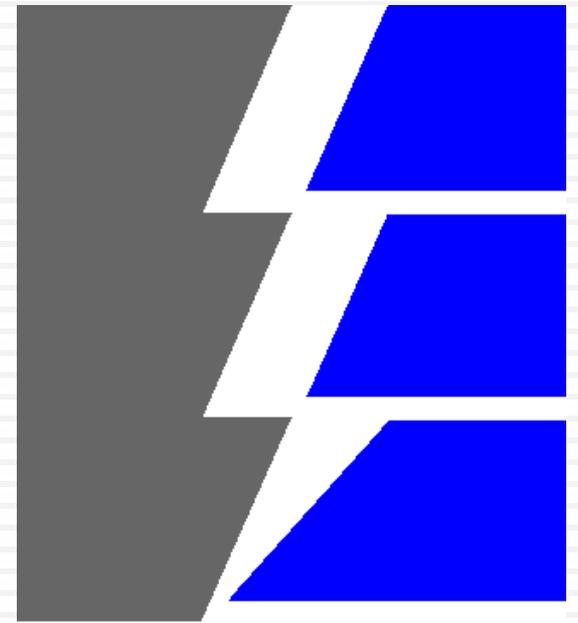
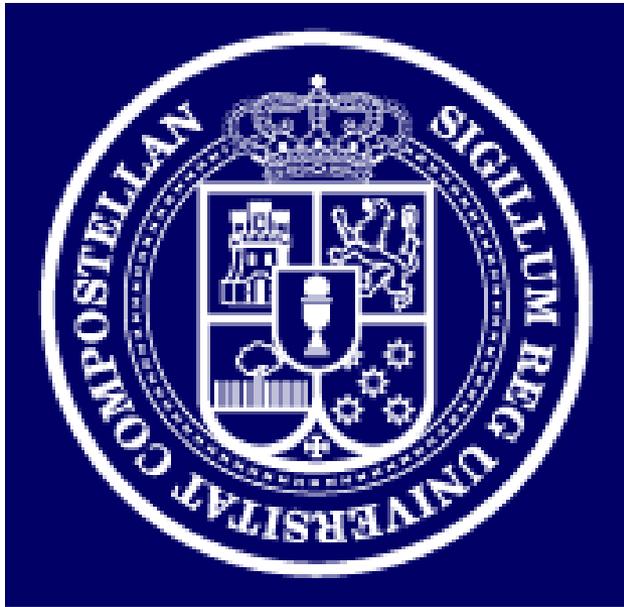
Vale de rollos, ¿cuál es el objetivo de mi estancia?



Sistema de Seguimiento y Control de la Calidad Atmosférica



Modelos de predicción



Endesa

Objeto de la predicción (1990)

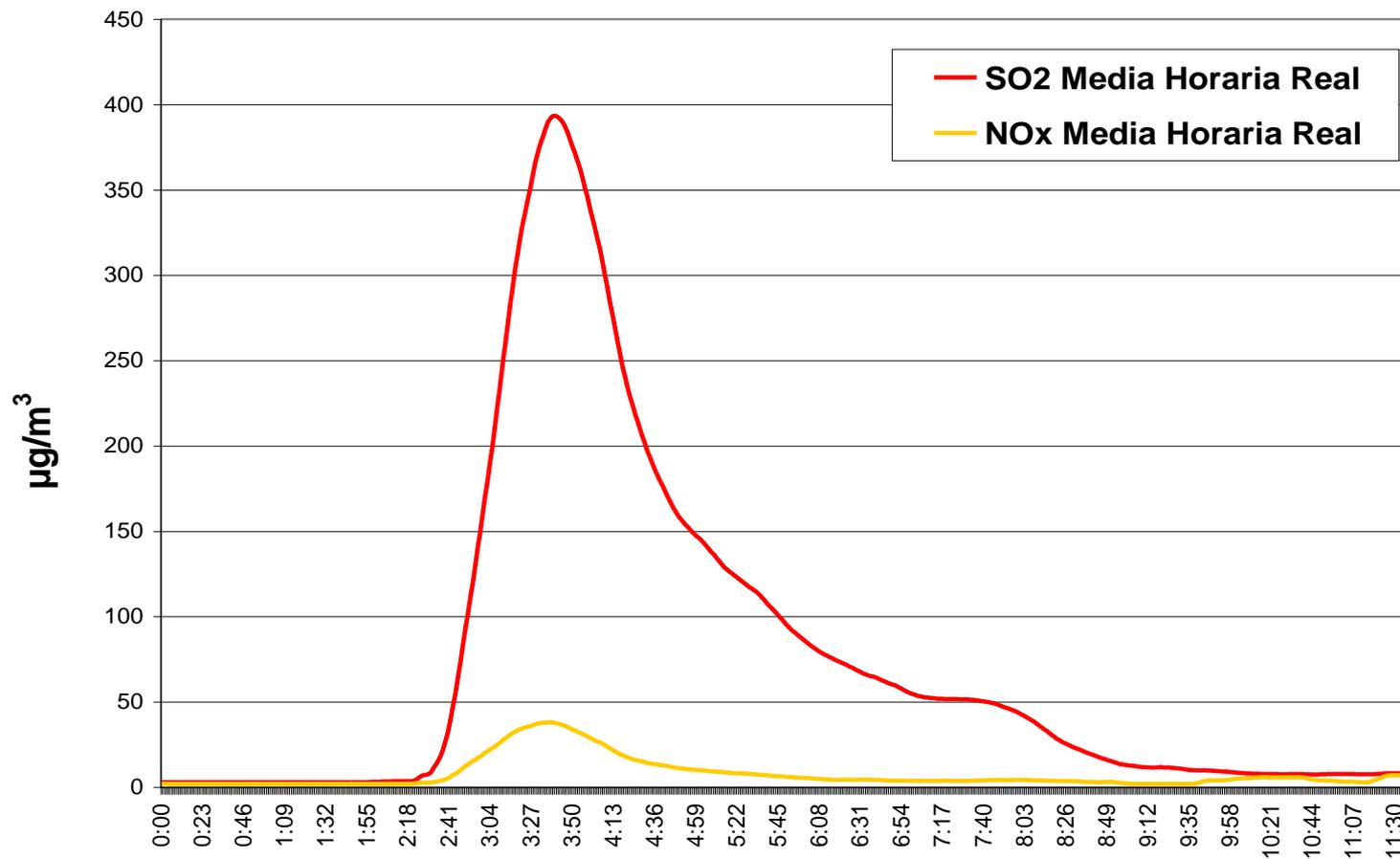
- ❑ Cada cinco minutos se reciben datos de las estaciones via radio.
- ❑ La legislación vigente establecía límites para las medias bihorarias. (650 $\mu\text{g}/\text{m}^3$)
- ❑ El modelo debe usar los siguientes datos.

$$x_t = \frac{1}{24} \sum_{i=0}^{23} SO_2(t-i)$$

donde $SO_2(t)$ representa la concentración de SO_2 en el instante t (pentaminutal), medida en $\mu\text{g}/\text{m}^3$.

Los datos

Valores de SO₂ y NO_x .12/03/2007



Modelo planteado

- Después de varios intentos por parte de los ingenieros locales contactan con el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la USC

Nuestra propuesta: modelo semiparamétrico. NOVEDAD
Generaliza los modelos ARIMA:

$$X_{t+k} = \varphi X_t, X_{t-l} + Z_{t+k}$$

Tendencia general **Ajuste local**

Modelo Semiparamétrico

- En cada instante t se estima la función de regresión

$E(X_{t+6} / X_t, X_{t-1})$ usando la matriz histórica.

- Se calcula la serie de residuos $\hat{Z}_{t-64}, \dots, \hat{Z}_t$ (6 últimas horas),

donde $\hat{Z}_i := X_i - \hat{E}(X_i / X_{i-6}, X_{i-7})$ y se ajusta un modelo ARIMA adecuado.

- Se obtiene la predicción Box-Jenkins de \hat{Z}_{t+6} .

- La predicción final propuesta es:

$$\hat{X}_{t+6} = \hat{E} X_{t+6} / X_t, X_{t-1} + \hat{Z}_{t+6}$$

Peculiaridades no matemáticas

- En el año 91 la velocidad de procesamiento y la capacidad de almacenamiento era limitada.
- La aplicación del método debe ser de uso fácil para los operadores (que no son matemáticos).
- Este procedimiento debe ser automático.
- Hay que ser rápido. Cada cinco minutos debe realizarse una nueva predicción.
- Hay que equilibrar la alarma y la exactitud de los métodos.

Matrices Históricas

- ❑ La clave del buen funcionamiento de todos los modelos de predicción diseñados está en un **mecanismo de memoria** diseñado en los primeros años de desarrollo.
- ❑ La serie temporal de interés está formada en su mayor parte por valores próximos a cero y pocos valores de episodios de inmisión.
- ❑ Se estratifican los datos disponibles de SO_2 según un rango de valores que representan razonablemente a los episodios pasados con objeto de mantener la **información interesante** de los episodios.
- ❑ A lo largo de los años este concepto se ha adaptado a las distintas técnicas estadísticas utilizadas.

Matrices Históricas

~~□ Serie temporal~~

□ Matriz histórica:

□ Un número grande de registros.

□ Divididos en estratos.

□ Se asigna un rango de valores de X_{t+k} a cada clase.

□ Cada vector se asigna a la clase a la que pertenece X_{t+k} .

$$(X_{t-l}^1, X_t^1, X_{t+k}^1)$$

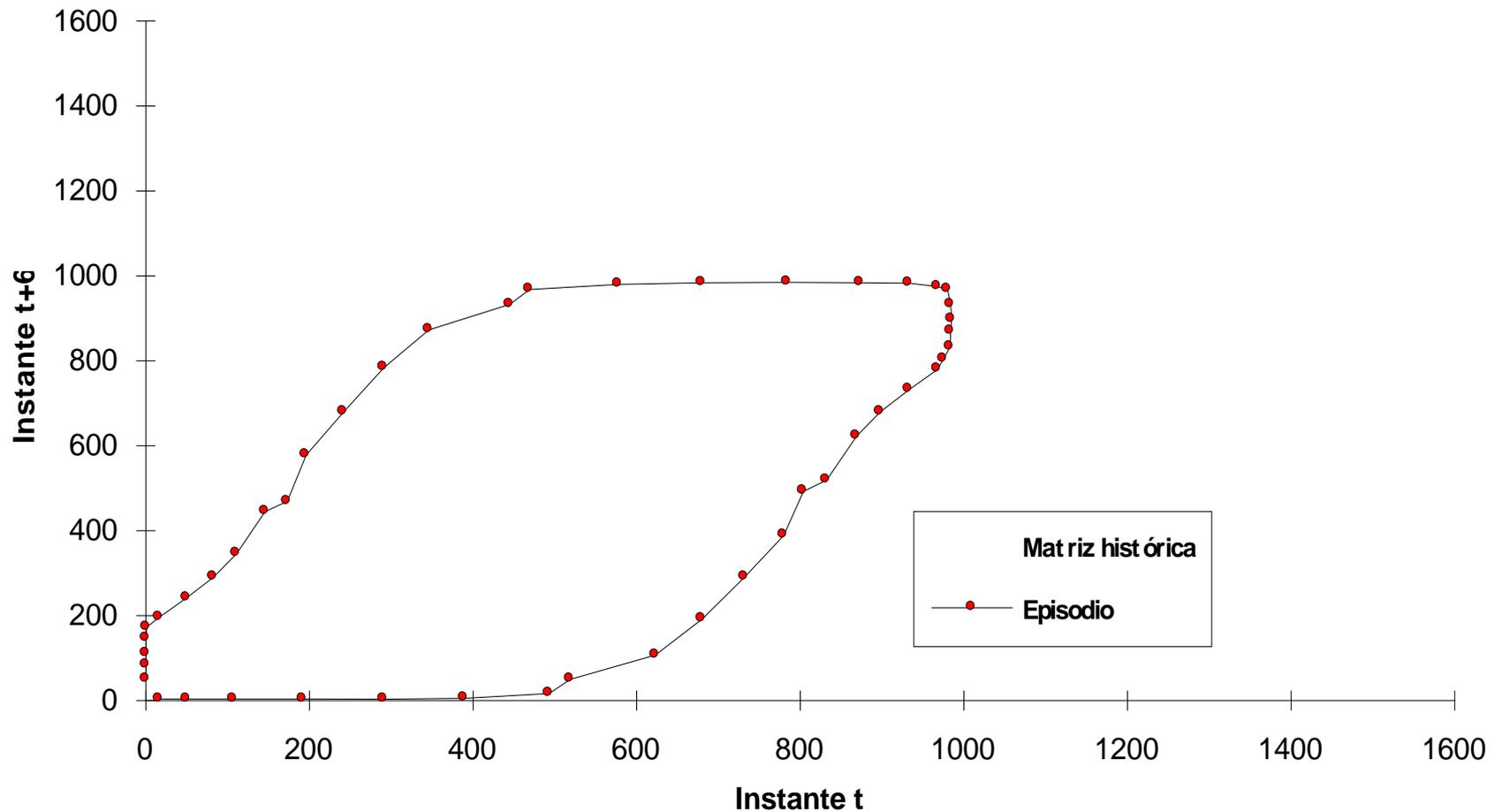
$$(X_{t-l}^i, X_t^i, X_{t+k}^i)$$

⋮

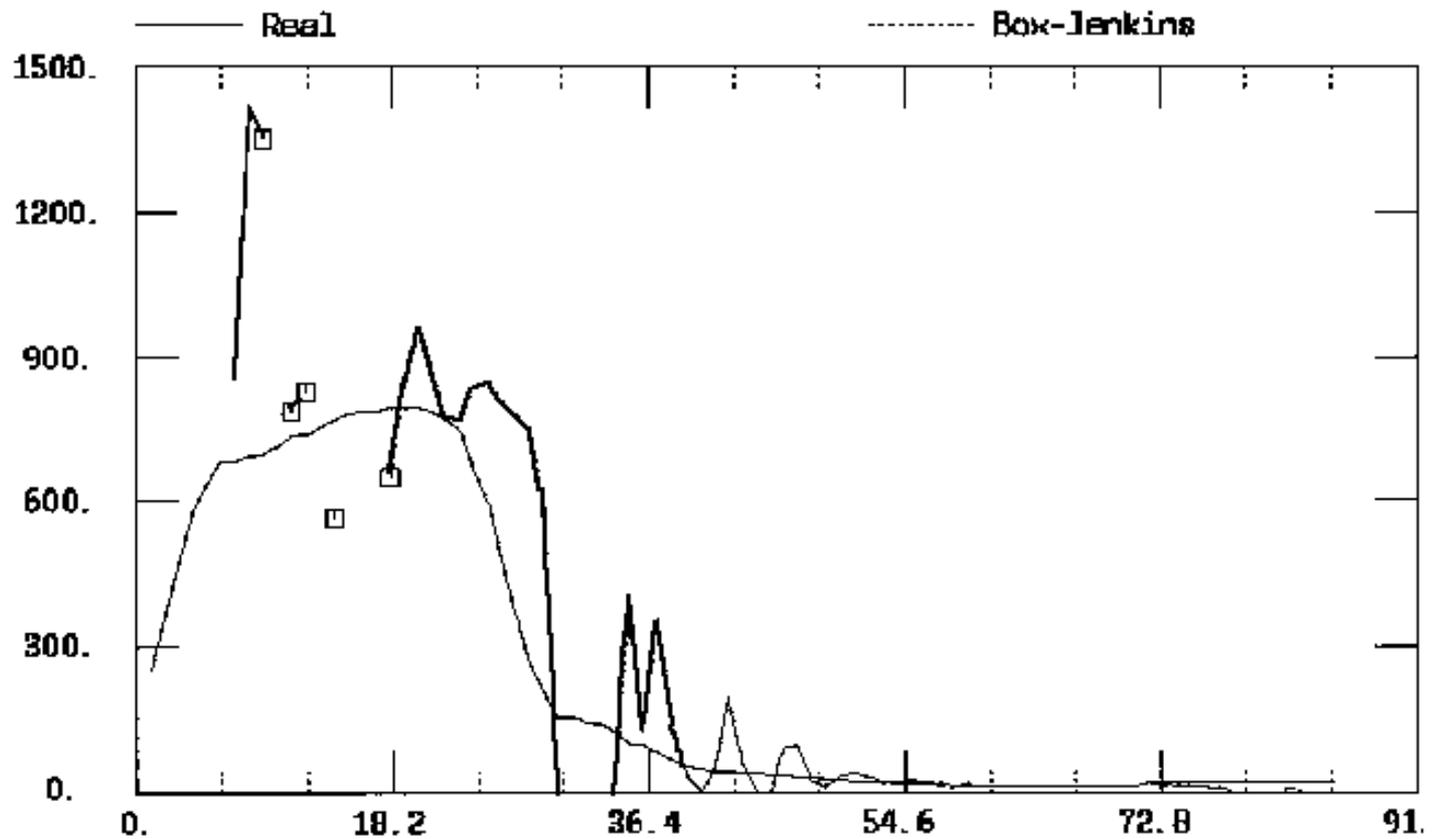
$$(X_{t-l}^M, X_t^M, X_{t+k}^M)$$

Matriz histórica)

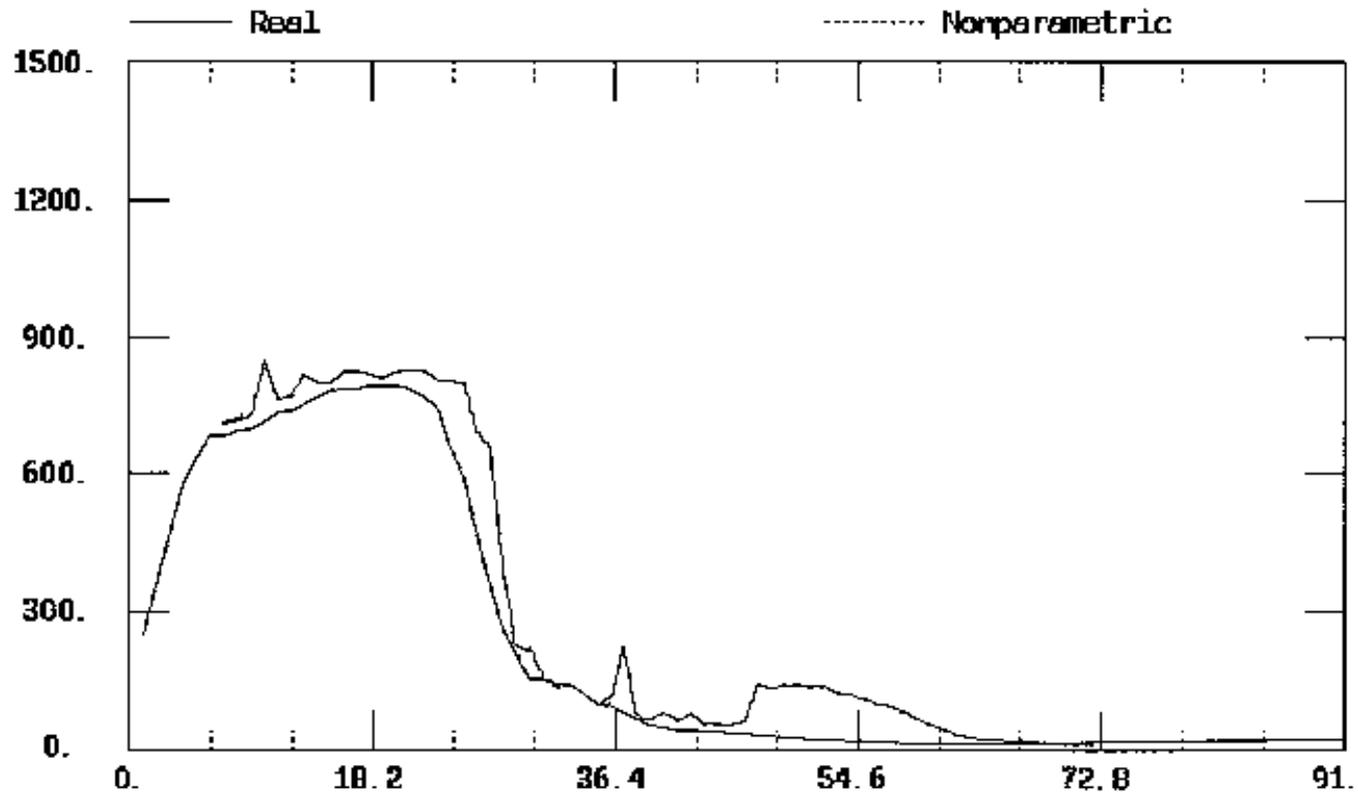
Nube de dispersión a seis retardos



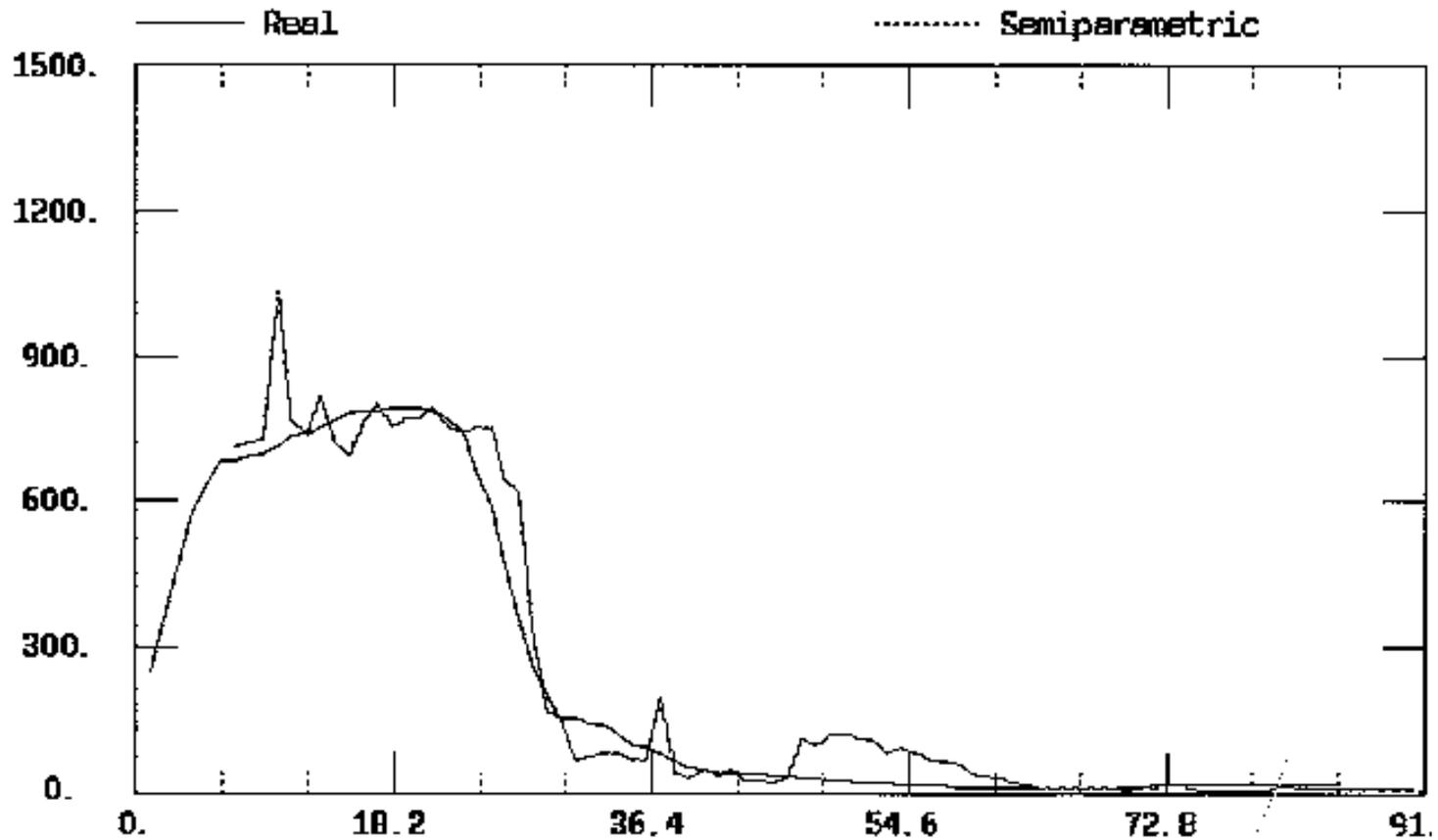
Ejemplos



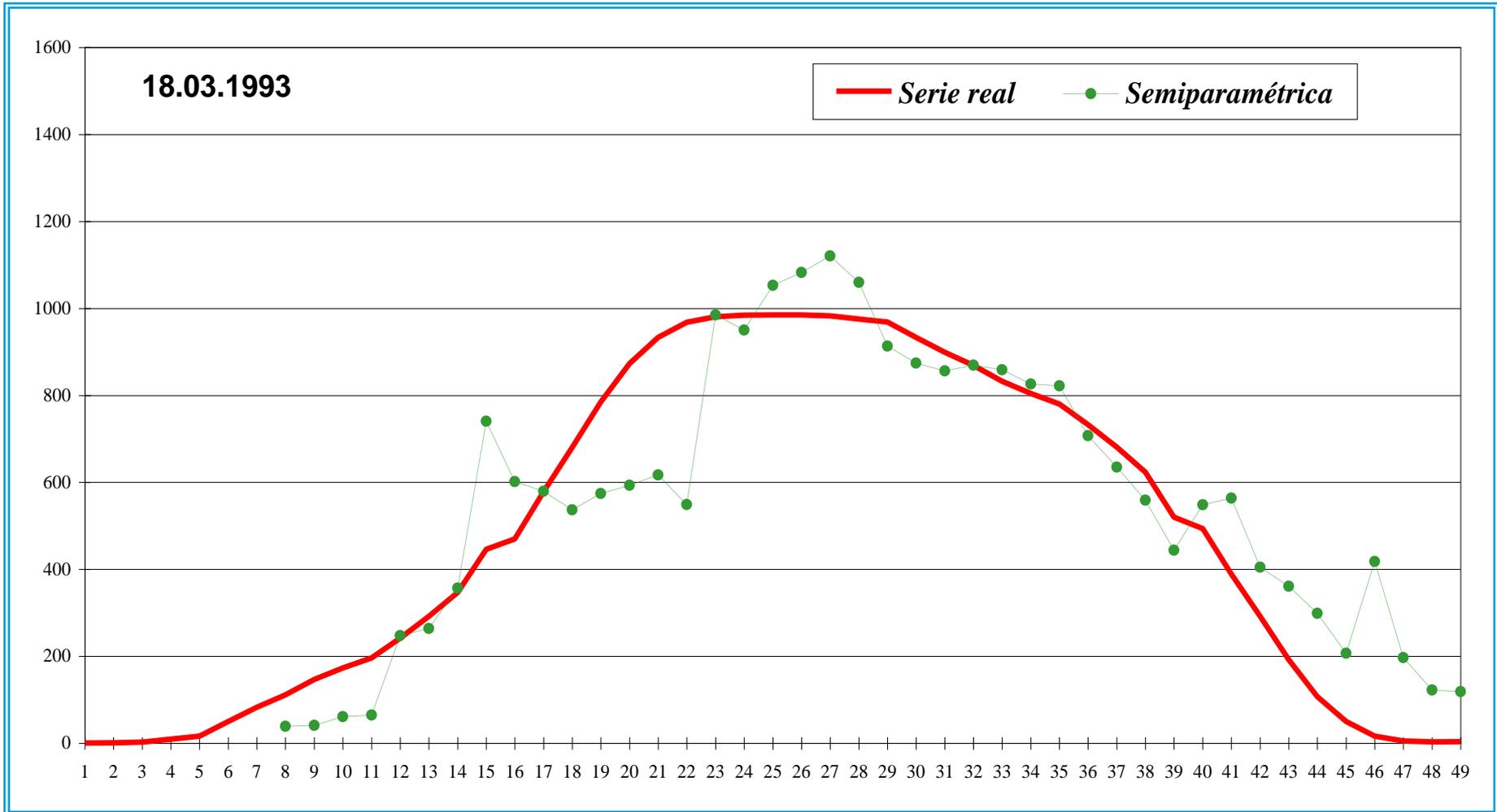
Ejemplos



Ejemplos

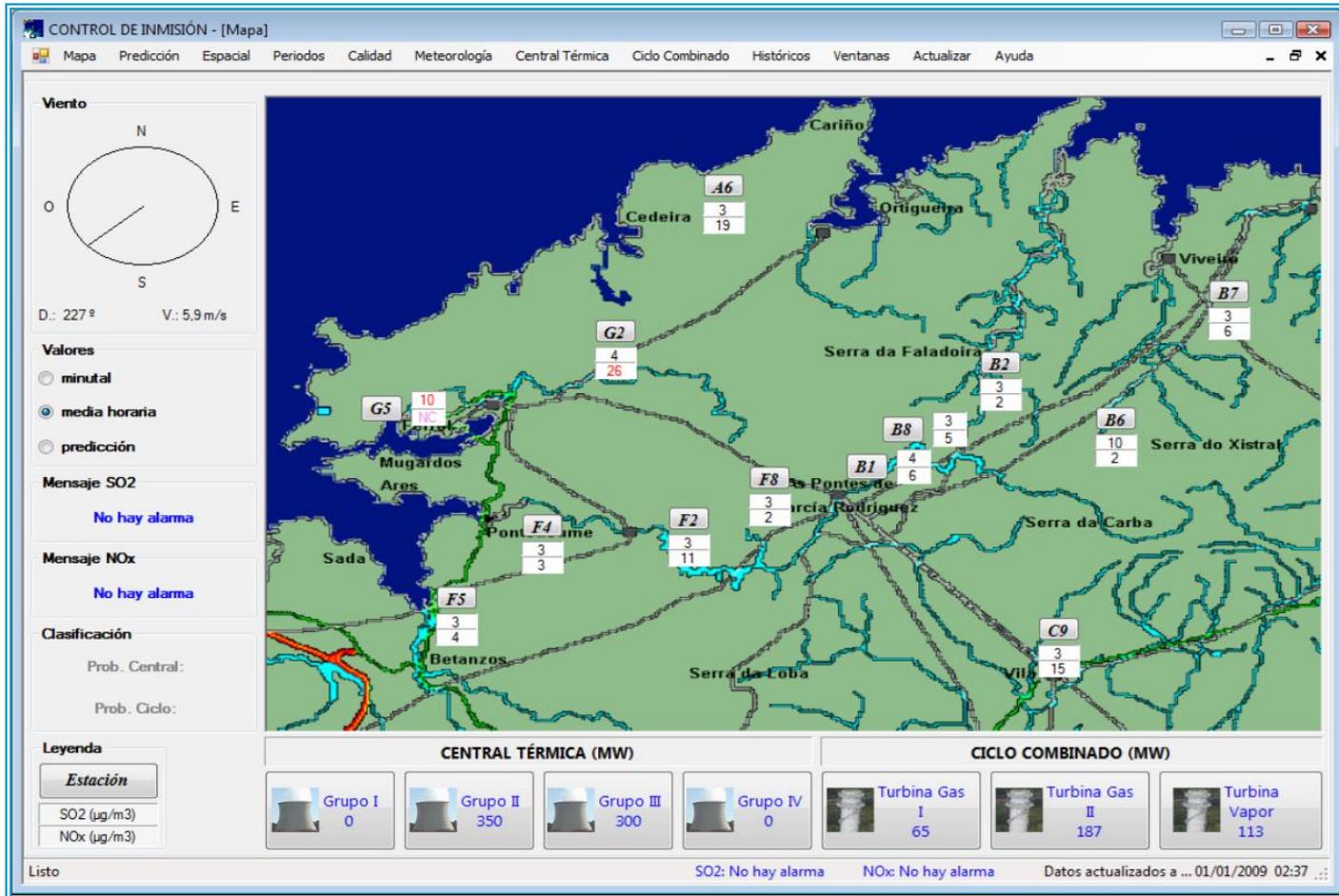


Modelo Semiparamétrico (Matriz histórica)



Predicción

- ❑ Ficheros: [PP231_07.DAT](#): [CAL4A6.DAT](#)

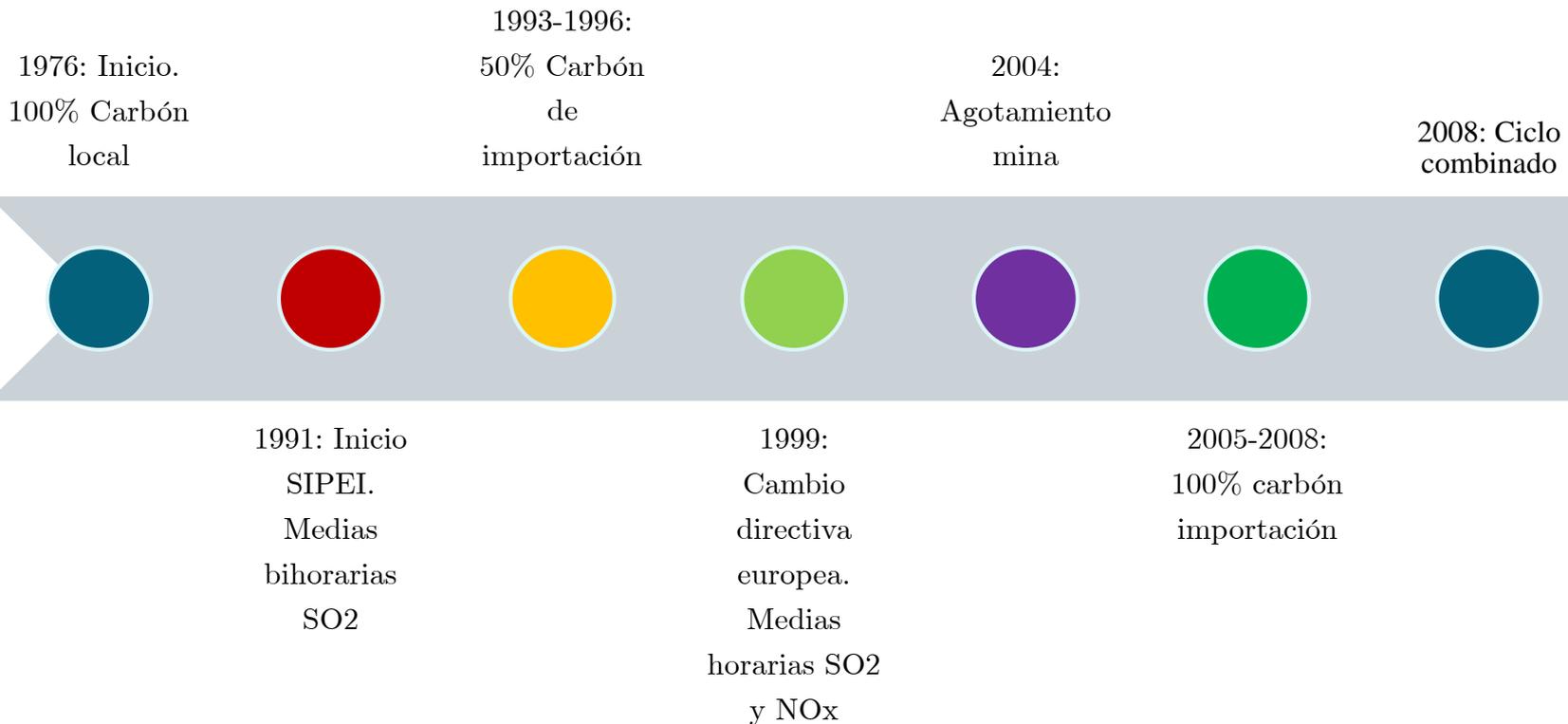


Modelo Semiparamétrico (Matriz histórica)

García-Jurado I., González-Manteiga W., Prada-Sánchez J.M., Febrero-Bande M. and Cao R. ***Predicting using Box-Jenkins, Nonparametric and Bootstrap Techniques.*** Technometrics **1995**; 37: 303-310.

Prada-Sánchez, J.M. and Febrero-Bande M. ***Parametric, Non-Parametric and Mixed approaches to prediction of sparsely distributed pollution incidents: a case study.*** Journal of Chemometrics **1997**; 11: 13-32.

Resumen histórico



El Departamento de Estadística de la USC

- ❑ Más de 22 años de relación con la Central Térmica de As Pontes
- ❑ Más de 20 años prediciendo contaminación.
- ❑ 13 Investigadores/Becarios involucrados en 22 años:
 - ❑ 5 tesis doctorales leídas, 1 lista para leer y otra en desarrollo.
 - ❑ De los 9 becarios involucrados: 4 profesores de universidad y una alta directiva de entidad financiera.
 - ❑ Más de una veintena de publicaciones relacionadas

Resumen histórico personas

- Wenceslao González Manteiga
- José Manuel Prada Sánchez
- Ignacio García Jurado
- Ricardo Cao Abad
- Manuel Febrero Bande
- Tomás Cotos Yáñez
- Rubén Fernández Casal
- Javier Roca Pardiñas
- Belén Fernández de Castro
- Adela Martínez Calvo
- María Piñeiro Lamas
- Francisco Prieto Magdalena
- ...

Modelos Parcialmente Lineales

- ❑ La información utilizada por los modelos semiparamétricos es el pasado de la propia serie.
- ❑ Se puede introducir información adicional: **variables meteorológicas y variables de emisión**.
- ❑ Los modelos parcialmente lineales utilizan estas variables y amplían el horizonte de predicción a una hora.
- ❑ Se consideran datos de la forma (V_t, Z_t, Y_t) donde V_t es un vector de variables exógenas, $Z_t = (X_t, X_{t-3})$ e $Y_t = X_{t+12}$, siendo $\{X_t\}$ la serie de medias bihorarias de SO_2 .
- ❑ Se asume que se ajustan al modelo parcialmente lineal:

$$Y_t = V_t' \beta + \varphi Z_t + \varepsilon_t$$

Modelos Parcialmente Lineales

Prada-Sánchez J.M., Febrero-Bande M., Cotos-Yáñez T., González-Manteiga W., Bermúdez-Cela J.L. and Lucas-Domínguez T. *Prediction of SO_2 pollution incidents near a power station using partially linear models and a historical matrix of predictor-response vectors.* Environmetrics 2000; 11: 209-225.

Modelos Predicción espacial

- ❑ Se pretende predecir en cualquier posición espacial con la información de las estaciones de medición.
- ❑ Representamos de manera general $X_t(s)$

$$X_t(s) = D_t(Z_t(s), s) + e_t(s), \quad s \in D, t \in Z$$

- ❑ donde $D_t(Z_t(s), s)$ puede incluir una tendencia determinística, el efecto de variables exógenas y $e_t(s)$ es un proceso residual de media cero que tiene en cuenta la dependencia espacio-temporal.

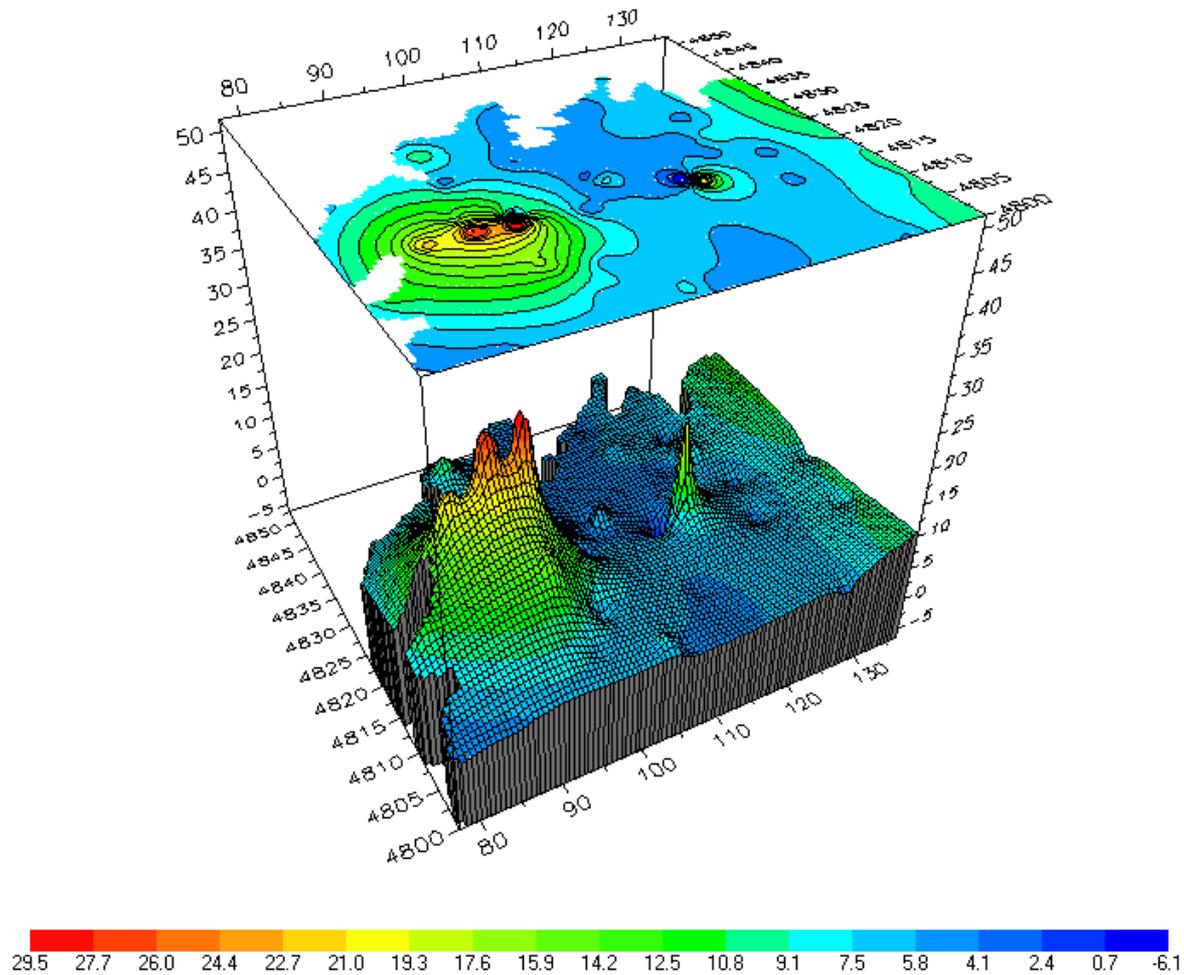
1) $D_t(Z_t(s), s) = D(s) = \mu \rightarrow$ Ordinary kriging

2) $D_t(Z_t(s), s) = D(s) = \sum_{j=0}^J f_j(s)\beta_j \rightarrow$ Universal kriging

3) $D_t(Z_t(s), s) = D(Z_t) = E(X_t/Z_t)$, y $\{e_t\}$ ARMA \rightarrow Serie de tiempo semiparamétricas

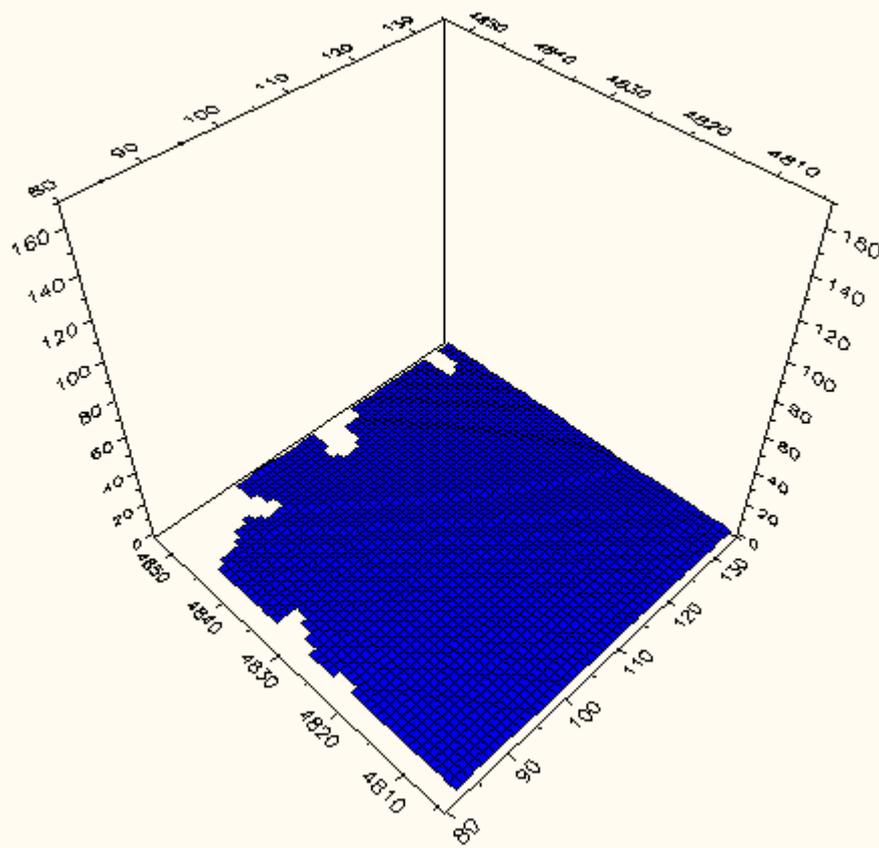
4) $D_t(Z_t(s), s) = D(Z_t) = f_0(t) + \sum_{j=0}^r f_j(Z_t^j)$, y $\{e_t\}$ ARMA \rightarrow Niu (Jasa, 1996)

Modelos Predicción Espacial



Modelos Predicción Espacial

17:25



Modelos Predicción Espacial

Febrero-Bande, M., Alonso-Morales, F.J., Angulo-Ibañez, J.M. y González-Manteiga W. *Semi-parametric statistical approaches for space-time process prediction. Some Applications.* Spatial Statistics Through Applications **2002** Witpress.

Fernández-Casal, R., González-Manteiga, W. y Febrero-Bande, M. *Space-Time dependency modeling using general classes of flexible stationary variogram models.* *Statistics and Computing* **2003** 13, 127-136.

Modelos de Predicción binaria

- El objetivo de estos modelos es estimar la probabilidad de que la serie de medias bihorarias de SO₂ supere un cierto nivel con una hora de antelación.

- Se pretende predecir:

$$p(Z_t) = p(X_{t+12} > r \mid Z_t)$$

donde $Z_t = (X_t, X_t - X_{t-3})$

- Para ello se van a utilizar *modelos aditivos generalizados con función link desconocida (G-GAM)*

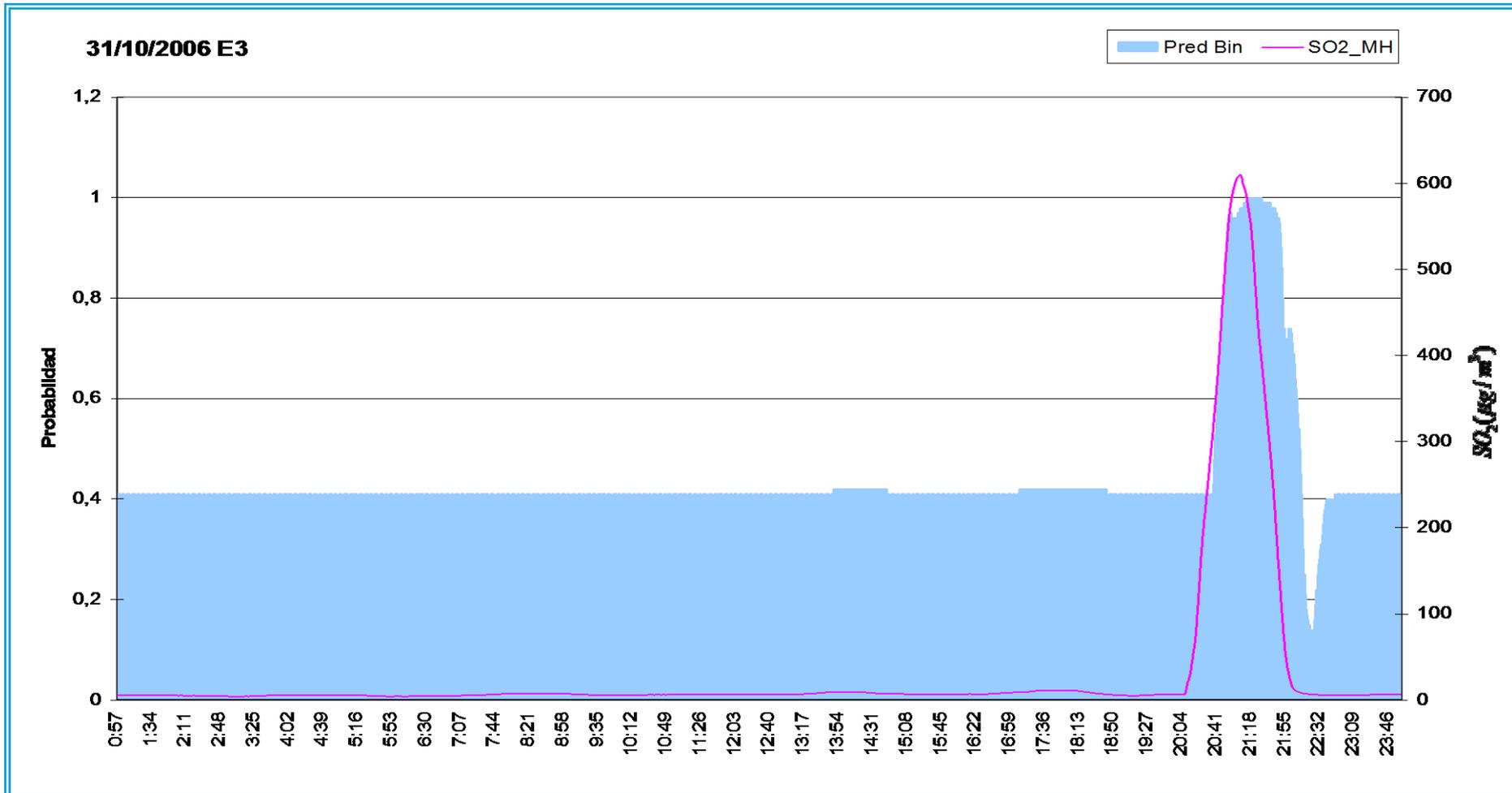
Modelos de Predicción binaria

- Sea Y una variable con respuesta binaria, y $Z=(1, Z_1, \dots, Z_p)$ el vector de covariables asociado.
- Se denota $p(Z) = P(Y = 1 | Z)$
- El *modelo G-GAM* tiene la siguiente expresión:

$$p(Z) = H(\eta_z) = H\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^p f_j(Z_j)\right)$$

donde f_j son funciones suaves desconocidas y la función link H es monótona creciente.

Modelos de Predicción binaria



Modelos de Predicción binaria

Roca-Pardiñas, J., González-Manteiga W., Febrero-Bande M., Prada-Sánchez J.M. and Cadarso-Suárez C. ***Predicting binary time series of SO₂ using generalized additive models with unknown link function.*** *Environmetrics* **2004**; 15: 729-742.

Modelos de Predicción binaria

- También se han considerado modelos GAM incluyendo términos de interacción de segundo orden

$$\eta_z = H \left(\beta_0 + \sum_{j=1}^p f_j(Z_j) + \sum_{1 \leq j < k \leq p} f_{jk}(Z_j, Z_k) \right)$$

donde f_j son funciones unidimensionales desconocidas, las

f_{jk} son un conjunto de funciones bidimensionales desconocidas y H es la función link monótona y conocida.

- Se ha visto que el GAM con interacciones detecta el inicio de los episodios con mayor antelación de lo que lo hace el GAM puro.

Modelos de Predicción binaria

Roca-Pardiñas, J., Cadarso-Suárez C. and González-Manteiga W. ***Testing for interactions in generalized additive models: Application to SO2 pollution data.*** *Statistics and Computing* 2005; 15: 289-299.

Modelos de Redes Neuronales

- ❑ La entrada en vigor de la Directiva Europea 1999/CE/30, provoca un cambio en la serie de interés, de medias bihorarias a medias horarias.

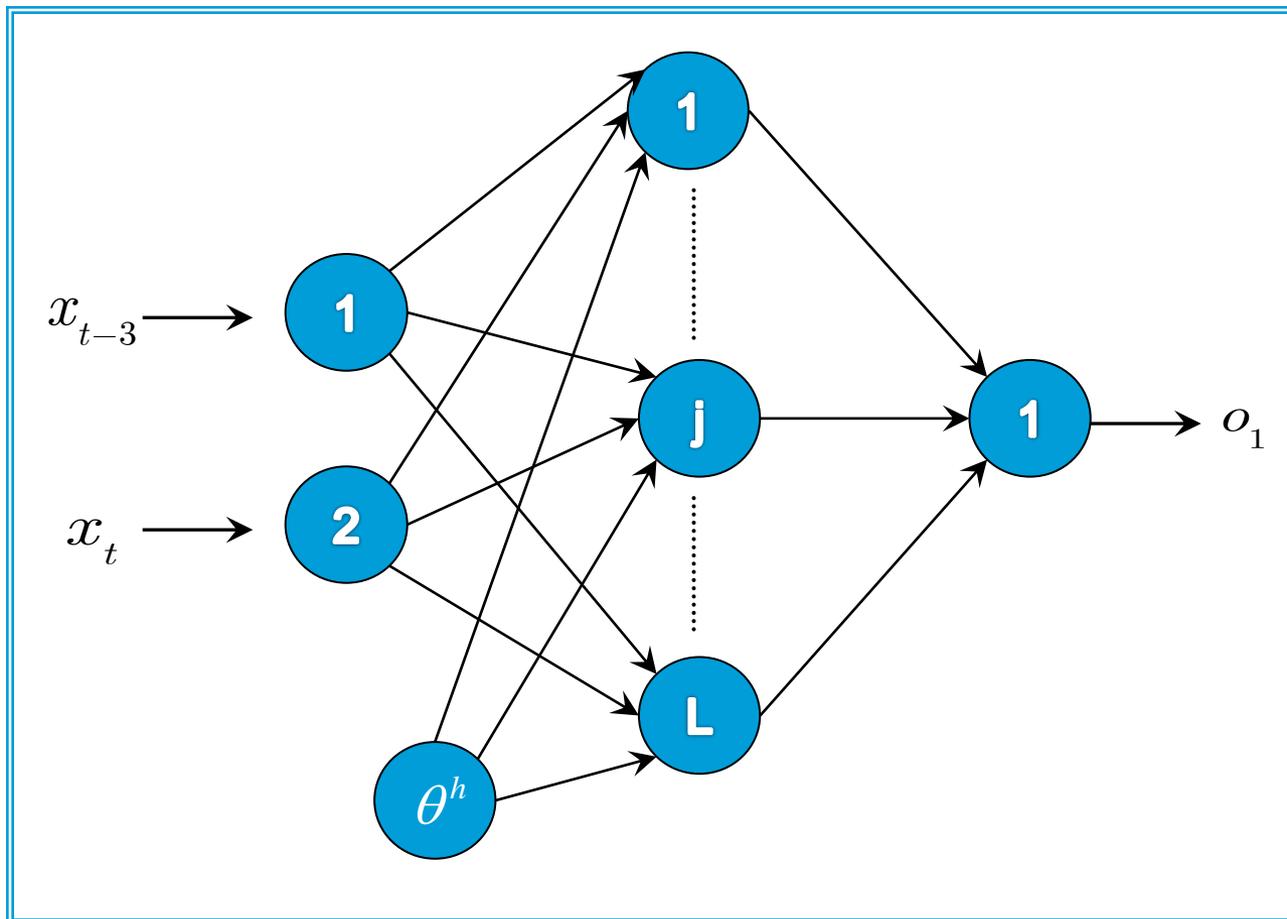
$$x_t = \frac{1}{12} \sum_{i=0}^{11} SO_2(t-i)$$

donde $SO_2(t)$ representa la concentración de SO_2 en el instante t (pentaminutal), medida en $\mu\text{g}/\text{m}^3$.

- ❑ Se adaptó el modelo semiparamétrico para trabajar con la nueva serie pero se observó un considerable aumento de la variabilidad.
- ❑ Para mejorar las predicciones se desarrollaron modelos de redes neuronales.

Modelos de Redes Neuronales

- La topología de la red diseñada es la siguiente:



Modelos de Redes Neuronales

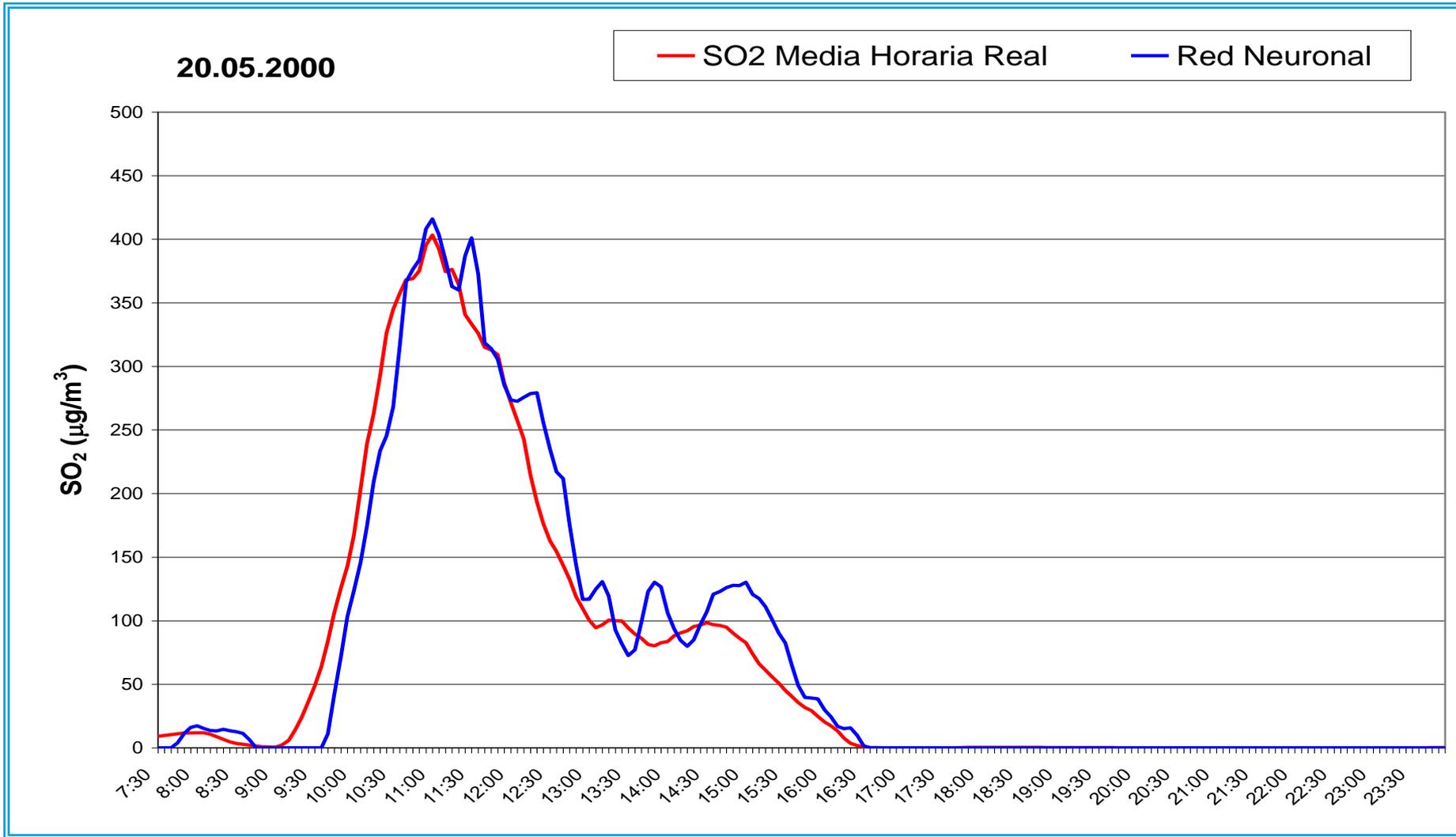
- El predictor dado por la red neuronal tiene la siguiente expresión:

$$\hat{x}_{t+6} = o_1 = \sum_{j=1}^L \omega_{j1}^o f_j^h \theta_j^h + \omega_{j1}^h x_{t-3} + \omega_{j2}^h x_t$$

donde

- $f_j^h(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$ para todos los nodos j de la capa oculta.
- Los pesos $\omega_{j1}^h, \omega_{j2}^h; j = 1, \dots, L$ y las tendencias $\theta_j^h; j = 1, \dots, L$ serán determinados durante el proceso de entrenamiento.
- El número L de nodos de la capa oculta se determinará en el entrenamiento como el valor cuya red neuronal proporcione mejores resultados, tras haber entrenado redes idénticas con distintos valores de L .

Modelos de Redes Neuronales

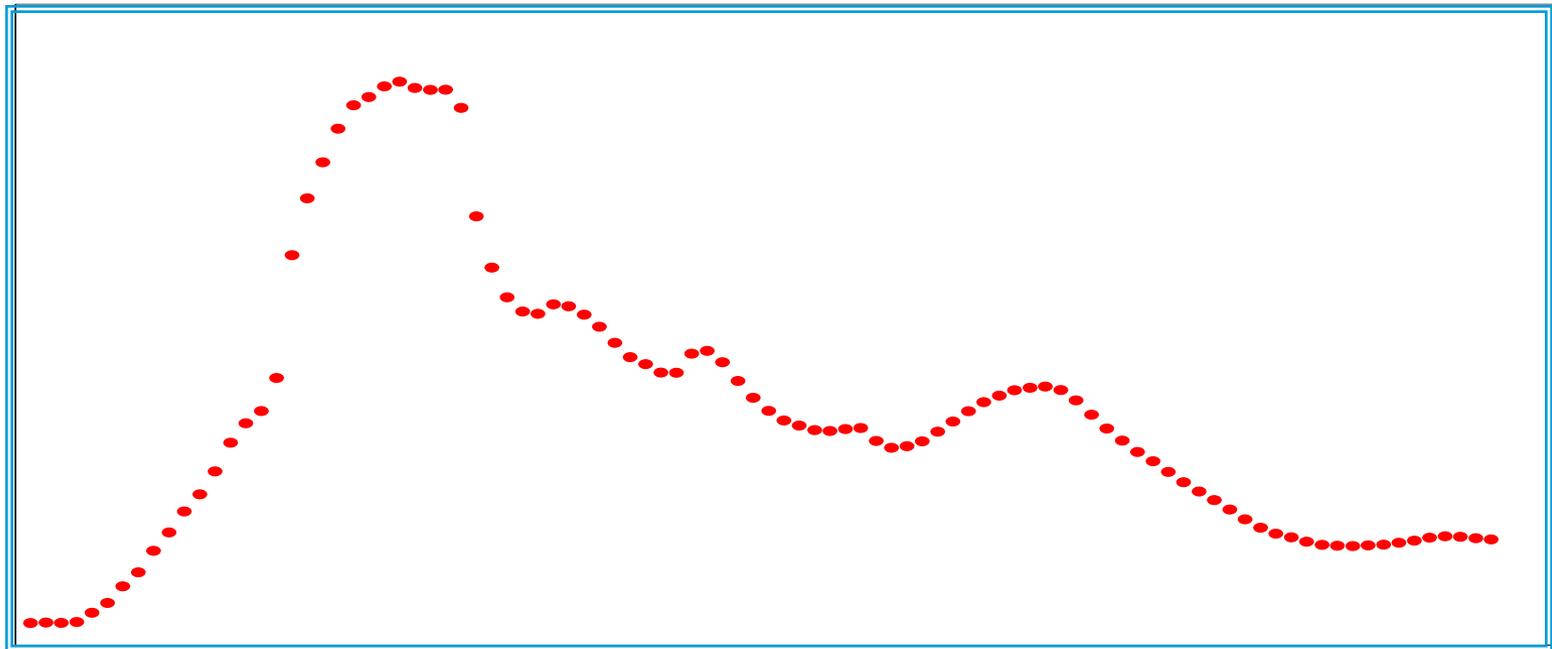


Modelos de Redes Neuronales

Fernández de Castro B.M., Prada-Sánchez J.M., González-Manteiga W., Febrero-Bande M., Bermúdez-Cela J.L. and Hernández Fernández J.J. ***Prediction of SO₂ levels using neural networks.*** Journal of the Air and Waste Management Association **2003**; 53: 532-538.

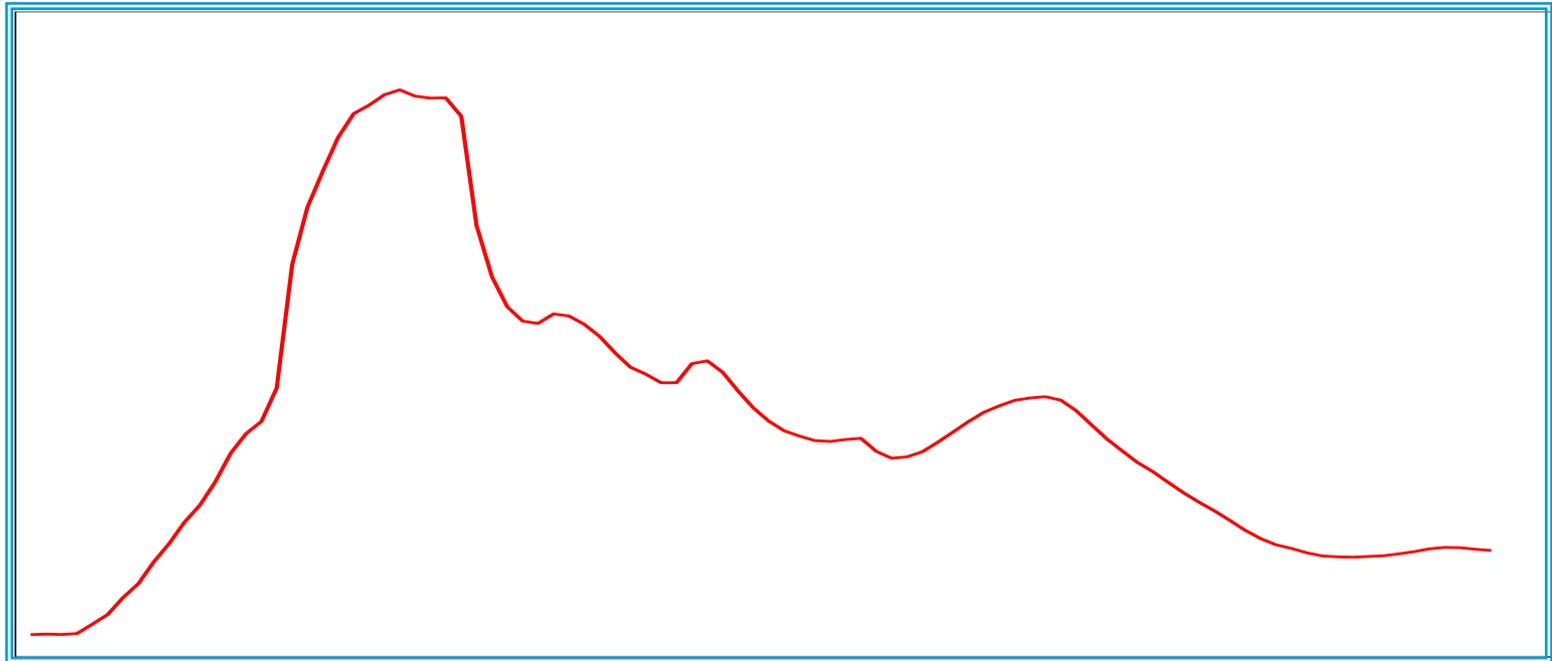
Modelos Funcionales

□ Idea central:



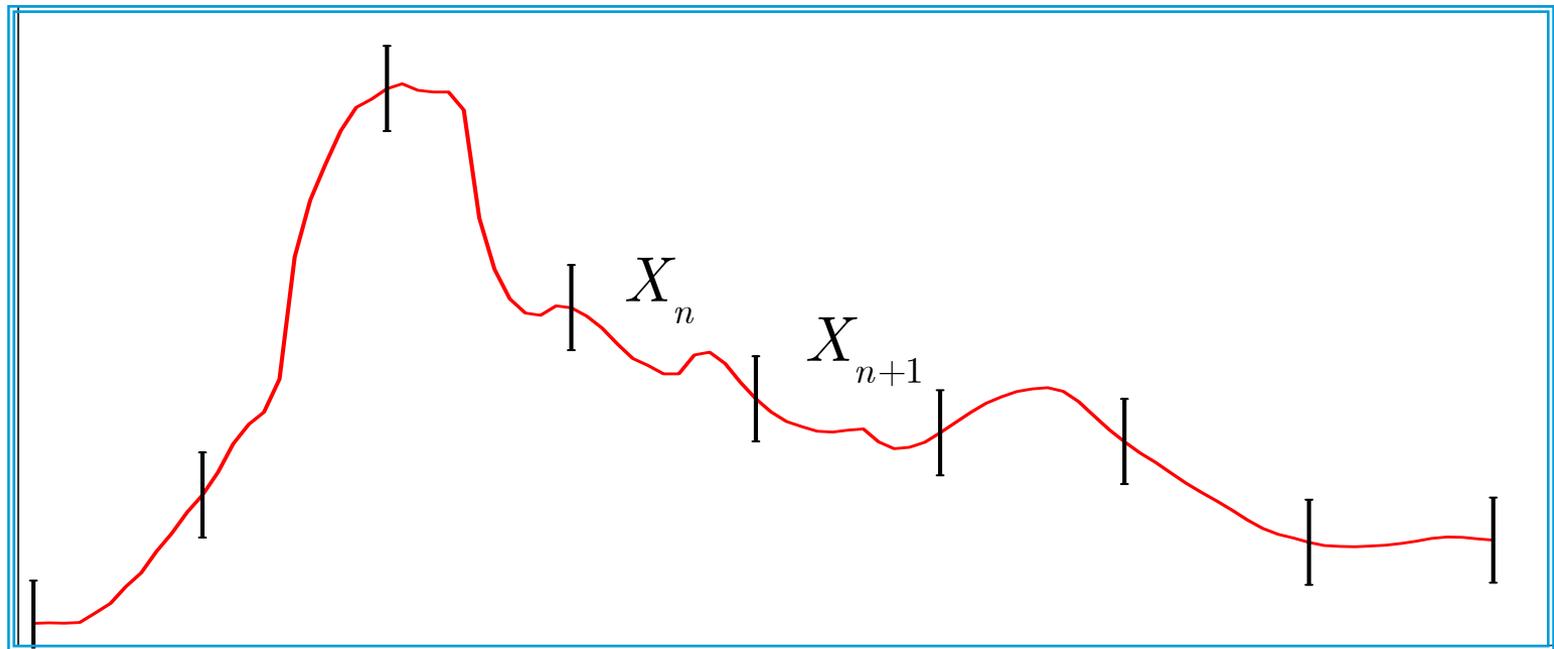
Modelos Funcionales

- Idea central:



Modelos Funcionales

□ Idea central:



Modelos Funcionales

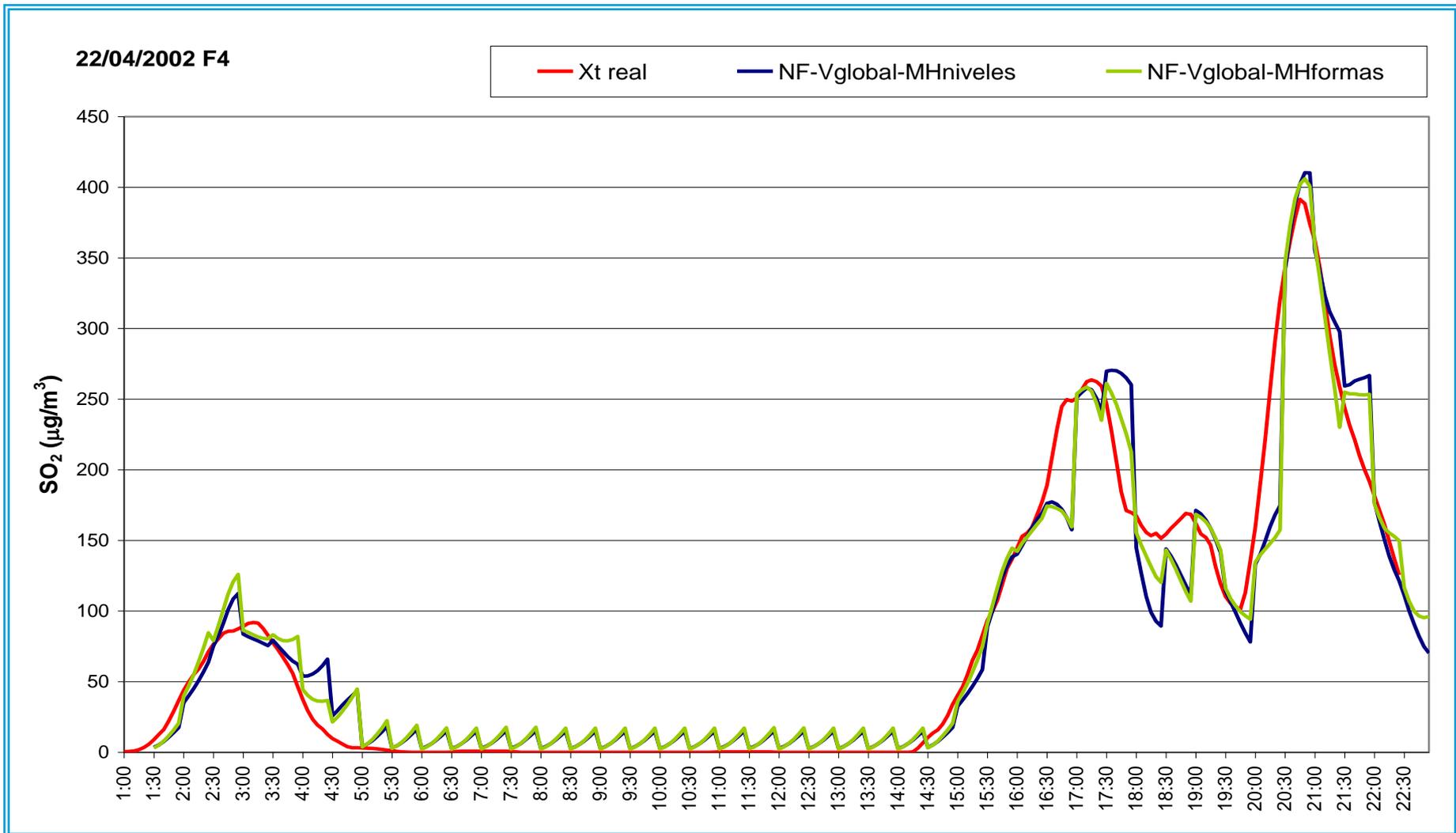
- ❑ Se considera la serie de datos como observaciones de un proceso estocástico en tiempo continuo que modeliza los niveles medios horarios de SO_2 .
- ❑ Se consideran porciones de dicho proceso estocástico que representan media hora.
- ❑ En consecuencia se consideran variables aleatorias que toman valores en

$$H = L^2 [0, 30]$$

de la forma:

$$X_n = x_{30n} + u$$

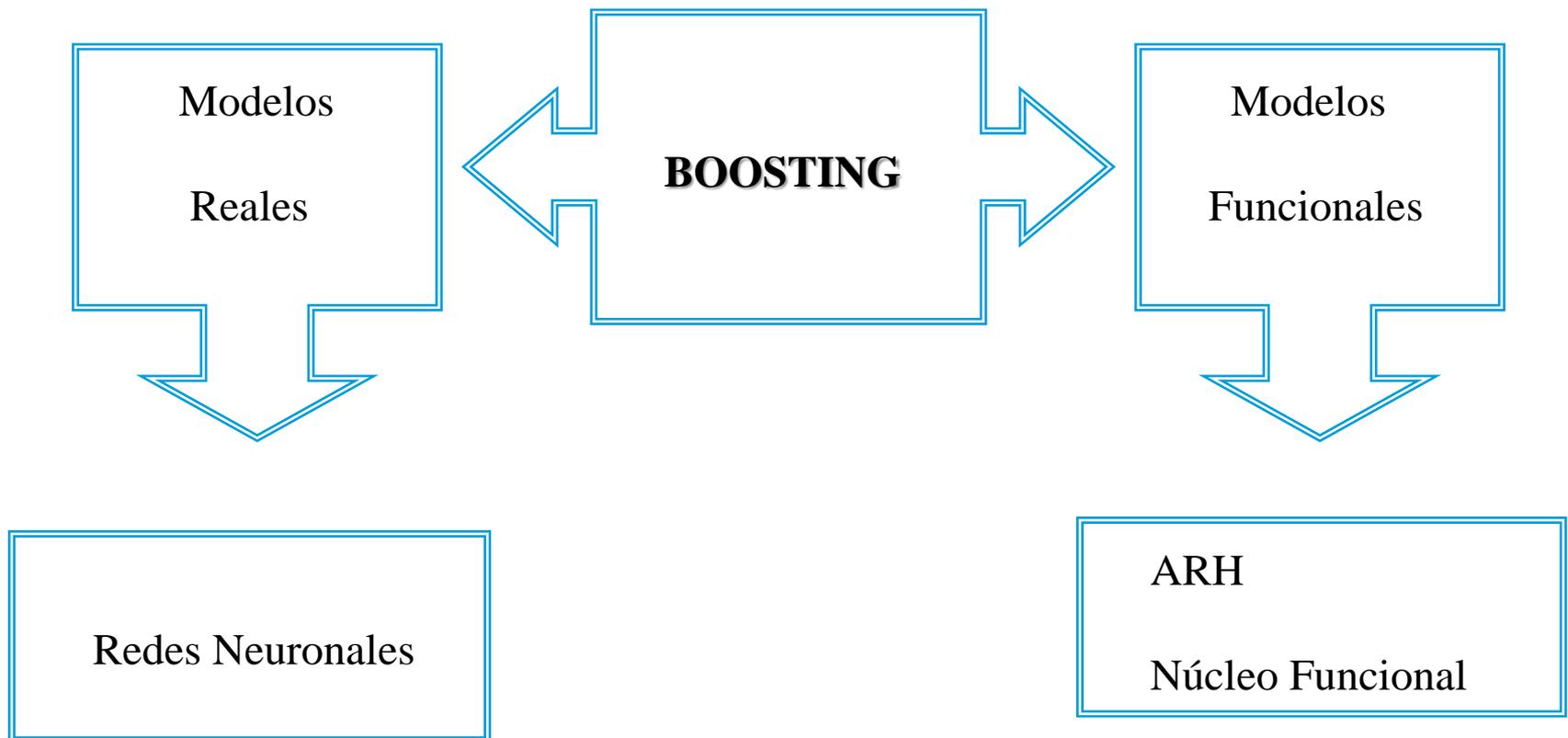
Modelos Funcionales



Modelos Funcionales

Fernández de Castro B.M., Guillas S. and González-Manteiga W. *Functional Samples and Bootstrap for Predicting Sulfur Dioxide Levels*. Technometrics **2005**. 47: 212-222.

Boosting



Boosting

Fernández de Castro B.M. and González-Manteiga W.
Boosting for real and functional samples: an application to an environmental problem.
Stochastic Environmental Research and Risk Assessment **2008**. 22: 27-37.

Nueva problemática

- ❑ Cercano al emplazamiento de la Central Térmica de As Pontes se ha construido una nueva Central de Ciclo Combinado de gas natural.



Descripción general

- ❑ Consiste en un grupo generador de electricidad formado por dos turbinas de gas y una turbina de vapor (dos focos emisores).
- ❑ Está diseñado para utilizar gasóleo como combustible de emergencia.
- ❑ Como cualquier instalación de generación de energía por combustión debe disponer de un Sistema de Control de las Emisiones que ha sido integrado en el Sistema de Seguimiento y Control de la Calidad Atmosférica .

Nuevos retos

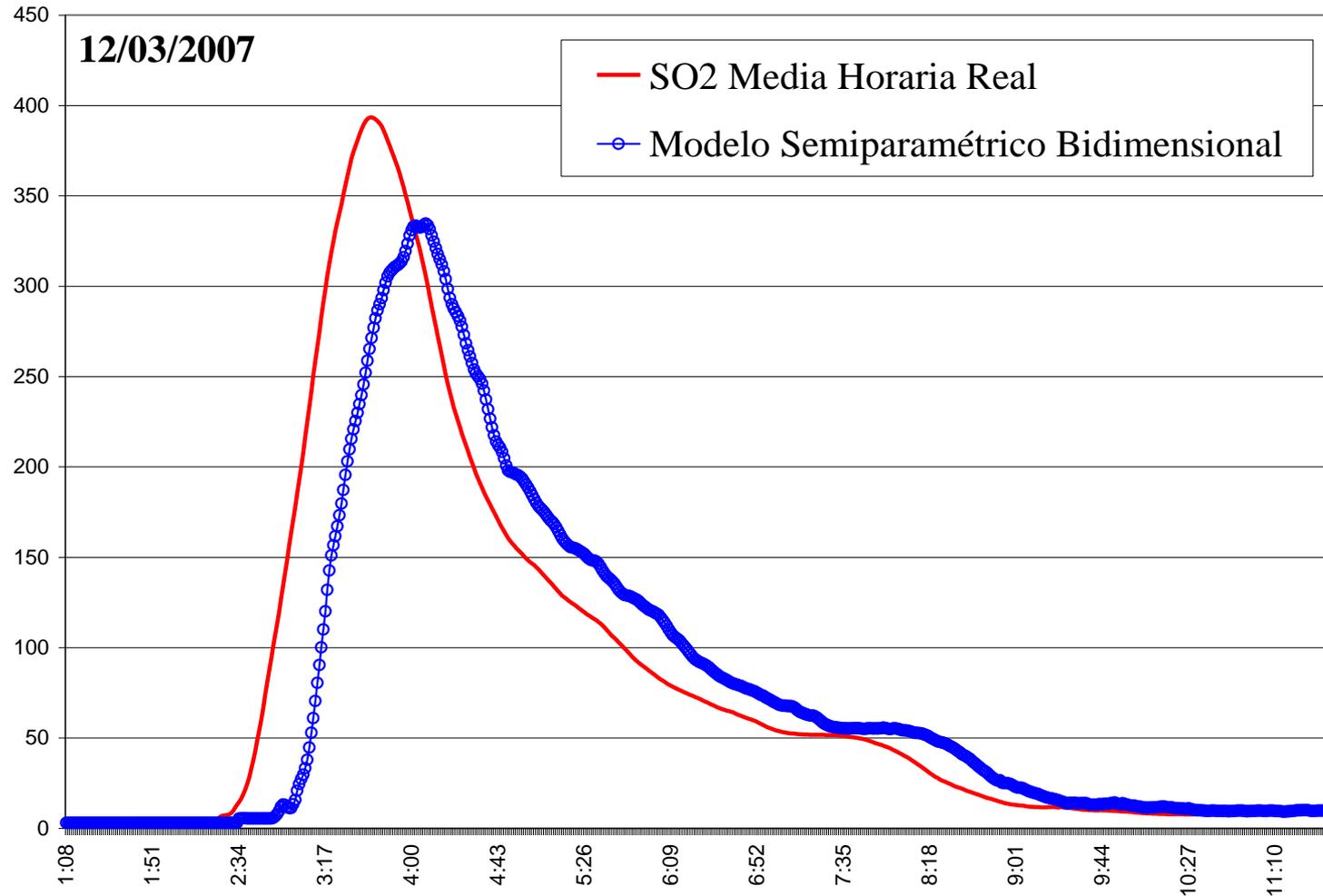
En el período 2007-2008 las emisiones se han visto afectadas por dos actuaciones clave:

- ❑ La Central Térmica actual consume únicamente carbón de importación. → *Disminución de las emisiones de SO_2 (alrededor del 95%)*
- ❑ La nueva Central de Ciclo Combinado entró en funcionamiento. → *Necesidad de predecir las emisiones de NO_x*

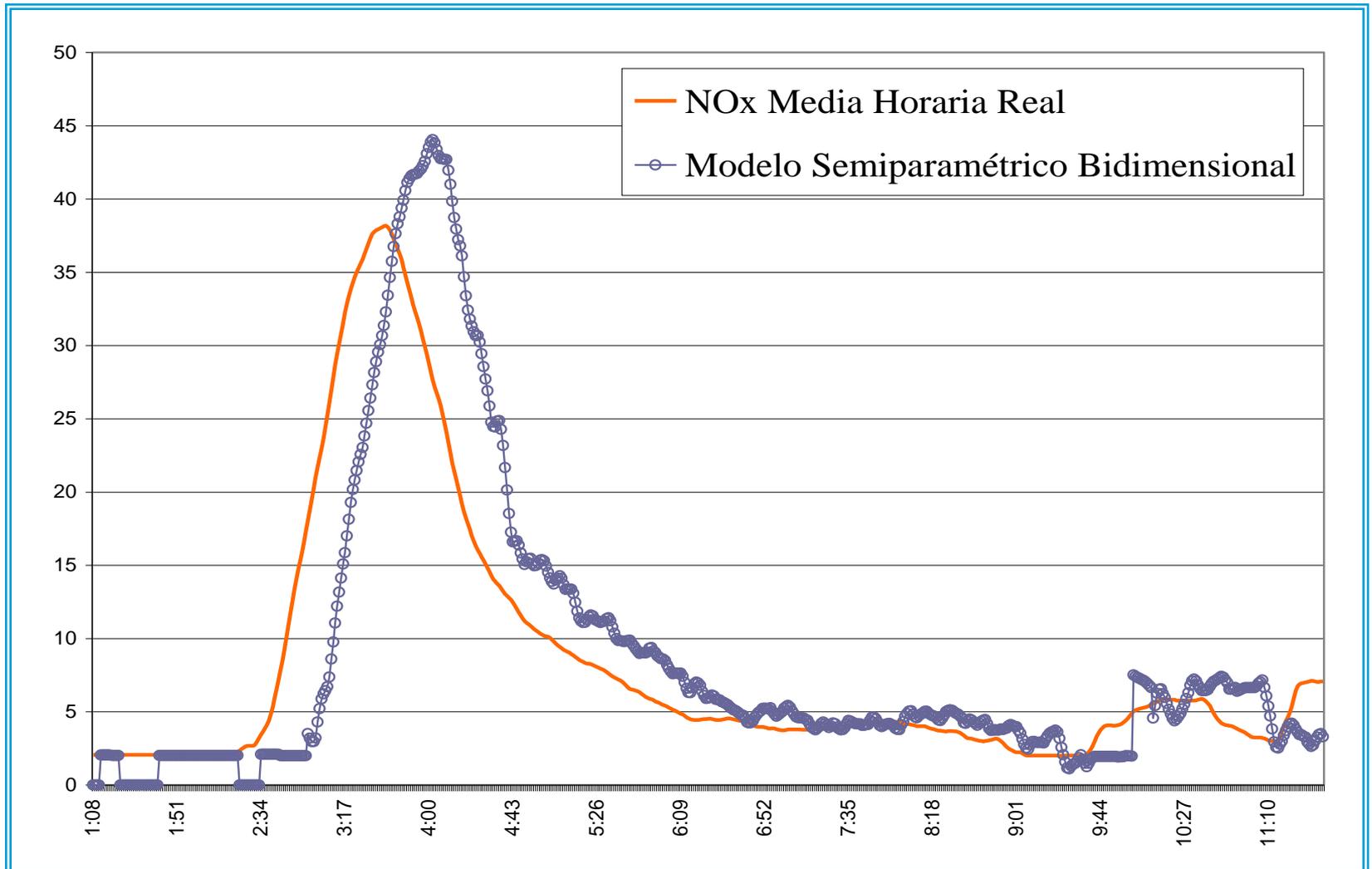
Los datos

- ❑ Actualmente, se reciben datos con frecuencia minutal y pentaminutal en tiempo real.
- ❑ Se va a considerar la media horaria arrastrada, tanto de los valores de SO_2 como de NO_x , para obtener las predicciones de valores futuros.
- ❑ La serie de valores medios horarios de SO_2 tiene un comportamiento muy característico:
 - ❑ Toma valores próximos a cero durante largos períodos de tiempo.
 - ❑ En ocasiones crece de manera brusca y repentina (episodios).
 - ❑ Estos episodios están muy espaciados en el tiempo.
- ❑ La serie del NO_x tiene un comportamiento similar pero a menor escala.

Aplicación al problema medioambiental



Aplicación al problema medioambiental



Bibliografía adicional

- Engle R.F. and Granger C.W.J. *Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing*. *Econometrica* 1987; 55: 251-276.
- Granger C.W.J. *Co-Integrated Variables and Error-Correcting Models*. Unpublished University of California, San Diego 1983; Discussion Paper: 83-13.
- Hastie T.J., Tibshirani R.J. and Friedman J. *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer-Verlag, New York 2001.
- Johansen S. *Statistical Analysis of Cointegration Vectors*. *Journal of Economic Dynamics and Control* 1988; 12: 231-254.

