Cómo pasó Alicia al otro lado del espejo?

- Reflexiones de un matemático sobre el espacio

ALICIA EN MI CIUDAD

Minerva Salado

ALICIA EN MI CIUDAD

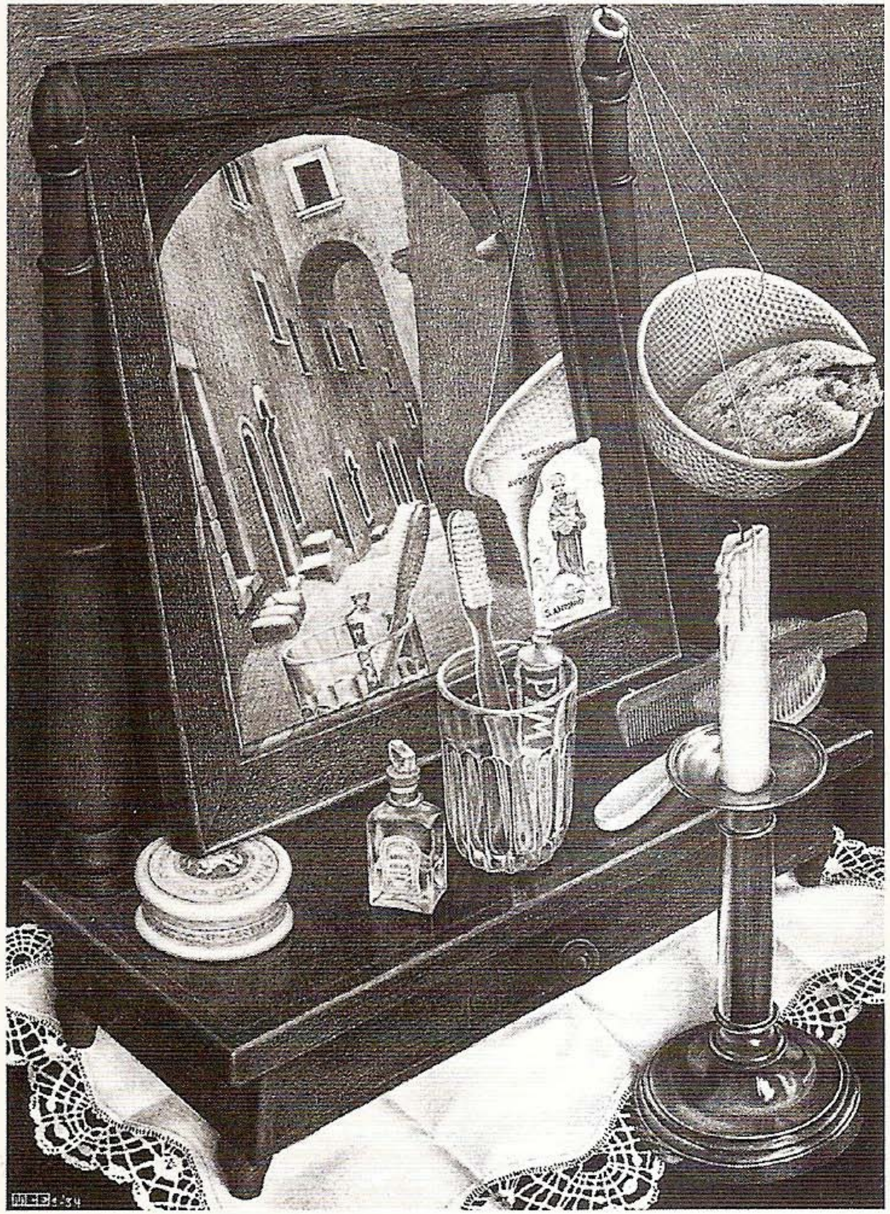
- Los espejos ocultos están frente al Paseo del Prado
- para que tú los atravieses
- Del otro lado esperan todas las ilusiones
- las piedras en el centro de otro orden
- los rastros y los pasos

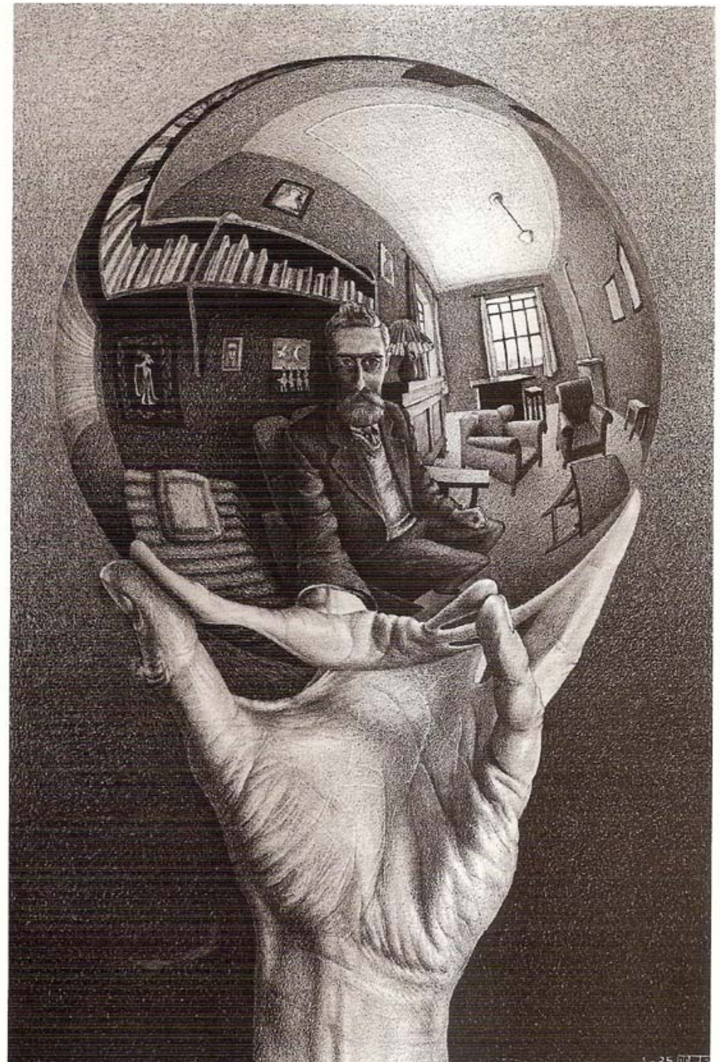
- Los espejos descubren los caminos
- sin saber demasiado hacia donde
- penetran en las estridencias de los sueños
- fantásticos como nunca antes
- Ilusorios
- reales para los que olvidaron la esperanza

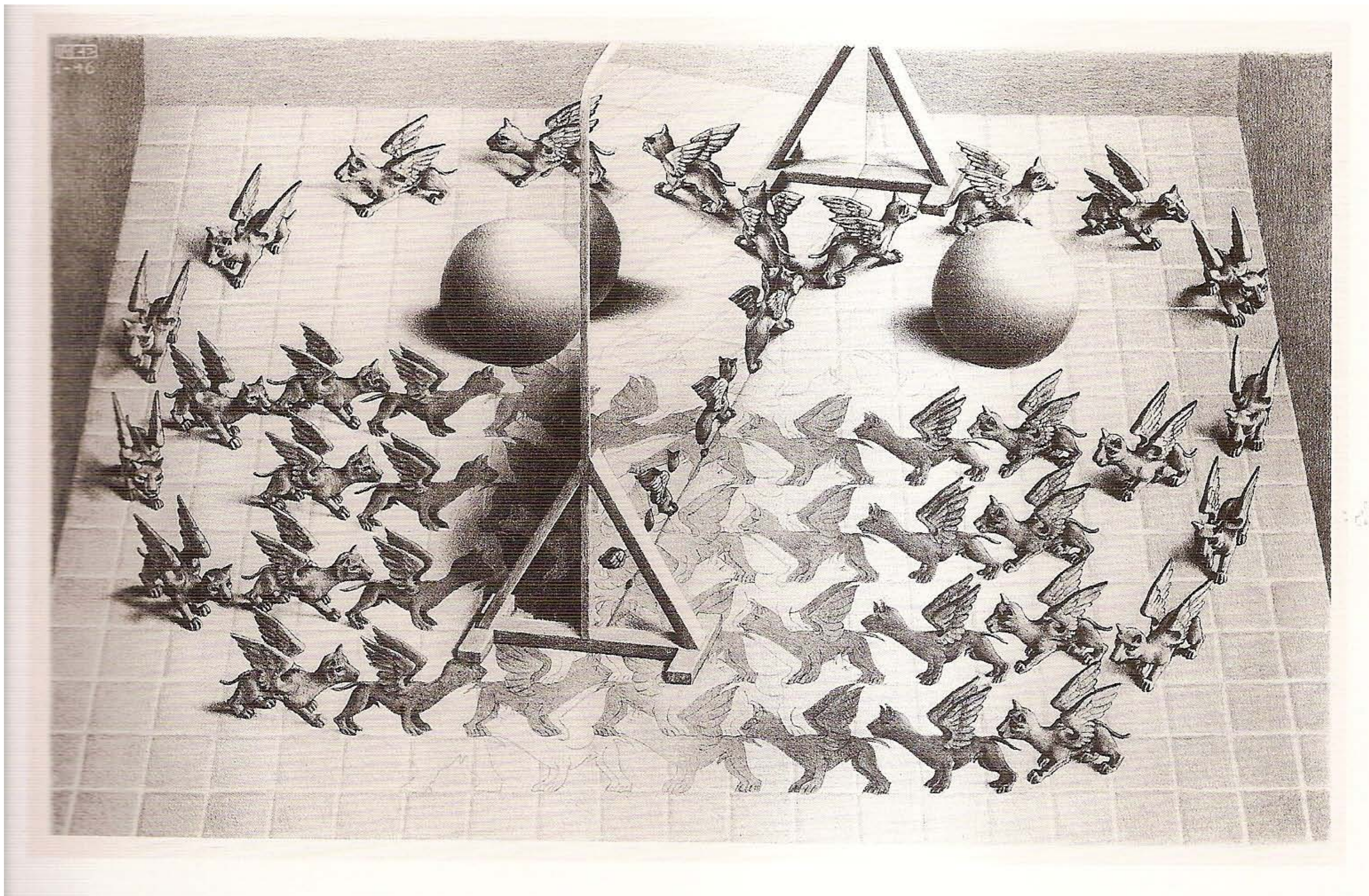
LOS ESPEJOS

- Jorge Luis Borges

- Yo que sentí el horror de los espejos
- no sólo ante el cristal impenetrable
- donde acaba y empieza, inhabitable,
- un imposible espacio de reflejos


S. ANTONIO

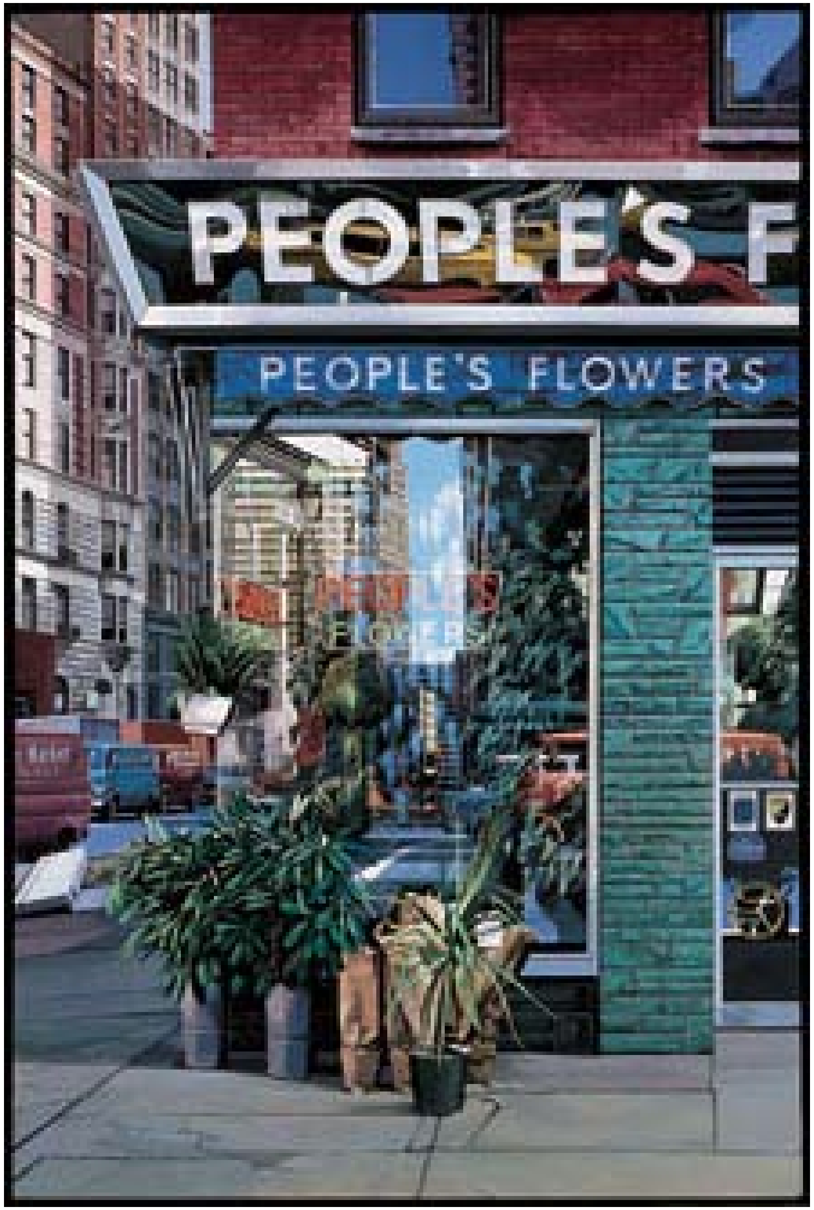

1-35


1-46

ENTRE LA REALIDAD Y LA ILUSIÓN


ST OFFICE
AT USPS.COM
DOW JONES.
ATED PRESS
WELCOME TO
19,000sf AVA
1X


R·H·MACY
TELEPHONE
TELEPHONE
TELEPHONE
DIRECTORIES

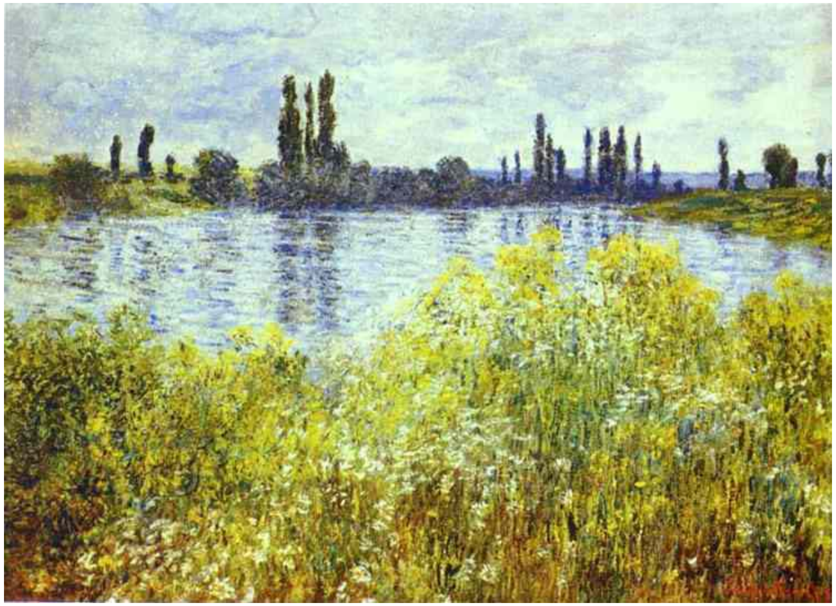

PEOPLE'S F
PEOPLE'S FLOWERS

OTROS ESPACIOS

UNA VISITA
A UNA
EXPOSICIÓN

MONET Y LA ABSTRACCIÓN

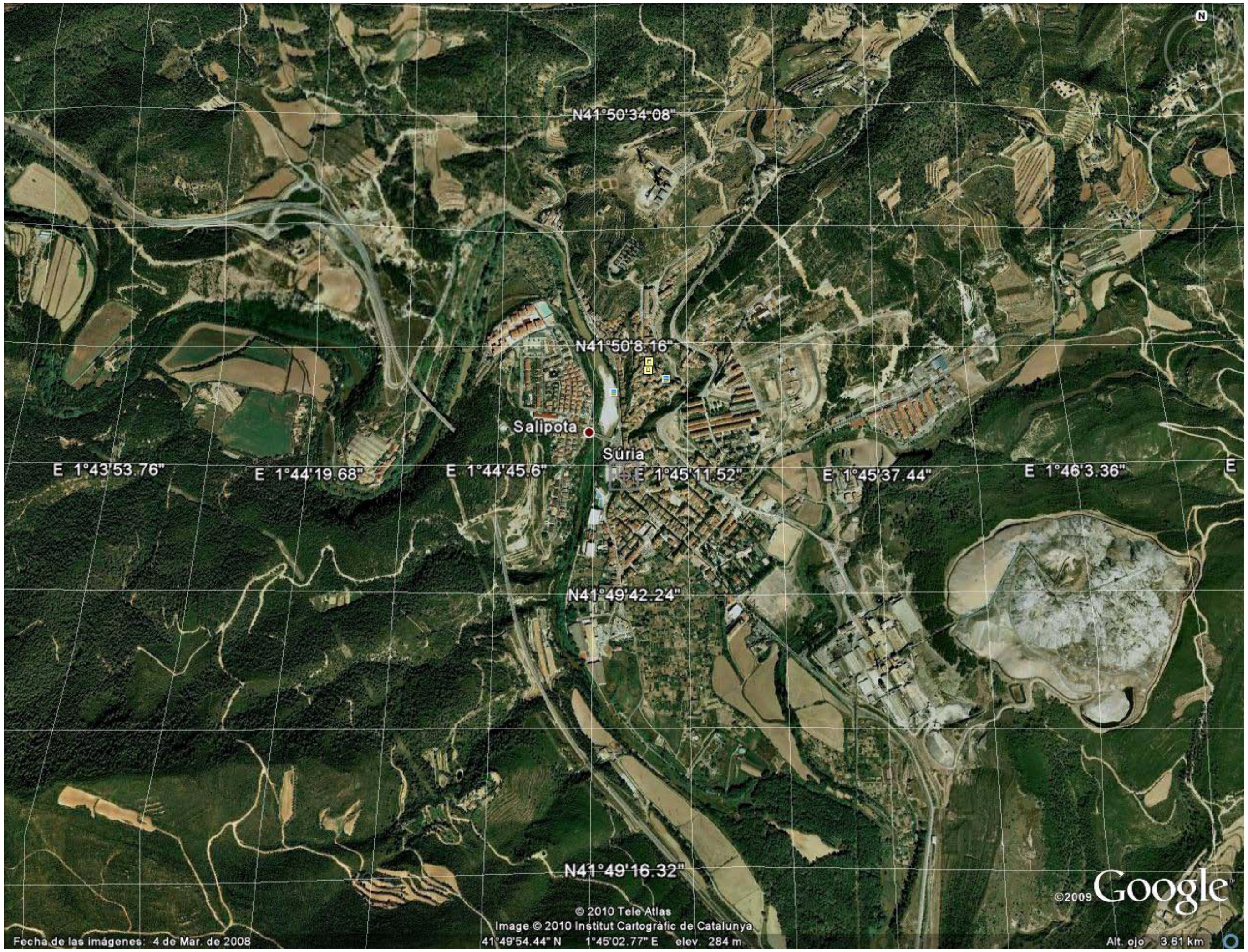
VISIÓN GLOBAL
VISIÓN LOCAL



LA ABSTRACCIÓN

DOS EJEMPLOS SENCILLOS

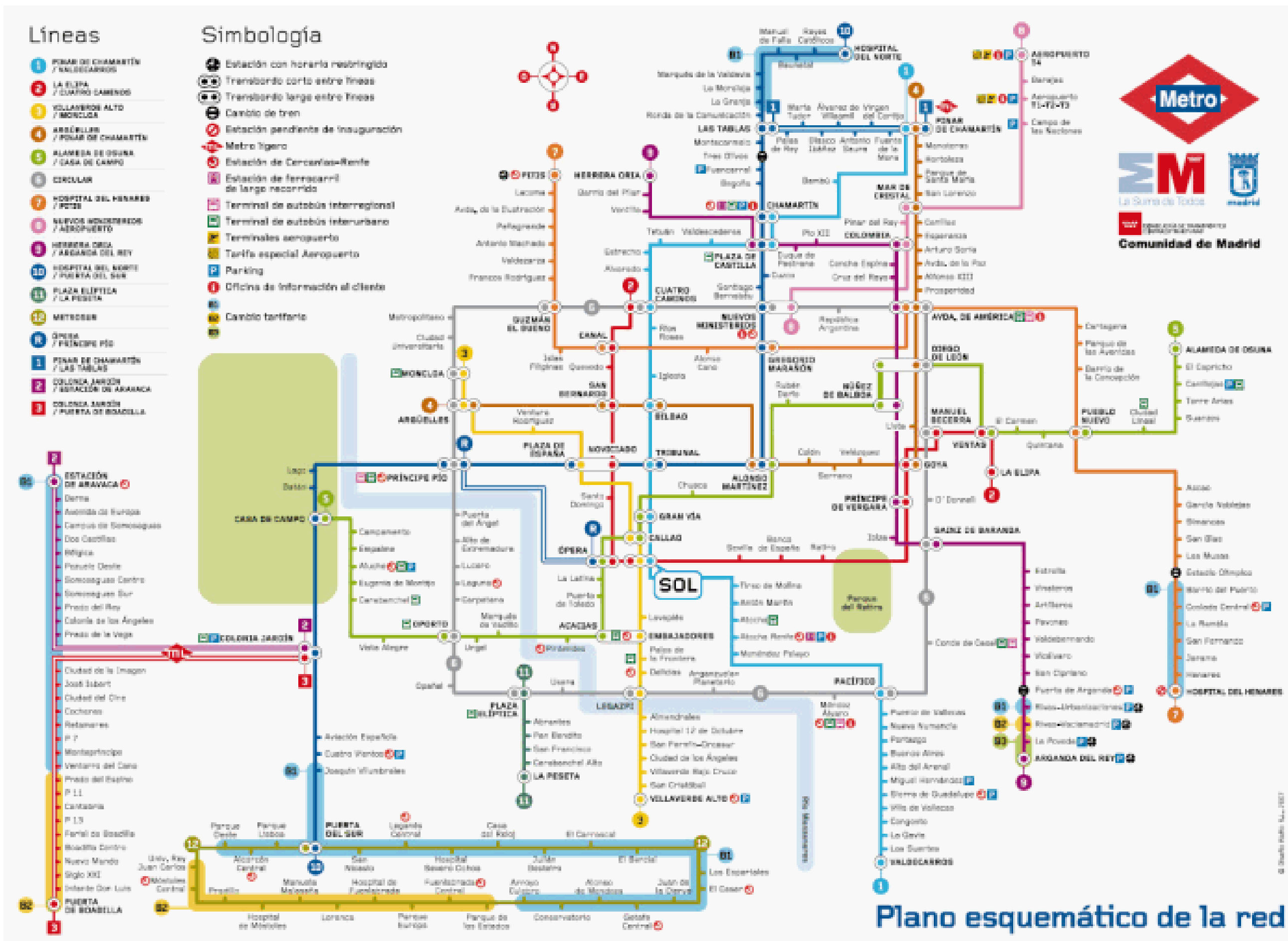
APROXIMACIONES A UN MISMO ESPACIO


N41°50'34.08"
N41°50'8.16"
Salipota
Súria
E 1°43'53.76"
E 1°44'19.68"
E 1°44'45.6"
E 1°45'11.52"
E 1°45'37.44"
E 1°46'3.36"
E
N41°49'42.24"
N41°49'16.32"
© 2010 Tele Atlas
Image © 2010 Institut Cartogràfic de Catalunya
©2009 Google
Fecha de las imágenes: 4 de Mar. de 2008
41°49'54.44" N 1°45'02.77" E elev. 284 m
Alt. ojo 3.61 km


Súria
N41°49'42.24"
E 1°44'45.6"
E 1°45'11.52"
©2009 Google
© 2010 Tele Atlas
Image © 2010 Institut Cartogràfic de Catalunya
Fecha de las imágenes: 4 de Mar. de 2008
41°49'33.69" N 1°44'56.80" E elev. 288 m
Alt. ojo 1.35 km

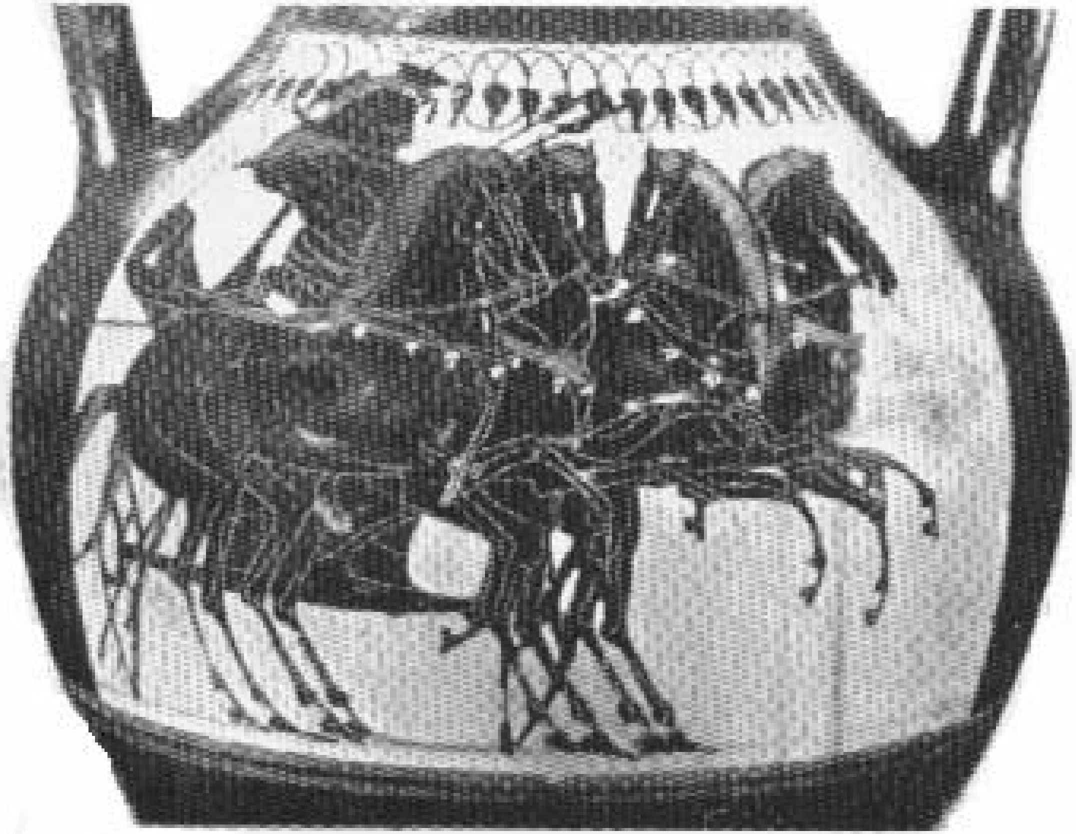

E 1°44'45.6"
©2010 Tele Atlas
Image © 2010 Institut Cartogràfic de Catalunya
©2009 Google
Fecha de las imágenes: 4 de Mar. de 2008
41°49'22.93" N 1°44'45.75" E elev. 400 m
Alt. ojo 615 m

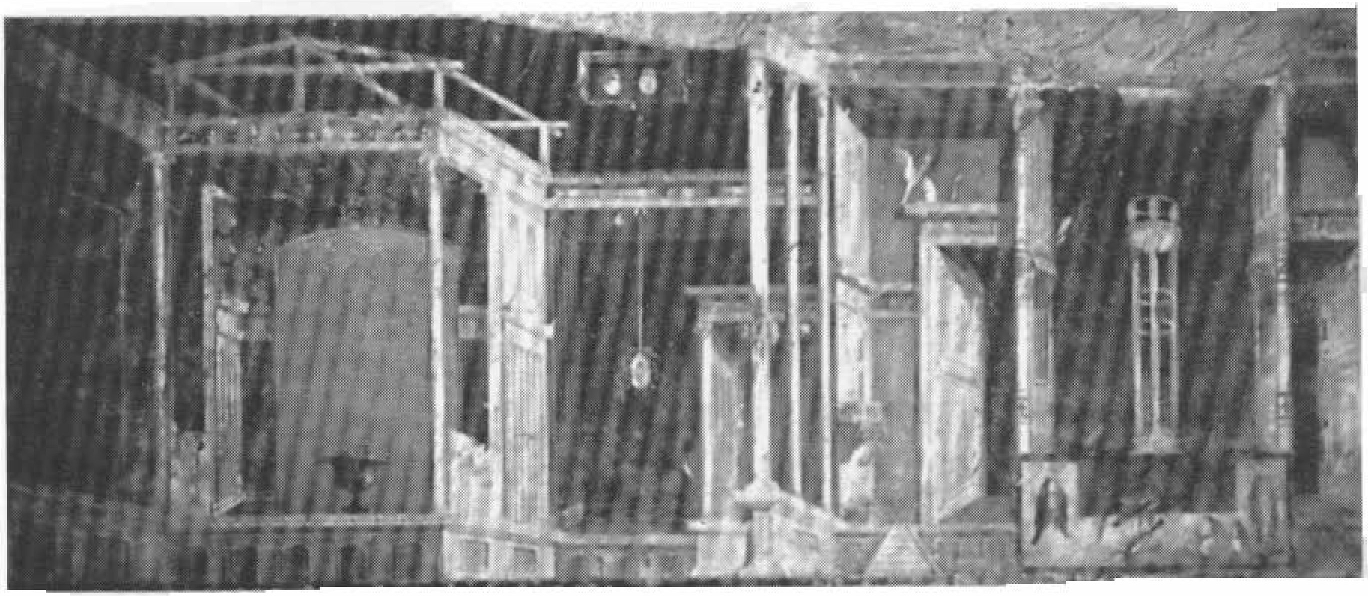
UNA VISITA "LOCAL" A MADRID

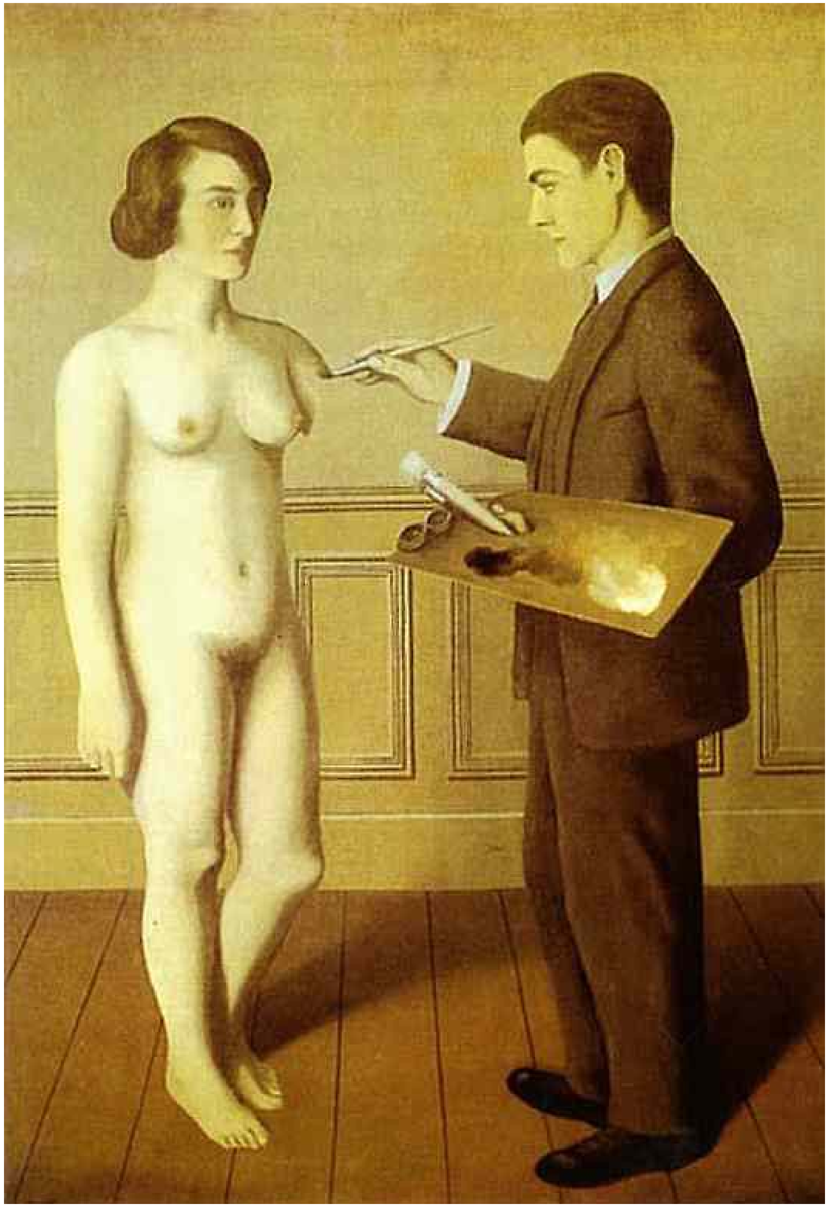


UNA REPERESENTACIÓN DEL ESPACIO

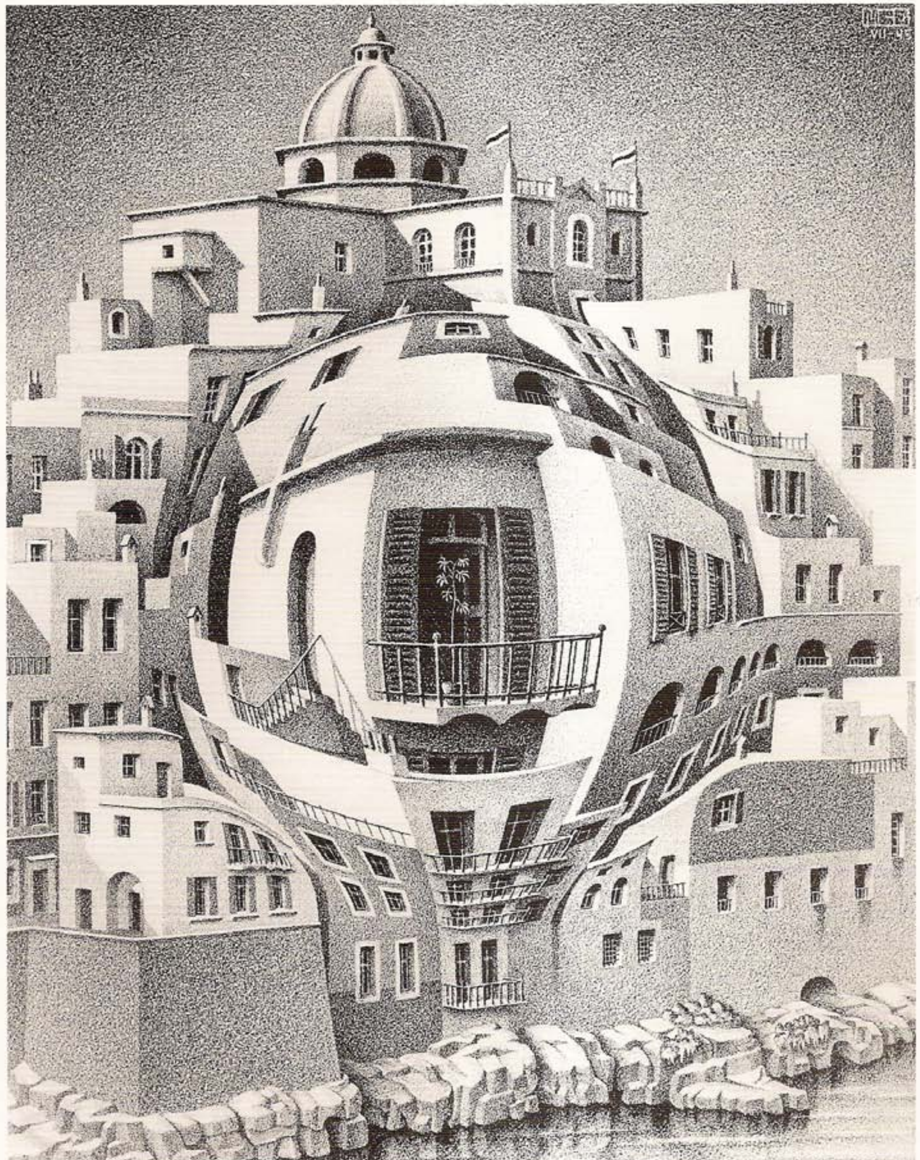
EL ESPACIO PICTÓRICO

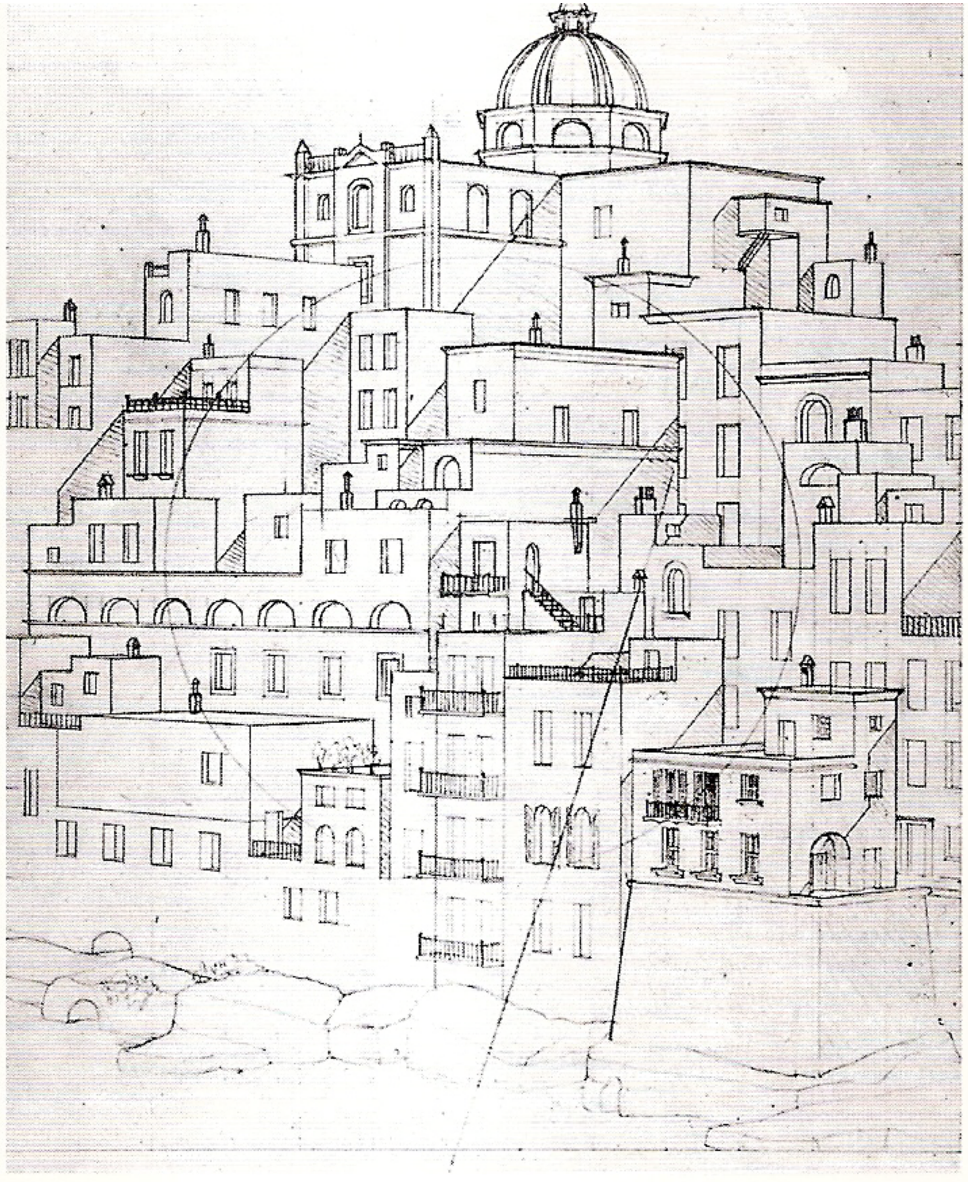


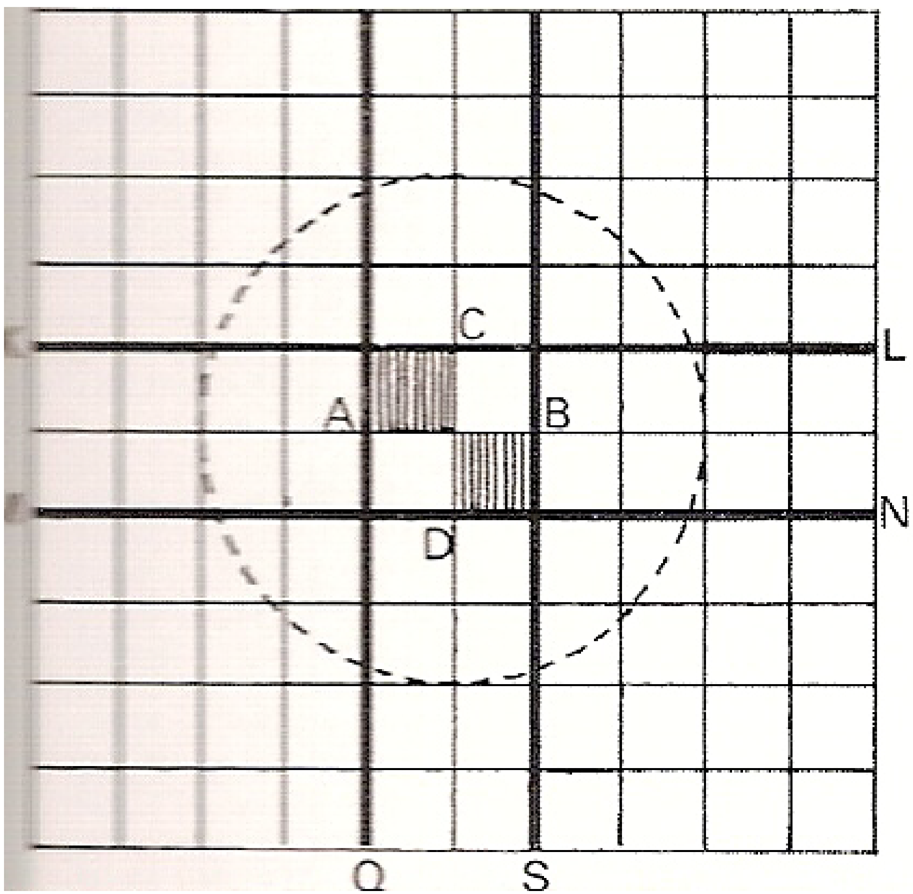


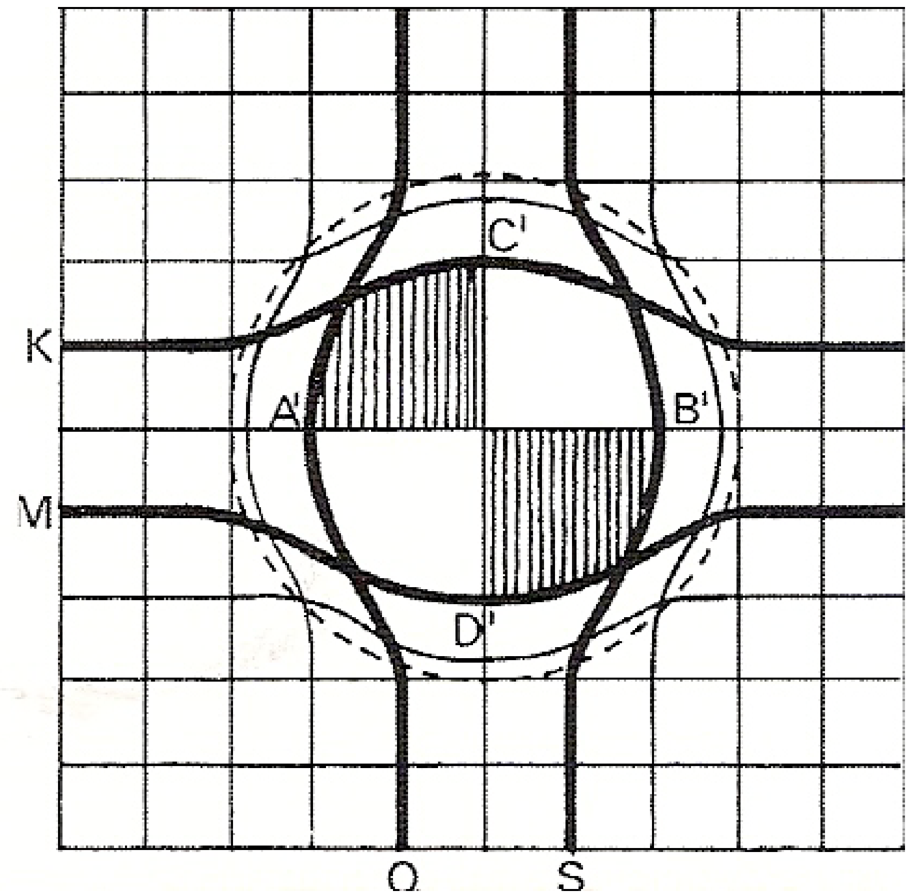


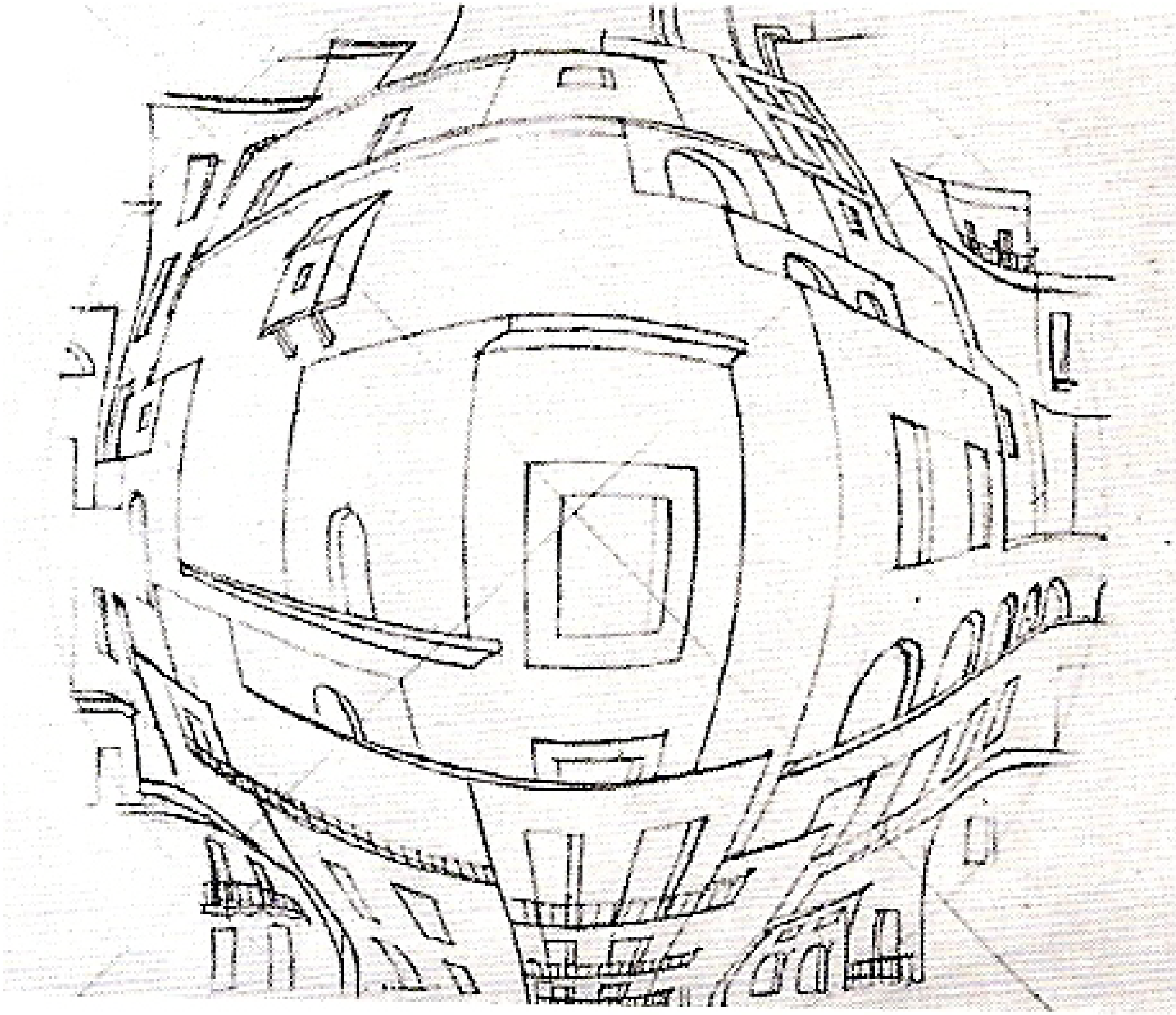
Queue
aronde
V=x⁵/5
V=x⁵/5+ux³/3
+vx²/2+wx






C
L
A
B
N
D
Q
S


C'
K
A'
B'
M
D'
Q
S



¿DEBE SER TRIDIMENSIONAL EL ESPACIO?

HENRY POINCARÉ
1912

- *De todos los teoremas del “Analisis Situs” el más importante es el que expresa que el espacio tiene tres dimensiones.*

KANT (1747)

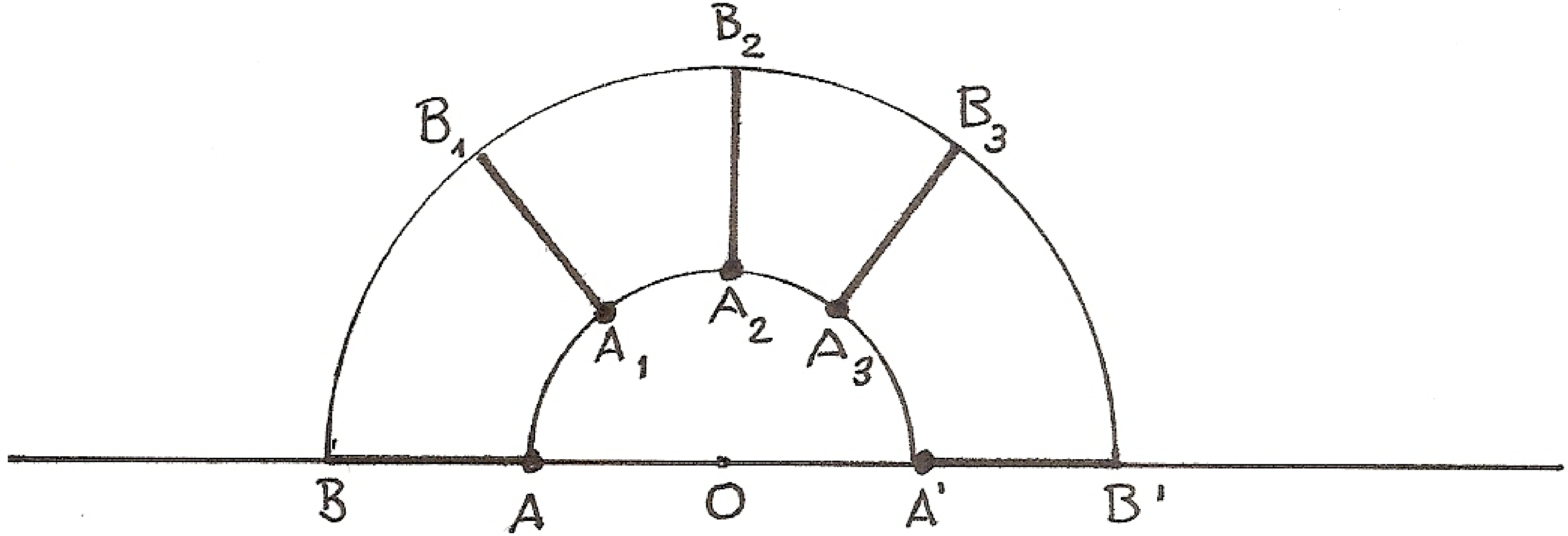
Reflexiones sobre la verdadera naturaleza de las cosas

- *¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?*
- *Si Dios hubiera decidido crear un mundo en el que dichas fuerzas variaran conforme a una proporcionalidad inversa al **cubo** de la distancia se hubiera hecho necesario un espacio de cuatro dimensiones*

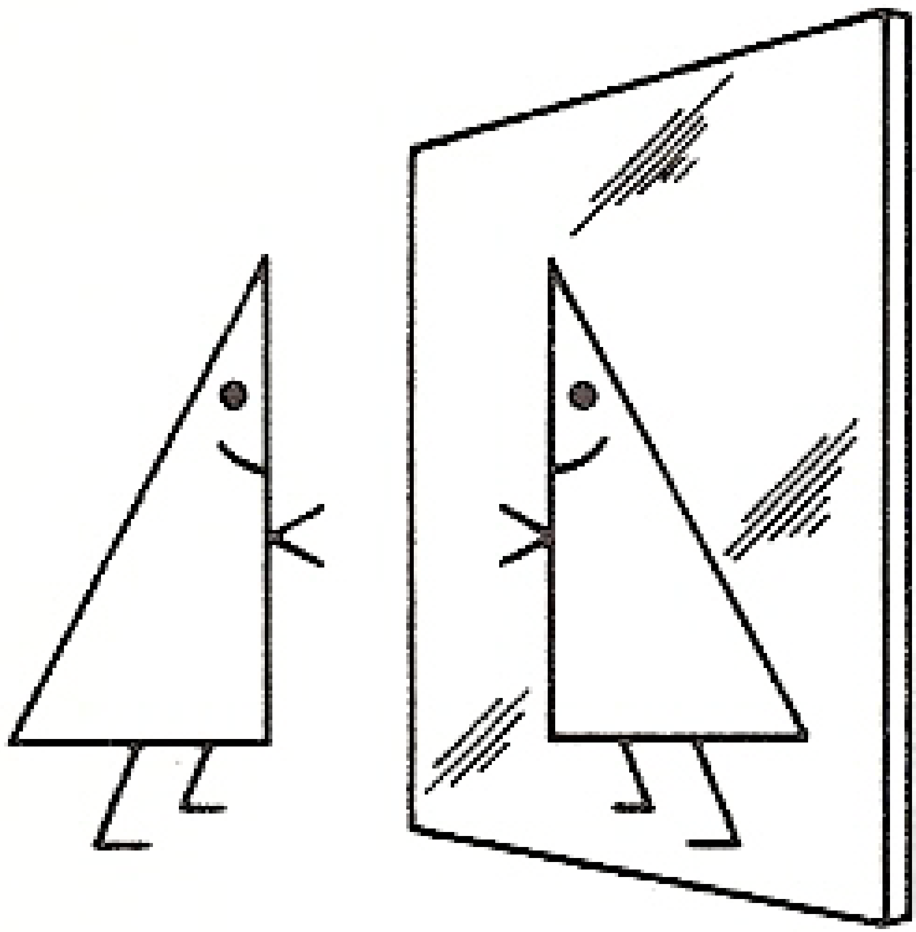
- *“Una ciencia con estas posibles clases de espacios* (con más de tres dimensiones) *sería, sin duda, la mayor empresa que una mente limitada podría abordar en el campo de la Geometría*”

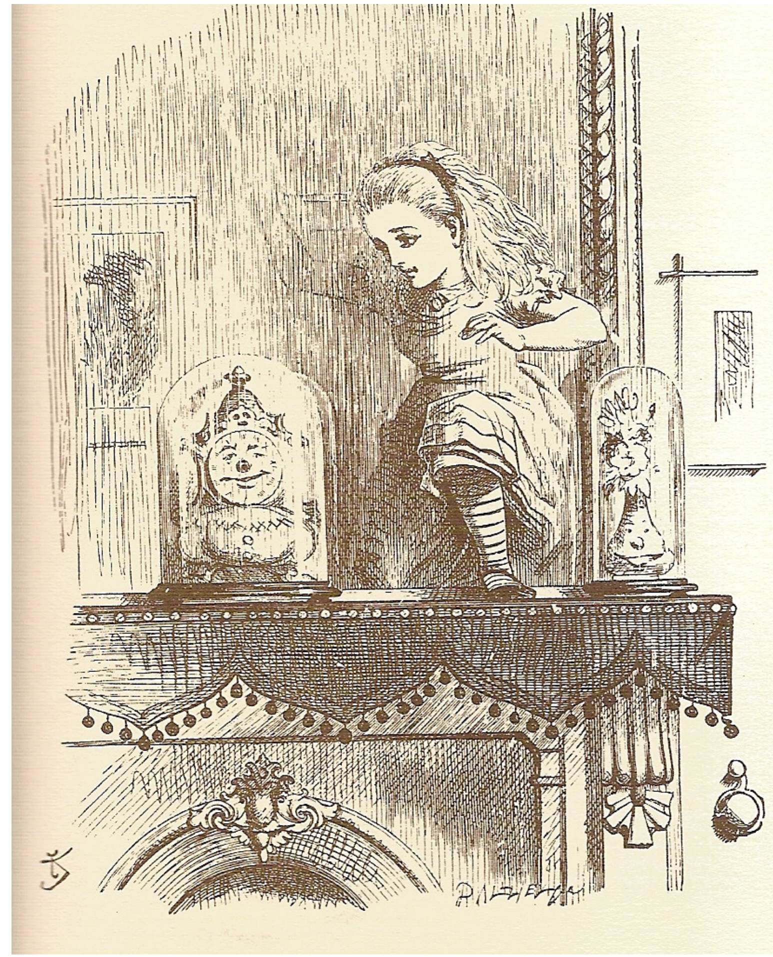
- Como la ley de la gravedad imponía su criterio, el filósofo de Königsberg se mantuvo firme en su apreciación de que el espacio debía tener tres dimensiones y que la única geometría posible en el mismo era la de los *Elementos* de *Euclides*.

- Durante el mismo siglo XVIII los matemáticos habían considerado ya la posibilidad de una cuarta dimensión al observar que un objeto asimétrico podría ser invertido, desde un punto de vista teórico, dentro de un espacio de dimensión superior. Unos cien años más tarde, en 1872, *Lewis Carroll* especuló sobre esta idea en su obra *“A través del espejo”*

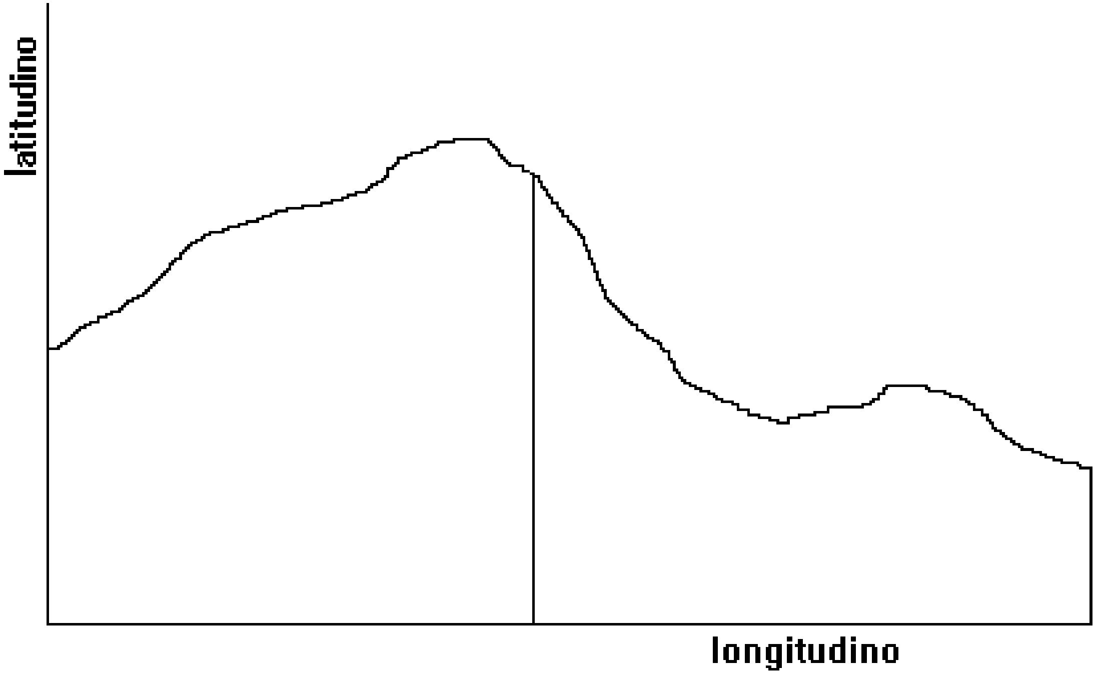


B2
B1
B3
A2
A1
A3
B
A
O
A'
B'





NICOLÁS DE ORESME
1323-1382



- *Oresme* extiende su estudio a figuras de más dimensiones. Lo dicho sobre cualidades lineales, que dan lugar a representaciones mediante figuras planas, puede extenderse a cualidades superficiales. En el contexto de esas consideraciones, *Oresme* se refiere incluso a una cuarta dimensión que permitiría extender a las cualidades corporales la representación utilizada para las lineales y superficiales. Advierte claramente el carácter imaginario de esa dimensión, pero abre el camino a un trabajo matemático que, si bien no traduce de modo inmediato las propiedades de los cuerpos, es un instrumento útil para su estudio científico.

GAUSS

- concebía el espacio como una abstracción y, en consecuencia, la geometría no tenía por qué limitarse al espacio físico tridimensional. De hecho, se puede considerar que *Gauss* es el puente que condujo la teoría matemática de los hiperespacios desde su creación hasta su madurez, ya en la segunda mitad del siglo XIX.

Theoria Residuorum Mathematicorum 1831

- Describe la representación usual de los números complejos en el plano, pero expresa que tal representación precisa una justificación mediante un modelo geométrico. Así, los enteros complejos forman una *sucesión de sucesiones* (variedad de dimensión dos)

- Deja claro que su teoría específica de los números complejos y las variedades bidimensionales está relacionada con una teoría más general de variedades que hace referencia a los sistemas de hipernúmeros y variedades de dimensión *n*, teoría que daría lugar a una rama de la geometría abstracta.

Über die Methode der Kleinsten Quadrate 1850-51

- Justifica el uso de variedades abstractas de dimensión arbitraria como el vehículo natural para llevar a cabo sus investigaciones sobre el método de los mínimos cuadrados.
- Tales espacios producen una geometría analítica generalizada basada en *n* coordenadas, con la distancia euclídea generalizada.

Jubiläumschift 1849

- Título: *Beitrage zur Algebraischen Gleinchungen*

- Hace una importante revisión de su primer intento de demostración del teorema fundamental del álgebra

- *Presentaré la demostración en íntima relación con la geometría de la posición, ya que ello proporciona la máxima simplicidad y brillantez. Sin embargo, el verdadero contenido del argumento en su totalidad pertenece en esencia al dominio de la teoría general abstracta de la cantidad, con independencia de objetos espaciales, cuya característica es la combinación de cantidades conectadas teniendo en cuenta la continuidad; un dominio que está muy poco cultivado* y *que puede desarrollarse con un lenguaje que no esté basado en imágenes.*

- La visión de una geometría abstracta divorciada de la intuición espacial está relacionada con el deseo de Gauss de desarrollar una *Geometría Situs* y, en realidad, su actitud señala el comienzo de una nueva visión sobre esta cuestión: Para él, la Geometría, en su sentido más amplio, aparece liberada del espacio físico, ya que considera que se puede razonar sobre figuras, pero en el análisis final, éstas deben suprimirse en favor de la formulación de teorías geométricas abstractas.

- Entre los años 1840 y 1860 se publicaron gran cantidad de trabajos sobre hiperespacios y fueron muchos los matemáticos de la época que se interesaron por esta cuestión.
- La mayoría de ellos introdujeron tales espacios de dimensión superior sin más que considerar sistemas de *n* coordenadas al tiempo que investigaban la geometría métrica y proyectiva de los mismos.

-
- Quienes adoptaron una actitud filosófica ante los fundamentos de la geometría de tales espacios fueron Hermann Grassmann (1809-1877) y Bernhard Riemann (1826-1866).

- En 1844, Grassmann publicó la obra *"Die Lineale Ausdenungslehere"*
- En ella se introduce la nueva *"teoría de la extensión" .*

- *Mi teoría de la extensión constituye la base de la teoría de espacio (Geometría); es decir, es una teoría matemática pura independiente de cualquier intuición espacial, cuya principal aplicación al espacio es la Geometría.*

- *Los teoremas de la geometría tienden siempre a la generalización, pero ésta no es posible debido a su limitación a las tres dimensiones del espacio ordinario; esto es posible en la teoría de la extensión.*

- *Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos por la que un elemento generador pasa a través de un cambio continuo.*
-

- El conjunto de todos los elementos extendidos a lo largo de una dimensión es entonces un sistema de primer orden. Para originar formas de orden superior se procede a crear una forma de primer orden a partir de un elemento y, a continuación, tiene lugar un proceso de cambio continuo por el que se forma una sucesión de sistemas paralelos de primer orden; se tiene así un sistema de segundo orden.
- Mediante cambios sucesivos es posible obtener sistemas de cualquier orden finito.

- Bernhard Riemann trata la cuestión de los hiperespacios en su obra *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* escrita el año 1854 con motivo de su *Habilitationsvortrag* y que no fue publicada hasta el año 1868, después de la muerte de su autor

- En la primera sección del libro se discute el concepto de variedad n-dimensional, que trata como variedades topológicas generales. De ellas, se examinan dos aspectos fundamentales: De una parte, se analiza un método de construcción, y de otra, un método de reducción para determinar puntos de las mismas mediante coordenadas.

LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS

ELEMENTOS
Euclides

- *Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos*

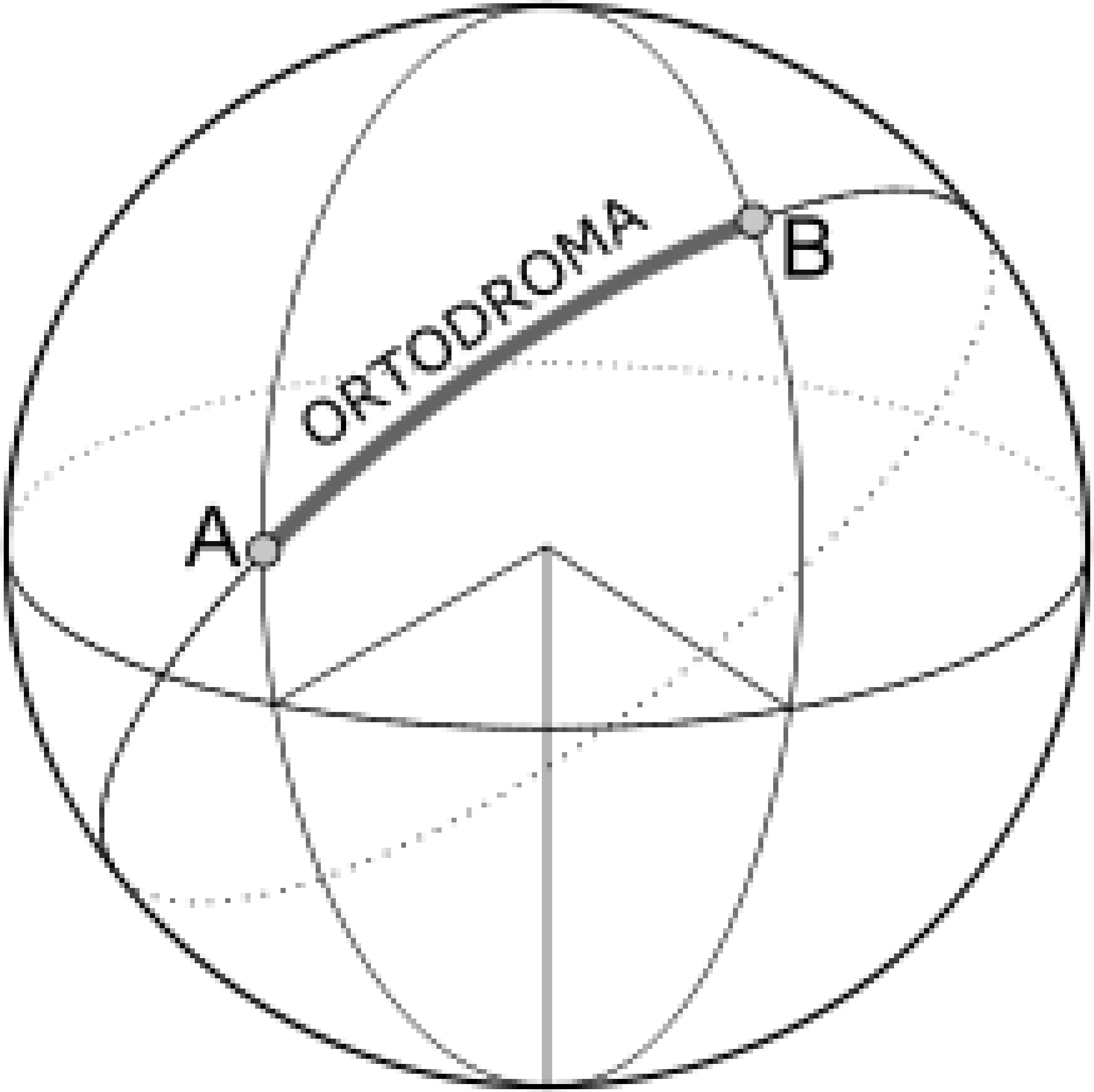
- *Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella*

- *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella*

POSTULADOS

- 1. *Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*

- *2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.*

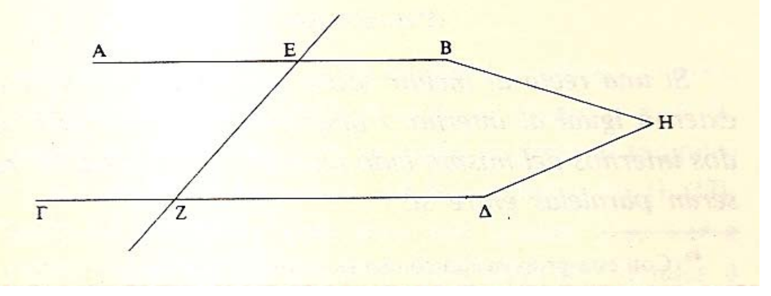

ORTODROMA
A
B

LAS PARALELAS

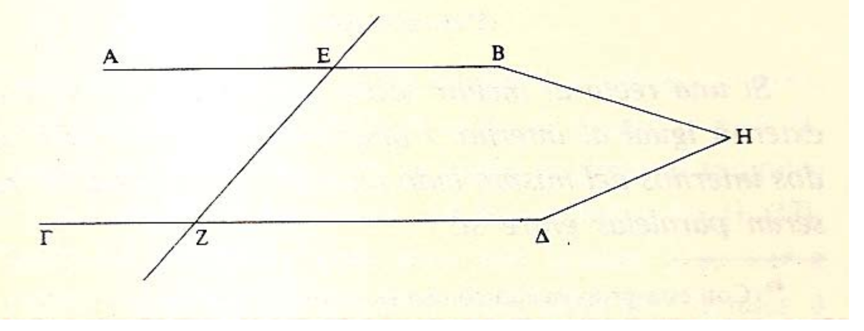
POSTULADO 5

Y [postúlese] que si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

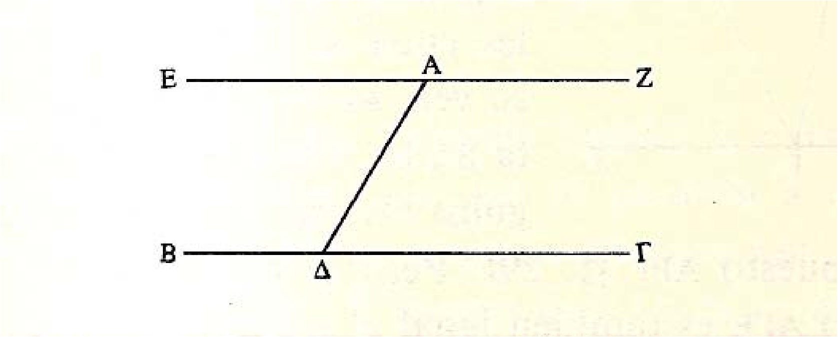
- **Proposición 27.** *Si una recta, al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas.*



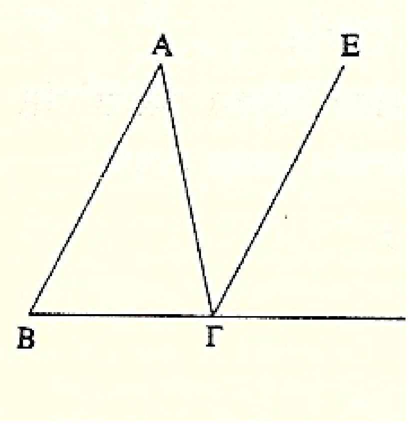
Proposición 27. *Si una recta, al incidir sobre dos rectas hace los ángulos alternos iguales entre sí, las dos rectas serán paralelas.*

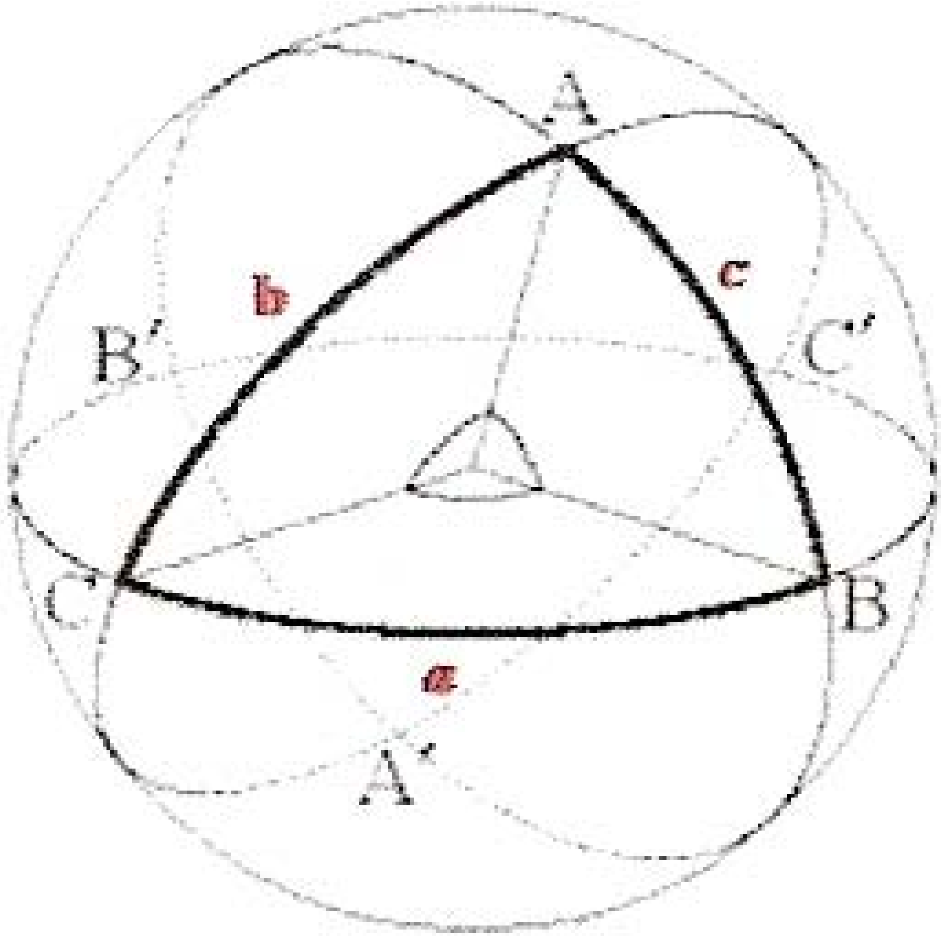


- **Proposición 31**. *Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.*



- **Proposición 32.** *En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos rectos.*




A
b
c
B′
C′
C
B
a
A′

LA NOCIÓN DE CONTINUO

Newton

Tractatus de Quadratura Curvarun

- *No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos*

D’Alembert

Enciclopedia Metódica. Matemáticas

- *"Si imaginamos que un punto se desplaza, trazará una línea; y una línea que se desplazara engendraría una superficie, etc ….* ".

A.G. Baumgarten
Metaphisica

- *Una serie de puntos con puntos intermedios que da lugar a una línea es un continuo ...*

A.G. Knäster

- *Anfausgründe der Aritmetik, Geometrie, ebenen und spharischen Trigonometrie und Perspectiv*

- *Una cantidad continua* (continuo) *es algo cuyas partes están conectadas de tal forma que, al detenerse, otras comienzan inmediatamente y entre un extremo y otro no hay ninguna que no pertenezca a esta cantidad*

BERNHARD BOLZANO
(1781-1848)

- *Lo que se asocia a un punto b en relación con el punto a, de manera que es independiente de a recibe el nombre de distancia al punto b tomada desde a*

- *Un objeto espacial con la propiedad de que todo punto del mismo tiene exactamente un número finito de puntos vecinos correspondientes a cada distancia menor que una distancia dada recibe el nombre de línea*

- *punto aislado* de un objeto espacial es aquél para el cual existen distancias arbitrariamente pequeñas tomadas desde el mismo de manera que no tiene puntos vecinos en dicho objeto para cada una de ellas

- Define un *continuo* como un objeto espacial que no tiene puntos aislados.

- Se trata sin duda de la primera definición intrínseca de dicho concepto dada desde una perspectiva estrictamente matemática.

CANTOR Y LA TEORIA DE CONJUNTOS LINEALES DE PUNTOS

- entre los años 1879 y 1884, Georg Cantor publicó una serie de seis artículos en los Mathematische Annalen bajo el título *"Uber unendliche, lineaire Punktmannifaltigkeinten"*
- ("Sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos").

- *Un punto p es un punto límite de un conjunto lineal de puntos P si todo entorno del mismo, arbitrariamente pequeño, contiene varios puntos de P*

- La gran idea de Cantor fue la de reunir todos los puntos límite de un conjunto *P* en otro conjunto, llamado *conjunto derivado* de *P,* y que designa como *P'*. Puesto que estos puntos constituyen a su vez un conjunto, se puede hablar de su conjunto derivado *P"* Y así sucesivamente.

- Se definen así los *conjuntos de primer género y especie n* como aquéllos para los cuales el conjunto derivado de orden *n*+1 es vacío. Los conjuntos cuyos derivados son todos distintos del vacío reciben el nombre de *conjuntos de segundo género.*

- *lLa noción de continuo no sólo ha jugado un papel importante en el desarrollo de las ciencias en general sino que también ha provocado grandes divergencias y, en consecuencia, vivas discusiones. Seguramente, esto es debido a que la idea tomada como punto de partida ha sido muy distinta según los autores a causa de que no tenían una definición rigurosa del concepto*

- *... me veo obligado únicamente a desarrollar aquí, de manera lo más breve posible y solamente desde el punto de vista de la teoría matemática de sistemas, esta noción* ...

- *conjunto perfecto es* el que coincide con su conjunto derivado.
- *Se dice que un sistema T de puntos está bien encadenado cuando dados dos puntos arbitrarios t y t ' del mismo y un número positivo r, existe siempre un número finito de puntos t1 ,t2, ... ,tn de T tales que las distancias tt1 ,t1t2 , ... ,tnt’ son todas menores que r*

- Un conjunto *P* es un *continuo* si es simultáneamente *perfecto* y *bien encadenado.*

- *Sé perfectamente que la palabra "continuo" no ha tomado hasta ahora, en Matemáticas, un sentido preciso; la definición que yo he dado será demasiado corta para algunos y excesivamente amplia para otros; espero haber alcanzado el justo medio.*

LA TRANSICIÓN DE CANTOR A LOS ESPACIOS ABSTRACTOS

- 1883: G. Ascoli. *Le curve limite di una varietà data di curve*
- 1887: Vito Volterra. *Sopra le Funzioni che dipendono di altre Funzioni.*
- 1887. Vito Volterra. *Sopra le Funzioni da Linee.*
- 1889. Césare Arzelà. *Funzioni di Linee*

1897. Jacques Hadamard. *Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles.*

- *Divídase el conjunto E en subconjuntos E' tales que dos funciones pertenecientes a uno cualquiera de ellos están a una distancia (en el sentido de Weierstrass) menor que un número determinado r. Se puede decir entonces que el conjunto cuyos elementos son los conjuntos E' "numera" el conjunto E. Son precisamente las propiedades de ese conjunto las que deben estudiarse* ...

1903. Emil Borel. *Quelques remarques sur les ensembles de droites ou plans*

- *Dada una línea fija* D, *diremos que la línea variable* D' *está infinitamente próxima a* D *si, elegidos dos puntos arbitrarios A y B en* D, *para cada número positivo r, se puede encontrar una posición de* D' *de manera que la distancia de* D' *a cada uno de los puntos A y B es menor que r.*

LAS PRIMERAS FORMULACIONES

- La primera formulación axiomática de un espacio abstracto tomó como concepto clave el de límite de una sucesión de elementos. Esto ocurre en 1906, cuando M. Fréchet publica su tesis doctoral: *"Sur quelques points du Calcul Fonctionnel"* (Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, 22 (1906), 1-74).

- ... *diremos que una operación funcional está definida en un conjunto E de elementos de naturaleza arbitraria (números, curvas, puntos, etc.) cuando, a cada elemento A de E le corresponde un valor numérico U(A) perfectamente determinado. El examen de las propiedades de estas operaciones constituye el objetivo del Cálculo Funcional.*

CONJUNTOS DE CLASE *L*

- *Es posible determinar si dos elementos de (L) son distintos.*
- *Es posible definir el concepto de "límite de un conjunto de elementos de (L)" de manera que, para un conjunto infinito de miembros A1,A2,….,Ai,…. de (L) se puede determinar si existe o no un elemento límite A del mismo, con las restricciones siguientes:*
- i) Si *Ai =A* (i= 1 ,2, ...),{ *Ai* } *tiene límite A.*
- ii) Si *{ Ai* } *tiene límite A, todas sus subsucesiones infinitas, tomadas en el mismo orden, tienen límite A.*

CONJUNTOS DE CLASE *E*

- *Se puede distinguir si dos elementos de (E) son iguales o no.*
- *A cada par A,B de elementos de (E) se asigna un número (A,B) con las propiedades:*
- *i) (A,B) = (B ,A) >* O *si A es distinto de B.*
- *ii) (A,B) = (B ,A) =* O *si A=B.*
- *iii) Si (A,B)<r y (B ,C)<r, entonces (A,C)<f(r) donde f(r) tiende a cero con r y f es independiente de A,B y* C.
- El número *(A,B*) recibe el nombre de *distancia* entre *A* y *B.*

1908. F. Riesz
Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre

- *a) Todo elemento que es punto de condensación de un conjunto M es también punto de condensación de todo conjunto que contiene a M.*
- *b) Cuando se divide un conjunto en dos subconjuntos, cada punto de condensación del primero es punto de condensación de, al menos, uno de los dos subconjuntos que lo constituyen.*
- *c)Un conjunto de un único elemento no tiene puntos de condensación.*
- *d)Todo punto de condensación de un conjunto está unívocamente determinado por la totalidad de los subconjuntos del mismo que lo tienen como punto de condensación.*

1913. H. Weyl

- *Cualquier descripción de una variedad bidimensioinal requiere:*
-
- *1. Establecer los objetos concretos que deban considerarse puntos de la variedad.*
- *2. Una exposición del concepto de entorno*

- *A cada punto p de la variedad F le asociamos ciertos conjuntos de puntos de la misma, definidos como 'entornos de p sobre F' con la condición de que cada entorno Uo de un punto po* :

- *a) Debe contener a po .*
- *b) Existe una transformación biunívoca que permite que UO se transforme en el conjunto de los puntos interiores de un círculo euclídeo Ko con las propiedades siguientes:*
- *i) Si p es un punto de Ua* y *U, un entorno de p sobre F formado exclusivamente por puntos de Ua, el interior de la imagen de U contiene el punto imagen de p.*
- *ii) Si K es un círculo cuyo centro es la imagen del punto p, contenido en K*0, *existe un entorno U de p sobre F cuya imagen está completamente contenida en K.*

- Un paso adelante en este sentido lo dió, finalmente, F. Hausdorff quien, en 1914, publica su libro *"Grundzüge der Mengenlehre",* en el que se dan los axiomas del concepto de *entorno* y que podemos considerar como definitivos ya que es a partir de entonces cuando se puede decir que comienza el verdadero desarrollo de la teoría de los Espacios Topológicos, que toma como punto de partida, precisamente, los axiomas de Hausdorff.

- ... *Podemos asociar a cada punto del conjunto determinadas partes del mismo, llamadas 'entornos', que pueden permitir la construcción de la teoría con la eliminación del concepto de distancia….*

- *"Un 'espacio topológico' es un conjunto E compuesto de elementos x, junto con determinados subconjuntos Ux* , *asociados a cada x; los subconjuntos Ux reciben el nombre de 'entornos de x'* y *están sometidos a las condiciones siguientes:*
- *a) A cada punto le corresponde al menos un entorno Ux. Todo entorno Ux contiene el punto x.*
- *b) La intersección de dos entornos de un elemento x contiene un entorno de x.*
- c) Si *y es un elemento de Ux, existe un entorno Vy de y contenido en Ux*
- *d) Si x e y son dos elementos distintos de E, existen entornos respectivos Ux y Uy sin elementos en común*

F I N