

Cuadrivectores: matemáticas para una nueva didáctica de la física

J Güémez*

*Departamento de Física Aplicada, Facultad de Ciencias,
Av. de Los Castros s/n. Universidad de Cantabria, 39005 Santander, Cantabria (España)*
(Dated: 31 de octubre de 2011)

Se analizan algunos conceptos de física que se no describen correctamente, o se describen de forma incompleta, en libros de texto de bachillerato o primeros cursos universitarios. Todos estos conceptos equivocados están relacionados con la física de cuerpos extensos, macroscópicos, y muchos de ellos están relacionados con la termodinámica (por ejemplo, procesos de destrucción de energía mecánica mediante fuerzas de rozamiento, procesos de creación de energía mecánica mediante reacciones químicas, etc.) confundiendo la ecuación del centro de masas (equivalente a la segunda ley de Newton) con el primer principio de la termodinámica, equivocando el papel en la descripción de los procesos de dos principios físicos diferentes. También el tratamiento de la rotación resulta confuso a veces en los libros de texto. Igualmente, a importantes conceptos relacionados con la teoría especial de la relatividad aplicada a cuerpos extensos, particularmente a la ecuación de Einstein, no se les da un sentido físico correcto.

La integración de la termodinámica y la teoría especial de la relatividad en una relatividad de cuerpos extensos y deformables (termodinámica relativista) permite superar las confusiones descritas. Se desarrolla un formalismo relativista proponiéndose, junto con la hipótesis de Einstein: $\mathcal{M} = Uc^{-2}$, la ecuación relativista, basada en 4-vectores de Minkowski, momentoenergía-impulsotrabajo:

$$dp^\mu = \sum_j \mathcal{F}_j^\mu d\tau_j + dp_D^\mu + dp_Q^\mu,$$

que engloba tanto la segunda ley de Newton como el primer principio de la termodinámica, ecuación covariante bajo transformaciones de Lorentz. Esta ecuación relativista generaliza al caso de cuerpos extensos y fuerzas no conservativas la ecuación relativista $dp^\mu = F^\mu d\tau$ sólo válida para una partícula puntual y una fuerza conservativa. Esta ecuación se puede expresar también como:

$$dU^\mu = \sum_j dW_j^\mu + dW_D^\mu + dQ^\mu,$$

que generaliza la ecuación del primer principio de la termodinámica $dU = \sum_k dW_k + dW_D + dQ$ a formas de energía a las que no se les asocia momento lineal en la física pre-Einstein. A partir de estas ecuaciones entre 4-vectores se obtienen las correspondientes ecuaciones relativistas: (i) la ecuación impulso-momento lineal y (ii) la ecuación de la energía y, a partir de la primera de éstas, la correspondiente (iii) ecuación relativista del centro de masas, y, posteriormente, (iv) la ecuación de los efectos térmicos.

Se resuelven mediante este formalismo relativista, diversos ejercicios, entre otros, el de un bloque acelerado bajo la acción de una fuerza conservativa y sometido a una fuerza de fricción, inicialmente en el referencial S_∞ en el que la superficie sobre la que se desliza el cuerpo se encuentra en reposo y después en un referencial S_A en configuración estándar respecto del primero, un proceso doble de calentamiento, por efecto Joule, y enfriamiento, por emisión de radiación térmica, de un gas encerrado por varios émbolos y sometido a fuerzas conservativas, a trabajos disipativos y a intercambios de calor, y el ejercicio de la vela solar.

INTRODUCCIÓN

Dados los indudables éxitos de la física, hablar a estas alturas de conceptos de física equivocados en libros de texto de esta materia puede parecer, además de pretencioso, casi ofensivo. Y todavía más si se dice que esos conceptos equivocados están relacionados, principalmente, con dos de las teorías con las que, en mi opinión, menos a gusto se sienten muchos físicos: la termodinámica y la teoría especial de la relatividad de Einstein. En el primer caso, citar en una conferencia la palabra entropía hace que la mitad de la audiencia pierda el interés por el tema; en el segundo caso, citar algún concepto rela-

tivista, por ejemplo, la dilatación del tiempo, hace que ya toda la audiencia concluya que el conferenciante se ha internado en un terreno peligrosamente confuso (en el que casi cualquier cosa se puede ‘demostrar’) y que, probablemente, desvaría. En ambos casos se trata de formas de razonar en física muy alejadas del modelo ‘mecanicista newtoniano’ con el que la mayoría de los físicos se siente a gusto.

Yo quería hablar aquí de termodinámica y de relatividad especial y de cómo la estructura matemática del álgebra de cuadrivectores (o 4-vectores), esencialmente un álgebra de matrices, puede ayudar a entender las fuentes de los errores conceptuales que todavía aparecen en

A very persistent mistake

J A G McClelland
San Marcos, CA, USA
E-mail: egmcc@aol.com

Abstract
Articulated bodies with an internal energy source require to be coupled to an external mass in order to accelerate themselves but the typical text book assertion that the net force is provided by the external mass is not correct. Arguments are presented demonstrating that the assertion is incorrect and reasons are suggested for the persistence of this mistake.

Figura 1. Artículo de McClelland de 2011 sobre errores persistentes en los libros de texto de física respecto de la descripción del movimiento de cuerpos articulados (una persona, un automóvil, etc.) que se mueven en contacto con un cuerpo de masa cuasi-infinita (el suelo, una pared, etc.).

libros de texto, la posible manera de superarlos mediante la sustitución de teorías pre-Einstein por teorías que incluyan conceptos de la teoría espacial de la relatividad de Einstein y el formalismo de 4-vectores de Minkowski, que den lugar a ecuaciones covariantes bajo transformaciones de Lorentz, y que permitan tratar los mismos problemas que hoy se tratan en los libros de texto con formalismos pre-Einstein.

Conceptos equivocados en libros de texto

Cada año se publican en revistas pedagógicas de física –European Journal of Physics [1], American Journal of Physics, Physics Education [2], The Physics Teacher, Journal of Chemical Education [3]– artículos que llaman la atención sobre la persistencia en libros de texto universitarios de importantes errores conceptuales [4].

Un primer gran grupo de artículos de este tipo se refiere a la confusión, persistente a lo largo de los años y de los libros de texto [5], de la ecuación del centro de masas (ecuación de la energía cinética, ecuación del pseudo-trabajo [6]), ecuación que se deriva directamente por integración de la segunda ley de Newton, con el primer principio de la termodinámica [7]. Algunos autores han tratado recientemente, y en profundidad, esta problemática [8].

Energy and the Confused Student IV: A Global Approach to Energy

John W. Jewett Jr., California State Polytechnic University, Pomona, CA

Figura 2. Artículo publicado por Jewett en 2008 en el que se aclaran conceptos relacionados con la energía en su aplicación a cuerpos extensos y a procesos que incluyen fuerzas no conservativas.

Los errores conceptuales se acumulan en la resolución

de ejercicios que describen procesos se encuentran entre la mecánica y la termodinámica, por un lado, referidos a cuerpos extensos y deformables que se desplazan bajo la acción de fuerzas de fricción, es decir, a procesos de destrucción de energía mecánica, y por otro lado a procesos de creación de energía mecánica –coches que se ponen en movimiento, una persona que salta, etc. Es decir, a procesos en los que intervienen fuerzas, desplazamientos, energías mecánicas etc., pero también conceptos termodinámicos como variaciones de temperatura, calor, disminución de la función de Gibbs, etc.

Otro conjunto de artículos discuten los errores conceptuales que se introducen en los libros de texto en el contexto de la teoría especial de la relatividad de Einstein [9], particularmente por lo que se refiere a la interpretación de la ecuación de Einstein $E_0 = mc^2$ [10]. Conceptos tales como ‘defecto de masa’ utilizados en la descripción del comportamiento del Sol o las centrales nucleares, no están bien explicados en los libros de texto [11].

How Einstein confirmed $E_0 = mc^2$

Eugene Hecht^(*)
Department of Physics, Adelphi University, Garden City, New York 11530
(Received 13 August 2010; accepted 27 December 2010)

The equivalence of mass m and rest-energy E_0 is one of the great discoveries of all time. Despite the current wisdom, Einstein did not derive this relation from first principles. Having conceived the idea in the summer of 1905 he spent more than 40 years trying to prove it. We briefly examine all of Einstein’s conceptual demonstrations of $E_0 = mc^2$, focusing on their limitations and his awareness of their shortcomings. Although he repeatedly confirmed the efficacy of $E_0 = mc^2$, he never constructed a general proof. Leaving aside that it continues to be affirmed experimentally, a rigorous proof of the mass-energy equivalence is probably beyond the purview of the special theory. © 2011 American Association of Physics Teachers
[DOI: 10.1119/1.3549223]

Figura 3. Artículo publicado por Hecht en 2011 en el que se describen los distintos intentos de Einstein de demostrar su famosa ecuación $E_0 = mc^2$. La conclusión del autor es que dicha ecuación debe tomarse como un nuevo principio de la física e interpretarse en términos de ‘inercia de la energía’ $\mathcal{M} = U c^{-2}$.

En mi opinión, muchos de estos errores conceptuales se deben al hecho de que no existe una relatividad de cuerpos extensos y deformables (termodinámica relativista) aceptada que permita el tratamiento mediante la teoría especial de la relatividad de aquellos procesos termodinámicos que dan lugar a las confusiones y errores citados anteriormente [12]. Se considera habitualmente que la teoría especial de la relatividad sólo debe utilizarse cuando se trata de describir procesos que tienen lugar a velocidades próximas a las de la luz en el vacío [13], considerándose que a velocidades bajas la descripción pre-Einstein de Newton-Galileo es suficiente. Sin embargo, la teoría especial de la relatividad, especialmente cuando se desarrolla mediante el formalismo de Einstein-Minkowski de 4-vectores introduce una lógica interna en el desarrollo de cualquier descripción física de un problema, que es completamente diferente de la lógica que se considera cuando el mismo problema se analiza mediante una formulación Newton-Galileo. Por ejemplo, una fuerza de origen electromagnético, descrita mediante la ecuación de Lorentz, no es invariante bajo transformaciones de Gali-

leo.

Los libros de texto apenas ponen de manifiesto el cumplimiento del principio de relatividad en la resolución de muchos ejercicios. Esto es más cierto cuando se describe algún tipo de proceso termodinámico o intervienen cuerpos (el suelo, una pared, un cañón, etc.) de masa cuasi-infinita [14]. Al no insistirse en el cumplimiento del principio de relatividad no se pueden obtener importantes invariantes Galileanos y tampoco se detectan posibles errores en la descripción de los procesos.

Partículas puntuales

En puridad, la segunda ley de Newton expresada como (por simplicidad, en general, se evita la notación vectorial cuando el movimiento se considera unidimensional):

$$F = ma,$$

se aplica exclusivamente a partículas puntuales (o a cuerpos extensos que en ciertas circunstancias se comportan como elementales). Expresando esta ley como ecuación impulso-variación del momento lineal (masa constante):

$$F dt = m dv,$$

para una fuerza constante F aplicada se tiene que:

$$v_f = v_i + at \quad (1)$$

Integrando esta ecuación, se obtiene:

$$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2. \quad (2)$$

Sin más que despejar el tiempo t en la Ec. (1) y sustituirlo en la Ec. (2), se obtiene la expresión:

$$\frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = F (x_f - x_i).$$

Para una partícula elemental las fuerzas aplicadas son conservativas y el desplazamiento de la fuerza coincide con el desplazamiento de la partícula. Esta ecuación de la energía cinética es equivalente al teorema trabajo-energía. Multiplicando la segunda ley de Newton por v :

$$F v dt = m v dv,$$

con $dx = v dt$ y $v dv = d(v^2/2)$, se tiene que

$$\int_i^f F dx = \int_i^f m d \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

de donde se obtiene el teorema trabajo-energía cinética:

$$W = \Delta K.$$

La energía cinética es la única forma de energía que puede tener una partícula elemental. Si la fuerza proviene de un campo potencial $V(x)$:

$$F = - \frac{dV(x)}{dx},$$

y

$$W = \int_i^f F dx = - \int_i^f \frac{dV(x)}{dx} dx = -\Delta V(x),$$

de donde se obtiene finalmente que:

$$\Delta K + \Delta V(x) = 0,$$

o teorema de conservación de la energía mecánica para fuerzas conservativas.

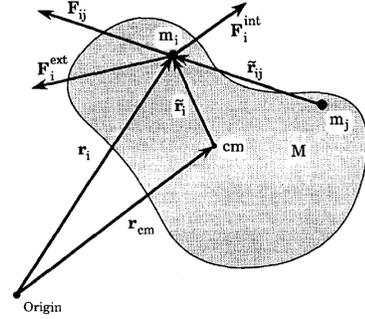


Figura 4. Cuerpo formado por i partículas de masa m_i . Sobre cada partícula actúa una fuerza externa $F_{i\text{ext}}$ y una fuerza interna $F_{i\text{int}} = \sum_{i \neq j} F_{ij}$ debida a sus interacciones con el resto de las partículas. Estas fuerzas internas se consideran conservativas y que cumplen la tercera ley de Newton, existiendo como pares acción-reacción. Las velocidades v_i se miden en el referencial S y las velocidades \bar{v}_i en el referencial del centro de masas del cuerpo [15].

Cuerpos extensos

La segunda ley de Newton aplicada a un cuerpo de masa $M = \sum_i m_i$ formado por varias partículas de masa m_i , con $F_i = m_i a_i$, implica que [15]:

$$\sum_i F_{i\text{ext}} + \sum_i F_{i\text{int}} = M a_{\text{cm}},$$

donde $F_{i\text{ext}}$ es la fuerza externa aplicada sobre la i -ésima partícula del cuerpo, y donde $F_{i\text{int}}$ es la fuerza interna, debida a la resultante de las fuerzas de las demás partículas del cuerpo sobre la i -ésima partícula. Si las fuerzas internas se consideran que son fuerzas conservativas y que aparecen como pares de acción reacción, entonces

$\sum_i F_{i\text{int}} = 0$. En este caso, la segunda ley de Newton aplicada a un sistema extenso viene dada por:

$$\sum_i F_{i\text{ext}} + \sum_i F_{i\text{int}} = Ma_{\text{cm}},$$

donde:

$$a_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i a_i}{M}.$$

es la aceleración del centro de masas del cuerpo.

En la física newtoniana las fuerzas se aplican simultáneamente, en cualquier sistema de referencia, sobre el cuerpo. La ecuación impulso-variación del momento lineal se puede poner como:

$$\mathcal{F}dt = Mdv_{\text{cm}}.$$

donde $\mathcal{F} = \sum_j F_j$ es la fuerza resultante y donde:

$$v_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i v_i}{M},$$

es la velocidad del centro de masas del cuerpo.

La variación de la velocidad del centro de masas si las fuerzas actúan durante un intervalo de tiempo t es:

$$v_{f\text{cm}} = v_{i\text{cm}}t + a_{\text{cm}}t.$$

El desplazamiento dx_{cm} ,

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M},$$

viene dado por

$$x_{f\text{cm}} = x_{i\text{cm}} + v_{i\text{cm}}t + \frac{1}{2}a_{\text{cm}}t^2.$$

Se tiene que:

$$\frac{1}{2}M(v_{f\text{cm}}^2 - v_{i\text{cm}}^2) = \mathcal{F}(x_{f\text{cm}} - x_{i\text{cm}}).$$

En la resultante \mathcal{F} entran tanto las fuerzas externas conservativas como las posibles fuerzas externas no conservativas (las fuerzas internas se han considerado todas ellas conservativas). Esta ecuación es la denominada ecuación del centro de masas (pues la información que proporciona se refiere al centro de masas), ecuación de la energía cinética (pues es la única energía sobre la que se puede obtener información aplicando la segunda ley de Newton) o ecuación del pseudo-trabajo [6] (pues el producto $\mathcal{F}(x_{f\text{cm}} - x_{i\text{cm}})$ de la fuerza resultante por el desplazamiento no es un trabajo). No debe confundirse esta ecuación con el, en general, inexistente, teorema trabajo-energía cinética para un cuerpo extenso.

Algunos de los conceptos equivocados en los libros de texto provienen del hecho de que a la segunda ley de Newton se le pide más de lo que puede dar. Muchos profesores

parecen creer que la segunda ley de Newton $\mathcal{F}dt = dp$, siendo $\mathcal{F} = \sum_k F_k$ la suma de las fuerzas aplicadas, proporciona toda la información necesaria para resolver un problema típico de mecánica. Sin embargo, la segunda ley de Newton, convenientemente integrada, sólo proporciona información sobre la variación de la energía cinética $K_{\text{cm}} = Mv_{\text{cm}}^2/2$ del centro de masas del cuerpo, con $dK_{\text{cm}} = \mathcal{F}dx_{\text{cm}}$. No es pues la ecuación del balance de energías. A veces se oye decir, o se escribe, que un determinado problema se puede resolver bien por fuerzas o bien por energías, abundando en esta idea de que la segunda ley de Newton es también una ecuación de la energía.

Información adicional sobre el comportamiento de un sistema de partículas (bien caracterizado microscópicamente) se puede obtener de la siguiente manera. Si se considera la fuerza neta F_i , $F_i = F_{i\text{ext}} + F_{i\text{int}}$ aplicada a la i -ésima partícula, con:

$$F_i dt = m_i dv_i$$

y esta ecuación, segunda ley de Newton para la i -ésima partícula, se multiplica por v_i , su velocidad:

$$F_i v_i dt = m_i v_i dv_i,$$

se tiene que:

$$F_i dx_i = m_i d\frac{v_i^2}{2}.$$

Sumando para todas las partículas del cuerpo, se tiene:

$$\sum_i F_{i\text{ext}} dx_i + \sum_i F_{i\text{int}} dx_i = \sum_i m_i d\frac{v_i^2}{2}.$$

Si todas las fuerzas implicadas son conservativas, entonces las integrales anteriores serán, respectivamente, los trabajos realizados por las fuerzas externas e internas:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{i\text{ext}} dx_i &= W_{\text{ext}} \\ \sum_i F_{i\text{int}} dx_i &= W_{\text{int}} \end{aligned}$$

de donde se podrá escribir.

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = \Delta K.$$

La suma del trabajo realizado por las fuerzas externas $W_{\text{ext}} \equiv \sum_i F_{i\text{ext}} dx_i$, más el trabajo de las fuerzas internas $W_{\text{int}} \equiv \sum_i F_{i\text{int}} dx_i$ es igual a la variación total de la energía cinética $\Delta K \equiv \sum_i m_i d(v_i^2/2)$ o suma de las variaciones de las energías cinéticas de todas y cada una de las partículas componentes del cuerpo.

Cada velocidad v_i se puede referir a la velocidad de la partícula respecto del centro de masas \bar{v}_i , menos la velocidad del centro de masas v_{cm} :

$$v_i = \bar{v}_i - v_{\text{cm}},$$

La variación de la energía cinética total se puede expresar como:

$$\begin{aligned} dK &= \sum_i m_i d \frac{(\bar{v}_i - v_{cm})^2}{2} = \\ &= \sum_i m_i d \frac{\bar{v}_i^2}{2} + \sum_i m_i d \frac{v_{cm}^2}{2} - v_{cm} \cdot \sum_i m_i d \bar{v}_i^2. \end{aligned}$$

Puesto que $\sum_i m_i d \bar{v}_i^2 \equiv 0$, por la propia definición del centro de masas, entonces: la variación de energía cinética total se puede dividir en dos partes (Teorema de König):

$$m_i d \frac{v_i^2}{2} = m_i d \frac{\bar{v}_i^2}{2} + m_i d \frac{v_{cm}^2}{2},$$

$$\Delta K = \Delta K_{int} + \Delta K_{cm},$$

o variación de la energía cinética interna, respecto del centro de masas, más la variación de la energía cinética del cuerpo como un todo, o energía cinética del centro de masas. Por tanto, se tiene que para un cuerpo formado por muchas partículas:

$$\begin{aligned} W_{ext} + W_{int} &= \Delta K_{int} + \Delta K_{cm}. \\ \Delta K_{int} + W_{int} &= \Delta U. \\ W_{ext} &= \Delta K_{cm} + \Delta U. \end{aligned}$$

Este sería el teorema trabajo externo-energías, las fuerzas externas se ha considerado que son todas ellas conservativas, para un cuerpo extenso formado por partículas que interaccionan de la forma considerada, que ahora incluye energías adicionales a la energía cinética.

En algunos libros de texto se ‘generaliza’ el teorema trabajo energía de tal manera que se introduce el concepto de ‘trabajo de las fuerzas no conservativas’ W_N , con $W_C + W_N = \Delta K$ de tal forma que se luego se escribe $W_N = \Delta K + \Delta V(x)$. Esta ecuación es completamente incorrecta. (Los autores aplican esta ecuación explicando que cuando las energías mecánicas $\Delta K + \Delta V(x)$ desaparecen se transforman en el famoso, pero incorrecto, ‘trabajo de las fuerzas no disipativas’ $\Delta K + \Delta V(x) \rightarrow W_N$. Pero cuando la energía mecánica desaparece no se transforma en trabajo. Naturalmente, la ecuación anterior no se puede aplicar a la inversa, pues es imposible que fuerzas disipativas den lugar a la creación de trabajo mecánico $W_N \neq \Delta K + \Delta V(x)$). Por ejemplo, el concepto de ‘trabajo realizado contra las fuerzas de fricción’ es un concepto equivocado puesto que en el referencial S_∞ en el que hay un cuerpo de masa cuasi-infinita (la tierra, un muro, etc.) que permanece en reposo, las fuerzas de rozamiento no realizan trabajo [1] y, además, tal expresión sugiere, de forma equivocada, que el teorema trabajo-energía, sólo válido para partículas elementales, es también válido para cuerpos extensos moviéndose bajo fuerzas no conservativas (como, por ejemplo, las fuerzas de fricción). (Ver el apéndice sobre fricción).

Primer principio de la termodinámica

Las consideraciones anteriores sobre fuerzas internas y externas, trabajos internos y externos, variaciones de energía cinética y de energía interna sugieren la forma en que puede aplicarse la segunda ley de Newton a un sistema que se encuentre microscópicamente bien caracterizado y los nuevos conceptos que deben introducirse. Pero, en general, este conocimiento microscópico de un sistema no se tiene, algunas de las fuerzas que intervienen, tanto externas como internas, pueden ser no conservativas, y pueden aparecer procesos de intercambio de energía con el sistema que no se pueden caracterizar mecánicamente.

En estas circunstancias se reconoce que se debe introducir un nuevo principio de la física, diferente de la segunda ley de Newton, que permita abordar estas situaciones y describirlas físicamente. Este nuevo principio es el principio de conservación de la energía, que va a incluir formas de energía que no se incluyen en la segunda ley de Newton debido a que no se les sabe asociar momento lineal, o primer principio de la termodinámica.

Así, para considerar los efectos térmicos producidos por una fuerza de fricción, o una fuerza no conservativa en general, se debe utilizar el primer principio de la termodinámica, que en su forma más sencilla viene dado por [16]:

$$\Delta E = W_{ext} + W_D + Q, \quad (3)$$

donde $\Delta E = \Delta K_{cm} + \Delta U$ es la variación de energía total del cuerpo,

$$\Delta K_{cm} + \Delta U = W_{ext} + W_D + Q,$$

siendo ΔU la variación de su energía interna, y donde $W_{ext} = -\Delta U_W$ es el trabajo de configuración intercambiado con una fuente de trabajo externa, W_D son posibles trabajos disipativos (ruedas de paletas de Joule, calentamiento por efecto Joule mediante una resistencia eléctrica, etc.) y $Q = -\Delta U_T$ [17] es la energía intercambiada (calor) con un foco térmico a temperatura T [18] con:

$$\Delta K_{cm} + \Delta U + \Delta U_W + \Delta U_T = W_D. \quad (4)$$

A su vez, la variación de energía interna ΔU

$$\Delta U = \Delta U_R + \Delta U_T + \Delta U_\xi + \dots$$

puede incluir varios tipos de energías como, por ejemplo, la variación de la energía cinética de rotación ΔU_R (que es energía cinética medida respecto del centro de masas), la variación de energía potencial acumulada en enlaces químicos ΔU_ξ (energía potencial electrostática), energía interna asociada a variaciones de temperatura ΔU_T , etc. Tanto el trabajo como el calor no son funciones de estado sino funciones de proceso y caracterizan la forma de intercambian energía por parte del sistema con el entorno, por lo que son energía en tránsito. Esto significa

que no debe confundirse la variación de energía interna de un sistema (que puede dar lugar a variaciones de temperatura del sistema), que se refiere a la variación de una función de estado del sistema, con el calor, que es energía intercambiada entre el sistema y su entorno debida a diferencias de temperatura entre el sistema y el entorno. Por tanto, no tiene sentido físico el concepto de ‘calor acumulado en un cuerpo’.

En un proceso físico cualquiera, el balance de energía lo proporciona el primer principio de la termodinámica

$$\begin{aligned} dK_{cm} + dK_R + dU_\xi + dU_T + \dots \\ = \sum_j dW_j + dW_D + dQ + \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

en el que intervienen diversas energías, funciones de estado, como la energía interna, que incluye la energía cinética de rotación, energías químicas, térmicas, etc., y también diversos trabajos termodinámicos, disipativos, y el calor. Esta es una ecuación no positiva en el sentido de que indica que si el balance de energías inicial no es igual al balance final, algo se ha olvidado, aunque no se indique qué pueda ser. En esta ecuación va a entrar información sobre los procesos realizados sobre el sistema, trabajos, calor, etc., y sobre las variaciones de las funciones de estado del sistema, etc., aunque cada una de estas ecuaciones de la energía debe ser obtenida por algún otro método (la ecuación de la energía cinética, la ecuación de la energía cinética de rotación, etc.). Para un determinado proceso se podrá obtener información sobre los efectos térmicos relacionados con el mismo mediante la integración en el primer principio de la termodinámica de información mecánica sobre dicho proceso proporcionada por la ecuación del centro de masas (ecuación de la energía cinética de traslación) o su equivalente en rotación (ecuación de la energía cinética de rotación).

Sin embargo, un aspecto importante de la termodinámica es que asigna entropía a cada energía, exigiendo que al final de un proceso la entropía sea mayor o igual que al principio, a la vez que se conserva la energía. Si la entropía permanece constante, entonces el proceso es reversible y puede describirse desde un punto de vista mecánico en un sentido o en el inverso. Pero si el incremento de entropía a lo largo del proceso es positivo, entonces el proceso es irreversible desde el punto de vista mecánico, cierta energía mecánica se habrá disipado como tal, convertida en calor, energía interna, etc., y el proceso no puede invertirse. Es decir, en la Ec. (5) sólo se permiten aquellas transformaciones que, aún cumpliendo esa igualdad, sólo se desarrollen con conservación, o aumento, de la entropía total, del universo, y no estarán permitidas aquellas transformaciones que impliquen una disminución de la entropía del universo. Por ejemplo, cediendo calor a un sistema no se podrá lograr que su centro de masas adquiera una cierta velocidad.

MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN

Se va considerar un proceso en el que un bloque sólido se desplaza sobre una superficie rugosa, con la que roza, disipándose energía mecánica, sometido, a su vez, a una fuerza conservativa, proveniente de la interacción de un campo eléctrico con una carga eléctrica fijada en el bloque. El ejercicio se resuelve primero en el referencial S_∞ en el que la superficie sobre la que se desliza el cuerpo se encuentra en reposo y después en un referencial S_A en configuración estándar respecto del primero.

Este ejercicio va a permitir mostrar claramente las diferencias entre el tratamiento Newton-Galileo y el tratamiento Einstein-Minkowski (que se lleva a cabo más adelante) de un mismo problema [19]. El desarrollo de ambas descripciones permite poner de manifiesto las ventajas de la descripción Einstein-Minkowski sobre la descripción Newton-Galileo. Aunque las matemáticas del formalismo Einstein-Minkowski [20] pueden parecer demasiado complicadas, la potencia y versatilidad del formalismo ayudan a conseguir descripciones coherentes del proceso [21].

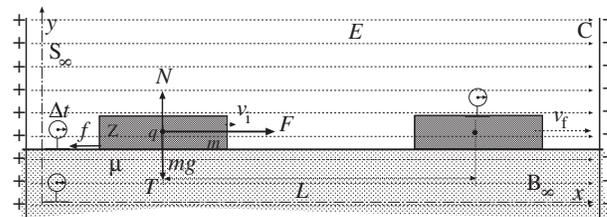


Figura 5. Cuerpo Z de masa m , con velocidad inicial v_i , que es arrastrado mediante una fuerza conservativa $F = Eq$ (producida por la acción del campo eléctrico \mathbf{E} sobre la carga q depositada sobre Z) durante un intervalo de tiempo $\Delta t = t_0$, medido en el referencial S_∞ en el que el suelo B_∞ permanece en reposo y se encuentra a la misma temperatura T que el cuerpo Z. El cm del cuerpo recorre una distancia $\Delta x = L$ durante el proceso. La velocidad final del cuerpo Z es v_f . El cuerpo tiene un coeficiente de rozamiento dinámico con el suelo igual a μ .

Segunda ley de Newton

Considérese la descripción de un bloque rígido de masa m que se desplaza sobre una superficie horizontal rugosa B_∞ , de masa cuasi-infinita, sometido a una fuerza conservativa F , producida por la interacción de un campo eléctrico sobre una carga eléctrica fijada al cuerpo, y a una fuerza de rozamiento f (Ley de Amontons: (i) la fuerza de rozamiento no depende del tamaño de las superficies puestas en contacto, y (ii) es proporcional a la normal, y Ley de Coulomb, (iii) la fuerza de rozamiento no depende de la velocidad), tal que $f = -\mu mg$ (Fig. 5).

Se ha elegido este ejercicio por las siguientes razones:

(i) se encuentra en todos los libros de texto de física universitaria; (ii) en su descripción en estos libros de texto se suele confundir la ecuación del centro de masas con el teorema trabajo-energía e, incluso, con el primer principio de la termodinámica; (iii) en los libros de texto se suelen ignorar los efectos térmicos que se producen o, en cualquier caso, no se formalizan; (iv) es el ejemplo más sencillo de un proceso en el que intervienen fuerzas conservativas y no conservativas; (v) la interacción electromagnética, que produce la fuerza F es paradigmática de la teoría especial de la relatividad, y los cálculos relativos a ella son exactos; y (vi) la descripción pre-Einstein de este proceso no es ni covariante bajo transformaciones de Galileo –debido a la fuerza electromagnética, que no lo es–, ni invariante bajo transformaciones de Lorentz –pues la segunda ley de Newton no lo es–.

La aplicación de la segunda ley de Newton (ecuación impulso lineal-momento lineal) a este proceso [el tiempo es universal y todos los relojes, tanto aquellos en reposo respecto de B_∞ como aquellos que se mueven con el bloque, indican el mismo tiempo y miden el mismo intervalo de tiempo]:

$$mv_f - mv_i = (F - \mu mg) t_0, \quad (6)$$

permite obtener la velocidad final, conocido el intervalo de tiempo t_0 durante el que se aplican las fuerzas.

Ecuación del centro de masas

Información adicional sobre este proceso se puede obtener mediante la ecuación del centro de masas, la cual se puede obtener a partir de la segunda ley de Newton de diversas maneras.

1. Si las fuerzas aplicadas son constantes y la aceleración $a = (F - \mu mg)/m$ es constante, se tiene que:

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + at_0, \\ x_f &= x_i + v_i t_0 + \frac{1}{2} at_0^2, \end{aligned}$$

siendo $x_f - x_i = L$ el espacio recorrido por el bloque durante el intervalo de tiempo t_0 . Eliminando el tiempo t_0 entre estas ecuaciones, se obtiene directamente la ecuación:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = (F - \mu mg) L. \quad (7)$$

Conocida la velocidad final v_f mediante la aplicación de la ecuación impulso-momento lineal Ec. (6), esta Ec. (7), ecuación del centro de masas, ecuación de la energía cinética de traslación o ecuación del pseudotrabajo, permite obtener el espacio L , recorrido por el bloque durante el proceso. Tanto las velocidades v_f y v_i como el desplazamiento L se refieren al centro de masas del sistema.

2. Considerando que se tiene que:

$$\frac{d[v^2/2]}{dv} = v = \frac{dx}{dt},$$

se puede poner:

$$\frac{m d(v^2/2)}{m dv} = \frac{(F - \mu mg) dx}{(F - \mu mg) dt}.$$

Por tanto, si se cumple la ecuación Impulso Lineal-Momento Lineal, también se cumplirá la ecuación del centro de masas o de la energía cinética de traslación:

$$\begin{aligned} \int_{v_i}^{v_f} m d\left(\frac{v^2}{2}\right) &= \int_{x_i}^{x_f} (F - \mu mg) dx, \\ \int_{v_i}^{v_f} m dv &= \int_0^{t_0} (F - \mu mg) dt. \end{aligned}$$

Integrando se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = (F - \mu mg) L, \quad (8)$$

$$mv_f - mv_i = (F - \mu mg) t_0. \quad (9)$$

Por la forma en que han sido obtenidas es obvio que ambas contienen la misma información, aunque expresada de formas diferentes.

3. Considerando que en un proceso infinitesimal para este proceso se tiene que:

$$mdv = (F - \mu mg) dt,$$

multiplicando ambos miembros por v , se tiene:

$$mvdv = (F - \mu mg) v dt.$$

Esta nueva ecuación se puede integrar, con $dx = v dt$, para un proceso finito, como:

$$\int_{v_i}^{v_f} m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \int_{x_i}^{x_f} (F - \mu mg) dx.$$

Integrando esta expresión, se tiene la ecuación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = (F - \mu mg) L, \quad (10)$$

con $L = (x_f - x_i)$.

Estas tres formas de obtener la ecuación del centro de masas o Ecuación de la Energía Cinética de Traslación Ec. (8) indican claramente que dicha ecuación contiene la misma información que la segunda ley de Newton Ec. (9), expresada de otra manera. Dada una cualquiera de estas dos ecuaciones, la otra se obtiene inmediatamente.

Trabajo y Energía

La descripción anterior del proceso es correcta, pero incompleta desde un punto de vista físico. Así, dicha descripción no da cuenta del efecto experimental del aumento de la temperatura (al menos, durante unos instantes) de la superficie rugosa sobre la que desliza el cuerpo (incluso, del propio cuerpo).

Una forma de considerar este efecto térmico asociado a la fuerza de rozamiento no conservativa podría ser la siguiente. Si se supone que el cuerpo se desliza *unicamente* bajo el efecto de la fuerza conservativa F , durante el mismo desplazamiento $\Delta x = L$ (aunque durante un intervalo de tiempo \bar{t}_0 diferente de t_0), alcanzaría una velocidad final \bar{v}_f dada por la correspondiente ecuación del centro de masas y la segunda ley de Newton:

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = FL, \quad (11)$$

$$m\bar{v}_f - mv_i = F\bar{t}_0. \quad (12)$$

Restando las dos ecuaciones de la energía cinética obtenidas, Ec. (10) y Ec. (11) se tendría:

$$-\left[\frac{1}{2}m\bar{v}_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right] = -\mu mgL. \quad (13)$$

Se interpretaría entonces que:

‘La pérdida de energía mecánica (diferencias de energías cinéticas de traslación) es igual al producto de la fuerza de rozamiento por el desplazamiento (“trabajo, negativo, de las fuerzas de rozamiento”).’

Si ahora se considera que la desaparición de la energía mecánica, en forma de energía cinética de traslación, se ha transformado en *calor* (un concepto ajeno a la mecánica de Newton y Galileo), Q_0 (negativo),

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -Q_0,$$

se tendría que:

$$Q_0 = -\mu mgL. \quad (14)$$

Aunque la Ec. (13) tiene el aspecto de la ecuación trabajo-energía (teorema de las fuerzas vivas), en realidad no lo es. Tampoco la ecuación del calor Ec. (14) es el primer principio de la termodinámica. Aunque todas estas ecuaciones establecen relaciones numéricas correctas, su interpretación en función del supuesto ‘trabajo de las fuerzas de rozamiento’ no es correcta.

El teorema trabajo-energía se refiere al movimiento de un cuerpo bajo la acción de una fuerza conservativa F que, por lo tanto, se puede poner como la derivada de un

campo potencial escalar $V(x)$, tal que en el caso considerado $F = q\mathcal{E}$:

$$q\mathcal{E} = -\frac{dV(x)}{dx},$$

$$\Delta K = \int_0^L F dx = q\mathcal{E}L,$$

$$\frac{1}{2}m\bar{v}_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = q\mathcal{E}L$$

se obtiene que la variación de la energía cinética K se produce a expensas de la disminución de la energía potencial del campo $V(x) = qEx$ – o energía de configuración – con:

$$\Delta K = -\Delta V(x),$$

y que se puede expresar como una ecuación de conservación (principio de conservación de la energía mecánica para fuerzas conservativas):

$$\Delta K + \Delta V(x) = 0; \quad (15)$$

$$K_f + V(x_f) = K_i + V(x_i), \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - q\mathcal{E}x_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - q\mathcal{E}x_f. \quad (17)$$

La Ecuación de Conservación de la Energía Mecánica Ec. (15) no tiene nada que ver con la Ec. (13), pues una fuerza disipativa como la de rozamiento no se puede obtener, por definición, a partir de un campo potencial escalar. El teorema trabajo-energía cinética no se puede ampliar, como equivocadamente hacen algunos libros, al caso de fuerzas no conservativas.

Primer principio de la termodinámica

Para un sistema formado por muchas partículas, interaccionantes o no, la variación de la energía cinética total, igual a la suma de las variaciones de las energías cinéticas de todas las partículas, es igual a la suma de todos los trabajos, debidos a fuerzas internas o externas conservativas, realizados sobre las partículas:

$$\Delta K = \sum_j \Delta K_j = \sum_j (F_{\text{int}j} + F_{\text{ext}j}) \Delta x_j.$$

Esta variación de energía cinética se puede dividir en dos partes (Teorema de König), la variación de la energía cinética del centro de masas y la variación de la energía cinética interna o respecto del centro de masas:

$$\Delta K = \Delta K_{\text{c.m.}} + \Delta K_{\text{I}}.$$

Definiendo el trabajo de las fuerzas internas, supuestas conservativas, como la variación de una energía potencial de interacción Φ :

$$W_{\text{int}} = \sum_j \int F_{\text{int}j} dx_j = -\Delta \Phi,$$

y definiendo la energía interna como la suma:

$$\Delta U = \Delta K_I + \Delta \Phi,$$

se tiene que se cumple que:

$$\Delta K_{c.m.} + \Delta U = W_{\text{ext}}.$$

Esta primera ecuación ya indica que para cuerpos extensos, macroscópicos, deformables, hay que considerar un nuevo concepto energético, el de energía interna (o función energía como prefieren algunos autores).

Si, a su vez, el sistema está formado por cuerpos extensos, o hay fuerzas internas no conservativas, reacciones químicas, sobre el sistema se pueden realizar trabajos disipativos (rueda de paletas de Joule, efecto Joule, etc.), y hay interacciones que no se pueden describir mecánicamente (el calor), entonces, se puede generalizar la ecuación anterior, introduciendo un nuevo principio de la física, y escribiendo el primer principio de la termodinámica, o ecuación de la energía, como:

$$\Delta K_{c.m.} + \Delta U_R + \Delta U_T + \Delta U_\xi + \dots = \sum_k W_k + W_{\text{dis}} + Q + \dots,$$

donde se considera que la energía interna puede variar por rotación, con la temperatura, por reacciones químicas, etc., que es un principio de la física diferente de la segunda ley de Newton: el principio de conservación de la energía. En esta expresión cualquier posible 'energía potencial', interacción con un campo externo, entra como 'trabajo externo realizado contra una fuerza conservativa', siendo uno de los W_k trabajos de configuración realizados sobre el sistema. Y como ya se ha visto, algunos de estos sumandos deben ser calculados aplicando leyes específicas de la física.

Ecuación de la energía disipada

Volviendo al bloque que desliza por la superficie rugosa, se tiene que por la segunda ley de Newton se sabe que:

$$m(v_f - v_i) = (F - \mu mg)t_0,$$

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = (F - \mu mg)L,$$

y que el trabajo de las fuerzas externas es $W_{\text{ext}} = FL$, pues sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo, con lo que, por el primer principio de la termodinámica:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + \Delta U_T = FL + Q,$$

Combinando las dos ecuaciones, ecuación de la energía cinética y el primer principio de la termodinámica:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = (F - \mu mg)L,$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + \Delta U_T = FL + Q,$$

se tiene que:

$$\Delta U_T - Q = \mu mgL = Q_0.$$

Esta ecuación explica los efectos térmicos que se pueden observar, entre otros, que el cuerpo que se mueve aumenta su temperatura $\Delta U = mc(T_f - T)$, y que en el proceso se emite energía en forma de calor. Si se admite que la temperatura inicial y final del bloque es la misma (la energía mecánica disipada va a terminar en el suelo B_∞ , que actúa como un foco térmico), en este caso $\Delta U = 0$ y

$$Q = -\mu mgL = Q_0.$$

Es ésta la verdadera ecuación del calor (que coincide numéricamente con la ecuación anteriormente obtenida).

La variación de la entropía del universo para este proceso viene dada por:

$$\Delta S_U = \frac{Q_T}{T} = \frac{\mu mgL}{T},$$

siendo $Q_T \equiv -Q$ el calor absorbido por el foco térmico a temperatura T en contacto diatermo con el bloque que desliza. Esto significa que el proceso de destrucción de energía mecánica por fricción es un proceso irreversible.

[Si se quiere describir que el cuerpo Z aumenta su temperatura y su energía interna, se puede considerar que $Q = 0$ (un proceso rápido) y que $\Delta U = mc(T_f - T_i)$. En este caso

$$T_f = T_i + \frac{-\Delta K_{cm}}{Mc} > T_i,$$

y

$$\Delta \bar{S}_U = Mc \ln \frac{T_f}{T_i}.$$

Esta variación de entropía del universo es menor que en el caso anterior debido a que ahora, entre el bloque a temperatura T_f y el foco a temperatura T_i se podría recuperar algo de energía mecánica, por ejemplo conectando entre ambos una máquina de Carnot.]

Si para el bloque se quiere obtener la misma velocidad final v_f , pero en ausencia de rozamiento, se debe recorrer una distancia \bar{L} menor que L , con:

$$m(v_f - v_i) = F\bar{t}_1,$$

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = F\bar{L},$$

siendo \bar{t}_1 el nuevo tiempo que se necesita para alcanzar la misma velocidad final v_f con la distancia \bar{L} recorrida sin rozamiento;

$$\Delta K_{cm} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F\bar{L},$$

que coincide con el primer principio de la termodinámica para esta fuerza conservativa:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = F\bar{L},$$

Combinando las dos ecuaciones, con rozamiento y sin rozamiento, del primer principio de la termodinámica:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 &= F\bar{L}, \\ \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 &= FL + Q_1,\end{aligned}$$

se tiene que

$$Q_1 = -F(L - \bar{L}).$$

La diferencia de desplazamiento $(L - \bar{L})$ en el caso con rozamiento y en el caso sin rozamiento, multiplicado por la fuerza F , proporciona el trabajo mecánico disipado, convertido en la energía con mayor entropía.

Descripción en el referencial S_A

De acuerdo con el principio de relatividad, un observador en un referencial inercial S_A en configuración estándar respecto del referencial S_∞ , debe llevar a cabo su propia descripción de un proceso utilizando ecuaciones que deben tener la misma forma funcional en S_A que en S_∞ . Así, debe tenerse:

$$\begin{aligned}m(v_{fA} - v_{iA}) &= \sum_k F_{kA} dt_A, \\ \frac{1}{2}m(v_{fA}^2 - v_{iA}^2) &= \sum_k F_{kA} L_A, \\ \Delta K_{cmA} + \Delta U_A &= \sum_k W_{kA} + Q_A.\end{aligned}$$

Naturalmente, la descripción en S_A debe ser compatible con la descripción en S_∞ . Se tiene que el tiempo es absoluto, el mismo para todos los referenciales:

$$dt_A = dt;$$

las fuerzas son invariantes (las fuerzas debidas a la interacción electromagnética no son invariantes bajo transformaciones de Galileo, pero en la física pre-Einstein se consideran invariantes; ver más adelante): $F_A = F = q\mathcal{E}$, $f_A = -\mu mg$; las velocidades se transforman entre referenciales de acuerdo con la transformación de Galileo:

$$\begin{aligned}v_{iA} &= v_i - V, \\ v_{fA} &= v_f - V, \\ v_{cmA} &= v_{cm} - V.\end{aligned}$$

Las longitudes se transforman como:

$$L_A = L - Vt_0.$$

Se debe admitir que en S_A la fuerza de rozamiento f tiene un desplazamiento asociado $L_{fA} = -Vt_0$ y un ‘producto fuerza-desplazamiento’:

$$W_{fA} = fL_{fA} = -\mu mgVt_0.$$

El observador en S_A observa que el suelo sobre el que desliza el cuerpo Z se mueve con velocidad $-V$. Por su propia definición, la energía interna es invariante: $\Delta U_A = \Delta U$. Se tiene:

$$m[(v_f - V) - (v_i - V)] = \sum_k (F - \mu mg)t_0,$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m[(v_f - V)^2 - (v_i - V)^2] &= (F - \mu mg)(L - Vt_0), \\ \frac{1}{2}m[(v_f - V)^2 - (v_i - V)^2] &= F(L - Vt_0) \\ &\quad - \mu mgVt_0 + Q.\end{aligned}$$

En el referencial S_A a la fuerza no conservativa $f = -\mu mg$ se le asocia un desplazamiento $\Delta x_f = -Vt_0$, y un ‘producto fuerza-desplazamiento’ $\mu mgVt_0$, puesto que para el observador en S_A el suelo se mueve con velocidad V . Se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}m[v_f - v_i] &= \sum_k (F - \mu mg)t_0, \\ \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) - Vm[v_f - v_i] &= (F - \mu mg)L \\ &\quad + V(F - \mu mg)t_0, \\ \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) - Vm[v_f - v_i] &= FL \\ &\quad + VF(L - Vt_0)t_0 + Q.\end{aligned}$$

Cada ecuación en S_A se puede dividir en dos ecuaciones, cada una de las cuales se cumple en S_∞ , demostrándose que la descripción en S_A es correcta si también lo es en S_∞ . Se tiene que:

$$Q = -\mu mgL.$$

El calor es un invariante Galileano.

ENERGÍA Y ENTROPÍA

Supóngase que se dispone de una bola de acero que se mueve con cierta velocidad v en un sistema de referencia S_∞ en el que toda una serie de aparatos para transformar energías (péndulos, alternadores, condensadores, etc.) permanecen en reposo. Con una energía total $E = K + U$, un momento lineal $p = mv$ y una energía cinética $K = mv^2/2$, nada impide que toda esa energía cinética se transforme en otro tipo de energía mecánica. Por ejemplo, la bola choca con otra igual que se encuentra en reposo y colgada de un hilo, la primera se detiene, la segunda se eleva en el campo gravitatorio, supuesto uniforme, de la tierra. Esta bola se puede dejar caer mientras eleva una masa igual de agua hasta cierta altura. El agua al descender mueve una turbina que genera electricidad y con esa electricidad se carga un condensador. El condensador cargado se puede utilizar para proporcionar energía cinética a otras bolas mediante un campo eléctrico y cargas depositadas sobre las mismas. Es decir, si se hace un

recuento del estado de cada aparato, se puede ver que con cada energía que desaparece cambia la configuración de otro aparato y que la energía se ha conservado. Con suficiente habilidad, cada proceso es reversible. En cada transformación, la variación de entropía asociada es cero.

En el caso en el que la bola deslize por una superficie rugosa, en reposo en S_∞ , cuando termina por pararse, no hay ningún aparato del que se pueda decir que ha cambiado su configuración. Lo que podría suceder es que los pequeños salientes que han interactuado entre la bola y el suelo se han puesto a vibrar y la energía cinética inicial está en forma de energías cinéticas microscópicas. Con la configuración microscópica adecuada, altamente improbable, la bola y el suelo podrían interactuar de tal manera que la bola saliese del reposo adquiriendo su velocidad inicial. Pero puesto que los pequeños salientes terminan por pararse y disipar esa energía de vibración en forma de fotones o de fonones, ya no hay manera, probabilidad nula, de recuperar la situación inicial. Es en ese momento cuando a la energía que inicialmente fue cinética se le asocia una alta entropía, indicando que el proceso debe ser considerado irreversible.

Así como en la interacción de la bola con un campo conservativo se conserva la energía y su capacidad de realizar trabajo, o en choques elásticos en que se conservan energía y momento lineal, en la interacción con rozamiento la energía se conserva, pero la interacción es con un campo de fuerzas aleatorio, que termina por desaparecer, que hace imposible recuperar la energía inicial con el momento lineal inicial.

Una forma muy curiosa de obtener el principio de Arquímedes es mediante una aplicación del denominado 'principio del mínimo de la energía potencial'. Si una bola de acero se deja sobre un baño de mercurio, idealmente, la bola de acero debería oscilar, entrando de más en el líquido, respecto de lo que le corresponde por el teorema de Arquímedes, y saliendo de nuevo. Pero aunque la bola oscila durante un tiempo, en oscilaciones amortiguadas, termina por pararse. Se tiene un cubo de madera justo encima de la superficie de un líquido encerrado en una probeta. Se deja libre el trozo de madera y después de un cierto tiempo, la madera flota sobre el líquido, con una parte de su volumen sumergido. El volumen sumergido es tal que si la madera se hunde un poco más, y el líquido asciende, la energía potencial aumenta y si la madera flota un poco más, y el líquido desciende, la energía potencial también aumenta. La situación de equilibrio final es la de mínima energía potencial compatible con las condiciones de contorno. La diferencia entre la energía potencial inicial y la final se ha disipado en forma de calor. En realidad, debería suceder que al dejar libre la madera, ésta y el líquido comenzasen a oscilar y así se mantuvieran. En esta situación de oscilación el sistema pasaría por un mínimo de energía potencial y un máximo de energía cinética, hasta situaciones de energía potencial máxima y energía

cinética cero. Pero como hay rozamiento, la energía cinética se disipa hasta alcanzar la máxima entropía compatible con el sistema que es, precisamente, cuando se alcanza el mínimo de energía potencial. Mientras la energía potencial no alcance el mínimo todavía queda energía cinética por disipar. Cuando el conjunto alcanza el equilibrio, cumpliéndose el teorema de Arquímedes, parte de la energía potencial inicial se ha disipado, aumenta la temperatura del líquido y del cuerpo, así como la entropía del universo, demostrándose que el proceso es irreversible.

Con el primer principio de la termodinámica: (i) hay que comprobar que la energía se conserva; (ii) hay que asignar entropía a cada energía que interviene en el proceso y comprobar que la entropía final es mayor o igual que la inicial. Este segundo paso se suele olvidar. Si la entropía final es mayor que la inicial, el proceso se puede producir espontáneamente. Si la variación de entropía es cero, el proceso será mecánicamente reversible y si la entropía final es menor que la inicial, el proceso está prohibido.

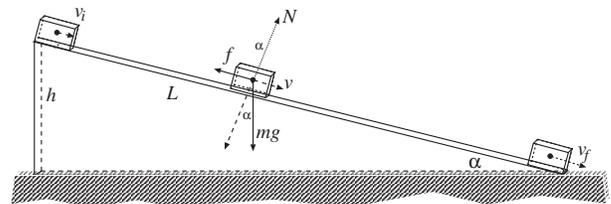


Figura 6. Bloque en un plano inclinado de longitud L , altura h , ángulo α . El coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es μ . Se aplican las reglas fenomenológicas de Amontons y Coulomb para describir la fuerza de fricción.

Considérese el caso de un bloque, de masa m , que desciende por una rampa de ángulo α , longitud L y altura h . Se supone que no hay fuerza de rozamiento entre la rampa y el bloque, con el coeficiente de fricción $\mu = 0$. Se aplica la segunda ley de Newton (ecuación impulso-variación de momento):

$$mg \operatorname{sen} \alpha t_0 = mv_f,$$

y se obtiene la ecuación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mg \operatorname{sen} \alpha L.$$

Con estas ecuaciones, fijados los parámetros, se puede obtener la velocidad final v_f y el tiempo transcurrido t_0 . Aplicando el primer principio de la termodinámica a este proceso, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh,$$

donde $W = mgh = mg \cos \alpha L$ es el trabajo realizado por las fuerzas externas gravitatorias sobre el bloque. Este trabajo se puede poner como variación de la energía potencial, asociada a cada configuración bloque-tierra:

$$mgh \approx m \int_{\infty}^{h_i} \frac{GM_T}{(R_T + r)^2} dr - m \int_{\infty}^{h_f} \frac{GM_T}{(R_T + r)^2} dr ;$$

$$h = h_f - h_i$$

$$mgh \approx -m \int_{h_f}^{h_i} \frac{GM_T}{R_T^2} dr ; g = \frac{GM_T}{R_T^2} .$$

$$mgh \approx m \left[\frac{GM_T}{(R_T + h_i)} - \frac{GM_T}{(R_T + h_f)} \right] ;$$

$$\left(1 + \frac{h}{R_T} \right)^{-1} \approx \left(1 - \frac{h}{R_T} \right) .$$

Para la variación de la energía potencial del bloque la variación de entropía es cero. Se trata de una fuerza conservativa (si se acumula la energía que se puede obtener desde que el bloque viaja desde infinito hasta la distancia $R_T + h$ del centro de la Tierra, es decir, hasta la altura h , se puede proporcionar energía cinética al bloque y devolverlo al infinito). Para la energía cinética de traslación del bloque la entropía también es cero. La entropía final del proceso es igual a la entropía inicial, cero. Esto significa que si se toma una rampa igual a la primera y al bloque situado en su base se le proporciona la misma energía cinética, con la velocidad apuntando hacia arriba, podrá ascender por la rampa hasta alcanzar, exactamente, su altura inicial. Todo el universo, bloque, tierra y rampa, volverían a su mismo estado inicial.

Supóngase ahora que entre la rampa y el cuerpo sí hay una fuerza de rozamiento que se opone al descenso del bloque por la rampa, con $\mu \neq 0$, y con $|f| = \mu mg \cos \alpha$. Por la segunda ley de Newton:

$$(mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha) t_p = mv_p ,$$

donde v_p y t_p son la nueva velocidad final y el nuevo intervalo de tiempo, respectivamente, con la ecuación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} mv_p^2 = (mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha) L = mgh - \mu mg \cos \alpha L .$$

Conocidos los parámetros, incluyendo μ , se obtienen v_p y t_p . Aparentemente el problema está resuelto.

Si se quiere hacer aquí la asignación de entropía y se dice que al 'trabajo de las fuerzas de rozamiento' se le asigna entropía cero (igual que al trabajo de las fuerzas conservativas), se tendría que sería posible el proceso siguiente. Se coloca la segunda rampa, se coloca el bloque

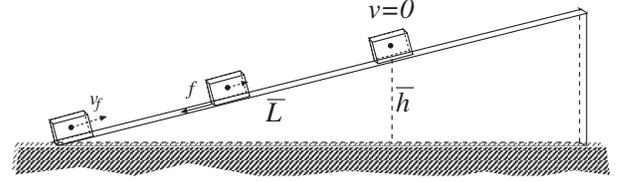


Figura 7. Lanzado con la velocidad inicial v_f , el bloque no alcanza la altura inicial h , sino una menor, debido a que la fuerza de fricción no se invierte respecto al descenso y el la subida se sigue oponiendo al movimiento del bloque.

al pie de la misma y se le proporciona al bloque la misma energía cinética $K = mv_p^2/2$ que tenía al final del proceso, apuntando la velocidad hacia arriba. Si la entropía asociada a la energía disipada por esta fuerza de rozamiento fuese cero, el bloque alcanzaría la misma altura h que tenía al principio. Pero esto no sucede, el bloque queda por debajo, a una altura h_p . Si, en ausencia de rozamiento, lanzado el bloque con la energía cinética $K = mv_p^2/2$ alcanzaría una altura h_r sobre la rampa, entonces

$$mg(h - h_r) = \mu mg \cos \alpha L .$$

Aplicando el primer principio a este problema, considerando que el trabajo termodinámico sólo se refiere a las fuerzas conservativas, se tendría que:

$$\frac{1}{2} mv_p^2 = mgh + Q .$$

Asignando entropías en esta ecuación, que es la ecuación de la energía y, por tanto, la correcta para hacerlo, se tendría que:

$$\Delta S_U = -\frac{Q}{T} = \frac{\mu mg \cos \alpha L}{T} .$$

Esto indica que en el proceso de descenso del bloque por la rampa se ha perdido una energía mecánica (de entropía cero):

$$T \Delta S_U = \frac{\mu mg \cos \alpha L}{T} ,$$

que no se puede recuperar. Sólo se puede recuperar la parte $K = mv_p^2/2$.

Hay una aparente contradicción entre la descripción mecánica, que parece completa, y la descripción termodinámica, que proporciona información adicional e interpreta los resultados.

Si la rampa y el bloque se prepararan exactamente de la misma forma microscópica que tenían cuando el bloque descendió, y nada de la energía se hubiera disipado, al colocar el bloque abajo de la rampa y darle la energía cinética $K = mv_p^2/2$, volvería a subir hasta la misma altura. Es decir, si el bloque al descender 'ordenara' la rampa de tal manera que cuando se le coloque abajo y se le proporcione la energía cinética $K = mv_p^2/2$ vuelva a subir,

el trabajo realizado sería conservativo y tendría asignada entropía cero. (Se puede imaginar que unidos al bloque hay unos muelles microscópicos que no se aprecian, pero capaces de realizar fuerzas conservativas. En su descenso, el bloque se ve frenado y desciende con aceleración menor que la debida a la gravedad. Cuando llega al final de la rampa con velocidad v_p , y con los muelles estirados y acumulando energía mecánica, si se le proporciona la misma energía cinética, pero con la velocidad apuntando hacia arriba, alcanzaría su altura inicial, con los muelles en su estado inicial. La sorpresa de este resultado indicaría que una fuerza que se ha considerado como de rozamiento ha resultado ser conservativa, con una energía ordenada que aunque no se ve, se puede comprobar que existe y que desde ese momento sería interesante buscar. En este caso sí se hablaría del trabajo realizado por los muelles y todo el proceso sería reversible, en ausencia de rozamiento.)

Pero tal ‘ordenación’ de la rampa no sucede, pues el bloque en su descenso desordena los puntos en contacto, que vibran y disipan energía de tal manera que aunque el bloque se coloque al pie de la rampa y se le proporcione la energía $K = mv_p^2/2$, el bloque no alcanzará su altura inicial. La configuración microscópica entre las superficies del bloque y de la rampa es tal que las fuerzas de rozamiento ‘siempre’ se van a oponer al movimiento del bloque, sea en descenso o en ascenso. La probabilidad de que la configuración microscópica de la rampa y el bloque sea tal que el bloque vuelva a subir hasta la misma altura inicial, es cero. Y eso es lo que mide la entropía. Si el bloque pudiera coger energía ordenada de la rampa, enfriándola en el proceso para cumplir con la conservación de la energía, y subir hasta su altura inicial, la entropía del universo disminuiría a lo largo del proceso, y eso no está permitido.

El bloque en su descenso va interaccionando y, por así decirlo, haciendo vibrar las pequeñas puntas de interacción, que disiparán esa energía en forma de calor cuando dejen de vibrar. La probabilidad de que el bloque en su descenso deje colocadas las pequeñas puntas de tal manera que situado al pie de la rampa y proporcionándosele la energía cinética K vuelva a subir hasta su altura inicial es cero.

Para el caso del bloque que desliza la superficie horizontal rugosa B_∞ , sucede algo semejante. En su desplazamiento, las fuerzas van desordenando los puntos de contacto, que se puede imaginar que primero acumulan energía mecánica vibrando, pero que terminan por disiparla en forma de calor, aumentando la entropía de aquella energía. Si se pudiera preservar esas vibraciones microscópicas sin que se amortiguaran y se pudieran preparar las superficies del bloque y de la rampa de tal manera que las fuerzas de rozamiento se invirtieran exactamente, entonces, proporcionándole al bloque la misma energía cinética que tenía el final, con la velocidad apuntando hacia atrás, entonces el bloque Z volvería a su posición

inicial. Pero la probabilidad de hacerlo como se ha indicado es nula, pues no se puede conseguir esa configuración microscópica.

La cuestión es que aunque el primer principio se expresa como suma:

$$\Delta K_{c.m.} + \Delta U + \Delta U_\xi + \dots = \sum_k W_k + W_{dis} + Q + \dots,$$

y hay causas del segundo miembro que ejercen acciones sobre el primer miembro, los únicos intercambios de energía permitidos son aquellos en los que la entropía se conserva o aumenta. Para un bloque que se mueve sobre B_∞ con velocidad inicial v_i , pero sometido únicamente a la fuerza de rozamiento $f = -\mu mg$, se puede escribir que

$$-|\Delta K_{cm}| = Q_T,$$

con la variación de energía cinética de traslación convertida en calor, pues el proceso cursa con aumento de la entropía del universo. Pero no se puede esperar que

$$-Q_T = \Delta K_{cm},$$

y que la disminución espontánea de la energía interna del foco térmico $Q_T = -\Delta U_T$, vaya a conseguir que el cuerpo adquiera energía cinética, pues tal comportamiento cursaría con disminución de la entropía del universo y se violaría el segundo principio de la termodinámica (y eso no se ha observado nunca).

CREACIÓN DE ENERGÍA MECÁNICA

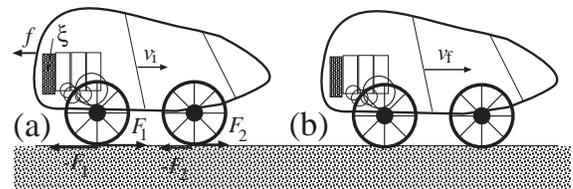


Figura 8. Un automóvil, que funciona quemando un combustible ξ , acelera pasando de una velocidad v_i a una velocidad v_f . Las fuerzas F_1 y F_2 que se aplican sobre las ruedas del coche no realizan trabajo. La fuerza de rozamiento f se opone al movimiento. El automóvil consume $\Delta\xi$ combustible durante el proceso.

Sea un automóvil que desde una velocidad inicial igual a $v_i = 0$, acelera hasta alcanzar una velocidad final v_f (Fig. 8). Es bien conocido que las fuerzas de rozamiento f entre las ruedas y el suelo son fuerzas que no realizan trabajo –si el coche desliza, habrá, además fuerzas de fricción que se opondrán al movimiento, así como la fuerza de rozamiento con el aire–, por lo que la energía cinética final del coche no puede provenir del trabajo realizado por dichas fuerzas. Lo mismo sucede con una persona

que apoyada en una pared y colocada sobre unos patines (para reducir el rozamiento), empuja contra la pared y adquiere una cierta energía cinética o para una persona que en cuclillas sobre el suelo da un salto y se eleva. En todos estos casos se tiene un proceso de creación de energía mecánica en los que intervienen fuerzas que no realizan trabajo.

Para el desplazamiento de un automóvil se tienen las ecuaciones de la segunda ley de Newton, la ecuación del centro de masas y el primer principio de la termodinámica, respectivamente:

$$\begin{aligned}(4F - f)t_0 &= mv_f - mv_i, \\ (4F - f)\Delta x_{\text{cm}} &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2, \\ \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + \Delta U_\xi &= -P\Delta V_\xi + Q,\end{aligned}$$

con una fuerza F aplicada sobre cada rueda y una fuerza de rozamiento f , ninguna de las cuales realiza trabajo, siendo ΔU_ξ la variación de la energía interna de la reacción química de combustión del combustible con el aire y $Q = T\Delta S_\xi + Q_1$, siendo ΔS_ξ la variación de entropía de la reacción química, que debe intercambiarse para garantizar que la entropía del universo no disminuye, y Q_1 un calor cedido por causas irreversibles. La ecuación impulso-momento lineal (segunda ley de Newton) permite obtener la velocidad final v_f si se conocen las fuerzas aplicadas y el intervalo de tiempo t_0 de aplicación de las mismas. La ecuación de la energía cinética (ecuación del centro de masas) permite obtener el desplazamiento del automóvil, previa obtención de la velocidad final v_f . El primer principio de la termodinámica (ecuación de la energía) permite relacionar el consumo de combustible:

$$n\Delta g_\xi = n(\Delta u_\xi + P\Delta v_\xi - T\Delta s_\xi),$$

a través de la variación de la función de Gibbs de la reacción de combustión, donde n es el número de moles de combustible gastado, para conseguir el desplazamiento del automóvil, con la variación de la energía cinética del centro de masas del cuerpo:

$$-n\Delta g_\xi = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + Q_1,$$

siendo Q_1 el calor en exceso cedido al exterior.

Por tanto, es la disminución de la función de Gibbs en la reacción de combustión del combustible (de toda la energía interna liberada en la reacción de combustión, una parte se utiliza en conseguir que los gases de la combustión se expandan contra la presión atmosférica y otra parte debe cederse al foco térmico externo para asegurarse de que la variación de entropía del universo es positiva –o, al menos, nula–, compensando el aumento de la entropía del foco térmico la posible disminución de la entropía en la reacción química; como resultado, la disminución de la función de Gibbs en la reacción química

es el máximo trabajo mecánico que se puede conseguir) la que proporciona la energía libre que realmente mueve el coche, con las fuerzas aplicadas sobre los neumáticos como intermediarios para conseguirlo.

En el proceso de aceleración del automóvil, a la reacción química se le debe asignar una variación en la entropía, que suele ser positiva en las reacciones exotérmicas, aunque no siempre. Esta variación de entropía hay que sumarla a la variación de entropía debido al calor cedido al exterior, al suelo sobre el que se mueve el automóvil, y que dará lugar a un aumento de la entropía. Se ha producido energía mecánica, a la que se le puede asignar entropía cero, pero el proceso está permitido, y de hecho se produce, puesto que en el balance de entropía, la entropía final es mayor que la inicial.

Sea un automóvil que se desplaza con velocidad constante v , pues la fuerza de rozamiento contra el aire es igual a la fuerza del suelo contra sus ruedas $(4F - f) = 0$. Puesto que estas fuerzas no realizan trabajo, se tiene que por el primer principio:

$$-n\Delta g_\xi = Q_1.$$

En el desplazamiento del automóvil, la energía libre del combustible en su combustión se va transformando en calor por rozamiento con el aire. Para un observador que se encuentra en un referencial que se mueve a la misma velocidad v que el coche, por lo que para él el automóvil aparece como parado, la conclusión de este observador es la misma que la del anterior, que el gasto de combustible se va en forma de calor, esta vez sin que el automóvil se desplazarse. El consumo de combustible es un invariante Galileano: todos los observadores inerciales miden el mismo gasto de combustible.

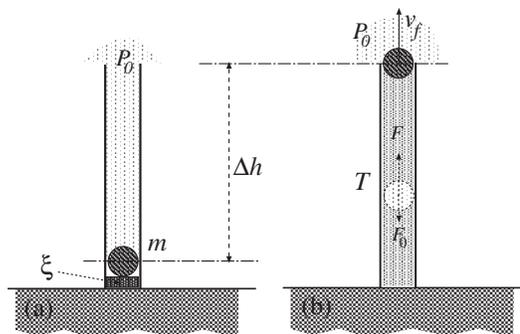


Figura 9. Una bala de cañón es lanzada por la explosión producida en una reacción química con un explosivo ξ . Al final del tubo del cañón, situado a una altura Δh , la bola adquiere una velocidad v_f . Los gases de la explosión se expanden contra la presión atmosférica externa P_0 .

Considérese ahora otro proceso de creación de energía mecánica en el que una bala de cañón es lanzada por la explosión producida en una reacción química con un explosivo (Fig. 9). Se supone, por simplicidad, que los gases producidos en la reacción química ejercen una fuerza

constante F sobre la bola del cañón. La gravedad también actúa sobre la bola. Así, por la segunda ley de Newton:

$$mdv = [F - (F_0 + mg)] dt, \quad (18)$$

donde $F_0 = -P_0A$ es la fuerza de la atmósfera sobre la bola o fuerza que pierden los gases debido a que deben expandirse contra la atmósfera. La ecuación diferencial del centro de masas viene dada por:

$$m \frac{v^2}{2} = [F - (F_0 + mg)] dx, \quad (19)$$

Integrando ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} mv_f &= [F - (F_0 + mg)] t_0, \\ m \frac{v_f^2}{2} &= [F - (F_0 + mg)] \Delta h. \end{aligned}$$

El primer principio de la termodinámica aplicado al proceso indica que:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \Delta U_\xi = [F - (F_0 + mg)] \Delta h + T \Delta S_\xi + Q_i, \quad (20)$$

donde $Q = T \Delta S_\xi + Q_i$ es el calor cedido al exterior, que debe incluir el calor necesario para asegurarse de que en el proceso la entropía del universo no disminuye.

Suponiendo que todos los procesos químicos se pueden llevar a cabo de forma reversible y que temperatura y presión externas son las estándar, entonces:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mg \Delta h = -\Delta G_\xi^\ominus, \quad (21)$$

donde $\Delta G_\xi^\ominus = \Delta U_\xi + P^\ominus \Delta V_\xi - T^\ominus \Delta S_\xi$, con una variación de volumen $\Delta V_\xi = AL$ y $P_0 \equiv P^\ominus$ y $T \equiv T^\ominus$. El origen último de las energías mecánicas obtenidas es la disminución de la función de Gibbs de la reacción química.

MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

El tratamiento de la rotación es otro tema que habitualmente no está bien tratado en los libros de texto. Considérese un disco que se va a hacer girar mediante dos cuerdas enrolladas que se van a desenrollar (Fig. 10). Si una fuerza F se aplica a una distancia r_1 y otra fuerza $-F$ se aplica a una distancia r_2 , al cabo de un intervalo de tiempo t_0 , el disco girará con una cierta velocidad angular ω_f , habiendo comenzado con velocidad angular ω_i .

La segunda ley de Newton aplicada a este problema, $\sum_k F_k = 0$, indica que el centro de gravedad del disco no se va a mover. Lo que se suele hacer a continuación es aplicar lo que se viene denominando ‘aplicación de la segunda ley de Newton a la rotación’. Se define

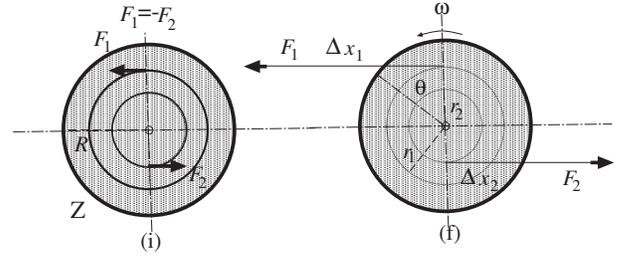


Figura 10. Un disco Z de radio R y masa M , momento de inercia $I = MR^2/2$, se hace girar aplicando dos fuerzas F_1 y F_2 , iguales y de sentido contrario, a los extremos de dos cuerdas, previamente enrolladas a radios r_1 y r_2 , respectivamente, en discos concéntricos del propio disco Z . Las cuerdas se desenrollan sin deslizar. Cuando ha transcurrido un tiempo Δt , las fuerzas se han desplazado $\Delta x_1 = r_1 \Delta \theta$ y $\Delta x_2 = r_2 \Delta \theta$, respectivamente, siendo $\Delta \theta$ el ángulo girado por el disco y ω su velocidad angular.

el producto vectorial de un brazo por su fuerza aplicada $r_k \times F_k$, y se define el torque de las fuerzas aplicadas $\tau = \sum_k r_k \times F_k$. Lo mismo se hace con la velocidad $r_i \times v_i$ de cada partícula del cuerpo sólido que gira (estas operaciones son diferentes), y se define el momento angular total $L = \sum_j m_j r_j \times v_j$, que se puede expresar como $L = I\omega$, siendo I el momento de inercia del sólido y $\omega = d\theta/dt$, su velocidad angular. Se plantea entonces el cumplimiento de la ecuación:

$$I d\omega = \tau dt,$$

a semejanza de la segunda ley de Newton. En el caso del disco de la figura, se tendrá:

$$I(\omega_f - \omega_i) = F(r_1 + r_2)t_0, \quad (22)$$

con $I = MR^2/2$, de donde se podrá obtener ω_f .

Procediendo de esta forma, puede parecer que partiendo de la segunda ley de Newton y definiendo distintas operaciones matemáticas entre brazos y fuerzas y entre brazos y velocidades, y luego igualando las magnitudes obtenidas, se pueden encontrar diferentes leyes de la Física.

En realidad, la expresión anterior Ec. (22) se puede obtener aplicando el primer principio de la termodinámica, en la que la energía cinética de rotación forma parte de la energía interna – como energía cinética de las partículas del cuerpo respecto del centro de masas – [15]. Así como la energía cinética de traslación K_{cm} de un cuerpo depende del sistema de referencia en el que ésta se mida, la velocidad del centro de masas del cuerpo, la energía cinética de rotación K_R es independiente de la velocidad del observador inercial. Esta consideración ya debe dar una cierta idea de que la energía cinética del centro de masas de un cuerpo y su energía cinética de rotación son conceptos muy diferentes.

Aplicando el primer principio al disco, se tiene que el

trabajo W realizado en las cuerdas que se desenrollan es:

$$W = F\Delta x_1 + F\Delta x_2 = F(r_1 + r_2)\Delta\theta = \tau\Delta\theta,$$

siendo $\Delta\theta$ el ángulo común girado. Por la segunda ley de Newton, $\Delta K_{\text{cm}} = 0$. Si un disco gira con velocidad angular ω , sumando las energías cinéticas de traslación respecto del centro de masas cada partícula, $\sum_j m_j v_j^2/2$, con aquellas situadas a distancia r_j girando con velocidad lineal $v(r_j) = r_j\omega$, se tiene que su contribución a la energía interna es de la forma $U(\omega) = I\omega^2/2$, de donde

$$\Delta U_{\text{R}} = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2.$$

Admitiendo que $Q = 0$, se tiene la ecuación de la energía:

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = F(r_1 + r_2)\Delta\theta.$$

Puesto que se cumple la relación:

$$\frac{d[\omega^2/2]}{d\omega} = \omega = \frac{d\theta}{dt},$$

se tiene que:

$$\frac{Id[\omega^2/2]}{Id\omega} = \frac{\tau d\theta}{\tau dt},$$

por lo que también se cumplen simultáneamente las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 &= \tau\Delta\theta, \\ I\omega_f - I\omega_i &= \tau t_0, \end{aligned}$$

donde t_0 es el tiempo durante el que se aplican los torques y $\Delta\theta$ el ángulo total girado. A partir de la ecuación impulso angular-variación del momento angular (ecuación Poinset-Euler) se puede obtener la ecuación de la energía cinética de rotación, y viceversa, pues:

$$\begin{aligned} Id\omega &= \tau dt, \\ I\omega d\omega &= \tau\omega dt, \\ Id\left(\frac{\omega^2}{2}\right) &= \tau d\theta, \\ \frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2) &= \tau\Delta\theta. \end{aligned}$$

La ‘aplicación de la segunda ley de Newton a la rotación’ se obtiene, en realidad, del primer principio de la termodinámica y de una ecuación matemática. Por tanto, el tomar el producto vectorial de brazos y fuerzas, torques, y de brazos y velocidades, momento angular, viene sugerido por el primer principio de la termodinámica. Cualquier otra operación matemática que se definiera debería también ser acorde a dicho principio.

Al igual que sucede con la segunda ley de Newton original:

$$\sum_k F_k dt = dp; p = \sum_j m_j v_j = Mv_{\text{cm}},$$

(y no la más restrictiva $\sum_k F_k dt = Mdv_{\text{cm}}$ para masa M constante), se introduce una hipótesis adicional proponiendo la ecuación de la rotación:

$$\sum_k r_k \times F_k dt = dL; L = \sum_j m_j r_j \times v_j = I\omega,$$

(y no la más restrictiva $\sum_k r_k \times F_k dt = Id\omega$, para momento de inercia I constante).

Rotación y disipación

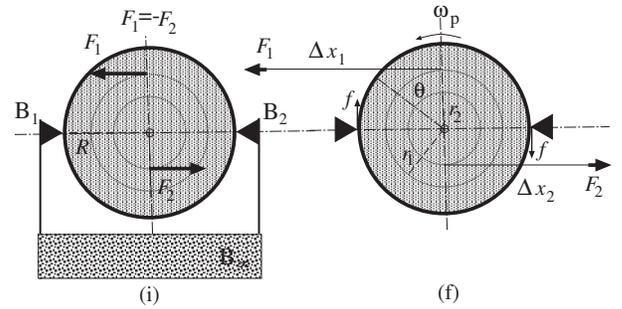


Figura 11. El proceso descrito en la Fig. 10 se modifica introduciendo dos frenos B_1 y B_2 , tales que ejercen cada uno de ellos una fuerza de rozamiento f , igual en cada freno y de sentido contrario, sobre el disco Z . Con las mismas fuerzas F_1 y F_2 anteriores, aplicadas durante un intervalo de tiempo $\Delta t_p \geq \Delta t$, y para los mismos desplazamientos de las fuerzas, Δx_1 y Δx_2 , anteriores, y el mismo ángulo $\Delta\theta$ girado, la velocidad angular final del disco es menor que sin frenos, $\omega_p \leq \omega$.

Supóngase ahora que en el dispositivo descrito en la Fig. 10, se introducen dos frenos, B_1 y B_2 , unidos a un sistema de masa cuasi-infinita B_∞ (por ejemplo, imanes potentes fijos que se aplican cerca del disco, hecho, por ejemplo, de cobre) (Fig. 11). Las fuerzas de rozamiento, f y $-f$, ejercidas por los frenos sobre el disco se aplican siempre en el mismo punto del disco, por lo que no realizan trabajo. Por aplicación de la ecuación de Poinset-Euler, considerando que el torque total incluye fuerzas conservativas, las aplicadas a los extremos de las cuerdas enrolladas en el disco, y la fuerzas no conservativas ejercidas por los frenos, se tiene la ecuación del impulso angular-momento angular:

$$\begin{aligned} I(\omega_f - \omega_i) &= [(r_1 + r_2)F - 2fR]\bar{t}_0, \\ \frac{1}{2}I(\omega_f^2 - \omega_i^2) &= [(r_1 + r_2)F - 2fR]\bar{\theta}_0, \end{aligned}$$

y la correspondiente ecuación de la energía cinética, siendo \bar{t}_0 el nuevo tiempo que se tarda en alcanzar la velocidad ω_f y $\bar{\theta}_0$ el ángulo girado hasta conseguirlo. Esta

ecuación no es tampoco el teorema trabajo energía, pues aunque el producto $(r_1 + r_2) F \bar{\theta}_0$ sí es un trabajo, el de las fuerzas aplicadas al extremo de las cuerdas por el desplazamiento del extremo de dichas cuerdas, el producto $2fR\bar{\theta}_0$, con unidades de energía, no es un trabajo, pues las fuerzas de fricción no tienen desplazamiento asociado. El efecto de las fuerzas de fricción ejercidas por estos frenos es, por un lado, que se necesita un intervalo de tiempo mayor, $\bar{t}_0 \geq t_0$, que el que se necesita en ausencia de frenos, para conseguir que las cuerdas se desenrollen hasta alcanzar las mismas longitudes Δx_1 y Δx_2 (y, por lo tanto, que dichas fuerzas realicen el mismo trabajo sobre el disco que en ausencia de frenos) y que gire un ángulo mayor $\bar{\theta}_0 > \theta_0$, y, por otro lado, el trabajo realizado por las fuerzas F_1 y F_2 sobre el disco sea mayor que el trabajo en ausencia de frenos. Aplicando el primer principio de la termodinámica:

$$\frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) = (r_1 + r_2) F \bar{\theta}_0 + Q,$$

pues sólo las fuerzas F_1 y F_2 realizan trabajo. Comparando la ecuación de la energía cinética de rotación y el primer principio se tiene que:

$$Q = -2fR\bar{\theta}_0,$$

y comparando el primer principio en ausencia y presencia de rozamiento, se tiene que:

$$Q = -(r_1 + r_2) F (\bar{\theta}_0 - \theta).$$

La variación de entropía del universo en este proceso viene dada por:

$$\Delta S_U = \frac{Q_T}{T_i} = \frac{(r_1 + r_2) F (\bar{\theta}_0 - \theta)}{T} > 0.$$

Este cálculo demuestra que el proceso ha sido irreversible y que las fuerzas de rozamiento son disipativas.

Si se hace:

$$\begin{aligned} I (\bar{\omega}_f - \omega_i) &= [(r_1 + r_2) F - 2fR] \bar{t}_1, \\ \frac{1}{2} I (\bar{\omega}_f^2 - \omega_i^2) &= [(r_1 + r_2) F - 2fR] \theta_0, \end{aligned}$$

para que se gire el mismo ángulo θ_0 , alcanzando menor velocidad angular, con el primer principio expresado ahora como

$$\frac{1}{2} I \bar{\omega}^2 - \frac{1}{2} I \omega_p^2 = (r_1 + r_2) F \theta_0 + Q_1,$$

y que si esta desaparición de energía mecánica (en realidad energía interna, aunque no sometida a las leyes de la entropía) se asocia a calor, entonces:

$$Q_1 = -2fR\theta_0.$$

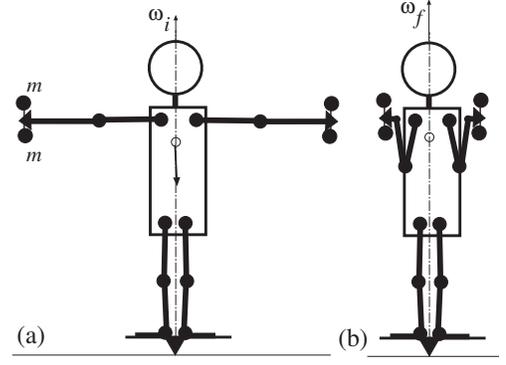


Figura 12. (a) Una persona gira sobre sí misma con velocidad angular inicial ω_i y momento de inercia inicial $I_i = I_0 + 4md^2$. (b) la misma persona gira sobre sí misma con velocidad angular final ω_f y momento de inercia $I_f = I_0$.

Rotación y creación de energía mecánica

También en un proceso de rotación se puede ver aumentada la energía mecánica. Por ejemplo, en el caso de la patinadora que está girando con cierta velocidad angular, contrae los brazos y varía su velocidad angular (Fig. 12), se tiene que $\sum_k F_k = 0$ y $\sum_k r_k \times F_k = 0$. En este caso, con $I_i \omega_i = I_f \omega_f$, por el primer principio de la termodinámica se tiene que, cuando estira los brazos, alejándolos del cuerpo, con $I_f > I_i$, se tiene:

$$\frac{1}{2} I_f \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 + \Delta U_\xi = Q,$$

y una variación de la energía cinética de rotación de:

$$\Delta K_R = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \left[\frac{I_i}{I_f} - 1 \right] < 0.$$

En este caso, la patinadora no necesita realizar un trabajo interno y parte de la energía cinética de rotación inicial se va en forma calor cedido al foco térmico, con el correspondiente aumento de la entropía del universo. El aumento de la entropía del universo indica que el proceso inverso no se puede producir del mismo modo. Así, cuando la patinadora encoge los brazos, acercándolos al cuerpo, ahora con $I_f < I_i$, se tiene que la energía cinética de rotación ha aumentado:

$$\Delta K_R = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \left[\frac{I_i}{I_f} - 1 \right] > 0.$$

Si no se considera otro efecto, parecería que el foco térmico ha cedido calor a la patinadora, disminuyendo la entropía del foco térmico y éste de ha transformado en energía cinética de rotación, un tipo de energía mecánica con entropía cero. Lo que sucede en realidad es que se deben producir reacciones químicas capaces de producir una energía de rotación a expensas de la disminución de la energía libre en estas reacciones, cediendo además calor al exterior y aumentando la entropía del universo.

Sí se produce un aumento de la energía mecánica, con entropía cero, pero debido al aumento de la entropía total de la reacción química –la patinadora debe consumir alimentos – y del calor cedido al exterior. Por el primer principio:

$$\frac{1}{2}I_f\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 + \Delta U_\xi = -P^\ominus\Delta V_\xi + T^\ominus\Delta S_\xi + Q_1.$$

Con $I_f < I_i$ y $\omega_f > \omega_i$,

$$\frac{1}{2}I_i\omega_i^2 \left(\frac{\omega_f}{\omega_i} - 1 \right) = -\Delta G_\xi^\ominus + Q_1. \quad (23)$$

La energía cinética de rotación adicional proviene de la disminución de la función de Gibbs de las reacciones químicas que se producen en el interior del cuerpo de la persona que contrae los brazos.

INVARIANTES GALILEANOS

Reordenando el primer principio para que en el primer miembro aparezcan aquellas magnitudes mecánicas que intervienen en él, y en el segundo miembro las magnitudes termodinámicas, se tiene:

$$\Delta K_{\text{cm}} - (W_{\text{ext}} + W_{\text{dis}} + \dots) = Q - (\Delta U + \Delta U_\xi + \dots).$$

Para un observador en un referencial S_A , el mismo proceso se describe como:

$$\Delta K_{\text{cmA}} - (W_{\text{extA}} + W_{\text{disA}} + \dots) = Q_A - (\Delta U_A + \Delta U_{\xi A} + \dots).$$

Puesto que tanto ΔU como Q se ha concluido que son invariantes Galileanos, las diferencias:

$$\begin{aligned} G_M &\equiv \Delta K_{\text{cm}} - W = \Delta K_{\text{cmA}} - W_A, \\ G_T &\equiv Q_A - \Delta U_A = Q - \Delta U, \end{aligned}$$

deben ser también invariantes Galileanos [22]. Todos los observadores inerciales mediran estas mismas diferencias [23]. Para aquellos procesos puramente mecánicos, en los que no intervengan fuerzas no conservativas $G_M = \Delta K_{\text{cm}} - W = 0$. En aquellos procesos en los que intervengan fuerzas no conservativas no disipativas, entonces $\Delta K_{\text{cm}} + \Delta K_R = W_{\text{ext}}$. La prueba de que en un proceso intervienen fuerzas no conservativas disipativas será que $\Delta K_{\text{cm}} - W \neq 0$. Un proceso en el que intervengan fuerzas disipativas se desarrollará con un incremento en la entropía del universo.

(0) Si no hay efectos disipativos ($Q = 0$) y el cuerpo no varía su energía interna ($\Delta U = 0$), la igualdad:

$$\Delta K_{\text{cm}} - W_{\text{ext}} = \Delta K_{\text{cmA}} - W_{\text{extA}},$$

con $W_{\text{ext}} = -\Delta V(x)$ como variación de una energía potencial, es:

$$\Delta K + \Delta V(x) = 0,$$

o principio de conservación de la energía mecánica.

(i) Bloque que se desplaza con rozamiento sobre una superficie. En el referencial S_∞ , en el que el suelo permanece en reposo, se tienen las magnitudes:

$$\begin{aligned} \Delta K_{\text{cm}} &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2, \\ W_{\text{ext}} &= FL, \\ \Delta U &= 0, \\ Q &= -\mu mgL. \end{aligned}$$

Se tienen las diferencias:

$$\begin{aligned} G_M &\equiv \Delta K_{\text{cm}} - W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - FL, \\ G_T &\equiv Q - \Delta U = -\mu mgL. \end{aligned}$$

En el referencial S_A , en configuración estándar con velocidad V respecto de S_∞ se tienen:

$$\begin{aligned} \Delta K_{\text{cmA}} &= \frac{1}{2}mv_{fA}^2 - \frac{1}{2}mv_{iA}^2, \\ W_{\text{ext}} &= FL_A + fL_{fA}, \\ \Delta U_A &= 0, \end{aligned}$$

Con las transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned} v_{fA} &= v_f - V, \\ v_{iA} &= v_i - V, \\ L_A &= L - Vt_0, \\ L_{fA} &= -Vt_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{MA} &\equiv \Delta K_{\text{cmA}} - W_A \\ &= \frac{1}{2}m(v_f - V)^2 - \frac{1}{2}m(v_i - V)^2 \\ &\quad - F(L - Vt_0) + \mu mgVt_0, \\ G_{TA} &\equiv Q_A - \Delta U_A. \end{aligned}$$

Puesto que se cumple que

$$mv_f - mv_i = (F - \mu mg)t_0,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} G_{MA} &= G_M, \\ Q_A &= -\mu mgL. \end{aligned}$$

El calor es un invariante Galileano.

(ii) Disco que gira bajo la acción de dos fuerzas iguales y opuestas y con dos frenos (aplicados a ‘y cuarto’ y a ‘menos cuarto’), también opuestos.

$$\begin{aligned} \Delta K_{\text{cm}} &= 0, \\ W_{\text{ext}} &= (+F)(+\Delta x_1) + (-F)(-\Delta x_2) = F(r_1 + r_2)\Delta\theta, \\ \Delta U &= \frac{1}{2}I\omega_f^2, \\ Q &= -2fR\Delta\theta. \end{aligned}$$

Se tienen las diferencias:

$$G_M \equiv \Delta K_{cm} - W = F(r_1 + r_2)\Delta\theta,$$

$$G_T \equiv Q - \Delta U = -2fR\Delta\theta - \frac{1}{2}I\omega_f^2.$$

En S_A :

$$\Delta K_{cmA} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV^2 = 0,$$

$$W_{extA} = W_1 + W_2 + W_{f1} + W_{f2} = F(r_1 + r_2)\Delta\theta,$$

$$W_1 = Fr_1\Delta\theta - FVt_0,$$

$$W_2 = Fr_2\Delta\theta + FVt_0,$$

$$W_{f1} = -fVt_0,$$

$$W_{f2} = +fVt_0,$$

$$\Delta U_A = \frac{1}{2}I\omega_f^2,$$

$$G_{MA} \equiv \Delta K_{cmA} - W_A = F(r_1 + r_2)\Delta\theta,$$

$$G_{TA} \equiv Q_A - \Delta U_A = Q_A - \frac{1}{2}I\omega_f^2,$$

$$Q_A = Q.$$

(iii) Un coche que acelera desde v_i hasta v_f .

$$\Delta K_{cm} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2,$$

$$W_{ext} = 0,$$

$$\Delta U = \Delta G_\xi,$$

$$Q = Q_I.$$

Se tienen las diferencias:

$$G_M \equiv \Delta K_{cm} - W_{ext} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2,$$

$$G_T \equiv Q - \Delta U = Q - \Delta G_\xi.$$

En S_A :

$$\Delta K_{cmA} = \frac{1}{2}m(v_f - V)^2 - \frac{1}{2}m(v_i - V)^2,$$

$$W_{extA} = W_f = 4fL,$$

$$\Delta U_A = \Delta G_\xi,$$

Con $mv_f - mv_i = 4ft_0$, se tiene que:

$$G_{MA} \equiv \Delta K_{cmA} - W_A = \Delta K_{cm},$$

$$G_{TA} \equiv Q_A - \Delta U_A,$$

$$Q_A = Q.$$

DISCO QUE DESCIENDE POR UNA RAMPA

Para ver el papel de cada una de las hipótesis físicas, segunda ley de Newton, ecuación de la rotación y primer principio de la termodinámica, así como el de las

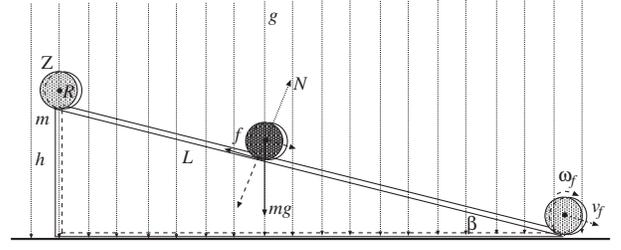


Figura 13. Disco Z, masa m y radio R , que se mueve en un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = (0, -g)$, en reposo en el referencial S_∞ . El disco Z, con velocidad inicial nula, desciende por una rampa de ángulo β , longitud L y altura h . La velocidad final de su centro de masas es v_f y su velocidad angular final es ω_f .

ecuaciones derivadas, ecuación de la energía cinética de traslación y ecuación de la energía cinética de rotación, se elige el problema de un disco que desciende por una rampa. En el primer caso sin deslizar (la fuerza necesaria para cumplir la condición de rodadura es menor que la fuerza de rozamiento) y en otro caso deslizando (el ángulo de la rampa es tan grande que la fuerza necesaria para cumplir la condición de rodadura es mayor que la de rozamiento por lo que el cuerpo desliza) (Fig. 13).

1. El disco, momento de inercia $I = mR^2/2$, desciende cumpliéndose la condición de rodadura: en todo momento la velocidad lineal del c. m. v y la velocidad angular de rotación ω se relacionan como: $v = \omega R$.

(ia) segunda ley de Newton $\sum_k F_k dt = dp$, que para un cuerpo de masa constante, $\sum_k F_k dt = m dv$:

$$(mg \sen \beta - f) t_0 = mv_f - mv_i,$$

$$(mg \sen \beta - f) L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2,$$

con:

(ib) la ecuación del centro de masas o de la energía cinética. La fuerza f es la fuerza de rozamiento que ejerce la rampa sobre el disco.

(iia) ecuación Poincot-Euler, $\sum_k r_j \times F_k dt = dL$, que para un cuerpo de momento de inercia constante, $\sum_k \tau_k dt = I d\omega$:

$$fRt_0 = I\omega_f - I\omega_i,$$

$$fR\theta_0 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2,$$

con:

(iib) la ecuación de la energía cinética de rotación.

(iic) condición de rodadura $v_i = R\omega_i$ y $v_f = R\omega_f$.

(iii) primer principio $\Delta K_{cm} + \Delta K_R = W + Q$, se tiene:

$$(mg \sen \beta - f) L + fR\Delta\theta = mgL \cos \beta + Q,$$

con $W = mgL \cos \beta$ pues la fuerza f no realiza trabajo. Esta ecuación junto con la ecuación del centro de masas permite obtener que $Q = 0$ y que:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = mgh.$$

En ausencia de fuerzas conservativas se tiene la conservación de la energía mecánica.

Como invariante Galileano para este proceso se tiene:

$$G_M = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mgh = - \left[\frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \right].$$

La variación de energía cinética de rotación es un invariante relativista, formando parte de la energía interna del sistema.

Se aplican tres hipótesis físicas diferentes, con sus correspondientes ecuaciones, dos ecuaciones derivadas y la condición de rodadura. Seis ecuaciones para seis incógnitas. Dados h y β , se pueden obtener t_0 , ω_f , v_f , la fuerza f , el ángulo girado θ . La ecuación del primer principio permite obtener que $Q = 0$.

La entropía inicial es cero, así como la entropía final. Si al final de la rampa se coloca el mismo disco con la misma energía cinética de traslación, con la velocidad apuntando hacia arriba y la misma velocidad angular, cumpliéndose la condición de rodadura, el disco ascenderá hasta su misma altura inicial.

Si al resolver el problema se obtiene que f debe ser mayor que $f > \mu mg \cos \theta$ entonces no se cumplirá la condición de rodadura y el problema debe resolverse considerando que el disco desliza.

2. Sin cumplimiento de la condición de rodadura, se tiene que $v \neq \omega R$. Se tiene una fuerza de rozamiento $f = -\mu mg \cos \theta$ (máxima fuerza de rozamiento f que se puede conseguir entre el disco y la rampa).

(ia) segunda ley de Newton:

$$(mg \sin \beta - \mu mg \cos \beta) t_0 = mv_f - mv_i,$$

$$(mg \sin \beta - \mu mg \cos \beta) L = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2,$$

con:

(ib) la ecuación del centro de masas o de la energía cinética.

(iia) ecuación Poinot-Euler

$$\mu mg \cos \beta R t_0 = I\omega_f - I\omega_i,$$

$$\mu mg \cos \beta R \theta_0 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2,$$

con:

(iib) la ecuación de la Energía Cinética de Rotación.

(iii) primer principio. Por simplicidad, con $v_i = R\omega_i$,

$$(mg \sin \beta - \mu mg \cos \beta) L + \mu mg \cos \beta R \theta_0 = mgL \cos \beta + Q$$

con

$$Q = -\mu mg \cos \beta (L - R\theta_0)$$

y

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = mgh + Q.$$

En presencia de fuerzas disipativas no se conserva la energía mecánica y parte de ella se transforma en otras formas de energía con entropía no nula (calor).

Como invariante Galileano se tiene:

$$G_M = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - mgh$$

$$= - \left[\frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \right] + Q.$$

Tanto el calor como la variación de energía cinética de rotación son invariantes Galileanos.

Se tienen cinco ecuaciones independientes. Conociendo h , β y μ , se determinan t_0 , v_f , ω_f , θ_0 y Q .

La entropía del universo final es mayor que la inicial en:

$$\Delta S_U = \frac{\mu mg \cos \beta (L - R\theta_0)}{T}.$$

Si al final de la rampa se coloca el mismo disco con la misma energía cinética de traslación que tenía al final, con la velocidad apuntando hacia arriba y la misma velocidad angular que tenía, pero apuntando la velocidad angular en sentido contrario, sin cumplirse la condición de rodadura, el disco no ascenderá hasta su misma altura inicial (Fig. 14).

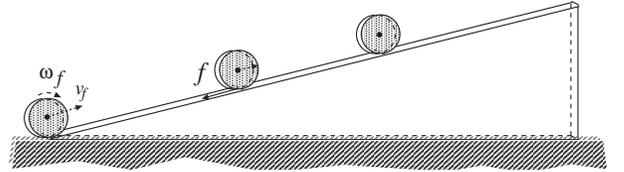


Figura 14. El disco Z, con velocidad inicial v_f y velocidad angular ω_f , asciende por una misma rampa por la que descendió sin alcanzar su altura inicial.

ECUACIONES NO COHERENTES

El principal problema con la visión ‘mecanicista newtoniana’ de la física es que no es ni correcta ni completa en algunos de los casos en que se utiliza. Siendo la energía un concepto central en física, la principal carencia de la descripción newtoniana es doble: (i) no asigna momento lineal a determinadas formas de energía, como, por ejemplo, el calor; (ii) no etiqueta cada cantidad de energía reconocible con su entropía. Decir que la energía cinética inicial, por ejemplo, $K = 60$ J, de un bloque de plomo que se mueve como un todo con cierta velocidad, se ha disipado en forma de calor, no informa sobre lo que ha sucedido con el momento lineal inicial que aquella energía tenía asociado ni informa de que los 60 J de energía en forma de calor ya nunca se podrán volver a transformar en energía cinética del bloque como un todo. Después de Einstein se sabe que toda forma de energía debe llevar asociado momento lineal, aunque sea cero en algún sistema de referencia, y después de la termodinámica se sabe que toda forma de energía debe llevar asociada entropía, aunque ésta pueda ser cero para las energías mecánicas.

Por extensión poco meditada, la ecuación de Newton se utiliza en ciertos contextos, por ejemplo, la interacción electromagnética, en los que se sabe que no es conceptualmente correcto utilizarla, pues, por ejemplo, la interacción electromagnética no es covariante bajo transformaciones de Galileo mientras que la segunda ley de Newton original (pre-Einstein) no es covariante bajo transformaciones de Lorentz. Unir la fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton en una misma ecuación es, además de un error, una falta de elegancia hacia científicos como Galileo, Einstein, Lorentz o Minkowski.

1. Considérese el caso de una ‘vela solar’, un dispositivo para viajar por el espacio aprovechando la radiación solar (Fig. 28). Si a una distancia d del Sol, en el referencial S_∞ en el que el Sol se encuentra en reposo, el flujo de fotones incidentes de frecuencia ν_r (por simplicidad, se supone que todos los fotones llegan con dicha frecuencia), por unidad de superficie es \dot{N} , sobre una vela de sección A se ejercerá un impulso:

$$\mathcal{I} = \dot{N}A \frac{h(\nu_s + \nu_r)}{c} dt,$$

(en la superficie plateada de la vela los fotones rebotan), siendo ν_s la frecuencia de los fotones salientes. (Este problema se suele resolver mal en los libros de texto. Se suele plantear únicamente la segunda ley de Newton y se suele considerar que los fotones que rebotan lo hacen con la misma frecuencia que los que inciden. Pero en ese caso los fotones no perderían energía con lo que la ganancia de energía cinética de la vela violaría el principio de conservación de la energía). Se plantea entonces la segunda

ley de Newton para el movimiento de la vela debido al choque contra ella de los fotones, por simplicidad, todos ellos con la misma frecuencia ν , en el referencial S_∞ , en el que el Sol permanece en reposo:

$$m dv = \dot{N}A \frac{h(\nu_s + \nu_r)}{c} dt.$$

Para un intervalo de tiempo t_0 :

$$m(v_f - v_i) = \dot{N}A \frac{h(\nu_s + \nu_r)}{c} t_0,$$

siendo v_f la velocidad final de la vela. La correspondiente ecuación del centro de masas, obtenida integrando la ecuación anterior, es:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \dot{N}A \frac{h(\nu_s + \nu_r)}{c} L,$$

donde $L = vt_0$ es el espacio recorrido por la vela durante t_0 . Para la ecuación de la energía, donde se considera que la ganancia en energía cinética de la vela proviene de la disminución de energía en los fotones que inciden sobre ella, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \dot{N}Ah(\nu_r - \nu_s)t_0,$$

Comparando la ecuación del centro de masas con la ecuación de la energía, se tiene que la ecuación que permite obtener la frecuencia ν_s de los fotones salientes:

$$\nu_s = \nu_r \frac{c - v}{c + v} < \nu_r.$$

Estas ecuaciones no son invariantes bajo transformaciones de Galileo (ni tampoco bajo transformaciones de Lorentz). La frecuencia de los fotones se transforma entre sistemas de referencia de forma compleja, el efecto Doppler relativista, para un observador en S_A , que se mueve con velocidad V respecto del observador en el referencial S_∞ . Por tanto, este planteamiento del problema no cumple el principio de relatividad.

2. Sea una partícula de masa m cargada con carga eléctrica q , que se mueve en un campo eléctrico vertical \mathcal{E} . La segunda ley de Newton en S_∞ , con el condensador que crea el campo eléctrico en reposo, sería:

$$m(v_f - v_i) = (q\mathcal{E}_y - mg)t_0,$$

con la correspondiente ecuación del centro de masas:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = (q\mathcal{E}_y - mg)L.$$

Estas ecuaciones no son covariantes bajo transformaciones de Galileo (ni bajo transformaciones

de Lorentz). El campo eléctrico se transforma de manera compleja –incluso aparece un campo magnético– para un observador en el referencial S_A en configuración estándar con respecto a S_∞ .

Curiosamente, la solución a estas dificultades proviene de la relatividad especial y de la termodinámica: la primera, desarrollada mediante 4-vectores, obliga a asociar momento lineal a toda forma de energía, incluso aunque dicho momento lineal sea cero en algún sistema de referencia particular, mientras que la segunda sabe asociar entropía a cada forma de energía, indicando en qué sentido se produce la degradación de la energía mecánica y qué relación tiene dicha degradación con la variación del momento lineal. La idea es, aproximadamente, la siguiente: energía mecánica con momento lineal macroscópico asociado o energía de configuración (potencial) con un campo de fuerzas conservativo, tiene una entropía nula y esa misma cantidad de energía se degrada, aumentando su entropía, cuando el sistema interacciona con fuerzas no conservativas, su momento lineal se vuelve microscópico y se anula.

ERRORES CONCEPTUALES EN RELATIVIDAD

Si el tema de la teoría especial de la relatividad es por sí mismo conceptualmente complejo, a menudo los capítulos dedicados a la teoría especial de la relatividad en los libros de texto son confusos y se repiten los temas tópicos – dilatación del tiempo, contracción de longitudes, transformación de masa en energía, paradoja de los mellizos, etc. – sin ningún espíritu crítico y sin mucha claridad [24]. Esta circunstancia obliga al alumno a memorizar más que a entender.

En los libros de texto la teoría especial de la relatividad se trata de forma aislada, separada del resto de la física. Típicamente, después de los dos postulados de la teoría, se introducen las transformaciones de Lorentz, la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes (en sí mismo un concepto que no está bien definido), para terminar con la ecuación de Einstein y su aplicación (incorrecta) al funcionamiento de Sol, de las bombas nucleares, etc. Se sobreentiende que la aplicación de la teoría especial de la relatividad sólo resulta de interés cuando se trata con velocidades próximas a las de la luz, siendo suficientes las leyes de la física newtoniana para explicar los fenómenos que se produzcan a velocidades bajas.

Por el contrario, la teoría especial de la relatividad de Einstein, particularmente si se desarrolla mediante el formalismo de 4-vectores de Minkowski, introduce nuevos conceptos físicos (los 4-vectores van a ser las magnitudes básicas), postula nuevas ecuaciones (ecuaciones entre 4-vectores), exige el cumplimiento del principio de relatividad bajo transformaciones de Lorentz e introduce el

postulado del principio de inercia de la energía, lo que constituye, sin duda, la diferencia más importante con la física newtoniana [25].

En los capítulos de los libros de texto dedicados a la teoría especial de la relatividad, la presentación de la ecuación de Einstein no siempre es la más adecuada. La ecuación $U = \mathcal{M}c^2$ (que se escribe habitualmente como $E_0 = mc^2$) no establece que la masa se pueda convertir en energía (aunque la ‘materia’ se pueda convertir en ‘radiación’ como en la aniquilación electrón-positrón). Lo que esta ecuación indica es que la inercia \mathcal{M} de un cuerpo Z es igual a la energía total del mismo, medida en un sistema de referencia en el que dicho cuerpo Z se encuentra en reposo, U , dividida por c^2 . Si el cuerpo Z se desplaza a velocidad v en otro sistema de referencia, por ejemplo S_∞ , entonces su energía total en dicho referencial S_∞ será $E = \gamma(v)U$ o $E = \gamma(v)\mathcal{M}c^2$ y su momento lineal será $p = \gamma(v)\mathcal{M}v$, con $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Del mismo modo, si el cuerpo Z aumenta su temperatura, también aumentará su energía total y, por tanto, su inercia. Es decir, el principio de inercia de la energía permite asignar inercia, y, por tanto, momento lineal además de energía, a toda forma de energía, a diferencia de la física pre-Einstein en la que hay formas de energía a las que no se les asocia momento lineal, aunque dicho momento lineal pueda ser nulo en algún referencial.

La inercia \mathcal{M} (no es necesario indicar que se trata de la inercia en reposo, pues la inercia de un sistema bien caracterizado y en equilibrio termodinámico es un invariante relativista) de un cuerpo en un estado de equilibrio dado, incluye todos los tipos de energías presentes en el mismo o función energía U . Incluye las energías asociadas a las masas de sus partículas componentes y también la energía cinética de sus moléculas, electrones y nucleones, así como las contribuciones (negativas) de sus energías de interacción. La estructura (núcleos, átomos, etc.) adoptada por las partículas subatómicas contribuyen a la función energía del sistema.

Por ejemplo, en una explosión nuclear la masa no se transforma en energía más de lo que se transforma en una reacción química común. En el primer caso el número total de protones y neutrones se conserva pero éstos se reordenan, rompiéndose enlaces de menor energía (negativa) y formándose enlaces de mayor energía (negativa), emitiéndose en forma de fotones, etc., la diferencia de energías. En su estado final el sistema tiene menos energía propia (interna) y, correspondientemente, menos inercia. En el segundo caso, el número total de átomos se conserva, reordenándose, rompiéndose y formándose enlaces químicos entre los átomos más fuertes que los enlaces iniciales, emitiéndose la diferencia de energías en forma de calor, etc. La única diferencia entre ambos procesos estriba en que en un caso la interacción entre protones y neutrones es fuerte, implica cantidades de energía considerables y el efecto es cuantificable, mientras que en el otro caso la interacción entre átomos es electrostática,

las energías implicadas son muy bajas y las diferencias de inercia entre el estado inicial y final son prácticamente inapreciables.

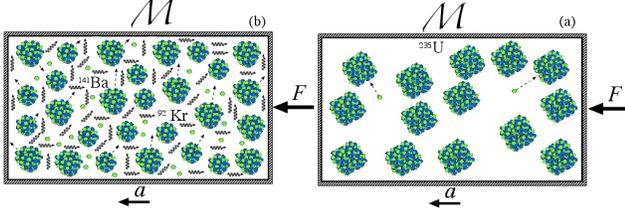


Figura 15. Un recipiente contiene núcleos de uranio 235, en reposo, que se desintegran para dar núcleos de kriptón y de bario, que se mueven a alta velocidad, y fotones de alta energía. En número de protones se conserva, así como el número de neutrones. La inercia inicial y final del sistema \mathcal{M} es la misma. Antes la misma fuerza, el sistema inicial y final adquiere la misma aceleración.

La ecuación original de Einstein $E_0 = mc^2$, se puede escribir para un cuerpo extenso, es decir, formado por muchas partículas elementales, como:

$$\mathcal{M} = U c^{-2}, \quad (24)$$

para indicar que su significado físico más completo es que toda forma de energía contenida en un sistema (energía asociada a las masas de sus partículas componentes, energía asociada a la interacción fuerte entre sus nucleones, energía asociada a interacciones electrostáticas, a enlaces químicos, etc.) contribuye, multiplicada por c^{-2} a la inercia de ese sistema (Fig. 15). Aunque aparentemente la Ec. (24) se puede deducir del formalismo de la teoría especial de la relatividad, dicha deducción no es posible y la Ec. (24) debe considerarse una hipótesis física, la hipótesis de Einstein.

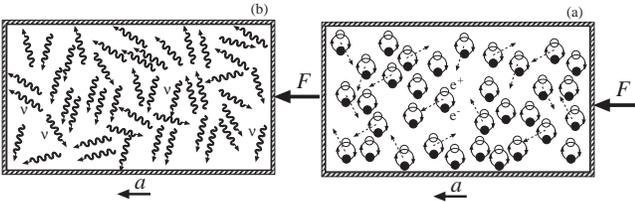


Figura 16. Un recipiente que contiene átomos de positronio acelera bajo la acción de una fuerza. Si los átomos se aniquilan formando fotones de alta energía, la inercia del sistema no varía ni tampoco su aceleración. Se admite, por principio, que esto va a ser así.

Sea un recipiente conteniendo 1 mol de átomos de positronio (un electrón y un positrón girando uno alrededor del otro). Bajo la acción de una fuerza F , dicho recipiente adquirirá una determinada aceleración a . Si en un instante dado los electrones y los positrones se aniquilan mutuamente y el recipiente se llena de fotones de alta energía, bajo la acción de la misma fuerza F el recipiente adquirirá la misma aceleración a , mostrándose que a

pesar de que la materia (electrones y positrones) se ha transformado en radiación (fotones), la inercia del sistema es la misma (Fig. 16) [12]

En Termodinámica se introduce el concepto de energía interna, una magnitud cuyo valor absoluto nunca se define y de la que sólo se calculan sus variaciones. La hipótesis de Einstein sobre la función energía U aparece ahora como la mejor forma de definir la energía interna de un sistema termodinámico.

Hipótesis de Einstein o principio de la inercia de la energía

Para un sistema en completo equilibrio termodinámico, todas sus formas de energía, relativísticamente expresadas en un referencial S_∞ en el que el sistema se encuentre en reposo (momento lineal nulo), contribuyen a la *función energía* U del sistema, y a su inercia \mathcal{M} , con la ecuación de Einstein expresada como:

$$\mathcal{M} = U c^{-2}. \quad (25)$$

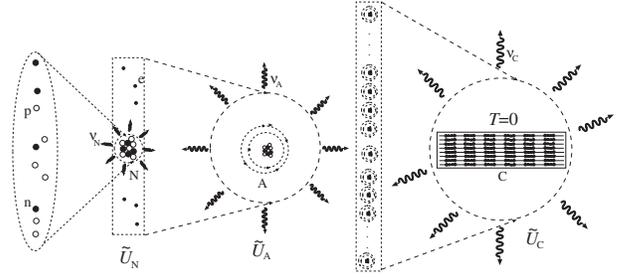


Figura 17. Formación de un sólido a $T = 0$. Formación de un átomo (A) a partir de su núcleo (N), previamente formado a partir de protones y neutrones, y de electrones (e), situados previamente en el infinito. La inercia del núcleo $\mathcal{M}_N = U_N c^{-2}$ es menor que la suma de las inercias de sus componentes $\mathcal{U}_N = 6m_p c^2 + 4m_n$, $\mathcal{M}_A = \mathcal{U}_N c^{-2} - |\Delta M_N|$, debido a la energía liberada en forma de fotones $\Delta M_N = -(8h\nu') c^{-2}$ cuando se forma el núcleo. La inercia del átomo $\mathcal{M}_A = U_A c^{-2}$ es menor que la suma de las inercias de sus componentes $\mathcal{U} = 6m_e c^2 + \mathcal{M}_N c^2$, $\mathcal{M}_A = \mathcal{U}_A c^{-2} - |\Delta M_A|$, debido a la energía liberada en forma de fotones $\Delta M_A = -(8h\nu) c^{-2}$ cuando se forma el átomo.

Se puede definir también la inercia (se prefiere utilizar el término *inercia*, en lugar de masa, para evitar confusiones) \mathcal{M} de un cuerpo como (Fig. 17):

La inercia \mathcal{M} de un cuerpo extenso es igual a la suma de las masas tabuladas de todas sus partículas elementales componentes (protones, neutrones y electrones) m_0 :

$$m_0 = \sum_j m_p + \sum_k m_n + \sum_l m_e,$$

con energía asociada $\mathcal{U} = m_0 c^2$, menos la energía mínima \tilde{U} , dividida por c^2 , necesaria para separar dichas partículas elementales y situarlas a gran distancia unas de otras:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{U} - \tilde{U}) c^{-2} = m_0 - \tilde{U} c^{-2}.$$

Dado un sistema termodinámico en equilibrio, autoconfinado como un bloque de plomo o confinado por paredes rígidas como un gas de átomos de He, con sus variables termodinámicas bien definidas, el sistema puede ser desensamblado en sus partículas elementales y vuelto a montar para obtener su función energía.

Sea un cuerpo extenso (un bloque de plomo, un gas ideal, etc.) Z. En la hipótesis de Einstein Ec. (26) se establece que todo el contenido en energía de dicho cuerpo Z, $U \equiv U(T)$ –igual a la suma de las energías de sus partículas elementales menos la energía mínima necesaria para desensamblar el cuerpo en sus protones, neutrones y electrones componentes–, medida en el referencial propio del cuerpo, contribuye, dividida por c^2 , a la inercia del cuerpo. Por ejemplo, para un cuerpo sólido extenso Z, formado por n_p protones, n_n neutrones y n_e electrones, a temperatura T:

$$U(T) \approx (n_p m_p + n_n m_n + n_e m_e) c^2 - \left| \tilde{U} \right| + \int_0^T C(T) dT,$$

donde $\tilde{U} = \tilde{U}_N + \tilde{U}_A + \tilde{U}_C$ son las energías desprendidas al formarse los correspondientes núcleos, átomos y sólido final, a temperatura absoluta cero, y $C(T)$ es su capacidad calorífica.

Si el cuerpo Z es un gas formado por 1 mol de átomos de He, supuesto ideal (átomos no interaccionates), la función energía de cada átomo será:

$$u \approx \sum_j m_j c^2 - \left| \tilde{U}_N + \tilde{U}_A \right|,$$

donde m_j es la masa de su j -ésima partícula elemental (protón, neutrón o electrón) componentes, \tilde{U}_N y \tilde{U}_A son las energías de formación del núcleo y del átomo de He, de donde su función energía $U(T)$ vendrá dada por (no se considera la energía del punto cero, ni posibles energías de átomos excitados, etc.):

$$U(T) \approx Nu + N [\gamma(\bar{v}) - 1] u = N \gamma(\bar{v}) u,$$

donde $\bar{v} \equiv \bar{v}(T)$ es la velocidad de cada átomo de He, supuesta constante $\bar{v}(T) \approx (3k_B T / 2m)^{1/2}$. La función energía del gas $U(T)$ es igual a la suma de las energías totales de cada átomo $e = \gamma(\bar{v})u$, que forma el gas, que, a su vez, es igual a la suma de u más la energía cinética $k = [\gamma(\bar{v}) - 1] u$ de cada -átomo.

La inercia del cuerpo compuesto correspondiente $\mathcal{M}(T) = U(T)c^{-2}$ no depende del referencial elegido, aunque sí de la temperatura. Es interesante destacar

cómo gracias al principio de inercia de la energía dos conceptos que en la física pre-Einstein aparecían por separado, la inercia, asociada a la mecánica, y la energía interna, asociada a la termodinámica, aparecen ahora unidos, de tal manera que la función energía de un sistema, que generaliza el concepto previo de energía interna termodinámica para incluir la energía asociada a la masa de las partículas elementales, y la inercia están íntimamente relacionadas. Esta integración de conceptos separados en la física pre-Einstein va a ser la característica más destacable del desarrollo de la física mediante cuadvectores.

En mi opinión, los dos tipos de errores conceptuales relativos a la didáctica de la física pre-Einstein considerados más arriba están relacionados y se deben a la no existencia de una teoría relativista para cuerpos extensos y deformables que, a su vez, se debe a una interpretación incompleta de la ecuación de Einstein; es decir, debido a la no existencia de una termodinámica relativista, desarrollada mediante 4-vectores de Minkowski y covariante bajo transformaciones de Lorentz, admitida por la comunidad científica. En este sentido, resulta sorprendente que más de cien años después de la publicación por Einstein de su teoría especial de la relatividad y de la introducción por Minkowski del concepto de espacio-tiempo a través de los 4-vectores, la física universitaria de los primeros cursos se siga enseñando como a finales del siglo XIX.

TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ Y 4-VECTORES DE MINKOWSKI

En la teoría especial de la relatividad la atención se centra en los *eventos*, que son sucesos en un punto particular del espacio y en un particular instante de tiempo. La evolución temporal de un sistema se asocia con una secuencia de eventos. Para entender, o predecir, esa secuencia, se necesitan ecuaciones de movimiento derivadas de las leyes físicas. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento no se expresan en términos de los propios eventos. Ellas se expresan en términos de las *coordenadas* numéricas de los eventos, tal y como son medidas en algún sistema particular de ejes coordenados y un reloj particular (un referencial). Estas coordenadas dependen de la relación entre los eventos y el referencial y, por tanto, diferentes observadores utilizarán diferentes coordenadas para etiquetar los mismos eventos. Correspondientemente, las ecuaciones de movimiento que obedezcan esas coordenadas debe esperarse que varíen de un referencial a otro.

De acuerdo con el principio de relatividad de Einstein, existe una clase de referenciales (denominados *referenciales de Lorentz*) que tiene la siguiente destacable propiedad: aunque observadores en diferentes referenciales de Lorentz no coinciden en las etiquetas de los mismos

eventos, *todos ellos están de acuerdo en la forma de las ecuaciones de movimiento*. En este sentido, los referenciales de Lorentz son físicamente equivalentes, puesto que las leyes fundamentales de la física, tal y como se expresan por las ecuaciones del movimiento, son las mismas en todos los referenciales de Lorentz.

Einstein también postuló que la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es la misma en todos los referenciales de Lorentz. La dificultad de entender cómo observadores en movimiento relativo pueden ambos observar la misma onda electromagnética y estar de acuerdo en su velocidad se supera si se utiliza la *transformación de Lorentz* para relacionar las coordenadas del mismo evento tal y como se observa en referenciales de Lorentz en movimiento relativo. La transformación de Lorentz determina todos los resultados cinemáticos esenciales de la teoría especial de la relatividad. La parte dinámica de la relatividad proviene de la hipótesis de que la energía y el momento lineal también se transforman bajo transformaciones de Lorentz cuando se cambia de un referencial de Lorentz a otro.

De acuerdo con la (que se podría denominar) hipótesis de Minkowski, una magnitud tiene (verdadero) sentido físico para todos los observadores si se comporta como un 4-vector bajo transformaciones de Lorentz $\mathcal{L}_\mu^\nu(V)$: la matriz 4×4 de la transformación de Lorentz para la configuración estándar con velocidad V viene dada por:

$$\mathcal{L}_\mu^\nu(V) = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix},$$

con $\beta(V) = V/c$ y donde $\gamma(V) = [1 - \beta^2(V)]^{-1/2}$ es el denominado *factor de Lorentz* [26].

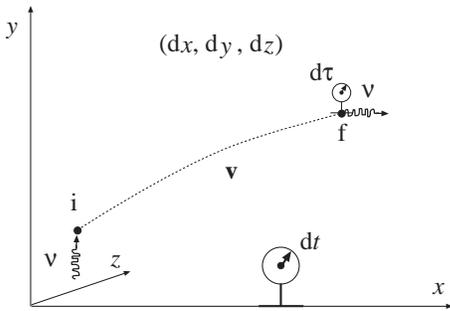


Figura 18. Un átomo absorbe un fotón de frecuencia ν en (x_i, y_i, z_i, t_i) (evento inicial) y lo emite en (x_f, y_f, z_f, t_f) (evento final). El tiempo t se mide con un reloj en reposo en el referencial de Lorentz xyz . El tiempo propio del átomo, τ se mide con un reloj que viaja con el átomo.

Suceso inicial: absorción de un fotón por un átomo (Fig. 18). Posición $x = (0, 0, 0)$, tiempo $t = 0$, 4-vector:

$$x_i^\mu = \{0, 0, 0, 0\}.$$

Suceso final: emisión de un fotón por el átomo. Posición $x = (0, 0, 0)$, tiempo $t = \tau$, 4-vector:

$$x_f^\mu = \{0, 0, 0, c\tau\}.$$

Para un reloj que viaja con el átomo el intervalo entre sucesos es τ (tiempo propio del átomo)(Fig. 20):

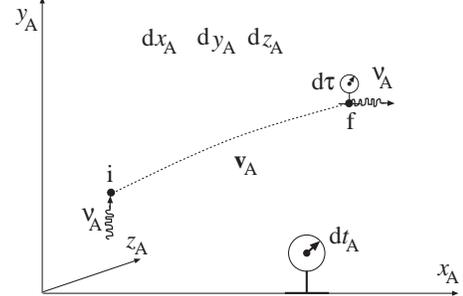


Figura 19. Un átomo absorbe un fotón de frecuencia ν_A en $(x_{iA}, y_{iA}, z_{iA}, t_{iA})$ (evento inicial) y lo emite en $(x_{fA}, y_{fA}, z_{fA}, t_{fA})$ (evento final). El tiempo t_A se mide con un reloj en reposo en el referencial de Lorentz $x_A y_A z_A$. El tiempo propio del átomo, τ se mide con un reloj que viaja con el átomo.

Para el observador en S_A (Fig. 19), para el que el átomo se mueve con velocidad v :

$$\begin{aligned} x_{iA}^\mu &= \mathcal{L}_\nu^\mu(-v)x_i^\mu = \{0, 0, 0, 0\}, \\ x_{fA}^\mu &= \mathcal{L}_\nu^\mu(-v)x_f^\mu = \{\gamma(v)v\tau, 0, 0, c\gamma(v)\tau\}, \end{aligned}$$

con lo que el observador en S_A asigna un intervalo de espacio $\gamma(v)v\tau$ y un intervalo de tiempo entre la absorción y la emisión del fotón, medido con su reloj, de

$$t = \gamma(v)\tau.$$

El tiempo propio es el menor intervalo de tiempo que se asocia a la duración de un proceso [27]. Los observadores para los cuales el objeto se desplaza asignarán intervalos de tiempo siempre mayores que el tiempo propio. (i) Ambos observadores se refieren al mismo experimento; (ii) para el observador en el átomo los sucesos tienen lugar en el mismo punto espacial; para el observador en S_A , los sucesos no tienen lugar en el mismo punto.

1. Dos referenciales rígidos S_∞ y S_A , con idénticas unidades de longitud y tiempo, se encuentran en *configuración estándar* cuando el origen de S_A se mueve con velocidad $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ a lo largo del eje x de S_∞ , el eje x_A coincide con el eje x , mientras que tanto los ejes y e y_A y z y z_A permanecen paralelos, y cuando todos los relojes de ambos referenciales se han puesto a cero en el momento en que los orígenes de ambos referenciales han coincidido (Fig. 20).
2. Un mismo suceso, (x, y, z, t) en S_∞ y (x_A, y_A, z_A, t_A) en S_A , es expresado mediante el correspondiente 4-vector suceso x^μ y x_A^μ , ambos 4-vectores contravariantes, [los 4-vectores contravariantes se notan con

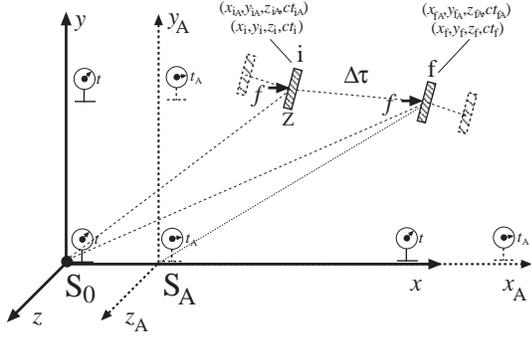


Figura 20. Referenciales S_∞ y S_A en configuración estándar. (i) Una fuerza f comienza a actuar sobre un cuerpo Z . Evento inicial, subíndice i en ambos referenciales, (f) evento final, la fuerza f deja de actuar sobre Z . El tiempo $\Delta\tau$ es el intervalo de tiempo propio de Z entre los sucesos inicial y final. Los 4-vectores suceso inicial, $x_i^\mu = \{x_i, y_i, z_i, ct_i\}$ en S y $x_{iA}^\mu = \{x_{iA}, y_{iA}, z_{iA}, ct_{iA}\}$ en S_A y suceso final, $x_f^\mu = \{x_f, y_f, z_f, ct_f\}$ en S y $x_{fA}^\mu = \{x_{fA}, y_{fA}, z_{fA}, ct_{fA}\}$ en S_A se relacionan entre sí como $x_{iA}^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)x_i^\nu$ y $x_{fA}^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)x_f^\nu$, respectivamente, donde $\mathcal{L}_\nu^\mu(V)$ es la matriz de la transformación de Lorentz para la configuración estándar.

índice griego y son matrices columna]:

$$x^\mu = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{Bmatrix}; x_A^\mu = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ ct_A \end{Bmatrix}.$$

(Los 4-vectores contravariantes se expresarán a veces como fila, pero manteniéndose el índice griego contravariante). Cada componente de un 4-vector A^μ contravariante se nota con un subíndice j , con $j = 1, 2, 3, 4$, tal que $A^\mu = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. El correspondiente 4-vector covariante [subíndice griego (matriz fila)] se nota A_μ .

- Los 4-vectores x^μ y x_A^μ relativos al mismo suceso se relacionan mediante la transformación de Lorentz como

$$x_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)x^\nu.$$

- El desplazamiento Δx^μ entre dos sucesos, inicial $x_i^\mu = \{x_i, y_i, z_i, ct_i\}$ y final $x_f^\mu = \{x_f, y_f, z_f, ct_f\}$, se define $\Delta x^\mu = x_f^\mu - x_i^\mu$ y es un 4-vector.
- La matriz 4×4 de la transformación de Lorentz para la configuración estándar con velocidad V viene dada por:

$$\mathcal{L}_\mu^\nu(V) = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix},$$

con $\beta(V) = V/c$ y donde $\gamma(V) = [1 - \beta^2(V)]^{-1/2}$ es el denominado *factor de Lorentz*. Configuraciones diferentes de la estándar tienen matrices de Lorentz más complejas, pero no aportan una física diferente, por lo que sólo se va a considerar esta configuración. Así, para los 4-vectores anteriores:

$$x_A^\mu = \mathcal{L}_\mu^\nu(V)x^\mu.$$

- La matriz inversa de la transformación de Lorentz, $\mathcal{L}^{+\nu}_\mu(V) = \mathcal{L}_\mu^\nu(-V)$, tal que

$$\mathcal{L}^{+\mu}_\xi(V)\mathcal{L}_\nu^\xi(V) = 1_\nu^\mu$$

viene dada por:

$$\mathcal{L}^{+\nu}_\mu(V) = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & \beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix}.$$

- Se aplica la convención de Einstein sobre la suma: la repetición de un índice-subíndice implica la suma sobre sus valores $j = 1, 2, 3, 4$. Por ejemplo:

$$A_\mu B^\mu = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4.$$

- La subida y bajada de índices en un 4-vector se lleva a cabo utilizando el tensor métrico del espacio de Minkowski $g_{\nu\mu}$. Eligiendo definir el intervalo (infinitesimal) invariante entre dos sucesos, inicial (x_i, y_i, z_i, ct_i) y final (x_f, y_f, z_f, ct_f) , con 4-vector desplazamiento $dx^\mu = \{dx, dy, dz, cdt\}$ ($dx = x_f - x_i$, etc.) como:

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2],$$

se tiene que al definirse:

$$ds^2 = g_{\nu\mu}dx^\nu dx^\mu,$$

el tensor métrico $g_{\nu\mu}$ viene dado como:

$$g_{\nu\mu} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Esta definición asegura que el intervalo, en S_A :

$$ds_A^2 = c^2(dt_A)^2 - [(dx_A)^2 + (dy_A)^2 + (dz_A)^2] = ds^2,$$

es un invariante relativista (Einstein empezó denominando a su futura teoría de la relatividad especial 'teoría de invariantes').

- Todo 4-vector A^μ , $A^\mu = \{A_x, A_y, A_z, A_t\}$, se divide en tres componentes (espaciales), provenientes del

vector tridimensional $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y una cuarta componente (temporal) A_t (con las mismas unidades de espacio que las anteriores; normalmente interviene la velocidad de la luz c para conseguir dicha coherencia dimensional). Para un 4-vector contravariante A^μ , se tiene:

- a) Su 4-vector covariante correspondiente A_μ , que se define como $A_\mu = g_{\nu\mu}A^\nu$ y se obtiene cambiando de signo las tres componentes espaciales del mismo, sin cambiar el signo de la temporal: $A_\mu = \{-A_x, -A_y, -A_z, A_t\}$.
- b) Dado un 4-vector covariante B_μ , $B_\mu = \{B_x, B_y, B_z, B_t\}$, el producto interno $B_\mu A^\mu$ o *proyección* de A^μ sobre B^μ , se define como:

$$B_\mu A^\mu = B_t A_t + B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z.$$

- c) Su *norma* $\|A^\mu\|$ se define como:

$$\|A^\mu\| = (A_\mu A^\mu)^{1/2} = [A_t^2 - (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)]^{1/2}.$$

La norma de un 4-vector es un invariante relativista: $\|A^\mu\| = \|A^\mu\|$.

- d) Dado el 4-vector contravariante C^μ cualquier combinación lineal $aA^\mu + cC^\mu$, donde a y c son constantes, es también un 4-vector contravariante.
- e) Dos 4-vectores A^μ y B^μ se dice que son iguales si son iguales componente a componente $A_j = B_j$. La igualdad de dos 4-vectores es un invariante relativista y, por tanto, toda ecuación entre 4-vectores es una ecuación invariante relativista. Esto indica que la forma más directa de obtener leyes físicas *covariantes* es formularlas mediante 4-vectores.

10. El tiempo propio $d\tau$ del desplazamiento dx^μ es el tiempo medido mediante un reloj que se mueve con el objeto que experimenta el desplazamiento (Fig. 20), con 4-vector desplazamiento $\{0, 0, 0, cd\tau\}$, y viene dado por:

$$d\tau = [(dt)^2 - c^{-2}(d^2x + d^2y + d^2z)]^{1/2},$$

y es igual a la *norma* del 4-vector desplazamiento dividida por c . Se tiene que:

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(v).$$

Esta ecuación expresa el intervalo de tiempo $d\tau$ a partir del 4-vector desplazamiento dado en el referencial S_∞ que se elige para describir el proceso.

11. La derivada del 4-vector desplazamiento de un cuerpo dx^μ respecto del tiempo propio de dicho desplazamiento, $d\tau$, y debido al carácter invariante

de éste, es otro 4-vector. El vector tridimensional velocidad \mathbf{v} viene dado por $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, con $v_x = dx/dt$, $dx = x_f - x_i$, etc., con $v = |\mathbf{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$. El 4-vector velocidad v^μ viene dado por:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(v) \{v_x, v_y, v_z, c\},$$

12. Una partícula elemental (sin estructura), con carga eléctrica q , se mueve con velocidad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, con 4-vector velocidad $v^\mu = \gamma(v) \{v_x, v_y, v_z, c\}$. Esta partícula se mueve en un campo eléctrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ dado por 4×4 -tensor -doble contravariante- campo electromagnético $\mathcal{E}^{\nu\mu}$:

$$\mathcal{E}^{\nu\mu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E_x \\ 0 & 0 & 0 & -E_y \\ 0 & 0 & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{Bmatrix},$$

El correspondiente 4×4 -tensor \mathcal{E}_ν^μ viene dado por $\mathcal{E}_\nu^\mu = g_{\nu\xi} \mathcal{E}^{\xi\mu}$, con:

$$\mathcal{E}_\nu^\mu = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_x \\ 0 & 0 & 0 & E_y \\ 0 & 0 & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{Bmatrix}.$$

El 4×4 -tensor fuerza electromagnética \mathcal{F}_ν^μ se define como el producto de la carga por el 4×4 -tensor campo electromagnético $\mathcal{F}_\nu^\mu = q\mathcal{E}_\nu^\mu$:

$$\mathcal{F}_\nu^\mu = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_x \\ 0 & 0 & 0 & F_y \\ 0 & 0 & 0 & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{Bmatrix},$$

con $F_x = qE_x$; $F_y = qE_y$; $F_z = qE_z$.

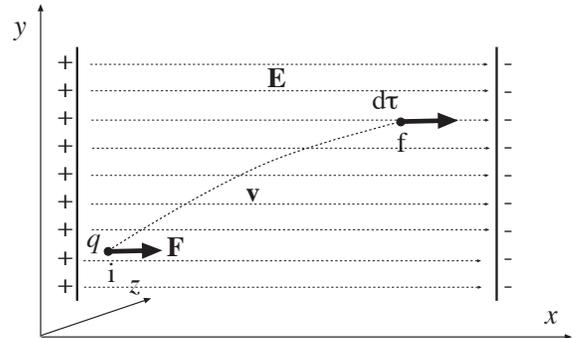


Figura 21. Fuerza conservativa \mathbf{F} de un campo eléctrico \mathbf{E} sobre una partícula con carga q . Este esquema se utiliza para obtener el 4-vector fuerza de Minkowski F^μ correspondiente a la interacción.

El denominado 4-vector fuerza de Minkowski F^μ sobre la partícula viene dado por:

$$F^\mu = \frac{1}{c} \mathcal{F}_\nu^\mu v^\nu =$$

$$= \gamma(v) \left\{ \begin{array}{c} qE_x \\ qE_y \\ qE_z \\ qc^{-1}(E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z) \end{array} \right\}.$$

El correspondiente 4-vector trabajo $dW^\mu = cF^\mu d\tau$, considerando que $dx^\mu = v^\mu d\tau$ viene dado por:

$$dW^\mu = cq\mathcal{E}_\nu^\mu dx^\nu = \left\{ \begin{array}{c} cqE_x dt \\ cqE_y dt \\ cqE_z dt \\ q(E_x dx + E_y dy + E_z dz) \end{array} \right\}.$$

13. Para un campo electromagnético caracterizado por el 4×4 -tensor campo electromagnético $\mathcal{E}_\nu^\mu = g_{\nu\xi}\mathcal{E}^{\xi\mu}$, en el referencial S_∞ , el mismo campo electromagnético viene caracterizado por el 4×4 -tensor $\mathcal{E}_{A\nu}^\mu$ en el referencial S_A , dado por:

$$\mathcal{E}_{A\nu}^\mu = \mathcal{L}_\xi^\mu(V)\mathcal{E}_\chi^\xi\mathcal{L}^{+\chi}_\nu(V).$$

14. *Transformaciones relativistas de desplazamientos y tiempos.* Sean dos 4-vectores intervalo:

$$dx^\mu = \left\{ \begin{array}{c} dx \\ dy \\ dz \\ cdt \end{array} \right\}; dx_A^\mu = \left\{ \begin{array}{c} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \\ cdt_A \end{array} \right\}.$$

Si se impone que se debe cumplir que:

$$dx_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)dx^\nu,$$

se obtienen las transformaciones de desplazamiento y tiempo:

$$\begin{aligned} dx_{xA} &= \gamma(V)(dx - Vdt), \\ dt_A &= \gamma(V)(dt - c^{-2}Vdc). \end{aligned}$$

Para este 4-vector dx^μ su norma invariante es el intervalo:

$$\begin{aligned} ds &= [c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)]^{1/2} = \\ ds_A &= [c^2 dt_A^2 - (dx_A^2 + dy_A^2 + dz_A^2)]^{1/2} = ds. \end{aligned}$$

15. *Transformaciones relativistas de la velocidad.* Se definen los dos 4-vectores velocidad:

$$v^\mu = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v)v_x \\ \gamma(v)v_y \\ \gamma(v)v_z \\ c^{-1}\gamma(v)v \end{array} \right\}; v_A^\mu = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v_A)v_{xA} \\ \gamma(v_A)v_{yA} \\ \gamma(v_A)v_{zA} \\ c^{-1}\gamma(v_A)v_A \end{array} \right\}.$$

Si se impone que debe cumplirse que:

$$v_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)v^\nu,$$

se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} \gamma(v_{xA})v_A &= \gamma(v)\gamma(V)(v_x - V), \\ \gamma(v_{xA}) &= \gamma(v)\gamma(V)(1 - v_x V/c^2), \end{aligned}$$

y las transformaciones relativistas de velocidades:

$$\begin{aligned} v_{xA} &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \\ v_{yA} &= \frac{\gamma^{-1}(V)v_y}{1 - v_x V/c^2}. \end{aligned}$$

Para el 4-vector velocidad v^μ su invariante es c , la velocidad de la luz (la norma de cualquier 4-vector velocidad es c , una velocidad con valor universal):

$$\|v^\mu\| = [\gamma^2(v)c^2 - \gamma^2(v)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]^{1/2} = c.$$

16. *Transformaciones relativistas de momento lineal y energía.* Para un cuerpo de inercia \mathcal{M} que se desplaza con velocidad v en un cierto referencial S_∞ , con momento lineal $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$, dado por $\mathbf{p} = \gamma(v)\mathcal{M}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, y con energía total $E = \gamma(v)\mathcal{M}c^2$, se tiene que el 4-vector momento- c^{-1} -energía viene dado en S_∞ y F_A^μ en S_A por vienen dados respectivamente por:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \mathcal{M}v^\mu = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v)\mathcal{M}v_x \\ \gamma(v)\mathcal{M}v_y \\ \gamma(v)\mathcal{M}v_z \\ c^{-1}\gamma(v)\mathcal{M}c^2 \end{array} \right\}; \\ p_A^\mu &= \mathcal{M}v_A^\mu = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v_A)\mathcal{M}v_{xA} \\ \gamma(v_A)\mathcal{M}v_{yA} \\ \gamma(v_A)\mathcal{M}v_{zA} \\ c^{-1}\gamma(v_A)\mathcal{M}c^2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Si se impone que debe ser:

$$p_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)p^\nu,$$

se obtienen las transformaciones:

$$\begin{aligned} p_{xA} &= \gamma(V)(p_x - Vc^{-2}E), \\ p_{yA} &= p_y, \\ p_{zA} &= p_z, \\ E_A &= \gamma(V)(E - Vp_x). \end{aligned}$$

Para el 4-vector p^μ su norma invariante es:

$$\begin{aligned} \|p^\mu\| &= [\gamma^2(v)\mathcal{M}^2c^2 - \gamma^2(v)\mathcal{M}^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]^{1/2} \\ &= \mathcal{M}c. \end{aligned}$$

También se tiene el 4-vector $U^\mu = cp^\mu$. Para el 4-vector U^μ su norma invariante es:

$$\begin{aligned} \|U^\mu\| &= [\gamma^2(v)\mathcal{M}^2c^4 - \gamma^2(v)\mathcal{M}^2c^2(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)]^{1/2} \\ &= \mathcal{M}c^2. \end{aligned}$$

17. *Transformaciones relativistas de fuerza.* El 4-vector fuerza de Minkowsky F^μ , en S_∞ y F_A^μ en S_A vienen dados respectivamente por:

$$F^\mu = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v)F_x \\ \gamma(v)F_y \\ \gamma(v)F_z \\ c^{-1}\gamma(v) [\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}] \end{array} \right\}; F_A^\mu = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(v_A)F_{xA} \\ \gamma(v_A)F_{yA} \\ \gamma(v_A)F_{zA} \\ c^{-1}\gamma(v_A) [\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{v}_A] \end{array} \right\}.$$

Si se impone que debe ser:

$$F_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)F^\nu,$$

se obtienen las transformaciones de fuerzas [28]:

$$F_{xA} = \frac{F_x - (V/c^2) [\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}]}{1 - v_x V/c^2},$$

$$F_{yA} = \frac{\gamma^{-1}(V)F_y}{1 - v_x V/c^2}.$$

Para el 4-vector fuerza de Minkowski su norma invariante es el módulo de la fuerza $|F|$:

$$\|F^\mu\| = [\gamma^2(v)(F \cdot v)^2 c^{-2} - \gamma^2(v)(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)]^{1/2} = |F|.$$

18. *Transformaciones relativistas de impulso lineal y trabajo.* Para un cuerpo de inercia \mathcal{M} que se desplaza con velocidad v en un cierto referencial S_∞ , bajo la acción de una fuerza conservativa $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ con impulso lineal $\mathbf{I} = (I_x, I_y, I_z) = (F_x dt, F_y dt, F_z dt)$, y con trabajo $dW = \mathbf{F} \cdot v dt$, se tiene que el 4-vector c -impulso-trabajo infinitesimal viene dado en S_∞ y en S_A respectivamente por:

$$dW^\mu = cF^\mu d\tau = \left\{ \begin{array}{c} cF_x dt \\ cF_y dt \\ cF_z dt \\ F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{array} \right\};$$

$$dW_A^\mu = cF_A^\mu d\tau = \left\{ \begin{array}{c} cF_{xA} dt_A \\ cF_{yA} dt_A \\ cF_{zA} dt_A \\ F_{xA} dx_A + F_{yA} dy_A + F_{zA} dz_A \end{array} \right\}.$$

Si se impone que debe ser:

$$dW_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)dW^\nu,$$

se obtienen las transformaciones:

$$I_{xA} = \gamma(V)(I_x - Vc^{-2}dW),$$

$$I_{yA} = I_y,$$

$$I_{zA} = I_z,$$

$$dW_A = \gamma(V)(dW - VI_x).$$

Para el 4-vector dW^μ su norma invariante es:

$$\|dW^\mu\| = [(F \cdot v)^2 dt^2 - c^2 \mathcal{M}^2 (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2) dt^2]^{1/2} = c^{-1}Fv.$$

19. *Efecto Doppler y de aberración.* A cada fotón se le puede asignar un 4-vector momento-energía. En S_∞ viene dado por ω^μ y en S_A por ω_A^μ , respectivamente:

$$\omega^\mu = \left\{ \begin{array}{c} h\nu \cos \theta \\ h\nu \sen \theta \\ 0 \\ h\nu \end{array} \right\}; \omega_A^\mu = \left\{ \begin{array}{c} h\nu_A \cos \theta_A \\ h\nu \sen \theta_A \\ 0 \\ h\nu \end{array} \right\}.$$

Si se impone que debe ser:

$$\omega_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)\omega^\nu,$$

se obtienen las transformaciones de frecuencias (efecto Doppler) [29] y de dirección (aberración):

$$\nu_A = \nu\gamma(V)(1 - \beta(V)\cos \theta),$$

$$\cos \theta_A = \frac{\cos \theta - \beta(V)}{1 - \beta(V)\cos \theta}.$$

$$\sen \theta_A = \frac{\gamma^{-1}(V)\sen \theta}{1 - \beta(V)\cos \theta}.$$

La norma invariante de un 4-vector momento-energía de un fotón es cero. La inercia de un fotón es cero, lo que parece indicar que no puede existir en reposo:

$$\|\omega^\mu\| = [h^2\nu^2 - h^2\nu^2(\cos^2 \theta + \sen^2 \theta + 0)]^{1/2} = 0.$$

Para un conjunto de fotones térmicos, con impulso total nulo y función energía $U_Q = \sum_i h\nu_i$, su norma será distinta de cero, de acuerdo con el principio de inercia de la energía:

$$\|Q^\mu\| = [N^2 h^2 \nu^2 - 0]^{1/2} = N h \nu.$$

20. *Transformaciones relativistas de campos electromagnéticos.* El 4-tensor \mathcal{E}_ν^μ genérico viene dado como:

$$\mathcal{E}_\nu^\mu = g_{\nu\xi}\mathcal{E}^{\xi\mu} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & cB_z & -cB_y & E_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & E_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{array} \right\} \dots$$

donde:

$$g_{\nu\mu} = \left\{ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

es (nuestro) tensor métrico [el intervalo ds^2 se define entonces como $ds^2 = g_{\nu\mu}dx^\nu dx^\mu = cdt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$].

El 4×4 -tensor campo electromagnético en S_A es:

$$\mathcal{E}_{A\nu}^\mu = \begin{Bmatrix} 0 & cB_{zA} & -cB_{yA} & E_{xA} \\ -cB_{zA} & 0 & cB_{xA} & \mathcal{E}_{yA} \\ cB_{yA} & -cB_{xA} & 0 & E_{zA} \\ E_{xA} & \mathcal{E}_{yA} & E_{zA} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Si se impone que el 4×4 -tensor $\mathcal{E}_{A\nu}^\mu$ se debe obtener como:

$$\mathcal{E}_{A\nu}^\mu = \mathcal{L}_\xi^\mu(V) \mathcal{E}_\xi^\xi \mathcal{L}^{+\zeta}_\nu(V),$$

donde \mathcal{E}_ν^μ es el 4×4 -tensor campo electromagnético en S_∞ con el 4×4 -tensor

$$\mathcal{L}^{+\mu}_\nu(V) = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & \beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix},$$

con $\mathcal{L}_\xi^\mu(V)$ y $\mathcal{L}^{+\mu}_\xi(V) = \mathcal{L}_\xi^\mu(-V)$.

Identificando componente a componente, se obtiene las transformaciones relativistas del 3-vector campo eléctrico \mathbf{E} y del 3-vector \mathbf{B} campo magnético:

$$\begin{aligned} E_{xA} &= E_x, \\ \mathcal{E}_{yA} &= \gamma(V) [\mathcal{E}_y - VB_z], \\ E_{zA} &= \gamma(V) [E_z + VB_y], \\ B_{xA} &= B_x, \\ B_{yA} &= \gamma(V) [B_y + (V/c^2)E_z], \\ B_{zA} &= \gamma(V) [B_z - (V/c^2)\mathcal{E}_y]. \end{aligned}$$

Se puede mostrar la coherencia del formalismo de 4-vectores teniendo en cuenta que las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F^\mu d\tau &= q\mathcal{E}_\nu^\mu v^\nu d\tau, \\ W^\mu d\tau &= q\mathcal{E}_\nu^\mu dx^\nu, \end{aligned}$$

son compatibles con las transformaciones relativistas de fuerzas, velocidades, trabajos, desplazamientos y campos electromagnéticos:

$$\begin{aligned} F_A^\mu d\tau &= qc^{-1}\mathcal{E}_{A\nu}^\mu v_A^\nu d\tau, \\ dW_A^\mu &= q\mathcal{E}_{A\nu}^\mu dx_A^\nu. \end{aligned}$$

Partículas elementales

Se postula como hipótesis una ecuación del movimiento del tipo:

$$\frac{dp_A^\mu}{d\tau} = F_A^\mu,$$

como equivalente relativista a la segunda ley de Newton y al teorema trabajo-energía para una partícula elemental que se mueve en un cierto campo de fuerzas conservativo. Se toma la derivada respecto del tiempo propio τ , que es un invariante relativista, para que la ecuación sea invariante bajo transformaciones de Lorentz, con la correspondiente ecuación en S_A :

$$\frac{dp_A^\mu}{d\tau} = F_A^\mu.$$

para una partícula elemental de masa m los 4-vectores momento- c^{-1} energía inicial p_i^μ y final p_f^μ son:

$$p_i^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v_i)mv_{ix} \\ \gamma(v_i)mv_{iy} \\ \gamma(v_i)mv_{iz} \\ c^{-1}\gamma(v_i)mc^2 \end{Bmatrix}; p_f^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v_f)mv_{fx} \\ \gamma(v_f)mv_{fy} \\ \gamma(v_f)mv_{fz} \\ c^{-1}\gamma(v_f)mc^2 \end{Bmatrix},$$

con

$$dp^\mu = \begin{Bmatrix} d[\gamma(v)mv_x] \\ d[\gamma(v)mv_y] \\ d[\gamma(v)mv_z] \\ c^{-1}d[\gamma(v)mc^2] \end{Bmatrix}.$$

El 4-vector fuerza de Minkowski F^μ para un tensor de campo electromagnético $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$:

$$\mathcal{E}_\nu^\mu = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_x \\ 0 & 0 & 0 & E_y \\ 0 & 0 & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{Bmatrix},$$

cuando se mueve con velocidad $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, se obtiene como:

$$\begin{aligned} F^\mu &= qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_x \\ 0 & 0 & 0 & E_y \\ 0 & 0 & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma(v)v_x \\ \gamma(v)v_y \\ \gamma(v)v_z \\ \gamma(v)c \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \gamma(v)F_x \\ \gamma(v)F_y \\ \gamma(v)F_z \\ c^{-1}\gamma(v)\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma(v)qE_x \\ \gamma(v)qE_y \\ \gamma(v)qE_z \\ c^{-1}\gamma(v)\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación del movimiento, con $d\tau = \gamma^{-1}dt$, siendo dt el tiempo medido en S_∞ , se tiene:

$$dp^\mu = \begin{Bmatrix} d[\gamma(v)mv_x] \\ d[\gamma(v)mv_y] \\ d[\gamma(v)mv_z] \\ c^{-1}d[\gamma(v)mc^2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma(v)qE_x \\ \gamma(v)qE_y \\ \gamma(v)qE_z \\ c^{-1}\gamma(v)q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \end{Bmatrix} \gamma^{-1}dt.$$

Comparando componentes de la ecuación entre 4-vectores, se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} d[\gamma(v)mv_x] &= qE_x dt, \\ d[\gamma(v)mv_y] &= qE_y dt, \\ d[\gamma(v)mv_z] &= qE_z dt, \\ d[\gamma(v)mc^2] &= q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son las componentes de la segunda ley de Newton relativista y la cuarta ecuación es el correspondiente teorema trabajo-energía cinética, que es equivalente en este caso a la ecuación del centro de masas (partículas puntuales y fuerzas conservativas), para un proceso infinitesimal.

Con las equivalencias entre 4-vectores $cp^\mu = U^\mu$, $dW^\mu = cF^\mu d\tau$, se tiene como ecuación del movimiento:

$$dU^\mu = dW^\mu .$$

En un proceso finito, con $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$:

$$W^\mu = q \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_x \\ 0 & 0 & 0 & E_y \\ 0 & 0 & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\Delta t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cE_x \Delta t \\ cE_y \Delta t \\ cE_z \Delta t \\ \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x} \end{Bmatrix} .$$

se tiene:

$$\begin{Bmatrix} c\gamma(v_f)mv_{fx} \\ c\gamma(v_f)mv_{fy} \\ c\gamma(v_f)mv_{fz} \\ \gamma(v_f)mc^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c\gamma(v_i)mv_{ix} \\ c\gamma(v_i)mv_{iy} \\ c\gamma(v_i)mv_{iz} \\ \gamma(v_i)mc^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cqE_x \Delta t \\ cqE_y \Delta t \\ cqE_z \Delta t \\ q\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x} \end{Bmatrix} ,$$

$$\begin{aligned} \gamma(v_f)mv_{fx} - \gamma(v_i)mv_{ix} &= qE_x \Delta t , \\ \gamma(v_f)mv_{fy} - \gamma(v_i)mv_{iy} &= qE_y \Delta t , \\ \gamma(v_f)mv_{fz} - \gamma(v_i)mv_{iz} &= qE_z \Delta t , \\ \gamma(v_f)mc^2 - \gamma(v_i)mc^2 &= q\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{x} . \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son las componentes de la segunda ley de Newton relativista y la cuarta ecuación es el correspondiente teorema trabajo-energía cinética, que es equivalente en este caso a la ecuación del centro de masas (partículas puntuales y fuerzas conservativas), para un proceso finito.

FÍSICA CON 4-VECTORES. ECUACIÓN MOMENTOENERGÍA-IMPULSOTRABAJO

El concepto de espacio-tiempo y la ecuación de Einstein son entidades físicas muy conocidas (o, al menos, muy citadas) a las que, sin embargo, no se les concede mucha importancia en la enseñanza moderna de la Física. Es decir, la mayor parte de la enseñanza de la Física a nivel de bachillerato o de primer curso universitario se sigue haciendo como en épocas anteriores (pre-Einstein) a conocerse las teorías de Einstein y Minkowski. Seguir explicando la Física más básica mediante el formalismo Newton-Galileo en vez de con el formalismo Einstein-Minkowski-Lorentz implica un cierto déficit pedagógico, pues el formalismo Newton-Galileo exige más trabajo (en la resolución de cada problema), los errores conceptuales son más difíciles de detectar y no es conceptualmente una teoría tan completa y manejable como la Einstein-Minkowski-Lorentz.

Contra lo que parece ser una opinión muy extendida, la Teoría Especial de la Relatividad, sobre todo si se desarrolla con 4-vectores de Minkowski, no es una teoría que es sólo interesante (y exacta) a altas velocidades [13]. Por el contrario, la Teoría Especial de la Relatividad introduce nuevos conceptos físicos (los 4-vectores), nuevas relaciones entre ellos, nuevas hipótesis físicas y una lógica interna exigente tanto en vertical (cada 4-vector debe tener su propia estructura coherente) como en horizontal (las ecuaciones se obtienen a pares y deben cumplir unas exigencias), que hace el formalismo mucho más versátil y seguro a la hora de resolver problemas. Finalmente, pero no menos importante, la exigencia de que las ecuaciones sean covariantes bajo la transformación de Lorentz permite considerar fuerzas electromagnéticas como parte del formalismo, lo que no es posible en el formalismo Newton-Galileo, pues las fuerzas electromagnéticas (fuerza de Lorentz) no son invariantes bajo transformaciones de Galileo, así como otras formas de energía a las que en la física pre-Einstein no se les asigna momento lineal (como conjuntos de fotones, etc.).

La Teoría Especial de la Relatividad de Einstein, desarrollada utilizando el formalismo de 4-vectores de Minkowski, substituye las tres hipótesis pre-relativistas: (i) Principio de Conservación de la masa en sistemas cerrados (Lavoisier); (ii) la Segunda ley de Newton (ecuación impulso-momento lineal), ecuación entre vectores, y (iii) el primer principio de la termodinámica (ecuación de la energía), ecuación entre escalares, –conjunto de ecuaciones invariantes bajo transformaciones de Galileo – por una nueva hipótesis:

- (a) Hipótesis de Einstein. La inercia de un sistema es igual a su contenido en energía, multiplicada por c^{-2} :

$$\mathcal{M} = U c^{-2} . \quad (26)$$

y por la hipótesis adicional,

- (b) la ecuación relativista del momentoenergía-impulsoc⁻¹trabajo:

$$dp^\mu = \sum_j F_j^\mu d\tau_j + dp_{\text{dis}} + dp_Q^\mu , \quad (27)$$

ecuación entre 4-vectores, 4-vector momento p^μ , 4-vector fuerza de Minkowski $F_j^\mu - d\tau_j$ es el tiempo propio de la fuerza F_j – (las fuerzas pueden ser conservativas, F_k o no conservativas f_s), 4-vector momento-energía asociado al calor p_Q^μ , que es invariante bajo la transformación de Lorentz. Esta ecuación generaliza a cuerpos extensos, macroscópicos y deformables, y a fuerzas no conservativas la ecuación $dp^\mu = F^\mu d\tau$, sólo válida para partículas puntuales y fuerzas conservativas.

Función energía

Para describir un determinado proceso se toma como sistema de referencia ventajoso (conveniente) S_∞ aquel referencial en el que las fuentes de trabajo (por ejemplo, las placas de un condensador cargado que se utiliza para aplicar una fuerza eléctrica sobre una carga eléctrica depositada sobre un cuerpo), focos térmicos (por ejemplo, el suelo sobre el que desliza un cuerpo con rozamiento, o la pared con la que choca un cuerpo deformable), o cuerpos de inercia cuasi-infinita (el suelo, una pared, etc.) etc., se encuentran en reposo [Los sistemas físicos que se pueden utilizar para transformar la energía mecánica inicial de un cuerpo finito en otras formas de energía mecánica se encuentran en reposo en S_∞]. En la Ec. (27) p^μ es el 4-vector contravariante momento lineal del sistema:

$$p^\mu = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ c^{-1}E \end{Bmatrix}; p^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v)\mathcal{M}v_x \\ \gamma(v)\mathcal{M}v_y \\ \gamma(v)\mathcal{M}v_z \\ \gamma(v)\mathcal{M}c \end{Bmatrix}, \quad (28)$$

donde el momento lineal relativista p viene dado por:

$$\mathbf{p} = \gamma(v)\mathcal{M}\mathbf{v}, \\ E = \gamma(v)\mathcal{M}c^2,$$

siendo $E = K + U$ la energía total de Z –suma de su energía cinética $K = [\gamma(v) - 1]\mathcal{M}(T)c^2$ y de su función energía, con $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. La inercia \mathcal{M} se obtiene aplicando el principio de inercia de la energía, previa obtención de la función energía del cuerpo, en un referencial S_z en el que el cuerpo permanece en reposo.

Se define el 4-vector función energía (se prefiere esta denominación el vez de la más termodinámica de ‘energía interna’, pues podría inducir a confusión) U^μ como $U^\mu = cp^\mu$, tal que:

$$U^\mu = cp^\mu = \begin{Bmatrix} cp_x \\ cp_y \\ cp_z \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c\gamma(v)\mathcal{M}v_x \\ c\gamma(v)\mathcal{M}v_y \\ c\gamma(v)\mathcal{M}v_z \\ \gamma(v)\mathcal{M}c^2 \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

La transformación de Lorentz $\mathcal{L}_v^\mu(-v)$ transforma la energía y el momento del 4-vector c -momento-energía propio, es decir, representado en el referencial propio –en el que el cuerpo Z permanece en reposo– $U_z^\mu = \{0, 0, 0, U(T)\}$ (por razones tipográficas un 4-vector contravariante, matriz columna, se escribirá como una matriz fila, pero manteniéndose su índice griego), como $\mathcal{L}_v^\mu(-v)U_z^\nu = U^\mu$ (convenio de suma de Einstein), con $U^\mu = \{c\gamma(v)\mathcal{M}v, 0, 0, \gamma(v)U(T)\}$, de la misma forma en que se transforman la energía y el momento de una partícula elemental. La norma de U^μ es $\|U^\mu\| = (E^2 - c^2p^2)^{1/2} = \mathcal{M}(T)c^2$, un invariante relativista (no constante; depende de la temperature). Basándose en que la energía total y el momento lineal de un sistema compuesto de inercia $\mathcal{M}(T)$ se transforma del mismo modo

que la energía y el momento lineal de una partícula elemental de masa m , se puede admitir que las ecuaciones que describen el comportamiento de cuerpos extensos deben ser las mismas que las ecuaciones que describen el comportamiento de partículas elementales. La diferencia entre ambos tipos de ecuaciones estriba en que sobre un cuerpo extenso se pueden aplicar simultáneamente varias fuerzas, alguna de estas fuerzas puede ser no conservativa, sobre él se puede realizar trabajos disipativos, sobre él se pueden realizar diferentes trabajos de configuración (hidrostático, dieléctrico, magnético, etc.), en su interior se pueden producir reacciones químicas, y los cuerpos extensos pueden intercambiar energía en forma de radiación térmica (*principio de similitud*). Estas ecuaciones para cuerpos extensos tendrán sentido físico siempre y cuando se garantice que en la interacción del cuerpo con el exterior, representado por fuentes de trabajo, focos térmicos, etc., en reposo en S_∞ , se lleva a cabo de tal manera que el cuerpo se comporta realmente como un todo. Por ejemplo, para un gas formado por un mol de átomos de He a temperatura T , la distribución de velocidades –distribución de Maxwell– de los átomos, la distribución de los electrones dentro de los orbitales atómicos –distribución de Boltzmann– y la distribución de frecuencias de los fotones dentro de la cavidad que contiene el gas –distribución de Planck–, tienen en común el parámetro temperatura T . Si sobre el gas se lleva a cabo un proceso tan brusco que hay partes del sistema que no pueden alcanzar el equilibrio termodinámico, las ecuaciones propuestas no serán válidas durante ese intervalo de tiempo.

Fuerzas y trabajos conservativos

En la misma Ec. (27) se tiene el 4-vector contravariante fuerza de Minkowski F_k^μ para una fuerza conservativa F_k :

$$F_k^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v_k)F_{xk} \\ \gamma(v_k)F_{yk} \\ \gamma(v_k)F_{zk} \\ \gamma(v_k)c^{-1}\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{Bmatrix}, \quad (30)$$

con $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k = F_{xk}v_{xk} + F_{yk}v_{yk} + F_{zk}v_{zk}$, donde v_k es la velocidad de aplicación de la misma, siendo además $d\tau_k = \gamma^{-1}(v_k)dt$ el intervalo de tiempo propio asociado a la fuerza F_k –intervalo de tiempo medido por un reloj que se desplaza con el cuerpo sobre el que se aplica la fuerza, para cuerpos rígidos (Fig. 23), o sobre las partes móviles, émbolos, en el caso de cuerpos deformables (Fig. 24)– y dt es el intervalo de tiempo medido por un reloj en el referencial S_∞ .

A partir del 4-vector Fuerza de Minkowski F_k^μ se puede definir un nuevo 4-vector, el 4-vector trabajo (c -impulso-trabajo) W_k^μ considerando que:

$$F_k^\mu = c^{-1} \frac{dW_k^\mu}{d\tau_k},$$

o $dW_k^\mu = cF_k^\mu d\tau_k$, con:

$$dW_F^\mu = \left\{ \begin{array}{c} cF_{xk}dt \\ cF_{yk}dt \\ cF_{zk}dt \\ \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{x}_k \end{array} \right\}, \quad (31)$$

con $\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{x}_k = F_{xk}dx_k + F_{yk}dy_k + F_{zk}dz_k$, donde $d\mathbf{x}_k = \mathbf{v}_k dt$.

Fuerzas no conservativas

Para una fuerza no conservativa (por ejemplo, de rozamiento) f_s su velocidad de aplicación es cero, su tiempo propio es igual a dt y puesto que en el referencial S_∞ las fuerzas de rozamiento no realizan trabajo, se tiene el 4-vector fuerza f_s^μ :

$$f_s^\mu = \left\{ \begin{array}{c} f_{xs} \\ f_{ys} \\ f_{zs} \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (32)$$

Para una fuerza no conservativa:

$$dW_s^\mu = cf_s^\mu dt = \left\{ \begin{array}{c} cf_{xs}dt \\ cf_{ys}dt \\ cf_{zs}dt \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (33)$$

De acuerdo con la Formulación Asíncrona [30] que implícitamente se ha adoptado [31], en S_∞ todas las fuerzas se aplican simultáneamente y durante el mismo intervalo de tiempo dt . Esto permite sumar todos los 4-vectores trabajo, haciendo que la suma impulso total $\mathcal{I} = [\sum_k F_k \gamma^{-1}(v_k) + \sum_s f_s] dt$ y el trabajo total:

$$dW^\mu = \sum_k dW_k^\mu + \sum_s dW_s^\mu,$$

tengan sentido físico en el referencial S_∞ . En otros referenciales las fuerzas no se aplicarán simultáneamente.

Calor

El 4-vector calor-energía Q^μ (energía) y el 4-vector calor-momento $p_Q^\mu = c^{-1}Q^\mu$, vendrán dados, en general, como:

$$Q^\mu = \left\{ \begin{array}{c} c p_{xQ} \\ c p_{yQ} \\ c p_{zQ} \\ E_Q \end{array} \right\}; p_Q^\mu = \left\{ \begin{array}{c} p_{xQ} \\ p_{yQ} \\ p_{zQ} \\ c^{-1} E_Q \end{array} \right\}$$

donde p_Q es el momento lineal asociado a la energía E_Q asociada al calor. Para obtener el 4-vector Q^μ en el referencial S_∞ hay que recurrir a una consideración basada

en el segundo principio de la termodinámica: en un proceso en el que intervienen fuerzas no conservativas, y, por tanto, con energía mecánica disipada, se define el calor Q como la norma $\|Q^\mu\| = (E_Q^2 - c^2 p_Q^2)^{1/2}$ del 4-vector Q^μ , para garantizar que en un proceso disipativo se alcanza el máximo aumento de la entropía del universo para una cierta energía E_Q intercambiada, en S_∞ , el calor Q es radiación térmica $-N$ fotones de frecuencia ν_i – emitida (o absorbida) con momento lineal nulo $p_Q = \sum_j h\nu_j \mathbf{u}_j = 0$ – $Q = \sum_i h\nu_i$. Con esta consideración, la norma de la energía intercambiada como calor será máxima para la misma energía y también lo será la variación de la entropía del universo. Así, en el referencial S_∞ (suponiendo que todos los fotones se emiten con la misma frecuencia ν):

$$Q^\mu = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Nh\nu \end{array} \right\}. \quad (34)$$

Trabajo disipativo

Todo intercambio de energía entre un sistema y un cierto dispositivo, que venga caracterizado mediante variables macroscópicas (por ejemplo, la intensidad de corriente I y la diferencia de potencial v en el calentamiento de una resistencia eléctrica por efecto Joule durante un tiempo dt), que no formen parte de las variables conjugadas que intervienen en la definición del trabajo de configuración de un sistema y que entran como tales en las ecuaciones térmica, energética y entrópica de estado del sistema (por ejemplo, la presión P y el volumen \mathcal{V} en el caso de un sistema hidrostático, con $dW = -Pd\mathcal{V}$, $T = T(P, \mathcal{V})$, etc.) son trabajos disipativos.

Por consideraciones microscópicas semejantes a las realizadas para el caso del calor, se puede considerar que el efecto un trabajo disipativo (por ejemplo, la circulación de la corriente eléctrica por la resistencia colocada en el seno de un gas) es aumentar la energía de las moléculas componentes del cuerpo, aumentando su velocidad media y, por tanto, su temperatura, pero de tal manera que el momento lineal neto de esta ganancia de energía es cero. Así, para un trabajo disipativo $W_D = Ivd t$, la variación de la función energía del cuerpo se puede poner como suma de las variaciones de sus energías cinéticas:

$$\Delta K_D = \sum_n \Delta K_n = Ivd t, \\ \Delta p_D = \sum_n \Delta p_n = 0,$$

pero de tal manera que la suma de las variaciones de sus momentos lineales es nula en el sistema de referencia S_∞ en el que el dispositivo calefactor (resistencia eléctrica, cables y batería) permanece en reposo. Así, el 4-vector

W_D^μ asociado a este trabajo disipativo se puede poner como:

$$dW_D^\mu = \begin{Bmatrix} c\Delta p_{xD} \\ c\Delta p_{yD} \\ c\Delta p_{zD} \\ \Delta K_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Ivd t \end{Bmatrix}.$$

Procediendo de esta manera, puesto que la variación de entropía del gas (universo) debido a este proceso de calentamiento como la norma $\|\delta W_D^\mu\|$ del 4-vector $\delta W_D^\mu = \{cp_D, 0, 0, E_D\}$, con:

$$\|\delta W_D^\mu\| = (E_D - cp_D)^{1/2},$$

dividida por T :

$$dS_D = \frac{\|\delta W_D^\mu\|}{T},$$

se cumpliría la hipótesis de que para este tipo de interacción la variación de la entropía del universo debe alcanzar un máximo compatible con la energía intercambiada E_D (principio de máxima entropía). Al igual que en el caso del calor, imponer la condición de máxima entropía al trabajo disipativo implicaría que debe ser $p_D = 0$ y que la energía (macroscópica) disipada debe serlo con momento lineal nulo. Se define el 4-vector dp_D^μ asociado al trabajo disipativo como $dp_D^\mu = c^{-1}dW_D^\mu$.

Ecuación c -momentoenergía- c -impulsotrabajo

Con las equivalencias anteriores se tiene que la Ec. (27) momento- c^{-1} -energía-impulso- c^{-1} -trabajo, para un proceso finito:

$$p_f^\mu - p_i^\mu = \sum_k \int F_k^\mu d\tau_k + \sum_s \int f_s^\mu dt + p_D^\mu + p_Q^\mu,$$

(representación como segunda ley de Newton) se puede expresar como:

$$U_f^\mu - U_i^\mu = \sum_j W_j^\mu + W_D^\mu + Q^\mu, \quad (35)$$

($j \equiv k + s$) o ecuación c -momentoenergía- c -impulsotrabajo (representación como primer principio de la termodinámica). La Ec. (35) generaliza la ecuación $\Delta U = \sum_k W_k + W_D + Q$ a tipos de energía a los que en la física pre-Einstein no se les asocia momento lineal (por ejemplo, al calor, a los trabajos disipativos, reacciones químicas, etc.), momento lineal que sí se les asocia en la física relativista.

De las Ecs. (27) o (35), agrupando las componentes espaciales por un lado y las componentes temporales por el otro, se tienen las dos ecuaciones:

$$\mathcal{M}d[\gamma(v)v] = \left[\sum_k F_k + \sum_s f_s \right] dt, \quad (36)$$

$$\mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] = \sum_k F_k dx_k + dQ, \quad (37)$$

respectivamente. Estas ecuaciones son los equivalentes relativistas de (i) la ecuación vectorial de la segunda ley de Newton (las 3 componentes espaciales) y (ii) de la ecuación escalar del primer principio de la termodinámica (componente temporal), respectivamente.

Ecuación relativista del centro-de-masas

Si sobre la partícula elemental, que se mueva en un cierto referencial con velocidad v , se aplica una fuerza \mathbf{F} , se construye un 4-vector F^μ fuerza de Minkowski como:

$$F^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v)F_x \\ \gamma(v)F_y \\ \gamma(v)F_z \\ \gamma(v)c^{-1}\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \end{Bmatrix},$$

con $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$. Se postula como Ecuación Relativista del Movimiento que:

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau},$$

donde $d\tau = \gamma^{-1}(v)dt$ es el tiempo propio de la partícula, o tiempo medido por un reloj que viaja con ella, y dt es el tiempo medido en S_∞ , por relojes en reposo en dicho referencial.

Se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} md[\gamma(v)v_x] &= F_x dt, \\ md[\gamma(v)v_y] &= F_y dt, \\ md[\gamma(v)v_z] &= F_z dt, \\ md[\gamma(v)c^2] &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \end{aligned}$$

Las tres primeras ecuaciones son la segunda ley de Newton, relativista, y la cuarta ecuación es el primer principio de la termodinámica, relativista.

Con $v_x = v \cos\theta \cos\phi$, $v_y = v \cos\theta \sin\phi$, $v_z = v \sin\theta$:

$$\begin{aligned} \frac{d[\gamma(v)c^2]}{d[\gamma(v)v_x]} &= \frac{v}{\cos\theta \cos\phi} = \frac{v_x}{\cos^2\theta \cos^2\phi}, \\ \frac{d[\gamma(v)c^2]}{d[\gamma(v)v_y]} &= \frac{v}{\cos\theta \sin\phi} = \frac{v_y}{\cos^2\theta \sin^2\phi}, \\ \frac{d[\gamma(v)c^2]}{d[\gamma(v)v_z]} &= \frac{v}{\sin\theta} = \frac{v_z}{\sin^2\theta}, \end{aligned}$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} v_x md[\gamma(v)v_x] &= F_x v_x dt, \\ v_y md[\gamma(v)v_y] &= F_y v_y dt, \\ v_z md[\gamma(v)v_z] &= F_z v_z dt, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos^2\theta \cos^2\phi md[\gamma(v)c^2] &= F_x dx, \\ \cos^2\theta \sin^2\phi md[\gamma(v)c^2] &= F_y dy, \\ \sin^2\theta md[\gamma(v)c^2] &= F_z dz. \end{aligned}$$

Sumando, se tiene que:

$$md[\gamma(v)c^2] = F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

Esta es la ecuación de la energía cinética o ecuación del centro de masas. Como todas las fuerzas son conservativas, la ecuación de la energía cinética coincide con el primer principio de la termodinámica.

Para un cuerpo extenso, sobre el que se pueden aplicar fuerzas conservativas y no conservativas, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}d[\gamma(v)v_x] &= (F_x + f_x)dt , \\ \mathcal{M}d[\gamma(v)v_y] &= (F_y + f_y)dt , \\ \mathcal{M}d[\gamma(v)v_z] &= (F_z + f_z)dt , \\ \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = F_x dx + F_y dy + F_z dz . \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} v_x \mathcal{M}d[\gamma(v)v_x] &= (F_x + f_x)v_x dt , \\ v_y \mathcal{M}d[\gamma(v)v_y] &= (F_y + f_y)v_y dt , \\ v_z \mathcal{M}d[\gamma(v)v_z] &= (F_z + f_z)v_z dt , \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \cos^2 \phi \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= (F_x + f_x)dx , \\ \cos^2 \theta \sin^2 \phi \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= (F_y + f_y)dy , \\ \sin^2 \theta \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= (F_z + f_z)dz . \end{aligned}$$

Sumando, se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= (F_x + f_x)dx + (F_y + f_y)dy + (F_z + f_z)dz \\ &= \left(\sum_k \mathbf{F}_k + \sum_s \mathbf{f}_s \right) \cdot d\mathbf{x}_{\text{cm}} . \end{aligned} \quad (38)$$

Es ésta la ecuación relativista del centro de masas del sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \cdot \Delta x_{\text{cm}} &= \gamma(v_f) \mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i) \mathcal{M}c^2 ; \\ \mathcal{F} &= \left(\sum_k \mathbf{F}_k + \sum_s \mathbf{f}_s \right) ; \\ \Delta K &= \mathcal{M}[\gamma(v_f) - 1]c^2 - \mathcal{M}[\gamma(v_i) - 1]c^2 ; \\ \Delta K &= \mathcal{F} \cdot \Delta x_{\text{cm}} . \end{aligned}$$

Esta descripción de las ecuaciones relativistas del movimiento para un cuerpo extenso están de acuerdo con el principio de similitud. Si las fuerzas aplicadas son aplicadas de forma suficientemente lenta, entonces el cuerpo se comporta como un todo, obedece el principio de inercia de la energía y aquellas partes de las ecuaciones que para una partícula elemental dependan de su masa m , para un cuerpo extenso van a depender de su inercia \mathcal{M} , manteniendo la misma forma funcional.

Ecuación del calor

Por comparación entre las ecuaciones del centro de masas y el primer principio:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= (F_x + f_x)dx + (F_y + f_y)dy + (F_z + f_z)dz , \\ \mathcal{M}d[\gamma(v)c^2] &= F_x dx + F_y dy + F_z dz + Q , \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación del calor:

$$dQ = - [f_x dx + f_y dy + f_z dz] = - \left(\sum_s \mathbf{f}_s \right) \cdot d\mathbf{x}_{\text{cm}} . \quad (39)$$

MECÁNICA. BLOQUE QUE SE DESPLAZA CON FRICCIÓN

Considérese el problema descrito en la Fig. 22, que, a su vez, es el mismo problema descrito en la Fig. 5.

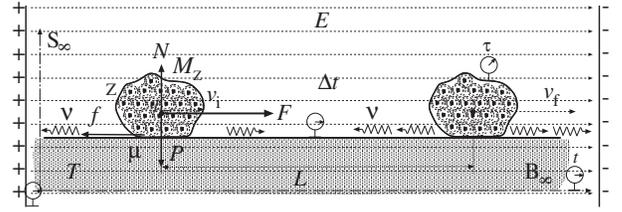


Figura 22. Cuerpo sólido que se desliza bajo la acción de una fuerza conservativa –producida por la interacción de un campo eléctrico sobre una carga eléctrica fijada en el mismo – y sometido a una fuerza de rozamiento que disipa energía mecánica. Fig. 5. Como referencial conveniente S_∞ se elige el referencial en el que el suelo, el condensador, etc., permanecen en reposo.

El cuerpo Z tiene una inercia $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(T)$ que puede ser obtenida por los procedimientos descritos anteriormente.

Como referencial S_∞ se toma aquel referencial en el que el suelo, y las placas del condensador que produce el campo eléctrico, permanecen en reposo. Sobre el cuerpo Z actúa una fuerza conservativa F , con el 4-vector fuerza de Minkowski F^μ dado por:

$$F^\mu = qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma(v)v \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v)c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma(v)q\mathcal{E} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v)c^{-1}q\mathcal{E}v \end{Bmatrix} ,$$

siendo \mathcal{E}_ν^μ el 4×4 -tensor del campo eléctrico horizontal. El tiempo propio $d\tau_F$ asociado a esta fuerza (medido por un reloj que se desplaza con el cuerpo Z) es $d\tau_F = \gamma^{-1}(v)dt$, siendo dt el intervalo de tiempo propio del referencial S_∞ . También:

$$W_k^\mu = qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \\ ct_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ q\mathcal{E}L \end{Bmatrix} ,$$

Sobre el cuerpo Z actúa también una fuerza de rozamiento, no conservativa, $f = -\mu\mathcal{M}g$. Debido a su carácter no conservativo, la componente temporal del 4-vector fuerza de Minkowski f^μ asociado a esa fuerza en S_∞ –referencial en el que tiene asociado desplazamiento cero y ‘producto fuerza-desplazamiento cero – debe ser cero. Igualmente, el tiempo propio de esta fuerza $d\tau_f = dt$ debe ser igual al tiempo medido en S_∞ . Así, para la fuerza de rozamiento su 4-vector fuerza f^μ es:

$$f^\mu = \begin{Bmatrix} -\mu\mathcal{M}g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; W_s^\mu = \begin{Bmatrix} -\mu\mathcal{M}gt_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

En el referencial S_∞ todas las fuerzas aplicadas actúan simultáneamente y durante el mismo intervalo de tiempo t_0 , medido en S_∞ (formulación asíncrona).

Debido a la acción de estas fuerzas sobre Z, el cuerpo pasa de tener una velocidad inicial v_i a una velocidad final v_f . Los 4-vectores momento inicial $p_i^\mu = c^{-1}U_i^\mu$ y momento final $p_f^\mu = c^{-1}U_f^\mu$ vendrán dados respectivamente por:

$$p_i^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)v_i \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)c \end{Bmatrix}; p_f^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)c \end{Bmatrix},$$

donde se ha admitido que la temperatura del cuerpo Z –y, por tanto, su inercia– no varían a lo largo del proceso (proceso isoterma). Durante ese intervalo de tiempo el cuerpo Z, su centro de gravedad, recorre una distancia L .

Puesto que las fuerzas no conservativas introducen efectos disipativos, es necesario considerar un intercambio de calor entre la frontera del cuerpo Z y su entorno. En el referencial S_∞ se postula la existencia de un 4-vector calor dado por:

$$Q^\mu = cp_Q^\mu = \begin{Bmatrix} cp_Q \\ 0 \\ 0 \\ E_Q \end{Bmatrix},$$

donde p_Q es el momento lineal asociado al calor y E_Q la energía asociada al mismo.

Si se toma como calor Q el invariante relativista:

$$Q = (E_Q^2 - c^2p_Q^2)^{1/2},$$

igual a la norma del 4-vector Q^μ , el incremento de entropía del universo a lo largo del proceso va a ser igual a:

$$\Delta S_U = \frac{|Q|}{T}.$$

Puesto que en S_∞ cualquier foco térmico se va a encontrar en reposo, se postula que en S_∞ la variación de entropía debe ser la máxima compatible con la energía total

intercambiada. De acuerdo con este postulado, en el referencial S_∞ debe ser $p_Q = 0$ y

$$p_Q^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c^{-1}Nh\nu \end{Bmatrix},$$

siendo $N = \dot{N}t_0$ el número de fotones de frecuencia ν (aproximación monocromática) emitidos en todas direcciones con momento lineal nulo.

Para un cuerpo extenso sometido a la acción de varias fuerzas, alguna de ellas no conservativa, se postula la Ecuación Relativista del Movimiento:

$$dp^\mu = \sum_j F_j d\tau_k + dp_Q^\mu,$$

con $j \equiv k + s$ referido a fuerzas conservativas y no conservativas. Para un proceso finito:

$$\Delta p^\mu = \sum_j \int_0^{t_0} F_j d\tau_j + p_Q^\mu.$$

Para el caso del cuerpo Z sometido a una fuerza conservativa y otra no conservativa se tiene:

$$\int_0^{t_0} \gamma(v)F d\tau_F = \int_0^{t_0} F dt = q\mathcal{E}t_0,$$

$$\int_0^{t_0} \gamma(v)Fv d\tau_F = \int_0^L F dx = q\mathcal{E}L,$$

y

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)c \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)v_i \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)c \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v)c^{-1}q\mathcal{E}L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\mu\mathcal{M}gt_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c^{-1}Nh\nu \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Se tienen dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)v_f - \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)v_i &= (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)t_0, \quad (40) \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)c^2 &= q\mathcal{E}L + Nh\nu. \quad (41) \end{aligned}$$

Información adicional sobre este proceso se puede obtener mediante la ecuación relativista del centro de masas.

1. Si las fuerzas aplicadas son constantes y la aceleración $a = (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)/\mathcal{M}$ es constante, se tiene que [34]:

$$v_f = v_i + \frac{c}{(1 + c^2/a^2t_0^2)^{1/2}},$$

$$x_f = x_i + v_it_0 + \frac{c^2}{a} \left[\left(1 + \frac{a^2t_0^2}{c^2}\right)^{1/2} - 1 \right],$$

siendo $x_f - x_i = L$ el espacio recorrido por el bloque durante el intervalo de tiempo t_0 . (En el límite $c \rightarrow \infty$ se obtienen las expresiones clásicas.) Eliminando t_0 entre estas ecuaciones, se obtiene directamente:

$$\gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 = (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)L,$$

que también se puede poner como la ecuación relativista de la energía cinética:

$$\begin{aligned} [\gamma(v_f) - 1]\mathcal{M}c^2 - [\gamma(v_i) - 1]\mathcal{M}c^2 &= \\ &= (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)L. \end{aligned} \quad (42)$$

Conocida la velocidad final v_f mediante la aplicación de la ecuación relativista impulso-momento lineal, esta Ec. (42), ecuación relativista del centro de masas o ecuación relativista de la energía cinética de traslación, permite obtener el espacio L , recorrido por el bloque durante el proceso. Tanto las velocidades v_f y v_i como el desplazamiento L se refieren al centro de masas del sistema.

2. Considerando que se cumple la relación:

$$\frac{d[\gamma(v)c^2]}{d[\gamma(v)v]} = v = \frac{dx}{dt},$$

se tiene que:

$$\frac{\mathcal{M}d[\gamma(v)c^2]}{\mathcal{M}d[\gamma(v)v]} = \frac{\mathcal{F}dx}{\mathcal{F}dt},$$

donde $\mathcal{F} = q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g$ es la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre el bloque. Por tanto, si se cumple la ecuación impulso lineal-momento lineal Ec. (40), también se cumple la ecuación del centro de masas:

$$\gamma(v_f)U - \gamma(v_i)U = (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)L, \quad (43)$$

o de la energía cinética de traslación:

$$K_f - K_i = \mathcal{F}L,$$

donde $K = [\gamma(v) - 1]\mathcal{M}c^2$ es la energía cinética de traslación.

3. Considerando que en un proceso infinitesimal para este proceso se tiene que:

$$\mathcal{M}d[\gamma(v)v] = (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)dt,$$

multiplicando ambos miembros por v , se tiene:

$$\mathcal{M}vd[\gamma(v)v] = (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)vdt.$$

Esta nueva ecuación se puede integrar, con $dx = vdt$, para un proceso finito, como:

$$\int_{v_i}^{v_f} m d(\gamma(v)c^2) = \int_{x_i}^{x_f} (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g) dx.$$

Integrando esta expresión, se tiene la ecuación relativista de la energía cinética:

$$\begin{aligned} [\gamma(v_f) - 1]\mathcal{M}c^2 - [\gamma(v_i) - 1]\mathcal{M}c^2 &= \\ &= (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)L. \end{aligned}$$

Estas tres formas de obtener la ecuación relativista del centro de masas o ecuación de la energía cinética relativista de traslación Ec. (42) indican claramente que dicha ecuación contiene la misma información que la segunda ley de Newton relativista, expresada de otra manera. Dada una cualquiera de estas dos ecuaciones, la otra se obtiene inmediatamente.

Entre las dos ecuaciones, primer principio, y energía cinética:

$$\begin{aligned} \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)c^2 &= (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)L, \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}(T)c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}(T)c^2 &= q\mathcal{E}L + Q. \end{aligned}$$

se obtiene la ecuación de los efectos térmicos o ecuación del calor:

$$Nhv = -\mu\mathcal{M}gL.$$

Conocido $\nu \equiv \nu(T)$, se puede obtener mediante esta ecuación el número N de fotones emitidos y que transportando la energía mecánica disipada han aumentado la entropía del universo, demostrando que el proceso es irreversible.

Descripción en el referencial S_A

Al igual que su formulación en física pre-Einstein se demuestra que este problema es invariante bajo transformaciones de Galileo, se puede demostrar que en su formulación relativista el problema es invariante bajo transformaciones de Lorentz.

Para obtener la descripción del problema dado en la Fig. 22 en un referencial S_A que se desplaza en paralelo al eje X con velocidad V (configuración estándar), se debe considerar que el observador en S_A debe aplicar las mismas leyes que el observador en S_∞ (Principio de Relatividad), pero utilizando sus propias medidas de las magnitudes.

Esta descripción debe coincidir con la que se obtiene si cada 4-vector en S_∞ se transforma en el correspondiente 4-vector en S_A mediante la transformación de Lorentz (para la configuración estándar):

Los 4-vectores x^μ y x_A^μ relativos al mismo suceso se relacionan mediante la transformación de Lorentz como

$$\begin{aligned} x_A^\mu &= \mathcal{L}_\nu^\mu(V)x^\nu, \\ x^\mu &= \mathcal{L}_\nu^\mu(-V)x_A^\nu. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_{1A} \\ x_{2A} \\ x_{3A} \\ x_{4A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

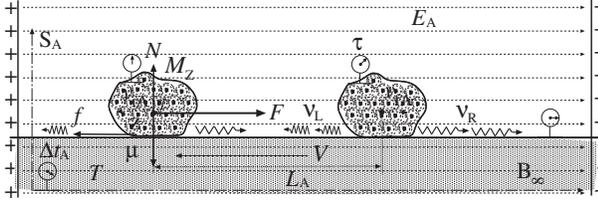


Figura 23. Referencial S_A . Bloque arrastrado por una fuerza F y sometido a una fuerza de rozamiento f . La fuerza de rozamiento tiene desplazamiento distinto de cero. El calor se emite con momento lineal no nulo

En el referencial S_A , en configuración estándar respecto de S_∞ , con velocidad V , se tiene:

$$\begin{aligned} \gamma(v_{fA})\mathcal{M}v_{fA} - \gamma(v_{iA})\mathcal{M}v_{iA} &= Ft_{0A} - \mu\mathcal{M}gt_{0fA} + p_{QA}, \\ \gamma(v_{fA})U - \gamma(v_{iA})U &= FL_A + f\Delta x_{0fA} - Q_A, \end{aligned}$$

donde el subíndice A indica las magnitudes tal y como son medidas en S_A , y donde se ha considerado: (i) que las fuerzas F y f tienen diferentes intervalos de tiempo de aplicación en S_A (en S_∞ estas fuerzas se aplican simultáneamente); (ii) que el calor en S_A tiene momento lineal p_{QA} (lo que no ocurre en S_∞):

$$Q_A^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)Q^\nu = \{c\gamma(V)(Nh\nu/c^2)V, 0, 0, -\gamma(V)Nh\nu\},$$

con

$$p_{QA} = \gamma(V)\frac{Nh\nu}{c^2}V,$$

y (iii) que la fuerza f tiene asociado un desplazamiento Δx_{0fA} en S_A (lo que no ocurre en S_∞),

$$W_{fA}^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)W_f^\nu = \{c\gamma(V)ft_0, 0, 0, -\gamma(V)Vft_0\},$$

El 4-vector intervalo Δx_F^μ asociado a la fuerza F en S_∞ es

$$\Delta x_F^\mu = \{L, 0, 0, ct_0\},$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \Delta x_{FA}^\mu &= \mathcal{L}_\nu^\mu(V)\Delta x_F^\mu \\ &= \{\gamma(V)(L - Vt_0), 0, 0, c\gamma(V)(t_0 - (V/c^2)L)\}, \end{aligned}$$

con $\Delta x_{FA}^\mu = \{L_A, 0, 0, ct_{0A}\}$. El 4-vector intervalo Δx_f^μ asociado a la fuerza f en S_∞ es

$$\Delta x_f^\mu = \{0, 0, 0, ct_0\},$$

por lo que:

$$\Delta x_{0fA}^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V)\Delta x_f^\mu = \{-\gamma(V)Vt_0, 0, 0, c\gamma(V)t_0\},$$

con $\Delta x_{0fA}^\mu = \{\Delta x_{0fA}, 0, 0, ct_{0fA}\}$.

1. Campo eléctrico. En S_A el campo eléctrico $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}$ (que se obtiene directamente transformando el 4×4 -tensor \mathcal{E}_ν^μ) y la fuerza $F_A = q\mathcal{E}$ es igual a F . El mismo resultado se obtiene aplicando las ecuaciones de las transformaciones de fuerzas.

2. Fuerza de rozamiento. El componente temporal no nulo de la fuerza de rozamiento en S_A se obtiene directamente aplicando la transformación de Lorentz a f^μ . Para el observador en S_A , el suelo B_∞ se desplaza con velocidad $-V$ y para él, también se desplaza la propia fuerza f .

3. Si los N fotones emitidos se dividen en dos partes (derecha e izquierda) iguales, en S_A la mitad de los fotones se emite con frecuencia (efecto Doppler relativista):

$$\nu_R = \nu \frac{(c - V)^{1/2}}{(c + V)^{1/2}},$$

y la otra mitad con frecuencia:

$$\nu_L = \nu \frac{(c + V)^{1/2}}{(c - V)^{1/2}}.$$

Se puede ver entonces que en S_A el conjunto se mueve como un todo cumpliendo el principio de inercia de la energía $Q_A = \gamma(V)Q$, y transportando momento lineal $p_{QA} = -\gamma(V)(Nh\nu c^{-2})V$.

4. Ecuación del centro de masas en S_A . Se cumple también:

$$\gamma(v_{fA})U - \gamma(v_{iA})U = (q\mathcal{E} - \mu\mathcal{M}g)L_A,$$

siendo $L_A = \gamma(V)(L - Vt_0)$ el desplazamiento del centro de masas en S_A .

En definitiva, aplicando la ecuación:

$$p_{fA}^\mu - p_{iA}^\mu = \sum_j \int F_{jA}^\mu d\tau_j + p_{QA}^\mu,$$

o la ecuación:

$$U_{fA}^\mu - U_{iA}^\mu = \sum_j W_{jA}^\mu + Q_A^\mu,$$

con cada 4-vector en S_A obtenido mediante transformación de Lorentz del correspondiente en S_∞ , e interpretando los resultados obtenidos en términos de transformaciones de campos electromagnéticos, transformaciones de fuerzas, efecto Doppler, etc., se demuestra que la descripción en S_A es equivalente a la descripción en S_∞ .

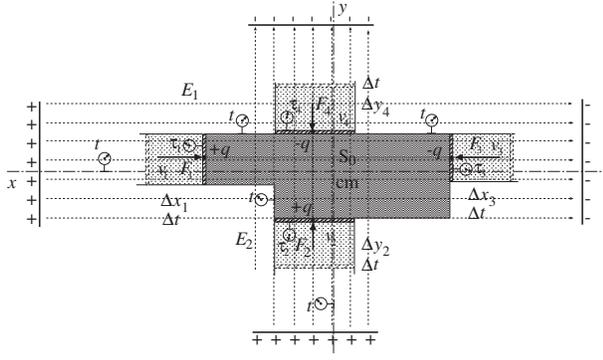


Figura 24. Cuerpo deformable dotado de cuatro émbolos. El recipiente contiene un mol de átomos de He a temperatura T . Cada émbolo k es diferente, se mueve con diferente velocidad v_k y tiene su particular tiempo propio τ_k . Las fuerzas se aplican con suficiente lentitud, de tal manera que el sistema como un todo nota todas las fuerzas.

TERMODINÁMICA. CUERPO DEFORMABLE

Una situación muy característica en termodinámica es cuando sobre un sistema extenso y deformable, dotado de varios émbolos, se aplican fuerzas sobre los mismos de tal manera que la fuerza resultante sea nula. Esto implica que en el referencial del centro de masas el impulso total es nulo y que el centro de masas, aunque se desplace, permanece en reposo en todo momento (Fig. 24). Se elige como referencial S_∞ el referencial en el que el centro de masas permanece en reposo, que va a coincidir con aquel referencial S_∞ en el que los condensadores, etc., también permanecen en reposo.

Considérese un sistema Z formado por 1 mol de átomos de He, con inercia $\mathcal{M}(T)$,

$$\mathcal{M}(T) = n_p m_p + n_n m_n + n_e m_e - c^{-2} (\tilde{U}_N + \tilde{U}_A) + c^{-2} U(T, \mathcal{V}),$$

en reposo en S_∞ .

Sobre el sistema Z actúan cuatro fuerzas conservativas, F_k . La k -ésima fuerza F_k actúa sobre el émbolo k , que se mueve con velocidad v_k .

Para un campo eléctrico con componentes horizontal y vertical se tiene el 4×4 -tensor campo electromagnético:

$$\mathcal{E}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_x \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A partir del 4-vector Fuerza de Minkowski F^μ se puede definir el 4-vector trabajo (impulso-trabajo) W^μ considerando que:

$$F^\mu = c^{-1} \frac{dW^\mu}{d\tau},$$

o

$$dW^\mu = c F^\mu d\tau.$$

Teniendo en cuenta que $F^\mu = qc^{-1} \mathcal{E}_\nu^\mu v^\nu$ y que $v^\nu d\tau = dx^\nu$, se tiene que:

$$dW^\mu = q \mathcal{E}_\nu^\mu dx^\nu.$$

Para un proceso finito, con un 4-vector intervalo finito Δx^μ :

$$\Delta x^\mu = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\Delta t \end{pmatrix},$$

se tiene $W^\mu = q \mathcal{E}_\nu^\mu \Delta x^\nu$:

$$W^\mu = q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_x \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\Delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\mathcal{E}_x t_0 \\ q\mathcal{E}_x t_0 \\ 0 \\ q[\mathcal{E}_x \Delta x + \mathcal{E}_y \Delta y] \end{pmatrix}.$$

En el referencial S_∞ todas las fuerzas F_k aplicadas actúan simultáneamente y durante el mismo intervalo de tiempo t_0 , medido en S_∞ (formulación asíncrona), y con impulso total nulo:

$$\sum_k F_k = 0.$$

Si no se impone esta condición de resultante nula (que va a ser característica de los problemas típicos de termodinámica con gases, émbolos, etc.), el centro de masas del sistema Z adquiriría una cierta velocidad, por lo que tendría su particular tiempo propio, diferente del de S_∞ , complicando – habría que avanzar por diferenciales de tiempo, sin poder calcular procesos finitos – el cálculo.

$$W_1^\mu = q_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_x \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ 0 \\ 0 \\ ct_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 t_0 \\ 0 \\ 0 \\ cF_1 \Delta x_1 \end{pmatrix};$$

$$F_1 = q_1 \mathcal{E}_x.$$

$$W_2^\mu = q_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_x \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y_2 \\ 0 \\ ct_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cF_2 t_0 \\ 0 \\ F_2 \Delta y_2 \end{pmatrix};$$

$$F_2 = q_2 \mathcal{E}_y.$$

$$W_3^\mu = -q_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_x \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_3 \\ 0 \\ 0 \\ ct_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cF_3 t_0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3 \Delta x_3 \end{pmatrix};$$

$$F_3 = -q_1 \mathcal{E}_x.$$

$$W_4^\mu = -q_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_x \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E}_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{E}_x & \mathcal{E}_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y_4 \\ 0 \\ ct_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ cF_4 t_0 \\ 0 \\ F_4 \Delta y_4 \end{pmatrix};$$

$$F_4 = -q_2 \mathcal{E}_y.$$

Se tiene que con $F_3 = -F_1$ y $F_4 = -F_2$, $\sum_k F_k = 0$ (Condición de equilibrio de fuerzas en S_∞).

Debido a la acción de estas fuerzas sobre el sistema Z, a la realización de trabajos, el sistema Z pasa de tener una función energía inicial $U(T_i, \mathcal{V}_i)$ a una función energía final $U(T_f, \mathcal{V}_f)$. Se ha considerado que el gas es real y que su función energía depende del volumen además de depender de la temperatura (por ejemplo, un gas de Van der Waals). Si el proceso se considera isotermo, entonces $T_f = T_i$.

Los 4-vectores función energía inicial y final vendrán dados respectivamente por:

$$U_i^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_i) \end{Bmatrix}; U_f^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_f) \end{Bmatrix},$$

donde ya se ha considerado que el centro de masas del sistema Z permanece en reposo en todo momento. Puesto que a lo largo del proceso de compresión se produce un intercambio de calor con el exterior:

$$Q^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{Bmatrix},$$

donde ya se ha aplicado la hipótesis de máxima entropía. En una aproximación monocromática todos los fotones emitidos tiene la misma frecuencia ν , con $Q = -Nh\nu$. Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} U^\mu &= cp^\mu, \\ F_k^\mu &= c^{-1} \frac{dW_k^\mu}{d\tau_k}, \\ c \int F_k^\mu d\tau_k &= W_k^\mu, \end{aligned}$$

se tiene el primer principio de la termodinámica Relativista:

$$\Delta U^\mu = \sum_k W_k^\mu + Q^\mu,$$

con $\Delta U^\mu = U_f^\mu - U_i^\mu$. Para el sistema Z:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_f) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_i) \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} cq_1 \mathcal{E}_x t_0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \mathcal{E}_x \Delta x_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ cq_2 \mathcal{E}_y t_0 \\ 0 \\ q_2 \mathcal{E}_y \Delta y_2 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{Bmatrix} -cq_1 \mathcal{E}_x t_0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 \mathcal{E}_x \Delta x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -cq_2 \mathcal{E}_y t_0 \\ 0 \\ q_2 \mathcal{E}_y \Delta y_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q \end{Bmatrix}. \quad (44) \end{aligned}$$

Se tiene la ecuación:

$$U(T_i, \mathcal{V}_f) - U(T_i, \mathcal{V}_i) = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta y_2 + F_3 \Delta x_3 + F_4 \Delta y_4 + Q.$$

Si este proceso se describe en el referencial S_A :

1. Campos magnéticos. Los campos eléctricos verticales se transforman generando campos magnéticos en S_A . Los campos eléctricos horizontales no se ven transformados.
2. Pérdida de simultaneidad. Sobre los émbolos en horizontal las fuerzas no se aplican simultáneamente.
3. Efecto Doppler para los fotones emitidos.

MECÁNICA. PERSONA QUE SALTA

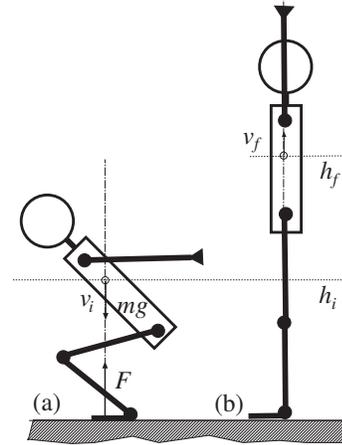


Figura 25. (a) Una persona salta partiendo de una posición baja y con velocidad cero. (b) Cuando su pie pierde contacto con el suelo, su centro de masas se encuentra a una altura h y se mueve con velocidad v_f .

La función energía de la persona se puede dividir en dos partes: (i) una función energía $\mathcal{M}c^2$ (aproximadamente la masa de la persona multiplicada por c^2) y (ii) una función energía U_ξ asociada a los procesos químicos que deben producirse en su cuerpo para conseguir mover los músculos y que estos ejerzan una fuerza sobre la pared. Desde que empieza a presionar contra el suelo hasta que cesa el contacto con el suelo se produciría una variación de energía interna química dada por

$$\Delta U_\xi = U_{f\xi} - U_{i\xi}.$$

La función energía $U_{i\xi}$ esta relacionada con las masas de los diversos átomos que forman los reactivos de las reacciones químicas y sus energías de enlace y $U_{f\xi}$ por lo que ΔU_ξ es esencialmente la energía asociada a las diferencias entre las energías de enlace de los productos menos las de los reactivos.

$$U_i^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}c^2 + U_{i\xi} \end{Bmatrix}; U_i^\mu = \begin{Bmatrix} c\gamma(v)\mathcal{M}v \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v)\mathcal{M}c^2 + U_{f\xi} \end{Bmatrix},$$

donde se ha considerado que la persona parte del reposo y que alcanza una velocidad v su centro de masas.

Para la fuerza gravitatoria F su 4-vector trabajo W_F^μ es:

$$W_F^\mu = \{0, -c\mathcal{M}gt_0, 0, -\mathcal{M}gh\}.$$

En el desarrollo de las reacciones químicas que van a producirse, se tiene una variación del volumen entre reactivos y productos, que deben realizar un trabajo contra la presión externa P_0 . El 4-vector trabajo W_P^μ debido a este efecto es:

$$W_P^\mu = \{0, 0, 0, -P_0\Delta\mathcal{V}_\xi\},$$

donde se considera que los gases en su expansión contra la atmósfera no adquieren momento lineal.

La fuerza (media) F viene caracterizada por el 4-vector

$$W^\mu = \{0, c\bar{f}t_0, 0, 0\}.$$

En el referencial S_∞ en el que el suelo permanece en reposo, se tiene que:

$$Q^\mu = \{0, 0, 0, Q_\xi + Nh\nu\},$$

donde $Q_\xi = T\Delta S_\xi$ es el calor intercambiado debido a la reacción química y $Nh\nu$ un exceso de calor.

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} c\gamma(v)\mathcal{M}v \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v)\mathcal{M}c^2 + U_{f\xi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{M}c^2 + U_{i\xi} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -c\mathcal{M}gt_0 \\ 0 \\ -\mathcal{M}gh \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_0\Delta\mathcal{V}_\xi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c\bar{f}t_0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_\xi + Nh\nu \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Se tienen entonces las ecuaciones:

$$\gamma(v)\mathcal{M}v = (\bar{f} - \mathcal{M}g)t_0,$$

$$\gamma(v)\mathcal{M}c^2 + U_{f\xi} - \mathcal{M}c^2 + U_{i\xi} = -P_0\Delta\mathcal{V}_\xi + T\Delta S_\xi + Nh\nu.$$

Con estas ecuaciones se puede calcular v y t_0 y:

$$[\gamma(v) - 1]\mathcal{M}c^2 + \mathcal{M}gh \approx -(G_{f\xi} - G_{i\xi}).$$

Es la disminución de la función energía asociada a las reacciones químicas del metabolismo de la persona la que proporciona la energía necesaria para la creación de su energía cinética final. Con la ecuación del centro de masas:

$$\gamma(v)\mathcal{M}c^2 - \mathcal{M}c^2 = (\bar{f} - \mathcal{M}g)\Delta x_{\text{cm}},$$

se puede obtener la distancia Δx_{cm} recorrida por su centro de masas mientras mantiene el contacto con el suelo.

Para un observador en S_A , la persona se desplaza con velocidad horizontal $-V$.

TERMODINÁMICA. CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO DE UN GAS

En la Fig. 26 se muestra un gas real, con función energía interna $U(T, \mathcal{V})$ dependiente de la temperatura y del volumen, encerrado en un cilindro dotados de dos émbolos, uno superior T, y otro inferior B. El émbolo T, tiene fijado en él una carga eléctrica $-q$, mientras que el émbolo B tiene fijada una carga $+q$. El sistema se encuentra inmerso en un campo eléctrico uniforme vertical $\mathbf{E} = (0, \mathcal{E}, 0)$. En el interior del gas se encuentra una resistencia eléctrica conectada a una batería eléctrica tal que por la resistencia puede circular corriente eléctrica de intensidad I y voltaje v . Inicialmente, con el gas a temperatura T_i , volumen inicial \mathcal{V}_i y presión P_i , el gas se encuentra en equilibrio termodinámico. Sobre el émbolo T, de sección A , se aplica una fuerza vertical, hacia abajo, $F_E = -q\mathcal{E}$, y una fuerza vertical y hacia arriba $F_P = P_i A$, iguales y de sentido contrario. Sobre el émbolo B, con inercia mucho mayor que el émbolo T (sería una especie de suelo), de igual sección A , se aplica una fuerza vertical, hacia abajo, $F_P = -PA$, y una fuerza vertical y hacia arriba $F_E = +q\mathcal{E}$, iguales y de sentido contrario.

Con velocidad inicial $v_i = 0$ para el gas, el 4-vector función energía para el mismo viene dado por:

$$U_i^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_i) \end{Bmatrix},$$

donde

$$U(T_i, \mathcal{V}_i) = \sum_j m_j c^2 - |\tilde{U}| + \int_0^{T_i} C(T) dT - af(\mathcal{V}_i),$$

donde m_j es la masa de la j -ésima partícula componente, \tilde{U} es la suma de todas las energías de interacción y $af(\mathcal{V}_i)$ es la dependencia de la energía interna con la temperatura. Para un gas de Van der Waals:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\mathcal{V} &= C_\mathcal{V}, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{V}}\right)_T &= T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\mathcal{V} - P = \frac{a}{\mathcal{V}^2}, \end{aligned} \quad (45)$$

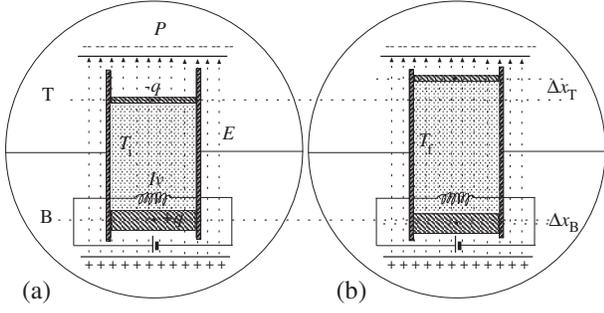


Figura 26. Gas real encerrado en un cilindro dotado de dos émbolos, T y B. El gas ve aumentada su temperatura mediante una resistencia eléctrica por la que circula corriente (proceso adiabático), con realización de trabajo disipativo. Al aumentar la temperatura del gas aumenta su presión y los émbolos se desplazan contra la acción de un campo eléctrico hasta alcanzar un nuevo equilibrio. En el referencial S_∞ las paredes del cilindro, el campo eléctrico y el condensador y la batería que produce la corriente eléctrica, permanecen en reposo.

y

$$U(T_i, \mathcal{V}_i) = U(T_0, \mathcal{V}_0) + C_V T - \frac{a}{\mathcal{V}}.$$

Inicialmente el gas se encuentra rodeado de paredes adiabáticas. Durante un intervalo de tiempo t_0 se hace circular corriente eléctrica por la resistencia, disipándose una energía (efecto Joule) $W = Ivt_0$. Durante este intervalo de tiempo la temperatura del gas aumenta, así como su volumen. En este proceso de expansión el gas ejerce una fuerza neta sobre cada émbolo, que deben mover las cargas eléctricas contra el campo eléctrico. En el estado final, la presión final debe ser igual a la presión inicial, con la misma fuerza neta cero ejerciéndose sobre cada émbolo.

$$\mathcal{E}_\nu^\mu = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Para obtener el trabajo realizado contra el campo eléctrico por el desplazamiento de los émbolos, se tiene que el 4-vector trabajo W_T^μ realizado por el émbolo superior viene dado por:

$$W_T^\mu = -q \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta y_T \\ 0 \\ ct_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ -q\mathcal{E}\Delta y_T \end{Bmatrix},$$

siendo Δy_T el desplazamiento del émbolo T durante el proceso. El impulso sobre el gas se dirige hacia abajo y

el trabajo, realizado por el gas, es negativo.

$$F_T^\mu = -qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma(v_T)v_T \\ 0 \\ \gamma(v_T)c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\gamma(v_T)\mathcal{E} \\ 0 \\ -q\mathcal{E}v_T \end{Bmatrix}, \quad (46)$$

con

$$W_T^\mu = c \int_0^{t_0} F_T^\mu d\tau_T,$$

donde $d\tau_T = \gamma^{-1}(v_T)dt$.

Para el émbolo inferior B se tiene que:

$$W_B^\mu = +qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta y_B \\ 0 \\ 0 \\ ct_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ -q\mathcal{E}\Delta y_B \end{Bmatrix},$$

siendo Δy_B el desplazamiento del émbolo T durante el proceso y $-q\mathcal{E}\Delta y_B$ el ‘producto fuerza-desplazamiento’ para este émbolo. El impulso realizado sobre el gas es hacia arriba y el trabajo es negativo.

Por consideraciones microscópicas se puede considerar que el efecto de la circulación de la corriente eléctrica por la resistencia colocada en el seno del gas es aumentar la energía de las moléculas componentes del gas, aumentando su velocidad media y, por tanto, su temperatura, pero de tal manera que el momento lineal neto de esta ganancia de energía es cero. Así:

$$\sum_n \Delta K_n = Ivt_0, \\ \sum_n \Delta p_n = 0.$$

Así, el 4-vector W_D^μ asociado a este trabajo disipativo se puede poner como:

$$W_D^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Ivt_0 \end{Bmatrix}.$$

Se puede hacer la consideración macroscópica siguiente. Se define la variación de entropía del gas (universo) debido a este proceso de calentamiento como la norma $\|\delta W_D^\mu\|$ del 4-vector $\delta W_D^\mu = \{cp_D, 0, 0, E_D\}$, con:

$$\|\delta W_D^\mu\| = (E_D^2 - c^2 p_D^2)^{1/2},$$

dividida por T :

$$dS_D = \frac{\|\delta W_D^\mu\|}{T}.$$

Se admite como hipótesis que para este tipo de interacción por trabajo disipativo, la variación de la entropía del universo debe alcanzar un máximo compatible con la energía intercambiada E_D (principio de máxima entropía). Esta condición implica que debe ser $p_D = 0$ y la energía disipada en la resistencia debe serlo con momento lineal nulo.

Por tratarse de un proceso adiabático:

$$Q^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

En principio se puede admitir que el gas, su centro de masas, va a adquirir una velocidad final v_f . Siendo $U(T_f, \mathcal{V}_f)$ la función energía interna del gas en su estado final, se tendría:

$$U_f^\mu = \begin{Bmatrix} \gamma(v_f) [U(T_f, \mathcal{V}_f)c^{-2}] v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)U(T_f, \mathcal{V}_f) \end{Bmatrix}.$$

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_i - (\Delta y_T + \Delta y_B) A.$$

Aplicando la ecuación momentoenergía-impulsotrabajo:

$$dU^\mu = \sum_k dW_k^\mu + dW_D^\mu + dQ^\mu,$$

o, para un proceso finito:

$$U_f^\mu - U_i^\mu = \sum_k W_k^\mu + W_D^\mu + Q^\mu,$$

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \gamma(v_f) [U(T_f, \mathcal{V}_f)c^{-2}] v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)U(T_f, \mathcal{V}_f) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_i) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ -q\mathcal{E}\Delta y_T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ +q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ -q\mathcal{E}\Delta y_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Ivt_0 \end{Bmatrix}, \quad (47) \end{aligned}$$

Se obtienen las dos ecuaciones:

$$\gamma(v_f) [U(T_f, \mathcal{V}_f)c^{-2}] v_f = 0$$

$$\gamma(v_f)U(T_f, \mathcal{V}_f) - U(T_i, \mathcal{V}_i) = -q\mathcal{E}(\Delta y_T + \Delta y_B) + Ivt_0.$$

De la primera ecuación se deduce que $v_f = 0$. La simetría con que se aplican las fuerzas conservativas y el hecho de que las interacciones trabajo disipativo y calor tienen en este referencial S_∞ momento lineal nulo, implica que el gas no puede adquirir energía cinética macroscópica (su adquisición violaría el segundo principio de la termodinámica).

$$v_f = 0$$

$$U(T_f, \mathcal{V}_f) - U(T_i, \mathcal{V}_i) = -q\mathcal{E}(\Delta y_T + \Delta y_B) + Ivt_0.$$

La energía eléctrica disipada se emplea en realizar trabajo contra el campo eléctrico cuando los émbolos se desplazan y en variar la función energía del gas. El trabajo es negativo debido a que es realizado por el gas. El centro de gravedad del gas no varía su energía cinética.

La irreversibilidad del proceso se establece desde el momento en que aumenta la entropía del universo (la entropía de la batería se puede considerar constante; en su caso, aumentará) a lo largo del mismo:

$$\Delta S_U^{(1)} \approx \mathcal{M}c_V \ln \frac{T_f}{T_i} + \mathcal{M}R \ln \frac{\mathcal{V}_f - b}{\mathcal{V}_f - b}.$$

El proceso no se puede invertir de ninguna manera.

Para un observador en el referencial S_A , en configuración estándar respecto de S_∞ , se tendría:

1. El campo eléctrico vertical se vería modificado, con $\mathcal{E}_A = \gamma(V)\mathcal{E}$.
2. Aparecería un campo magnético $B_z =$, que no existe en S_∞ .
3. En la interacción de este campo eléctrico y magnético con la carga depositada en cada émbolo, que en S_A se desplaza con velocidad $-V$, se aplica la ecuación de la fuerza de Lorentz.
4. Sobre cada émbolo se aplica una fuerza horizontal F_{xTA} y F_{xBA} , respectivamente, que va a dar lugar a un impulso neto en esa dirección.
5. Este impulso neto se utiliza en variar el momento lineal del sistema pues aunque se mueve con velocidad constante $-V$, al ver modificada su función energía como resultado de la expansión del gas, calentamiento, etc., ve modificada su inercia y también su momento lineal.
6. El trabajo disipativo realizado tendrá asociado momento lineal no nulo. Si en S_∞ las moléculas del gas salen después de chocar con la resistencia caliente con momento lineal total nulo, en S_A ya tendrán momento lineal total no nulo, por lo que el observador tiene que asignar momento lineal no nulo al trabajo disipativo.

EMISIÓN DE RADIACIÓN TÉRMICA

Una vez elevada la temperatura el gas mediante compresión adiabática, se lleva a cabo el siguiente proceso. Se eliminan las paredes adiabáticas y el gas se deja enfriar en una cavidad que se comporta como un foco térmico a temperatura T_i (Fig. 27).

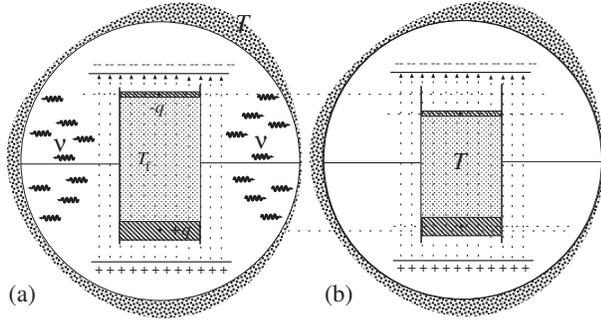


Figura 27. El gas previamente calentado se deja enfriar en una cavidad a temperatura T_i (proceso isoterma). En el referencial S_∞ las paredes del cilindro y la cavidad permanecen en reposo. Se emiten fotones de frecuencia ν con momento lineal total nulo.

Como 4-vector función energía inicial del gas U_i^μ se toma:

$$U_i^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_i) \end{Bmatrix}.$$

En el proceso de enfriamiento el gas se contrae y el campo eléctrico, a través de los émbolos realiza un trabajo sobre el gas. Aunque cada energía intercambiada en forma de trabajo tiene su propio impulso, el impulso neto es cero.

$$W_T^\mu = -qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta y_T \\ 0 \\ 0 \\ ct_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ +q\mathcal{E}\Delta y_T \end{Bmatrix}.$$

$$W_B^\mu = +qc^{-1} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +\Delta y_B \\ 0 \\ 0 \\ ct_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ +q\mathcal{E}\Delta y_B \end{Bmatrix}.$$

Por consideraciones microscópicas se puede considerar que las paredes del cilindro que contiene el gas emiten radiación térmica en todas direcciones, tal que el momento lineal total es nulo. Si la radiación térmica -fotones de frecuencia ν - se emite con una tasa \dot{N} (supuesta constante), al cabo del intervalo de tiempo t_0 , se tendrá el 4-vector calor Q^μ dado por:

$$Q^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{N}h\nu t_0 \end{Bmatrix}.$$

Se puede hacer la siguiente consideración macroscópica. Se define la variación de entropía debida a la radiación

térmica intercambiada como la norma $\|\delta Q^\mu\|$ del 4-vector $\delta Q^\mu = \{cp_Q, 0, 0, E_Q\}$, con:

$$\|\delta Q^\mu\| = (E_Q - cp_Q)^{1/2},$$

dividida por T :

$$dS = \frac{\|\delta Q^\mu\|}{T}.$$

Se admite como hipótesis que para este tipo de interacción la variación de la entropía del universo debe alcanzar un máximo compatible con la energía intercambiada E_Q (principio de máxima entropía). Esta condición implica que debe ser $p_Q = 0$ y la energía emitida como radiación térmica debe serlo con momento lineal nulo.

El 4-vector función energía final del gas en este proceso de enfriamiento es:

$$U_f^\mu = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_f, \mathcal{V}_f) \end{Bmatrix}.$$

Aplicando la ecuación cmomentoenergía-cimpulsotrabajo se tiene:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_i, \mathcal{V}_i) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U(T_f, \mathcal{V}_f) \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ +q\mathcal{E}\Delta y_T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ +q\mathcal{E}t_0 \\ 0 \\ +q\mathcal{E}\Delta y_B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{N}h\nu t_0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación:

$$U(T_i, \mathcal{V}_i) - U(T_f, \mathcal{V}_f) = +q\mathcal{E}(\Delta y_T + \Delta y_B) + \dot{N}h\nu t_0.$$

Aunque en este referencial la ecuación del impulso-momento es idénticamente nula (debido a la exigencia de la formulación asíncrona), en otros referenciales inerciales puede no serlo.

La irreversibilidad del proceso se establece desde el momento en que aumenta la entropía del universo a lo largo del mismo:

$$\Delta S_U^{(2)} \approx \frac{\dot{N}h\nu t_0}{T_i}.$$

El proceso de disipación de energía eléctrica no se puede invertir de ninguna manera (salvo que se disponga de otro foco térmico a diferente temperatura, lo que no es el caso).

Para el conjunto de los dos procesos:

$$\dot{N}h\nu t_0 = -Ivt_0.$$

Puesto que $\Delta S_U^{(2)} > \Delta S_U^{(1)}$, el segundo proceso es todavía más irreversible que el primero. Como en el primer proceso el gas alcanza una temperatura T_f mayor que T_i ,

se puede conectar una máquina de Carnot entre el gas y el foco térmico y recuperarse algo del trabajo disipado (no todo). Pero en el segundo proceso gas y foco térmico terminan a la misma temperatura por lo que el trabajo perdido es $W_p = T_i \Delta S_V^{(2)} = Ivt_0$ y ese trabajo se ha disipado por completo.

Observador en S_A

Para un observador en el referencial S_A , en configuración estándar respecto de S_∞ , en este proceso de enfriamiento se tendría:

1. Dependiendo de la dirección en que sean emitidos, los fotones tendrán diferente frecuencia (efecto Doppler relativista)
2. El conjunto de fotones emitidos tendría momento lineal no nulo, de acuerdo con el principio de inercia de la energía.
3. El impulso neto realizado sobre el sistema se emplea tanto en variar el momento lineal del gas, pues varía su inercia al variar su volumen, debido a las diferentes energías de interacción, como en proporcionar momento lineal al conjunto de fotones emitidos.

Para este observador, al final del primer proceso el gas habrá variado su momento lineal, no porque haya variado su velocidad sino debido a que ha variado su inercia. Pero esta variación del momento lineal se deberá a que en S_A el trabajo disipativo sí tiene asociado impulso. Durante el segundo proceso, el observador en S_A observará que el gas disminuye su momento lineal, no debido a su variación de velocidad, siempre con velocidad V sino a la disminución de su inercia. Esto se debe a que los fotones emitidos hacia la izquierda tienen mayor frecuencia que los emitidos a la derecha, por lo que al emitirse ejercen un impulso mayor sobre el gas que los emitidos a la derecha, frenando el gas.

Campo magnético

Debido a que observa un campo eléctrico moviéndose hacia la izquierda, el observador en S_A observa también un campo magnético. Se tiene

$$\mathcal{E}_{A\nu}^\mu = \mathcal{L}_\nu^\mu(V) \mathcal{E}_\nu^\mu \mathcal{L}_\nu^{+\mu}(V),$$

donde $\mathcal{L}_\nu^{+\mu}(V) = \mathcal{L}_\nu^\mu(-V)$, y

$$\mathcal{E}_{A\nu}^\mu = \begin{Bmatrix} 0 & \gamma(V)\mathcal{E}c^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma(V)\mathcal{E}c^{-1} & 0 & 0 & \gamma(V)\mathcal{E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(V)\mathcal{E} & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

Identificando componentes, se tiene que el observador en S_A mide los campos eléctrico y magnético:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{y_A} &= \gamma(V)\mathcal{E}, \\ cB_{z_A} &= \gamma(V)\mathcal{E}c^{-1}. \end{aligned}$$

con

$$W_{TA} = -q\mathcal{E}_{A\nu}^\mu \Delta x_{TA},$$

donde

$$\Delta x_{TA} = \mathcal{L}_\nu^\mu(V) \Delta x_T.$$

Efecto Doppler relativista

El observador en S_A observará frecuencias en los fotones distintas de las observadas en S_∞ . para los fotones emitidos hacia la derecha se tendrá que:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} ch\nu_{rA}c^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ h\nu_{rA} \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +ch\nu c^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ h\nu \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

con

$$\nu_{rA} = \nu \frac{(c-V)^{1/2}}{(c+V)^{1/2}},$$

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} ch\nu_{lA}c^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ h\nu_{lA} \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -ch\nu c^{-1} \\ 0 \\ 0 \\ h\nu \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\nu_{lA} = \nu \frac{(c+V)^{1/2}}{(c-V)^{1/2}}.$$

$$p_{QA} = \frac{N}{2} \frac{h\nu_{rA}}{c} - \frac{N}{2} \frac{h\nu_{lA}}{c} = -\gamma(V) \frac{Nh\nu}{c^2} V,$$

$$E_{QA} = \frac{N}{2} h\nu_{rA} + \frac{N}{2} h\nu_{lA} = \gamma(V) Nh\nu.$$

En S_A el conjunto de fotones sí tiene asociado momento lineal.

$$Q_A^\mu = \begin{Bmatrix} cp_{QA} \\ 0 \\ 0 \\ E_{QA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -c\gamma(V)Nh\nu c^{-2}V \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(V)Nh\nu \end{Bmatrix}.$$

También se obtiene este resultado haciendo:

$$Q_A^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{N}h\nu t_0 \end{pmatrix}.$$

La norma

$$\|Q_A^\mu\| = \dot{N}h\nu t_0.$$

Si T es una constante, no depende del referencial, entonces se tiene la misma variación de entropía en S_A que en S_∞ .

Inercia de la energía

Para el trabajo disipativo en S_A :

$$\begin{pmatrix} c p_{DA} \\ 0 \\ 0 \\ E_{DA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I\nu t_0 \end{pmatrix},$$

$$W_{DA} = \begin{pmatrix} c\gamma(V)I\nu t_0 c^{-2}V \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(V)I\nu t_0 \end{pmatrix}.$$

La norma

$$\|W_{DA}^\mu\| = I\nu t_0.$$

Si T es una constante, no depende del referencial, entonces se tiene la misma variación de entropía en S_A que en S_∞ .

VELA SOLAR

El problema de la vela solar resuelto aplicando la segunda ley de Newton en un formalismo pre-Einstein implica utilizar una descripción que no es covariante ni bajo transformaciones de Galileo (a causa de los fotones) ni covariante bajo transformaciones de Lorentz (a causa de la segunda ley de Newton). Mediante la descripción con 4-vectores se puede obtener una descripción que es covariante Lorentz y tal que en el límite de $c \rightarrow \infty$ se obtiene la descripción pre-Einstein.

Una vela solar, de inercia \mathcal{M} y sección A , se desplaza con una velocidad inicial v_i cuando se encuentra a una distancia r_i del sol. A esa distancia, sobre la vela, incide un flujo \dot{n} de fotones por unidad de superficie (el Sol emite una potencia $w_S = A_s \sigma T_s^4$ a través de su superficie, siendo $A_s = 4\pi r_S^2$ la superficie del Sol, r_S su radio, y $T_s = 6000$ K, su temperatura superficial. A una distancia r del

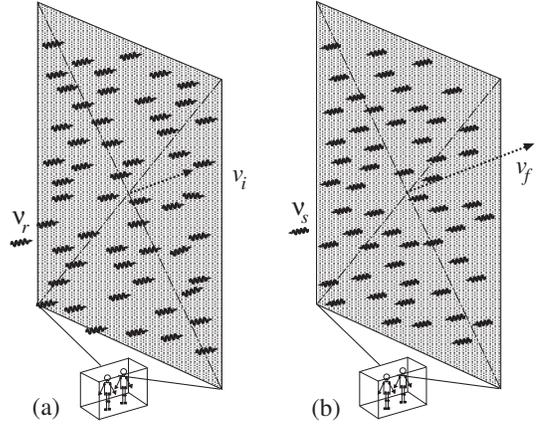


Figura 28. (a) Vela solar con velocidad inicial v_i , alejándose del Sol, sobre la que inciden fotones de frecuencia ν_r . (b) Vela solar con velocidad final v_f , que refleja fotones de frecuencia ν_s .

Sol, el flujo de energía se obtiene mediante la aplicación de la ley del inverso del cuadrado de la distancia; de esta forma se puede obtener el flujo de energía por unidad de superficie a la distancia r_i del Sol y, dividiendo por la energía de cada fotón, suponiendo que todos tienen la misma frecuencia [35], el flujo de fotones por unidad de tiempo y superficie que caen sobre la vela, con un flujo $\dot{N} = \dot{n}A$ de fotones, de frecuencia ν_r . Por simplicidad se supone que la vela es perfectamente reflectora de la luz y que todos los fotones son reflejados por la misma, con frecuencia ν_s , también la misma para todos, y que los fotones inciden perpendiculares a la vela. Al cabo de un cierto intervalo de tiempo t_0 , la vela alcanza la velocidad v_f .

Los 4-vectores función energía inicial y final (c-momento-energía) vienen dados por (la inercia de la vela no varía):

$$U_i^\mu = \begin{pmatrix} c\gamma(v_i)\mathcal{M}v_i \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 \end{pmatrix}; U_f^\mu = \begin{pmatrix} c\gamma(v_f)\mathcal{M}v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 \end{pmatrix}.$$

Los 4-vectores momento (momento- c^{-1} -energía) $p_i^\mu = c^{-1}U_i^\mu$ y $p_f^\mu = c^{-1}U_f^\mu$ son a su vez.

$$p_i^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v_i)\mathcal{M}v_i \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_i)\mathcal{M}c \end{pmatrix}; p_f^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v_f)\mathcal{M}v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}c \end{pmatrix}.$$

Para conseguir que un fotón al chocar contra la vela le transfiera momento lineal y energía, hay que admitir que la frecuencia de los fotones incidentes debe verse modificada en los fotones que rebotan.

Cada fotón que incide viene caracterizado por el 4-

vector ω_r^μ :

$$\omega_r^\mu = \begin{Bmatrix} h\nu_r \\ 0 \\ 0 \\ h\nu_r \end{Bmatrix}; \omega_s^\mu = \begin{Bmatrix} -h\nu_s \\ 0 \\ 0 \\ h\nu_s \end{Bmatrix},$$

siendo ω_s^μ el correspondiente 4-vector del fotón que abandona la vela. Nótese que cada fotón incidente o reflejado tiene norma igual a cero, $||\omega_r^\mu|| = 0$, y que el conjunto de fotones tiene un momento lineal neto y una energía total tal que la norma del su 4-vector Ω^μ es también cero:

$$||\Omega_r^\mu|| = \left[N^2 h^2 \nu_r^2 - c^2 \left(\frac{N^2 h^2 \nu_r^2}{c^2} \right) \right]^2 = 0.$$

Es decir, a pesar de tratarse de un conjunto de fotones, esta energía del conjunto no puede tratarse como calor.

Sea \dot{N} el flujo de fotones incidentes sobre la vela y sea t_0 el intervalo de tiempo que emplea la vela en pasar de la velocidad inicial v_i a la velocidad final v_f debido a ese flujo de fotones.

Si se toma como sistema la vela más los fotones (el sistema no se encuentra en equilibrio termodinámico) conjunto:

$$\Delta p^\mu + \Delta p_f^\mu = 0,$$

pues sobre el sistema conjunto no se aplica ninguna fuerza externa. Así:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} c\gamma(v_f)\mathcal{M}v_f \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c\gamma(v_i)\mathcal{M}v_i \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{Bmatrix} -c\dot{N}c^{-1}h\nu_s t_0 \\ 0 \\ 0 \\ Nh\nu_s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c\dot{N}c^{-1}h\nu_r t_0 \\ 0 \\ 0 \\ Nh\nu_r \end{Bmatrix} = 0, \end{aligned}$$

siendo $N = \dot{N}t_0$ el número de fotones que interacciona con la vela durante ese intervalo de tiempo. Se obtienen entonces las dos ecuaciones para la vela:

$$\begin{aligned} \gamma(v_f)\mathcal{M}v_f - \gamma(v_i)\mathcal{M}v_i &= Nc^{-1}h(\nu_s + \nu_r), \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 &= Nh(\nu_r - \nu_s). \end{aligned}$$

La primera ecuación es la correspondiente ecuación relativista impulso-momento lineal (segunda ley de Newton), mientras que la segunda ecuación es la correspondiente ecuación de la energía (primer principio).

A partir de la primera ecuación se obtiene también la ecuación del centro de masas:

$$\gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 = \dot{N}c^{-1}h(\nu_s + \nu_r)L,$$

siendo L la distancia recorrida por la vela durante el intervalo de tiempo t_0 . Comparando la ecuación del centro

de masas con la ecuación de la energía se tiene que debe ser:

$$\dot{N}c^{-1}h(\nu_s + \nu_r)L = \dot{N}h(\nu_r - \nu_s)t_0,$$

de donde se obtiene que:

$$\nu_s = \nu_r \frac{c-v}{c+v},$$

siendo $v = L/t_0$ la velocidad de la vela. La fracción de energía cinética (o total, pues no hay variación de energía interna) que gana la vela en relación a la energía incidente:

$$\frac{\gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2}{\dot{N}h\nu_r t_0} = 1 - \frac{1-\beta(v)}{1+\beta(v)} = \frac{2\beta(v)}{1+\beta(v)}.$$

Cuanto mayor sea la velocidad de la vela, mayor cantidad de energía podrá tomar de los fotones incidentes [32].

En el límite de $c \rightarrow \infty$ se tienen las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} d[\mathcal{M}v] &= \dot{N}c^{-1}h(\nu_s + \nu_r) dt, \\ d[\mathcal{M}v^2/2] &= \dot{N}c^{-1}h(\nu_s + \nu_r) dx, \\ d[\mathcal{M}v^2/2] &= \dot{N}h(\nu_r - \nu_s) dt, \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado anterior para ν_s .

Si la vela solar en vez de alejarse del Sol avanza con velocidad inicial v_i hacia el foco de fotones, la frecuencia de los fotones salientes es mayor que la de los entrantes y se tienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \gamma(v_f)\mathcal{M}v_f - \gamma(v_i)\mathcal{M}v_i &= -\dot{N}c^{-1}h(\nu_s + \nu_r)t_0, \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 &= -\dot{N}c^{-1}h(\nu_r + \nu_s)L, \\ \gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 &= \dot{N}h(\nu_r - \nu_s)t_0, \end{aligned}$$

con $\nu_s > \nu_r$. Se tiene entonces que:

$$\nu_s = \nu_r \left(\frac{1+\beta(v)}{1-\beta(v)} \right).$$

y [33]

$$\frac{\Delta K}{\dot{N}h\nu_r t_0} = \frac{2\beta(v)}{1-\beta(v)}.$$

Un observador de la vela desde un referencial S_A que se mueva con velocidad V en configuración estándar respecto de S_∞ , tendrá las ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} c\gamma(v_{fA})\mathcal{M}v_{fA} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_{fA})\mathcal{M}c^2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} c\gamma(v_{iA})\mathcal{M}v_{iA} \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(v_{iA})\mathcal{M}c^2 \end{Bmatrix} \\ & + \begin{Bmatrix} -cN[c^{-1}h\nu_{sA}] \\ 0 \\ 0 \\ Nh\nu_{sA} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} cN[c^{-1}h\nu_{rA}] \\ 0 \\ 0 \\ Nh\nu_{rA} \end{Bmatrix} = 0. \end{aligned}$$

donde las magnitudes con subíndice A están medidas directamente en S_A , siendo v_{iA} es la velocidad inicial de la vela en S_A , etc. DE acuerdo con el principio de relatividad el observador en S_A debe utilizar ecuaciones con la misma forma funcional que en S_∞ para explicar el mismo fenómeno, aunque, expresadas las magnitudes con sus propias coordenadas. Esta ecuación en S_A se puede ‘traducir’ al referencial S_∞ utilizando las transformaciones relativistas de las diferentes magnitudes que entran en ella.

1. Para el observador en S_A , de acuerdo con la transformación relativista de velocidades, se tiene que:

$$v_{iA} = \frac{v_i - V}{1 - v_i V/c^2}; \quad (48)$$

$$v_{fA} = \frac{v_f - V}{1 - v_f V/c^2}. \quad (49)$$

2. Se tienen las ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} \gamma(v_A)v_A &= \gamma(v)\gamma(V)(v - V), \\ \gamma(v_A) &= \gamma(v)\gamma(V)(1 - vV/c^2). \end{aligned}$$

3. Para las frecuencias de los fotones se tiene

$$\nu_{rA} = \nu_r \frac{(c - V)^{1/2}}{(c + V)^{1/2}}; \quad (50)$$

$$\nu_{sA} = \nu_s \frac{(c + V)^{1/2}}{(c - V)^{1/2}}. \quad (51)$$

Con estas transformaciones, y para N igual en ambos referenciales se puede demostrar, sustituyéndolas en la ecuación en S_A anterior, que si se cumplen las relaciones anteriores en S_∞ también se cumplen estas en S_A . Por ejemplo, para la ecuación del momento lineal en S_A se tiene:

$$\begin{aligned} &\gamma(v_f)\gamma(V)(v_f - V)\mathcal{M} - \gamma(v_i)\gamma(V)(v_i - V)\mathcal{M} = \\ &= Nhc^{-1} \left(\nu_r \frac{(c - V)^{1/2}}{(c + V)^{1/2}} + \nu_s \frac{(c + V)^{1/2}}{(c - V)^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede poner como suma de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\gamma(V) [\gamma(v_f)\mathcal{M}v_f - \gamma(v_i)\mathcal{M}v_i = Nhc^{-1}(\nu_r + \nu_r)] \\ &\quad + \\ &\gamma(V) \frac{V}{c^2} [\gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 = Nh(\nu_r - \nu_r)]. \end{aligned}$$

Puesto que estas ecuaciones se cumplen en S_∞ , la correspondiente ecuación también se cumple en S_A . El mismo procedimiento se puede seguir con la ecuación de la energía para demostrar que el observador en S_A obtiene una descripción equivalente a la del observador en S_∞ utilizando ecuaciones con la misma forma y sus propias

magnitudes. Así, la ecuación de la energía en S_A ‘traducida’ con las magnitudes de S_∞ adopta la forma:

$$\begin{aligned} &\gamma(v_f)\gamma(V)(1 - v_f V/c^2)\mathcal{M} - \gamma(v_i)\gamma(V)(1 - v_i V/c^2)\mathcal{M} = \\ &= Nh \left(\nu_r \frac{(c - V)^{1/2}}{(c + V)^{1/2}} - \nu_s \frac{(c + V)^{1/2}}{(c - V)^{1/2}} \right). \end{aligned}$$

que se puede poner como suma de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\gamma(V) \frac{V}{c^2} [\gamma(v_f)\mathcal{M}v_f - \gamma(v_i)\mathcal{M}v_i = Nhc^{-1}(\nu_r + \nu_r)] \\ &\quad + \\ &\gamma(V) [\gamma(v_f)\mathcal{M}c^2 - \gamma(v_i)\mathcal{M}c^2 = Nh(\nu_r - \nu_r)], \end{aligned}$$

cada una de las cuales se cumple en S_∞ .

La correspondiente ecuación entre 4-vectores en S_A se obtiene como transformación de Lorentz de la ecuación entre 4-vectores en S_∞ , lo que garantiza que la descripción es covariante bajo transformación de Lorentz (algo que ya estaba claro desde el momento en que la ecuación se expresa mediante 4-vectores).

CONCLUSIONES

Algunos profesores de física parecen pensar que la segunda ley de Newton contiene, implícitamente, a la ecuación de la energía, confundiendo la ecuación de la energía cinética con el primer principio de la termodinámica. Pero la igualdad entre estas ecuaciones no es cierta en general, y es únicamente cierta cuando sólo intervienen fuerzas conservativas y tipos de energía a los que se les puede asociar momento lineal. En estos casos la ecuación del centro de masas, el teorema trabajo-energía y el primer principio de la termodinámica coinciden. Y no habiendo disipación, no hay ecuación relativa a los efectos térmicos.

Cuando intervienen fuerzas no conservativas, como las fuerzas de rozamiento, o energías a las que no se les asocia momento lineal, como el calor, reacciones químicas, etc., la ecuación de la energía cinética y el primer principio de la termodinámica proporcionan una información completamente diferente. La ecuación del calor se obtiene de forma separada.

Al no poder integrar en el formalismo Newtoniano energías (calor, energía química, etc.) a las que no se les asocia momento lineal, se necesita una hipótesis adicional, el principio de conservación de la energía, que sí incluye esas energías, para tratar problemas en los que hay destrucción o creación de energía mecánica. Debido a estos dos principios diferentes, uno con parte de las energías y otro con todas, son fáciles las confusiones. La mecánica de los libros de texto procura no tratar con fuerzas no conservativas. Cuando lo hace, o interpreta mal las ecuaciones –confundiendo la ecuación de la energía cinética con el primer principio– o introduce ad hoc lo que parecen nuevos principios de la física (normalmente incorrectos) para explicar los fenómenos térmicos que se producen.

Así, el concepto de ‘trabajo de las fuerzas no conservativas’ (en el referencial S_∞) o ‘trabajo de las fuerzas de rozamiento’ es totalmente incorrecto, pues sugiere que hay energías acumuladas que pueden volver a utilizarse y transformarse en otros tipos de energías mecánicas, lo que no es cierto.

Del mismo modo, en termodinámica se considera, casi siempre implícitamente, que el conjunto de las fuerzas aplicadas sobre el sistema tienen impulso neto nulo. De esta manera se evita tener que hablar de momentos lineales. Por esta razón, el principio de relatividad apenas se aplica en termodinámica, pues para un observador en movimiento respecto del sistema habría que calcular momentos lineales.

Resulta llamativo que muchos libros de texto sigan confundiendo la ecuación del centro de masas (ecuación de la energía cinética o ecuación del pseudotrabajo) con el primer principio de la termodinámica. Es igualmente llamativo que en los libros de texto no se resuelvan por completo aquellos ejercicios que implican destrucción o creación de energía mecánica (o se resuelvan de forma inadecuada). La ausencia de una introducción coherente del primer principio de la termodinámica implica una comprensión deficiente de los procesos que tienen lugar en cuerpos extensos y deformables.

Resulta igualmente llamativo que muchos libros de texto sigan confundiendo la interpretación más general de la ecuación de Einstein (principio de inercia de la energía) y que sigan explicando que tiene un papel en procesos en los que dicha ecuación no interviene en la forma en que se presenta. La ausencia de una introducción coherente de la ecuación de Einstein implica una comprensión deficiente de los procesos que tienen lugar en cuerpos extensos y deformables.

Resulta también curioso que más de cien años después de la publicación de la teoría especial de la relatividad de Einstein y del desarrollo de la misma mediante el formalismo de 4-vectores de Minkowski, los libros de física universitarios de los primeros cursos enseñando física (casi) como a finales del siglo XIX. Dejando aparte el habitual capítulo dedicado a la relatividad y la parte de física cuántica, el resto de los libros de texto podrían haber sido escritos principios del siglo XX. Esta ausencia de una teoría especial de la relatividad aplicada a cuerpos extensos y deformables implica una falta de comprensión profunda de los procesos físicos.

En mi opinión, esta ausencia de la teoría especial de la relatividad de Einstein desarrollada mediante 4-vectores del cuerpo de la física general obedece a la ausencia de una teoría de la relatividad de cuerpos extensos y deformables, es decir, a la ausencia de una termodinámica relativista.

La teoría especial de la relatividad de Einstein nos enseña que todas las formas de energía deben tener asociado momento lineal, y previamente, inercia, aunque éste momento lineal sea cero en algún sistema de referencia

(por ejemplo, en el referencial S_z en el que un cuerpo Z se encuentra en reposo). A la vez que exige ésta condición, la propia teoría, a través del principio de inercia de la energía, proporciona la solución. Cuando se trata con energías sin asociarles momento lineal, el proceso no está bien descrito. La característica de la termodinámica pre-Einstein es que siempre se desarrolla en un sistema de referencia en el que las formas de energía tienen momento nulo y las fuerzas se aplican con impulso nulo. Por otro lado, la termodinámica nos indica que todas las formas de energía deben tener asociada entropía, aunque ésta sea cero para las energías mecánicas. Para determinar si un proceso es reversible, la propia termodinámica proporciona la solución en forma de segundo principio de la termodinámica.

Con respecto a la física pre-Einstein, la teoría especial de la relatividad sustituye dos hipótesis físicas, (i) la segunda ley de Newton, una hipótesis expresada mediante 3-vectores, fuerza \mathbf{F} , impulso $\mathbf{F}dt$ y variaciones de momento lineal \mathbf{p} ,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{p},$$

y (ii) el primer principio de la termodinámica,

$$\Delta K_{cm} + \Delta U = \sum_k W_k + W_D + Q,$$

una hipótesis expresada mediante los escalares energía cinética ΔK_{cm} , trabajo W , calor Q , etc., ambas ecuaciones covariantes bajo transformaciones de Galileo, por un único principio, (a) la ecuación momento-energía-impulso- c^{-1} trabajo Ec. (53), expresada utilizando los 4-vectores, $U^\mu, F_j^\mu; W_D^\mu, Q^\mu$,

$$dp^\mu = \sum_j F_j^\mu d\tau_k + dW_D + dp_Q^\mu,$$

($j = k + s$, donde k son fuerzas conservativas y s son fuerzas no conservativas) obteniéndose que las ecuaciones impulso-variación del momento lineal y energía ya no son independientes, e introduciendo para ello un nuevo principio (b) el principio de inercia de la energía o hipótesis de Einstein

$$\mathcal{M} = U c^{-2}.$$

Esta nueva hipótesis –cada tipo de energía contribuye, dividido por c^2 a la inercia del sistema – es la diferencia conceptual más importante entre la física Newton-Galileo y la Einstein-Minkowski y es el elemento que asegura la coherencia del formalismo relativista articulado alrededor de las transformaciones de Lorentz.

Con los 4-vectores:

$$\begin{aligned} p^\mu &= c^{-1}U^\mu, \\ p_D^\mu &= c^{-1}W_D^\mu, \\ p_Q^\mu &= c^{-1}Q^\mu, \\ F_k^\mu d\tau_k &= c^{-1}dW_k^\mu, \end{aligned}$$

la equivalencia entre las ecuaciones:

$$dp^\mu = \sum_j F_j^\mu d\tau_k + dp_D^\mu + dp_Q^\mu, \quad (52)$$

$$dU^\mu = \sum_j dW_j^\mu + dW_D^\mu + dQ^\mu, \quad (53)$$

es completa. La primera forma de la ecuación tiene una estructura semejante a la de la segunda ley de Newton, pero incorporando el momento lineal de energías no mecánicas (trabajo disipativo, calor, etc.). La segunda forma de la ecuación (ecuación c -momentoenergía- c -impulsotrabajo) tiene una estructura muy semejante al primer principio de la termodinámica, mostrando que la teoría especial de la relatividad es una teoría más de energías y trabajos que de momentos y fuerzas. La hipótesis de Einstein exige, a la vez que permite, asociar momento lineal a cualquier forma de energía. Esta equivalencia entre ecuaciones muestra la integración de ambas hipótesis pre-Einstein en una única hipótesis expresada mediante 4-vectores.

El formalismo matemático de la formulación relativista presentada permite ver claramente el papel que juegan las ecuaciones entre 4-vectores, relacionando conceptos en ecuaciones unidas mediante la hipótesis del principio de inercia de la energía, y las ecuaciones derivadas de aquellas como la ecuación de la energía cinética o la ecuación del calor. En el formalismo pre-Einstein esta distinción esta menos clara, dando lugar a las confusiones que se producen.

Resolver un ejercicio mediante un formalismo basado en la teoría especial de la relatividad de Einstein desarrollada mediante 4-vectores de Minkowski, implica varias ventajas. El formalismo está claramente estructurado, con pocos elementos de ambigüedad a la hora de resolver un problema, la propia estructura matemática detecta fácilmente los posibles errores cometidos y se obtiene el límite clásico, tanto en el referencial conveniente S_∞ como en otro referencial como el S_A , tomando el límite de $c \rightarrow \infty$.

Del mismo modo que dos conceptos físicos, espacio y tiempo, que son diferentes en la física pre-Einstein, se unifican en el concepto relativista de espacio-tiempo, dos hipótesis físicas diferentes, la segunda ley de Newton y el primer principio de la termodinámica, considerados diferentes en la física pre-Einstein, se unifican a través de una única hipótesis, la ecuación relativista momentoenergía-impulsotrabajo, considera aquí. Basada en 4-vectores momento y en fuerzas de Minkowski, esta ecuación adopta una forma $dp^\mu = \sum_j F_j^\mu d\tau_j + dp_Q^\mu$ que recuerda a la segunda ley de Newton, mientras que cuando es expresada utilizando 4-vectores energía, trabajo, etc., adopta la forma $dU^\mu = \sum_j dW_j^\mu + dQ^\mu$, que recuerda el primer principio, mostrándose así la integración relativista de los dos principios pre-Einstein separados.

El concepto de espacio-tiempo, relacionado con la teoría de la relatividad de Einstein significa, desde un punto de vista matemático que las entidades con significado físico completo son los 4-vectores de Minkowski, incluyendo aquellos 4-vectores relacionados con magnitudes termodinámicas, que las ecuaciones fundamentales en física son ecuaciones entre 4-vectores y que la hipótesis de Einstein (principio de inercia de la energía) es la piedra angular del formalismo, pues proporciona coherencia a toda la teoría, al permitir asignar inercia, momento lineal y energía a cualquier sistema físico, y permite el cumplimiento del principio de relatividad a través de las transformaciones de Lorentz. Las ecuaciones vectoriales o las ecuaciones escalares, covariantes bajo transformaciones de Galileo, sólo proporcionan una descripción parcial del mundo físico. La unidad esencial de la física –mecánica, termodinámica, electromagnetismo, física cuántica, etc. – se consigue colocando todos estos campos bajo el paraguas de la relatividad especial.

La teoría especial de la relatividad exige que toda forma de energía tenga asociado momento lineal, aunque éste sea cero, y proporciona los medios, el principio de inercia de la energía, para hacer esta asociación de momento a la energía. La termodinámica exige que a toda forma de energía se le asocie entropía, aunque ésta pueda ser cero. Todo balance de energía aceptable, conservándose la energía total, debe tener una energía con mayor entropía, o la misma, que al principio del mismo. Sólo con consideraciones termodinámicas se puede construir una teoría especial de la relatividad de cuerpos extensos, macroscópicos, deformables, y de fuerzas no conservativas.

Puesto que un nuevo formalismo implica una nueva física (Feynman *dixit*), el formalismo presentado aquí permite resolver los ejercicios de física que se encuentran en cualquier libro de texto de física universitaria – incluyendo aquellos relacionados con cuerpos extensos y fuerzas no conservativas (se excluyen los procesos de rotación que tienen su propia ecuación relativista impulso angular-momento angular y su propia ecuación de la energía cinética de rotación, obtenida mediante integración de la anterior, equivalente en rotación a la ecuación del centro de masas en traslación) – desde un punto de vista completamente diferente al que se ha venido adoptando en la física pre-Einstein, en forma completamente covariante bajo transformaciones de Lorentz.

El concepto de espacio-tiempo y la Ecuación de Einstein son entidades muy conocidas (o, al menos, muy citadas) a las que, sin embargo, no se les concede mucha importancia en la enseñanza moderna de la Física. Es decir, la mayor parte de la enseñanza de la Física a nivel de bachillerato o de primer curso universitario se sigue haciendo como antes de Einstein y Minkowski. Seguir explicando la Física mediante el formalismo Newtoniano-Galileano en vez de con el formalismo Einsteiniano-Minkowskiano-Lorentziano es algo que debe revisarse, pues el formalismo Newton-Galileo exige más

trabajo (en el día a día), los errores son más difíciles de detectar y no es conceptualmente una teoría tan compleja y manejable como la Einstein-Minkowski-Lorentz.

Contra lo que parece ser una opinión muy extendida, la teoría especial de la relatividad, sobre todo si se desarrolla con 4-vectores de Minkowski, no es una teoría que es sólo interesante (y exacta) a altas velocidades. Por el contrario, la teoría especial de la relatividad introduce nuevos conceptos físicos (los 4-vectores), nuevas relaciones entre ellos, nuevas hipótesis físicas y una lógica interna exigente tanto en vertical (cada 4-vector tiene su propia estructura) como en horizontal (las ecuaciones se obtienen a pares y deben cumplir unas exigencias), que hace el formalismo mucho más versátil y seguro a la hora de resolver problemas.

Es evidente que un formalismo como el descrito no puede ser enseñando a alumnos de cursos bajos. Pero es igualmente evidente que aún sin enseñárselo a sus alumnos, un profesor debe tener un conocimiento de este tipo, y que dicho conocimiento le evite cometer errores a la hora de enseñar conceptos de Física que están equivocados en los libros de texto. El hecho de que el primer principio de la termodinámica no se considere un principio de la Física (más bien parece un principio de la Química) ha llevado a la pretensión de que todos los problemas se pueden resolver sólo con la mecánica, lo que, a su vez, ha impedido el desarrollo de una teoría especial de la relatividad de cuerpos extensos y deformables, pues en la formulación mecánica hay muchas energías que no tienen cabida al no tener asociado momento lineal.

APÉNDICE. FUERZAS DE ROZAMIENTO

Se pueden dar varios argumentos (no exhaustivos) para demostrar que las fuerzas de rozamiento, y cualesquiera fuerza no conservativa, no realizan trabajo cuando la interacción tiene lugar entre un cuerpo finito Z y un cuerpo de masa quasi-infinita B_∞ , en el referencial conveniente S_∞ en el que B_∞ permanece en reposo. En un referencial S_A en configuración estándar respecto de S_∞ la fuerza de rozamiento tendrá asociado un cierto desplazamiento y un cierto 'producto fuerza-desplazamiento', debido a que para el observador el cuerpo B_∞ se mueve con cierta velocidad [14]. Cuando el cuerpo Z interacciona con otro cuerpo finito, las fuerzas de rozamiento sí realizarán trabajo, pero más bien debido a que en esas circunstancias se pueden considerar fuerzas de interacción electrostática.

1. Supóngase un cuerpo Z que se mueve con velocidad v_i en un referencial S_∞ en el que el suelo o una pared permanecen en reposo. Si el cuerpo de frena chocando contra la pared, a la vez que se deforma, con $\Delta x_{cm} \neq 0$, es claro que la fuerza que la pared ejerce sobre Z no realiza trabajo [17]. No hay energía acumulada en ningún dispositivo que pueda volver a utilizarse para poner el cuerpo

Z en movimiento de nuevo. La entropía del universo ha aumentado durante el proceso de frenado, probando la irreversibilidad del proceso y la degradación de la energía mecánica inicial. Si el cuerpo Z penetra en la pared una cierta distancia L antes de pararse, puede parecer que ahora esa fuerza opuesta a Z sí realiza un trabajo, FL . Pero en realidad esa fuerza tampoco realiza trabajo, pues la fuerza se aplica en puntos que no se desplazan [17]. La situación final es la misma en ambos casos: no hay energía acumulada que pueda volver a poner en movimiento a Z y la entropía del universo ha aumentado. Si, finalmente, se considera que el cuerpo Z se mueve con rozamiento una cierta distancia L sobre el suelo antes de detenerse, vuelve a parecer que la fuerza de rozamiento realiza un trabajo $-\mu mgL$, pero no es así. El efecto de la interacción entre Z y el suelo es agitar, momentáneamente, los pequeños osciladores de las superficies de contacto, que luego se van a detener, disipando la energía de agitación, aleatoriamente distribuida, inicialmente acumulada. En los tres casos la situación final es indistinguible: no hay energía mecánica acumulada que pueda volver a utilizarse, la entropía del universo ha aumentado y no se puede hablar con propiedad del trabajo de las fuerzas de fricción.

2. Cuando se considera un proceso de rotación y disipación, un disco que gira sometido a fuerzas de fricción en su borde, es evidente que las fuerzas de fricción no realizan trabajo (a diferencia de fuerzas aplicadas al extremo de cuerdas que se desenrollan mientras el disco gira, que sí realizan trabajo), a pesar de que hay un término $Q = 2fR\Delta\theta$ que tiene unidades de energía y que entre junto con el término $F(r_1 + r_2)\Delta\theta$ en la ecuación de la energía cinética de rotación. En este caso está muy claro que las fuerzas de fricción no tienen asociado desplazamiento. Lo mismo sucede en el caso del bloque que desliza sobre una superficie de masa infinita.

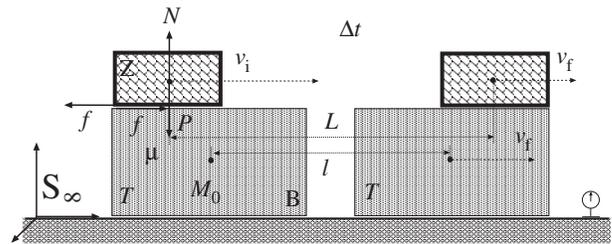


Figura 29. Referencial S_∞ en el que el suelo, a temperatura T , permanece en reposo. Un cuerpo Z de inercia \mathcal{M}_Z , inicialmente con velocidad v_i entra en contacto con un cuerpo B de inercia \mathcal{M}_0 . El coeficiente de fricción dinámico entre Z y B es μ . No hay fricción con el suelo. La velocidad final de Z y de B es v_f . El (cm del) cuerpo Z recorre una distancia L y el (cm del) cuerpo B recorre una distancia l .

3. La forma más adecuada de ver que las fuerzas de rozamiento no realizan trabajo cuando interviene un cuerpo de masa quasi-infinita, es considerando dos cuerpos fini-

tos que rozan (Fig. 29) y tomando luego el límite a masa cuasi-infinita del que va a ser la superficie inmóvil final. Aplicando la segunda ley de Newton a cada uno de los cuerpos se tiene:

$$\begin{aligned}(m + M)v_f &= mv_i, \\ mv_f - mv_i &= -ft_0, \\ Mv_f &= ft_0,\end{aligned}$$

donde la fuerza f se caracteriza como $f = \mu mg$. Se tienen también las ecuaciones del centro de masas referidas a cada cuerpo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 &= -\mu mgL, \\ \frac{1}{2}Mv_f^2 &= \mu mgl.\end{aligned}$$

Como en este caso el cuerpo finito adquiere cierta energía cinética hay que admitir que la fuerza f realiza un cierto trabajo. Hay que notar que la energía cinética no se conserva pues:

$$\Delta K = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 < 0$$

Aplicando el primer principio de la termodinámica al sistema conjunto Z + B se tiene que

$$v_f = v_{cm} = \frac{mv_i}{M + m},$$

por lo que con $W_{ext} = 0$, $\sum_k F_k = 0$, $\Delta K_{cm} = 0$ y

$$\Delta U = 0 - \left[\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}m(v_i - v_{cm})^2 \right],$$

con

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \frac{mM}{M + m} v_i^2 = Q.$$

El calor es igual a la disminución de la energía cinética respecto del centro de masas, que era la energía interna inicial. Con

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}Mv_f^2 = \frac{1}{2} \frac{mM}{M + m} v_i^2,$$

se tiene entonces que:

$$Q = -f(L - l) = -\mu mg(L - l).$$

Tomando el límite en el que el cuerpo B tiende a tener masa infinita, su velocidad final tiende a cero pero el producto Mv_f permanece constante, se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{M \rightarrow \infty, v_f \rightarrow 0} Mv_f &= -\mu mgt_0, \\ \lim_{M \rightarrow \infty, v_f \rightarrow 0} \frac{1}{2}Mv_f^2 &= 0.\end{aligned}$$

A medida que el cuerpo B tiene masa mayor, su velocidad disminuye linealmente pero su energía cinética disminuye

como el cuadrado de su velocidad. En este límite el cuerpo B_∞ ya no varía su energía cinética, lo que prueba que el cuerpo Z ya no ha realizado trabajo sobre él y que hay que asignar un desplazamiento nulo a la fuerza de rozamiento, $l = 0$. Se tiene entonces que para el cuerpo Z:

$$\begin{aligned}mv_f - mv_i &= -\mu mgt_0, \\ \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 &= -\mu mgL.\end{aligned}$$

Aplicando el primer principio al cuerpo Z en su interacción con B_∞ , con $\Delta U = 0$ y $W_{ext} = 0$, se tiene:

$$Q = -\mu mgL.$$

Este mismo resultado se obtiene en el límite en el que $l = 0$.

El invariante Galileano para este proceso es:

$$G_M = - \left[\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \right] = -Q.$$

Para un observador en el referencial S_A :

$$\begin{aligned}m(v_f - V) - m(v_i - V) &= -\mu mgt_0, \\ \frac{1}{2}m(v_f - V)^2 - \frac{1}{2}m(v_i - V)^2 &= -\mu mgVt_0 + Q_A.\end{aligned}$$

En este referencial S_A la fuerza $f = -\mu mg$ tiene asociado un desplazamiento Vt_0 . Se obtiene que en S_A :

$$Q_A = -\mu mgL = Q.$$

El calor es un invariante Galileano. Para el invariante Galileano:

$$\begin{aligned}G_{MA} &= W_A - \Delta K_{c.m.A} \\ &= -\mu mgVt_0 - \left[\frac{1}{2}m(v_f - V)^2 - \frac{1}{2}m(v_i - V)^2 \right] \\ &= -Q.\end{aligned}\tag{54}$$

4. En termodinámica todo trabajo de configuración debe describirse como una interacción entre el sistema y una fuente de trabajo y esta interacción debe poder ser reversible. Los trabajos disipativos (efecto Joule) vienen caracterizados por variables macroscópicas, pero son irreversibles (aumenta la entropía del universo). Las fuerzas no conservativas, que deben ser descritas de forma fenomenológica, no entran directamente en el trabajo.

Sea un gas que se expande mediante contacto diatermo con un foco térmico a alta temperatura T_1 . En este proceso de expansión se puede conseguir elevar una masa a cierta altura o un conjunto de masas elevadas a ciertas alturas (energía potencial gravitatoria). El mismo gas se puede comprimir en contacto diatermo con un foco de calor a una temperatura más baja, para lo que se necesitan menos masas y menores alturas (menor energía potencial gravitatoria). El trabajo neto obtenido en un

proceso cíclico en el que el gas experimenta un ciclo termodinámico se acumula en forma de energía potencial gravitatoria y puede utilizarse, íntegramente, para producir otras formas de energía, por ejemplo, electricidad.

Cuando un cuerpo desliza sobre la superficie de un cuerpo de masa cuasi-infinita (que se comporta como un foco térmico), no se puede hablar de ‘trabajo de las fuerzas de rozamiento’ pues la energía mecánica disipada no se puede ya volver a utilizar para producir energía mecánica (a no ser que se disponga de focos térmicos a otras temperaturas).

5. Para describir la interacción entre un cuerpo y una fuente de trabajo, por ejemplo, la presión atmosférica P_0 que actúa sobre un émbolo de sección A produciendo una fuerza $F = P_0 A$, que va a desplazar el émbolo una distancia L , realizando un trabajo FL sobre el gas encerrado por el émbolo, se utiliza un 4-vector como:

$$W^\mu = \{cFt_0, 0, 0, FL\} .$$

El término FL tiene entropía cero y, en principio, los procesos realizados serían reversibles. Para la fuerza de rozamiento entre una superficie cuasi-infinita y un cuerpo finito, en el sistema de referencia en el que el cuerpo cuasi-infinito permanece en reposo, no realiza trabajo y el 4-vector correspondiente vendrá dado como:

$$W_f^\mu = \{cft_0, 0, 0, 0\} .$$

* J Güémez e-mail: guemezj@unican.es

- [1] U Besson, *Work and energy in the presence of friction: the need for a mesoscopic analysis*, Eur. J. Phys. **22**, 613-622 (2001)
- [2] J A G McClelland, *A very persistent mistake*, Phys. Educ. **46** 469-471 (2011)
- [3] Lawrence S Bartell, *Apparent Paradoxes and Instructive Puzzles in Physical Chemistry*, J. Chem. Educ. **78**, 1067-1069 (2001)
- [4] Robert P. Bauman, *Physics that textbook writers usually get wrong. I. Work*, Phys. Teach. **30**, 264-269 (1992)
- [5] A. B. Arons, *Developing the energy concepts in introductory physics*, Phys. Teach. **27**, 506-517 (1989)
- [6] C M Penchina, *Pseudowork-energy principle*, Am. J. Phys. **46**, 295-296 (1978)
- [7] A B. Arons, *Development of energy concepts in introductory physics courses*, Am. J. Phys. **67**, 1063-1067 (1999)
- [8] J W Jewett, Jr., *Energy and the Confused Student I: Work*, Phys. Teach. **46**, 38-43 (2008); J W Jewett, Jr., *Energy and the Confused Student II: Systems*, Phys. Teach. **46**, 81-86 (2008); J W Jewett, Jr., *Energy and the Confused Student III: Language*, Phys. Teach. **46**, 149-153 (2008); J W Jewett, Jr., *Energy and the Confused Student IV: A global approach to energy*, Phys. Teach. **46**, 210-217 (2008); J W Jewett, Jr., *Energy and the Confused Student V: The Energy/momentum approach to problems involving rotating and deformable systems*, Phys. Teach. **46**, 269-274 (2008)
- [9] R S Treptow, *E = mc² for the Chemist: When Is Mass Conserved?* J. Chem. Educ. **82**, 1636 (2005)
- [10] E Hecht, *There Is No Really Good Definition of Mass*, Phys. Teach. **44**, 40-45 (2006); E Hecht, *Energy and Change*, Phys. Teach. **45**, 88-92 (2007); E Hecht, *Energy Conservation Simplified*, Phys. Teach. **46**, 77-80 (2008); E Hecht, *Einstein never approved of relativistic mass*, Phys. Teach. **47**, 336-341 (2009); E Hecht, *Einstein on mass and energy*, Am. J. Phys. **77**, 799-806 (2009); E Hecht, *On the definition of mass*, Phys. Teach. **49**, 40-44 (2011); E Hecht, *How Einstein confirms E₀ = mc²*, Am. J. Phys. **79**, 591-600 (2011)
- [11] R L. Lehrman, *Energy Is Not The Ability To Do Work*, Phys. Teach. **11**, 15-18 (1973)
- [12] J Güémez, *¿Es posible una termodinámica relativista?*, Rev. Esp. Fis. **24** 47-57 (2010); J Güémez, *An undergraduate exercise in the first law of relativistic thermodynamics*, Eur. J. Phys. **31** 1209-1232 (2010)
- [13] R Baierlein, *Two myths about special relativity*, Am. J. Phys. **74**, 193-195 (2006); R Baierlein, *Does nature convert mass into energy?*, Am. J. Phys. **75** 320-325 (2007)
- [14] Igal Galili and Dov Kaplan, *Extending the application of the relativity principle: Some pedagogical advantages*, Am. J. Phys. **65**, 328-335 (1997)
- [15] A. J. Mallinckrodt, H. S. Leff, *All about work*, Am. J. Phys. **60**, 356-365 (1992)
- [16] H Erlichson, *Internal energy in the first law of thermodynamics*, Am. J. Phys. **52**, 623-625 (1984)
- [17] H. S. Leff, A. J. Mallinckrodt, *Stopping objects with zero external work: Mechanics meets thermodynamics*, Am. J. Phys. **61**, 121-127 (1993)
- [18] Barrow, G M, *Thermodynamics should be built on energy-not on heat and work*, J. Chem. Educ. **65**, 122-125 (1988)
- [19] J Güémez, *Special relativity and textbook exercises*, Lat. Am. J. Phys. Educ. (Enviado para publicación)
- [20] J Güémez, *Termodinámica Relativista: una aproximación didáctica al Primer Principio*, Latin American Journal of Physics Education **5** (1) Marzo pp. 72-91 (2011)
- [21] J Güémez, *Relativistic Thermodynamics: a modern 4-vector approach*, Physics Research International, vol. 2011, Article ID 387351, 18 pages (2011)
- [22] M Camarca, A Bonanno and P Sapia, *Revisiting work-energy theorem's implications*, Eur. J. Phys. **28**, 1181-1187 (2007); M Camarca, A Bonanno and P Sapia, *Reference frame symmetries and conservation laws: Galilean versus Lorentzian*, **30** 1137-1142 (2009)
- [23] S. R Madhu Rao, *The kinematical roots of dynamics*, Am. J. Phys. **68**, 329 (2000)
- [24] J Franklin, *Lorentz contraction, Bell's spaceships and rigid body motion in special relativity*, Eur. J. Phys. **31** 291-298 (2010)
- [25] Robert W. Brehme, *The Advantage of Teaching Relativity with Four-Vectors*, Am. J. Phys. **36**, 896-901 (1968)
- [26] J Freund, *Special Relativity for Beginners. A Textbook for Undergraduates*, World Scientific, Singapore 2008
- [27] W Rindler, *Relativity. Special, General, and Cosmological*, 2nd Ed. Oxford University Press, New York 2006
- [28] O D Jefimenko, *Derivation of relativistic force transformation equations from Lorentz force law*, Am. J. Phys. **64**, 618-620 (1996)
- [29] M Moriconi, *Special theory of relativity through the Doppler effect*, Eur. J. Phys. **27** 1409-1423 (2006)
- [30] A Gamba, *Physical Quantities in Different Reference Systems According to Relativity*, Am. J. Phys. **35** 83-89

- (1967)
- [31] G Cavalleri, G Salgarelli, *Revision of the relativistic dynamics with variable rest mass and application to relativistic thermodynamics*, Nuovo Cimento **42**, 722-754 (1969)
- [32] Byron L. Coulter and Carl G. Adler , *Radiant energy transfer*, Am. J. Phys. **50**, 335 (1982)
- [33] Sardar Singh, *Note on radiant energy transfer*, Am. J. Phys. **51**, 1050 (1983)
- [34] Donald E. Fahnline, *Parallels between relativistic and classical dynamics for introductory courses* Am. J. Phys. **43**, 492-495 (1975)
- [35] D. Shanks, *Monochromatic Approximation of Blackbody Radiation*, Am. J. Phys. **24**, 244-246 (1956)