"La sabiduría me persigue pero yo soy más rápido"
Anónimo

La hoja volante

http://www.uam.es/hojavolante
Número 22. Septiembre 2011.

Y después ¿qué?

por María Teresa Martínez Bravo

El día en que Eugenio me pidió que escribiera un texto describiendo mi trayectoria profesional después de la licenciatura, era el día en que se cumplían seis años desde que abandoné la carrera investigadora para sumergirme de lleno en el mundo empresarial. ¡Qué casualidad!

Hice la Selectividad hace la friolera de veintiún años en la Universidad Autónoma de Madrid, después de un Bachillerato en Ciencias que había superado, con buenas notas. Durante los exámenes de Selectividad, en los que por cierto obtuve las mejores calificaciones en Lengua, Filosofía e Inglés, y las peores en Matemáticas y Física, decidí que lo mejor era decantarse por una carrera que me gustara, aunque no fuera mi preferida, y que tuviera alguna posibilidad de encontrar trabajo al acabarla. Pese a los augurios de las notas de Matemáticas y Física, pensé que lo mejor que podía hacer era matricularme en Matemáticas. Mis primeras y románticas opciones (Ciencias del Mar, Historia y Geología) ofrecían peores perspectivas que el 0% de paro que, según la charla que nos habían dado unos meses antes en el instituto, se contabilizaba entre los licenciados en Matemáticas en ese momento. Y pensé, total, si tampoco me disgusta ¿por qué no? Y allí que fui, a la licenciatura de Matemáticas de la Universidad Autónoma, sin saber muy bien qué me esperaba.

Y he de decir que la carrera me gustó, a pesar de que las matemáticas que se veían no tenían nada que ver con las del instituto, y que siempre hubo unas asignaturas más de mi agrado que otras, claro está.

Durante el último de los cinco años de carrera disfruté de una beca de colaboración en el mismo Departamento de Matemáticas de la Autónoma. Durante la beca, llevé a cabo tareas de clasificación de libros en la Biblioteca del Departamento, y sobre todo pude conocer mejor a los integrantes del mismo y las posibilidades de la carrera académica. Siempre me ha gustado estudiar, y dado que en aquella época aún se podía conseguir un contrato de profesor temporal al comenzar los estudios de posgrado, decidí optar a uno de asociado, que conseguí, y quedarme en el Departamento a hacer una tesis doctoral. Dudé al principio entre hacer la tesis en Probabilidad o en Análisis. Al final, la tesis salió sobre una mezcla de las dos cosas. José Luis Torrea fue mi director de tesis, y siempre le estaré agradecida por toda la atención y la ayuda que me prestó el tiempo que trabajamos juntos. Recuerdo ese periodo con mucho cariño, porque a pesar del mucho trabajo que supone desarrollar la tesis, tuve la suerte de contar con muy buenos compañeros, entre los que encontré también muy buenos amigos.

Después de terminar la tesis no me planteé otra cosa que seguir trabajando en la universidad. La investigación me gustaba, y la docencia también. Pasé otros cinco años después de la tesis investigando y dando clases. Aunque siempre tuve un contrato en la Autónoma, a medida que pasaban los años, me daba cuenta de que conseguir un puesto estable dentro de la universidad no iba a ser algo asequible a medio plazo. Además, justo después de defender la tesis pasé seis meses de postdoc en Edimburgo. La experiencia fue muy buena en el terreno profesional, pero dura en el terreno personal. Ello me convenció de que no quería arriesgarme a un destino de continuo peregrinaje por diversas universidades. Llegué a presentarme a una oposición de titular de escuela universitaria, con un currículum en el que ya aparecía una tesis y un buen número de publicaciones en revistas respetables, en la que las plazas fueron para personas que no tenían una tesis doctoral, y no digamos artículos de investigación. Esta, y otras experiencias, hacían que a los treinta y dos años aún no tuviera un contrato fijo, ni mucha esperanza de conseguirlo en la universidad. Así que decidí explorar otros mundos. Las matemáticas financieras habían aparecido tangencialmente a lo largo del tiempo que estuve investigando, dado que son una aplicación importante del Cálculo Estocástico, área en la que trabajé, por ejemplo, durante la estancia en Edimburgo. Siempre me habían llamado la atención. Tenía conocimiento, además, por destacados compañeros del departamento, de que esas matemáticas se usaban en determinadas áreas de algunos bancos. Y pensé que tal vez mis conocimientos serían apreciados en uno de ellos. Así que envié el currículum. Era el año 2005, cuando todavía la crisis actual no había aparecido, las crisis anteriores habían pasado, y el mundo de la banca mayorista vivía una época de expansión. Y me llamaron, y me hicieron una oferta, y acepté. La decisión no fue fácil, pero en ese momento me pareció la más ventajosa.

Entré a trabajar en el equipo de Analistas Cuantitativos ("quants") de *Front Office* del Banco Santander. El cambio en cuanto a tipo de trabajo y entorno laboral fue tremendo. Tuve que aprender un montón de cosas, porque aunque las matemáticas que se manejan aquí me eran muy familiares, toda la terminología financiera me sonaba a chino. Y tuve que aprender a programar en C++, que es el lenguaje que se usa en las librerías de valoración que construimos. Porque lo que hacen los quants es eso, programar modelos de valoración que permitan poner precio a derivados más o menos complejos, que pueden involucrar áreas tan diversas de las matemáticas como Cálculo Estocástico, Cálculo Numérico avanzado, Resolución de EDP's, Análisis de Fourier, Cálculo de Malliavin, etc. También desarrollan las conexiones entre los sistemas corporativos del banco y las librerías de valoración. Somos programadores, si se quiere especializados y con una importante necesidad de conocimientos matemáticos. Y como tales, empleamos la mayor parte del tiempo en implementar algoritmos en las librerías de valoración, ponerlas en producción y dar soporte a los usuarios (*trading*, estructuración, ventas, departamentos de riesgos del banco...).

La parte buena es que la interacción con otros equipos es continua, que casi siempre hay algo nuevo que aprender y que el sueldo es bueno. Esto último en particular sirve para compensar la parte mala que supone tener mucha presión de mercado: los modelos nunca están terminados, siempre hay cosas que mejorar, y los usuarios necesitan tiempos de entrega mínimos para poder seguir el ritmo del mercado. Por supuesto, la crisis desatada en el verano de 2008 por la quiebra de *Lehman Brothers* ha cambiado de forma substancial el trabajo de los quants (diría que la forma de hacer negocio en general). Pero esto es otra historia, y debe ser contada en otra ocasión.

La integral Gaussiana con Cálculo I

por Fernando Chamizo

Posiblemente, algún alumno despistado tenga la idea de que

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

es una integral que el profesor de Cálculo I dice que no se puede calcular y después nos da el resultado. Su evaluación habitual utiliza cálculo de varias (dos) variables. En el ejercicio 7.19 del "Análisis Matemático" de T. Apostol hay una sorprendente prueba sólo con Cálculo I que parece estar poco divulgada.

Por si alguien no tiene a mano el libro, aquí va. Se parte de la extraña función:

$$F(x) = \Big(\int_0^x e^{-t^2}dt\Big)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

Derivando se tiene $F'(x) = 0$ y lo único singular que hay en este cálculo es un cambio de variable $u = xt$ en la segunda integral después de derivar. Si la derivada es cero, la función es constante y con $I^2 = F(\infty) = F(0) = \pi/4$ ya hemos terminado.

En el problema anterior...

... teníamos cartelitos numerados del 1 al 10.000 por una de sus caras y en blanco por la otra y preguntábamos cuál era la suma de los números que se mostrarían al final si primero volteábamos los múltiplos de 2, luego los múltiplos de 3, luego los de 4 y así sucesivamente hasta voltear el cartel 10.000.

Para responder a la pregunta, primero observamos que para que un número muestre su cara, tenemos que voltearlo un número par de veces. Eso quiere decir que los números que muestran su cara son los que tienen un número impar de divisores contando el 1 (pues volteábamos cada número una vez por cada uno de sus divisores menos por el 1). El número de divisores de un número se obtiene descomponiéndolo en factores primos y multiplicando los exponentes aumentados en una unidad (cada factor primo se puede coger entre cero y tantas veces como indica su exponente). Para que este número sea impar, todos los exponentes de la descomposición en factores primos del número han de ser pares. Y esto ocurre si y sólo si el número es un cuadrado.

Así, los números que se muestran al final son los cuadrados perfectos y la respuesta a la pregunta es la suma de 1 + 4 + 9 + 16 + ... + 10.000, es decir, la suma de los 100 primeros cuadrados.

La suma de los n primeros cuadrados es $n(n+1)(2n+1)/6$. Aunque quizá la forma más directa de demostrarlo sea por inducción, esta fórmula se puede obtener de la de la suma de los n primeros naturales (una prueba original de ésta, aunque quizá no la más habitual, puede encontrarse en el apartado de *Visualización* de *La hoja volante* número 12; además, la prueba más habitual, atribuida a Gauss la puedes encontrar en el artículo de la página siguiente). La forma de obtener la suma de los primeros n cuadrados es sumando las igualdades $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 - 3k + 1$ para $k = n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$.

Por lo tanto, la respuesta es 100 x 101 x 201/6 = 338.350.

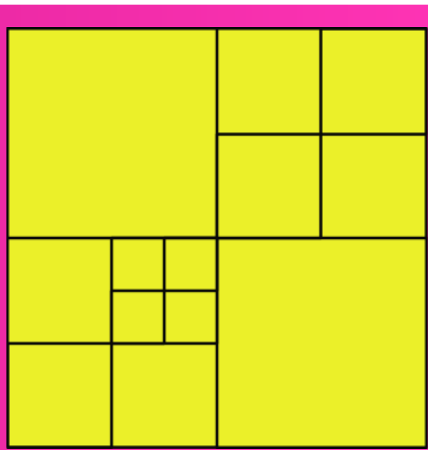
Enhorabuena a Juan Manuel Hernández, David Molina, Alfonso Alhambra y Alberto Castaño por sus respuestas correctas.

El problema

Un cuadrado se puede dividir, por ejemplo, en 13 cuadrados, como muestra la figura.

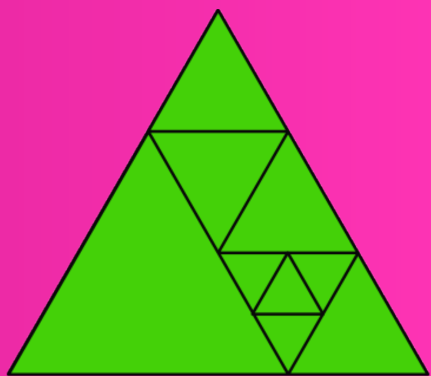
¿Se puede dividir también en 7 cuadrados? ¿Y en 8? ¿Y en 9?

¿En qué números de cuadrados se puede dividir?



Y si consideramos un triángulo equilátero...

¿En qué números de triángulos equiláteros se puede dividir?



Y si consideramos un n-ágono regular...

¿En qué números de n-ágonos regulares se puede dividir?

Respuestas a **hojavolante@uam.es**.

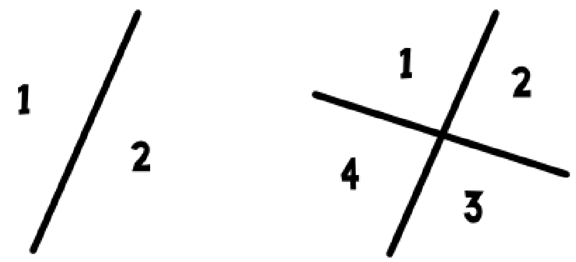
¡Mal resuelto, aunque esté bien!

O por qué hay que argumentar las cosas...

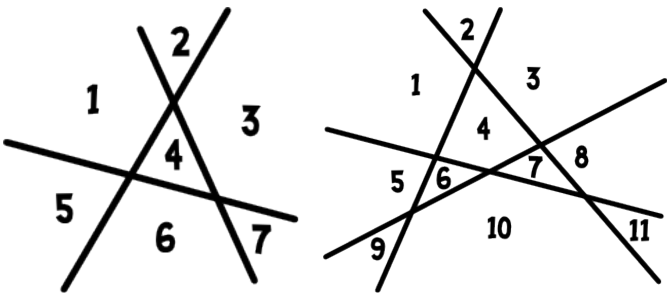
Si nos dicen que simplifiquemos la fracción 16/64 y decimos que es 1/4 ¿lo hemos hecho bien o lo hemos hecho mal? Depende de cómo lo hayamos hecho. Si nuestro argumento es que hemos dividido entre 16 el numerador y el denominador, lo hemos hecho bien. Si nuestro argumento es que tachamos el 6 de arriba y el 6 de abajo, lo hemos hecho mal ¡aunque el resultado esté bien!

Aunque este ejemplo tan sencillo se entiende muy bien, cualquiera que haya corregido ejercicios o exámenes se habrá visto en la situación de tener que "dar explicaciones" a un alumno de por qué algo cuyo resultado es correcto está mal. Los dos siguientes bonitos problemas geométricos nos servirán como excusa para ilustrar esto.

Problema 1: Una recta divide el plano en 2 regiones, 2 rectas (no paralelas) dividen el plano en 4 regiones, 3



rectas (ninguna paralela a otra y que no se corten las tres en el mismo punto) dividen el plano en 7 regiones y 4 en



11. ¿En cuántas regiones dividen el plano n rectas en posición general (es decir, ninguna paralela a otra y de manera que no haya más de dos cortándose en el mismo punto)?

Si uno sigue haciendo dibujos para ver qué es lo que ocurre con 5, 6 y 7 rectas, se dará cuenta de que el plano se divide en 16, 22 y 29 regiones respectivamente. En algún momento es natural que uno trate de buscar un patrón en los números 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29... Y pronto se advierte que la serie se obtiene sumando 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Por lo tanto, es fácil deducir que el número de regiones es $1 + (1 + 2 + 3 + ... + n)$.

Para "simplificar" la expresión anterior, sería conveniente obtener la fórmula de la suma de los primeros n números naturales. Cuando Gauss iba al colegio su profesor le mandó sumar los números del 1 al 100 y Gauss lo hizo de inmediato, pues se dio cuenta de que era más fácil hacer la suma dos veces que hacerla una sola. Así, si escribimos

$$\begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

cada número suma 101 con el que tiene debajo, así que la suma dos veces es 100 x 101. Y por lo tanto la suma es 5.050. Del mismo modo, $1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2$ y por lo tanto

Solución 1: $1 + n(n+1)/2$.

¿Y ya está? Pues no, no está, ni mucho menos. El hecho de que los primeros valores de la sucesión se ajusten a un determinado patrón, no quiere decir que el resto de los valores también lo vayan a hacer. Es NECESARIO justificar por qué los restantes términos también se van a ajustar a ese patrón.

Un argumento que justifica que la introducción de la recta enésima nos va a dar n nuevas regiones es el siguiente. La nueva recta ha de cortar a las n-1 que teníamos (por la condición de estar las rectas en posición general) y una sóla vez a cada una (porque dos rectas distintas no pueden cortarse en más de un punto). Por lo tanto, atraviesa exactamente n regiones, dividiendo cada una de ellas en dos partes y añadiendo así n nuevas regiones. Y ahora sí que está.

Alguien podría decir, y de hecho alguien lo ha dicho:

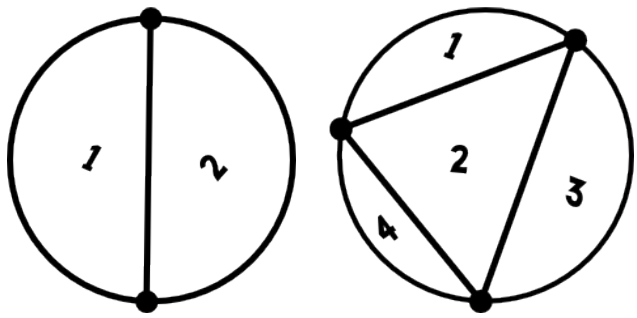
- ¿Ves? Pues lo que yo decía, sale lo mismo, así que lo mío estaba bien.

- No, este argumento justifica por qué el resultado que tú obtenías es correcto, pero tu argumento no era válido.

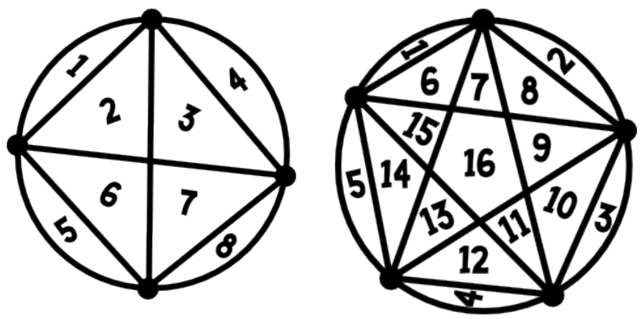
- Pero, como el problema es un problema natural y la fórmula que salía era "bonita", no podía ser de otra manera, TENÍA que ser así...

- ¿Eso crees? Bien, ahí va el...

Problema 2: Si consideramos 2 puntos en una circunferencia y dibujamos el segmento que los une, el círculo queda dividido en 2 regiones. Si consideramos 3 puntos y dibujamos todos los segmentos que los unen, el círculo queda dividido en 4 regiones. Si hacemos lo



mismo con 4 puntos, queda dividido en 8 regiones. Y si lo hacemos con 5, tenemos 16 regiones.

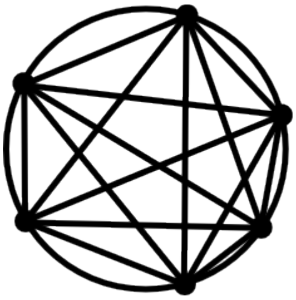


¿En cuántas regiones queda dividido el círculo si consideramos n puntos en posición general (de manera que no haya más de dos de los segmentos que los unen cortándose en el mismo punto)?

La intuición nos dice que, si hubiera justicia en el mundo, con 6 puntos debería haber 32 regiones. Pues bien, en la página siguiente está el dibujo. Cuenta, cuenta...

Te ha salido 31, habrás contado mal. Vuelve a contar. Si quieres, marca cada región con un puntito a medida que las cuentas. Otra vez 31... Y los siguientes números de la serie, si uno se toma las molestias de dibujar y contar, son 57, 99, 163...

Y sea lo que sea lo que quiere decir que un problema es



natural, si el problema de las rectas en el plano era natural este también lo es. Y la fórmula que estaba saliendo, las potencias de dos, era “bonita”... Entonces ¿qué está pasando? Pues está pasando lo que ya decíamos antes, que el hecho de que los primeros números se ajusten a un patrón bonito no quiere decir nada. Y que quizá la verdadera solución también sea “bonita” a su manera...

¿Cómo dar entonces con la fórmula?

Alguien me sugirió una vez que para ello podía emplearse el método de diferencias finitas. No te asustes por el nombre, no es difícil. Realizamos las diferencias consecutivas, y tenemos:

2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163...

2, 4, 8, 15, 26, 42, 64...

2, 4, 7, 11, 16, 22... (como curiosidad, ¿no te sonará esta serie?)

2, 3, 4, 5, 6...

1, 1, 1, 1...

Y ya no seguimos, pues obtendríamos todo ceros. El caso es que si uno tiene un polinomio de grado 4, sus cuartas diferencias finitas son todas iguales. De hecho, eso tiene sentido porque las diferencias finitas son el análogo discreto de las derivadas y la cuarta derivada de un polinomio de grado 4 es constante. Es más, si todas las cuartas diferencias son iguales, entonces los valores de la serie tienen que venir dados por un polinomio de grado 4 (todos los valores de cada fila están determinados por el primero de la misma y todos los de la que tiene debajo y es fácil construir un polinomio de grado 4 que se ajuste a los primeros valores de cada fila).

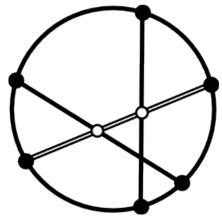
Así que uno podría decir que como las cuartas diferencias son todas iguales, el resultado viene dado por un polinomio de grado 4, y entonces (un polinomio de grado 4 queda determinado por 5 valores) es fácil obtener que

Solución 2: $(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)/24$.

¿Y ya está? Pues no, no está porque hemos supuesto que la sucesión de las cuartas diferencias era 1 todo el rato, pero sólo sabemos que sean 1 sus primeros 4 términos, pues nuestros datos vienen de los ejemplos que hemos dibujado. Es tan “tonto” suponer que todas las diferencias van a ser 1 por el hecho de que las 4 primeras lo sean como suponer que el quinto término iba a ser 32 por el hecho de que los 4 primeros fueran potencias de 2. El método de las diferencias finitas, por más que nos guste, no es válido para resolver nuestro problema sin un argumento que pruebe que la solución es un polinomio de grado 4 ¡aunque la fórmula sea correcta! Es NECESARIO un argumento que justifique la fórmula.

Hay varios argumentos para ello. Quizá uno de los más directos sea el siguiente:

Imaginemos que vamos añadiendo los segmentos que unen dos de los n puntos, uno tras otro. Si un nuevo segmento tiene k puntos de corte con los añadidos hasta el momento entonces produce k+1 nuevas regiones. Por tanto, el número final de regiones será 1 (la región inicial) más el número de puntos de corte (como por ningún punto pasan 3 segmentos, cada punto de corte aparece una sola vez al ir añadiendo segmentos) más el número de segmentos. El número de segmentos es el número de formas de elegir 2 puntos entre los n, el número combinatorio C(n,2). Como cada 4 puntos determinan 2 (y solo 2) segmentos que se cortan en el interior del círculo, tenemos una biyección entre puntos de corte y conjuntos de 4 de los n puntos. Así, el número de puntos de corte es C(n,4) y el número total de regiones será C(n,4) + C(n,2) + 1. Puedes comprobar que este polinomio es exactamente $(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)/24$.



Desafíos matemáticos de EL PAÍS

Y si te has quedado con ganas de más, recuerda que cada viernes, con motivo del centenario de la Real Sociedad Matemática Española, tienes un nuevo Desafío Matemático en forma de vídeo en ELPAIS.com.

En el acertijillo anterior...

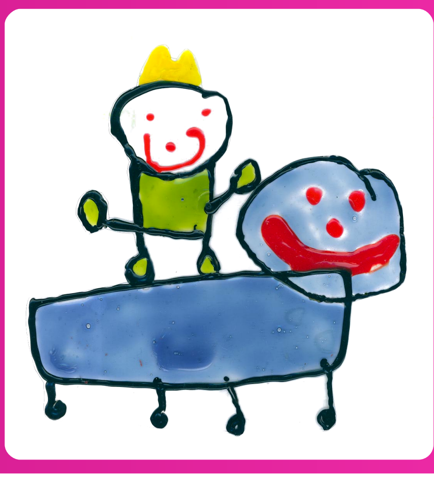
... te preguntábamos cómo partir en dos mitades de igual superficie (y no valía cortar en horizontal) una tarta rectangular o circular de la que se ha cortado un trozo rectangular o circular.

Una posible solución, que vale para todos los casos, es cortar la tarta por la recta que une los dos centros (el de la tarta y el del agujero), pues cualquier recta que pase por el centro de un círculo o de un rectángulo lo divide en dos mitades de igual superficie. Así nuestra recta dejará la mitad de la tarta original a cada lado y la mitad del agujero a cada lado.

Enhorabuena a Alberto Castaño que ya sabía todo esto.

El acertijillo

Hace mucho tiempo, en un reino muy lejano, dos príncipes se presentaron a caballo a pedir la mano de la princesa.



El rey, que no sabía a cuál de los dos concedérsela, les propuso una carrera de caballos con la siguiente extraña condición:

Aquel cuyo caballo llegara el último sería el que se casaría con la princesa.

Los príncipes discutieron sobre cómo realizar la carrera, pues no podían quedarse los dos parados indefinidamente.

Tras largas conversaciones, la carrera se celebró y durante mucho tiempo se habló de lo deprisa que galoparon los caballos y de lo ajustado de la *Photo Finish*.

¿Cómo lo hicieron?

Respuestas a **hojavolante@uam.es**.

¿Humor...?

La idea es que la identidad está en A.

$\mathrm{Id} \in \mathcal{A}$

Cofinanciado por:

Escrito y maquetado por Carlos Vinuesa. Agradecemos su colaboración a Mª Teresa Martínez y Fernando Chamizo.