Las matemáticas escondidas

Emiliano Gómez • University of California, Berkeley

Ciclo de talleres divulgativos “Matemáticas en acción”
Depto. de MATESCO, Universidad de Cantabria

18 de abril de 2012

Las matemáticas escondidas

Un aspecto interesante de las matemáticas es que a veces un problema que a primera vista parece fácil puede resultar muy difícil. Tal vez el ejemplo más célebre es el último teorema de Fermat.

Nuestro objetivo es mostrar ejemplos del caso opuesto: problemas que parecen difíciles pero que no lo son.

Las matemáticas escondidas

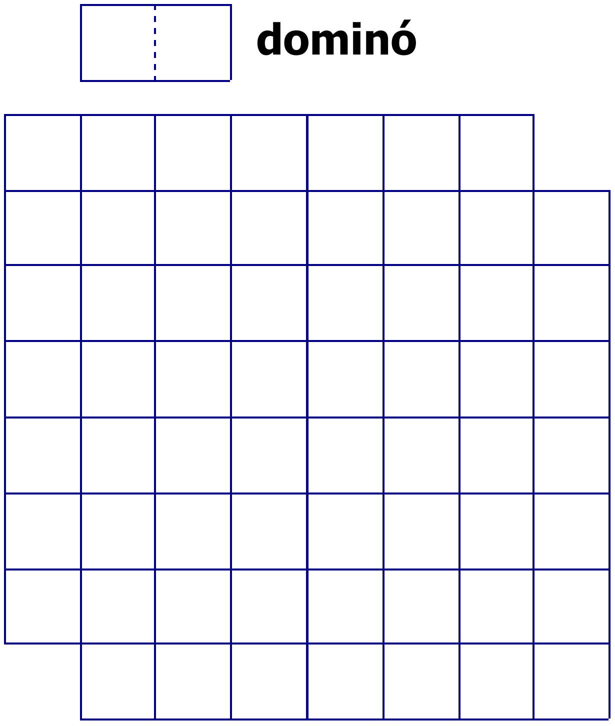
Estos problemas suelen esconder alguna propiedad o estructura matemática que facilitan su solución.

Veremos ejemplos de tres maneras de encontrar las matemáticas escondidas:

- Añadiendo información (por ejemplo, números o colores)
- Cambiando de perspectiva
- Modelando el problema

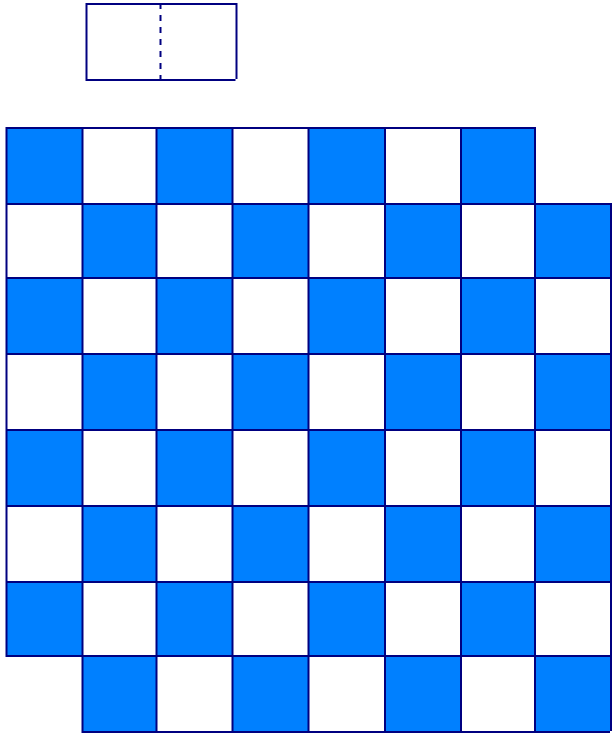
Primer ejemplo - teselaciones

¿Es posible teselar la figura que se encuentra a la derecha usando únicamente fichas de dominó?



Solución 1: añadiendo colores

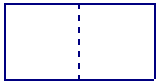
Si coloreamos la figura como se muestra, tenemos un tablero de ajedrez al que le faltan dos casillas diagonalmente opuestas.

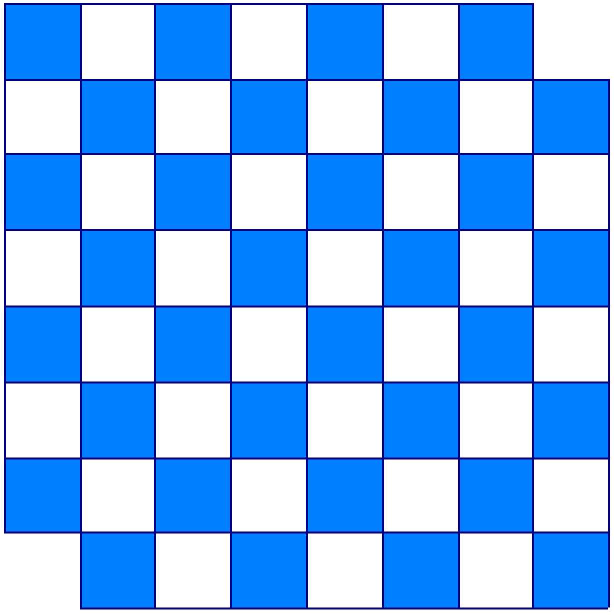


Solución 1: añadiendo colores

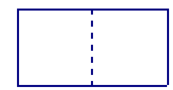
La figura tiene más casillas azules (dos) que blancas.

Pero cualquier teselado debe cubrir el mismo número de casillas blancas que azules, puesto que cada dominó cubre una casilla de cada color.

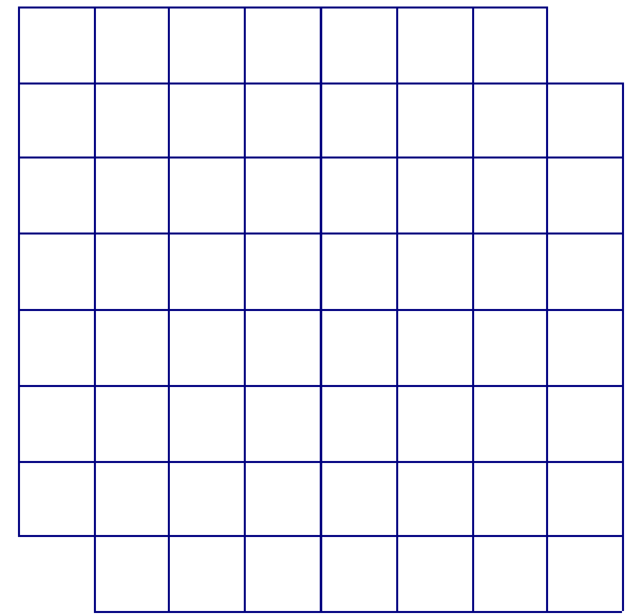




Solución 1: añadiendo colores



dominó



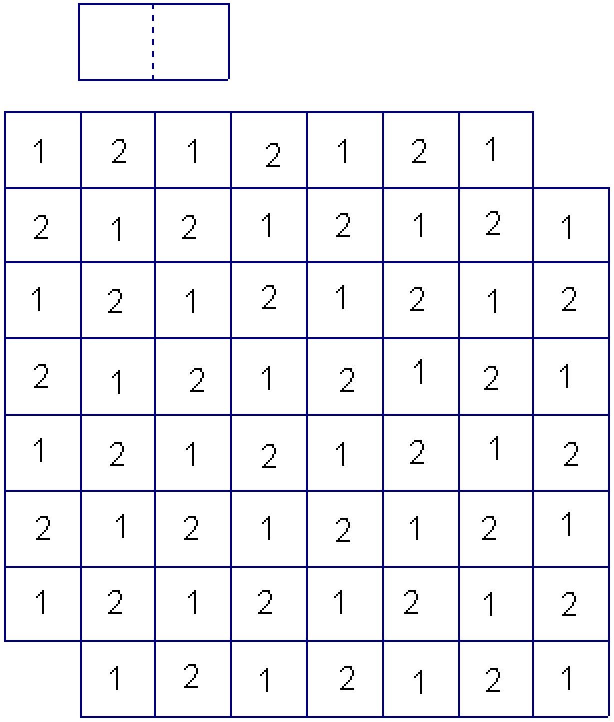
Por lo tanto, no es posible teselar la figura usando únicamente fichas de dominó.

Solución 2: añadiendo números

Asignemos un número a cada casilla como se muestra.

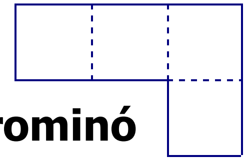
La suma de los números en la figura no es un múltiplo de 3.

La suma de las casillas cubiertas por cualquier teselado debe ser un múltiplo de 3.

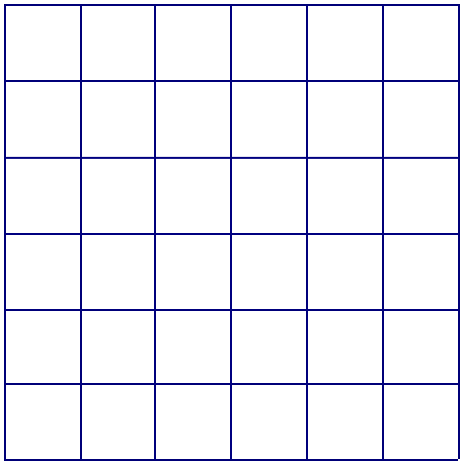


Segundo ejemplo - teselaciones

¿Es posible teselar la figura que se encuentra a la derecha usando únicamente tetrominós en forma de "L"?



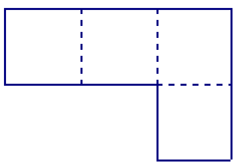
tetrominó



Solución 1: añadiendo números

¿Cuáles pueden ser las sumas de las casillas cubiertas por un tetrominó?

¿Qué se puede deducir acerca de la suma de las casillas cubiertas por cualquier teselado?

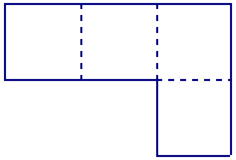


1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5

Solución 1: añadiendo números

La suma de todas las casillas de la figura, ¿cumple con esta condición?

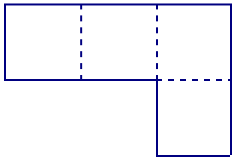
Por lo tanto, ¿cuál es la respuesta?

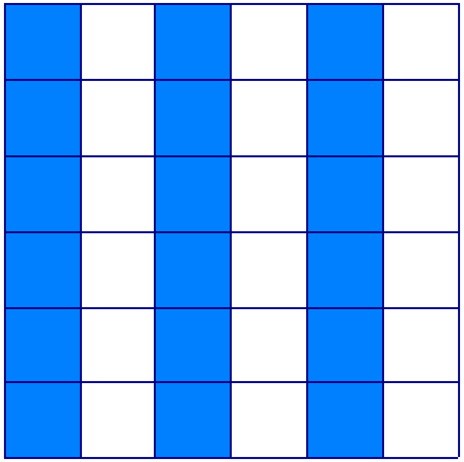


1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5
1	5	1	5	1	5

Solución 2: añadiendo colores

- Si coloreamos la figura como se muestra, cada tetrominó debe cubrir tres casillas blancas y una azul, o viceversa.
- Supongamos que existe un teselado.
- Entonces tenemos 9 tetrominós que cubren 18 casillas blancas (y 18 azules).



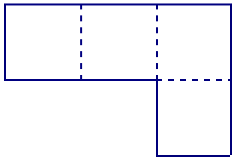


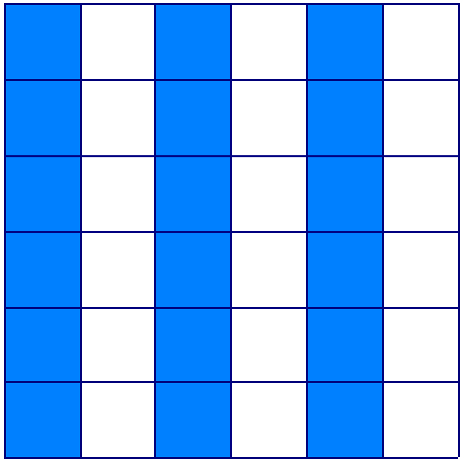
Solución 2: añadiendo colores

Si n es el número de tetrominós que cubren tres casillas blancas, entonces $9 - n$ es el número de tetrominós que cubren una sola.

Luego $18 = 3n + (9 - n)$, o $2n = 9$.

Pero esto es imposible.





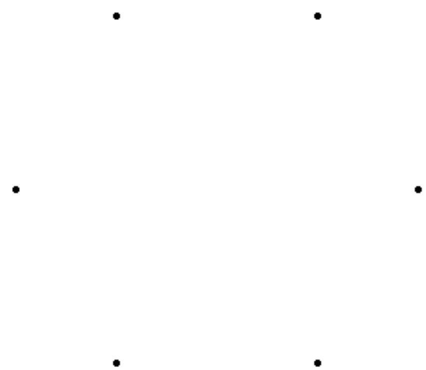
Tercer ejemplo: la fiesta

Si hay seis personas en una fiesta, entonces debe haber tres de ellas que se conocen entre sí, o bien ninguna de las tres se conocen entre sí.

Aclaración: suponemos que conocerse entre sí es una relación simétrica entre dos personas.

¿Cómo podemos probar este enunciado?

Una solución: añadiendo colores



Cada punto representa a una de las seis personas.

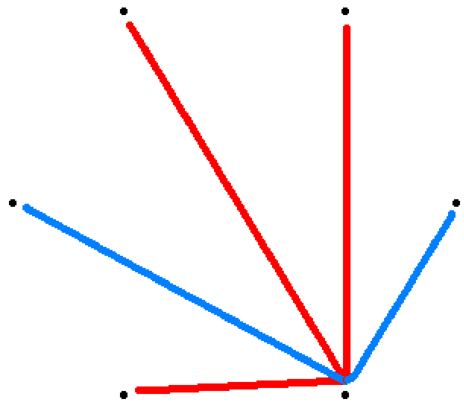
Si dos personas se conocen, las unimos con un segmento rojo.

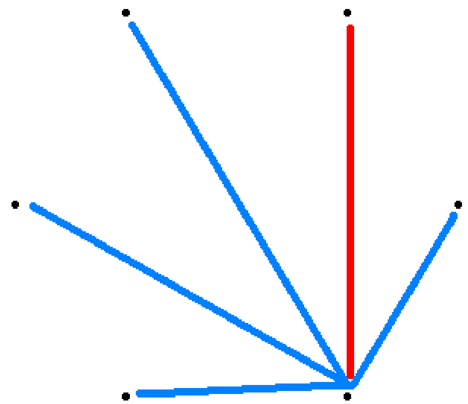
Si dos personas no se conocen, las unimos con un segmento azul.

Una solución: añadiendo colores

Debemos probar que al unir todos los puntos de este modo, tiene que haber un triángulo rojo, o bien un triángulo azul.

Una solución: añadiendo colores

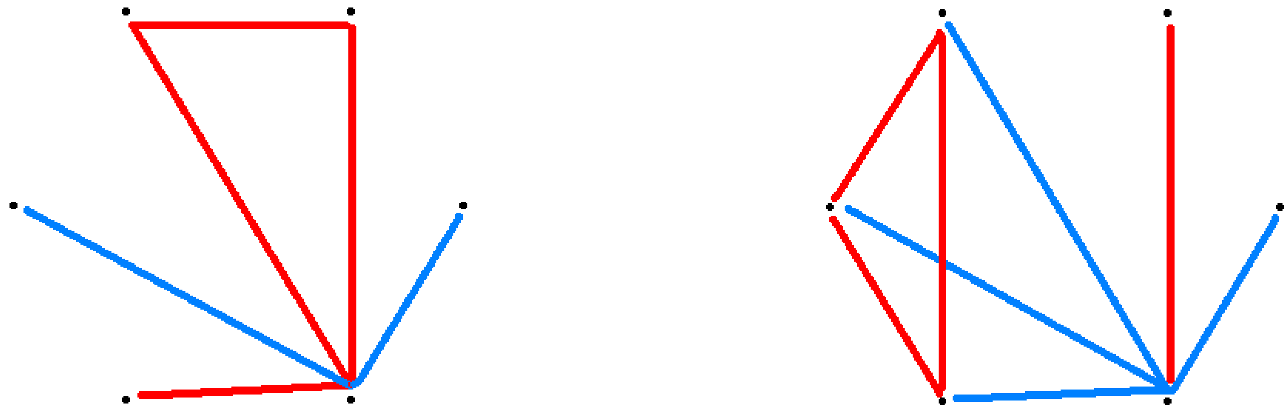




Fijemos uno de los seis puntos.

De este punto deben salir por lo menos tres segmentos rojos, o por lo menos tres segmentos azules.

Una solución: añadiendo colores



Fijémonos ahora en los tres puntos que unen al punto dado con segmentos del mismo color.

Si dos de estos puntos están unidos por el mismo color, forman un triángulo de un solo color con el punto fijo.

De lo contrario, estos tres puntos forman un triángulo del otro color.

Cuarto ejemplo: torneo

En un torneo de tenis de eliminación directa (el que pierde se va a casa, el que gana pasa a la siguiente ronda), participan 128 jugadores.

¿Cuántos partidos se jugarán en el torneo para coronar al campeón?

Solución “difícil”

En la primera ronda se juegan 64 partidos. En la segunda ronda, 32. Después 16, 8, 4, 2 y por último uno más, la final.

En total se juegan 64+32+16+8+4+2+1 = 127 partidos.

Solución fácil: cambio de perspectiva

De los 128 jugadores, 127 deben perder exactamente un partido.

Como cada partido tiene un perdedor y un ganador, se necesita jugar 127 partidos.

Quinto ejemplo: sombrero al río

- Un día fui a remar al río. Salí del muelle y remé río arriba (es decir, contra la corriente).
- Cuando había remado 1 kilómetro, se me voló el sombrero y cayó al agua al lado de mi canoa.
- Decidí no preocuparme y seguí remando río arriba por 10 minutos. Entonces me acordé de que en la banda del sombrero había guardado mi boleto para un concierto esa noche.
- Di vuelta, remé río abajo (siempre con la misma intensidad), y alcancé mi sombrero en el muelle.

Quinto ejemplo: sombrero al río

¿Quién tocaba en el concierto esa noche?

¿Cuál era la velocidad de la corriente ese día?

Solución “difícil”

Sea v la velocidad a la que remo (sin corriente) y c la velocidad de la corriente, ambas en km/min.

Remé una distancia de $1 + 10(v - c)$ km río arriba.

Tardé $[1 + 10(v - c)]/(v + c) = T$ minutos en alcanzar al sombrero remando río abajo.

El sombrero recorrió 1 km en $10 + T$ minutos.

Así que $c = 1/(10 + T)$ km/min.

Solución "difícil"

Esto es, $c = 1/[10 + \{1 + 10(v - c)\}/(v + c)]$

$c = (v + c)/(20v + 1)$

$20vc = v$

$20c = 1$

La velocidad de la corriente es $c = 1/20$ km/min, o 3 km/hr.

Solución fácil:
cambio de perspectiva

Tomemos el marco de referencia del sombrero.

Como remé 10 minutos alejándome de él, debí tardar otros 10 minutos para alcanzarlo (puesto que la corriente nos afecta por igual).

Por lo tanto, el sombrero viajó 1 km en 20 minutos, arrastrado por la corriente.

La velocidad de la corriente es 1km/20min, o 3 km/hr.

Sexto ejemplo: la mosca y los trenes

Dos trenes avanzan cada uno hacia el otro y sobre la misma vía, viajando a 50 km/h.

Cuando la distancia entre los trenes es de 100 km, una mosca muy veloz que estaba posada en una de las locomotoras parte volando hacia la otra, a una velocidad de 75 km/h.

Al llegar a la otra locomotora, instantáneamente se da la vuelta y vuela hacia el otro tren, siempre a una velocidad de 75 km/h.

Este proceso se repite hasta que la mosca muere aplastada al chocar los dos trenes.

¿Cuál es la distancia total que recorre la mosca?

Solución “difícil”

En el primer trayecto, si la mosca tarda t horas en alcanzar a la otra locomotora, tenemos $100 = 50t + 75t$, o $t = 4/5$ h.

El primer trayecto mide $75 \cdot (4/5) = 60$ km.

El primer tren, en ese tiempo, recorre $50 \cdot (4/5) = 40$ km.

En el segundo trayecto, si la mosca tarda t horas en alcanzar a la primera locomotora, tenemos $20 = 50t + 75t$, o $t = 4/25$ h.

El segundo trayecto mide $75 \cdot (4/25)$ km.

Solución “difícil”

Siguiendo así, obtenemos una serie geométrica para la distancia total que recorre la mosca:

$75 \cdot [4/5 + 4/5^2 + 4/5^3 + \ldots] = 75$ km.

Solución fácil: cambio de perspectiva

Los trenes tardan 1 hora en chocar, ya que los separa una distancia de 100 km y cada uno viaja a 50 km/h.

Por lo tanto la mosca vuela durante 1 hora.

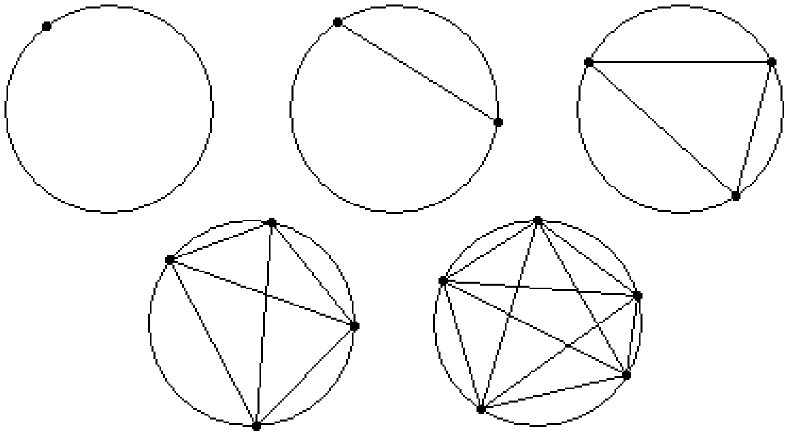
En 1 hora, ya que vuela a 75 km/h, la mosca recorre 75 km.

Séptimo ejemplo: regiones dentro de un círculo

Si se forman todos los segmentos posibles entre *n* puntos distintos en un círculo de tal manera que no haya tres segmentos con un punto en común en el interior del círculo,

¿en cuántas regiones (disjuntas) se divide el interior del círculo?

Séptimo ejemplo: regiones dentro de un círculo

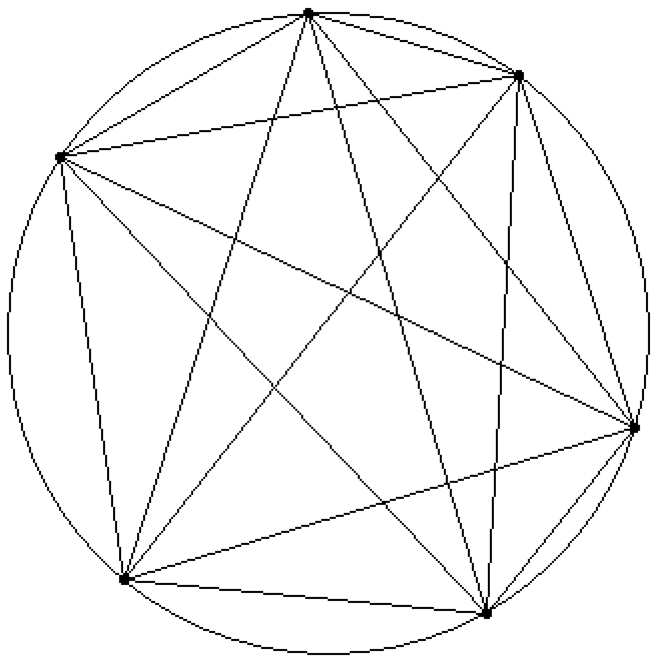


Sea r(n) el número que buscamos.

¿Qué valores tiene r(n) para n = 1, 2, 3, 4 y 5?

¿Se animarían a enunciar una conjetura para r(n)?

Séptimo ejemplo: regiones dentro de un círculo



¿Cuál es el valor de r(6)?

¿Cómo podemos encontrar el valor de r(n)?

Solución: modelando el problema

Fórmula de Euler para grafos conexos planos, sin intersección de aristas:

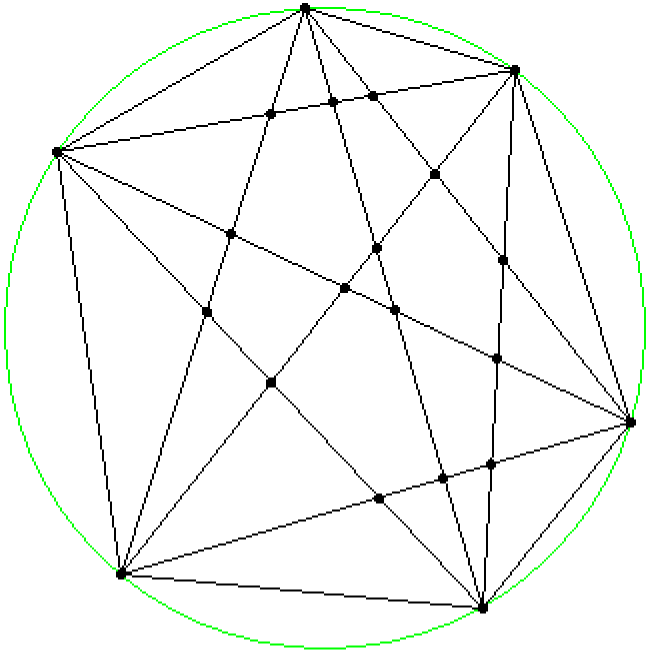
$v - e + f = 2$, donde

v = número de vértices, f = número de regiones (incluyendo la externa) y e = número de aristas

Coficientes binomiales, o combinaciones de n en k:

$C(n,k) = n!/[k!(n - k)!]$

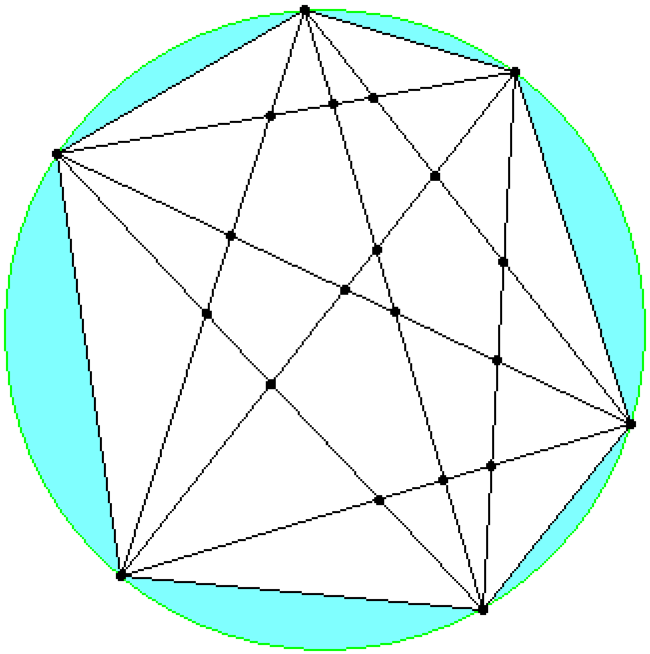
Solución: modelando el problema



Si ignoramos el círculo, tenemos un grafo conexo.

Consideremos cada cruce como un vértice (para que no haya intersección de aristas).

Solución: modelando el problema



Hay n regiones dentro del círculo y afuera del polígono de n lados inscrito en él.

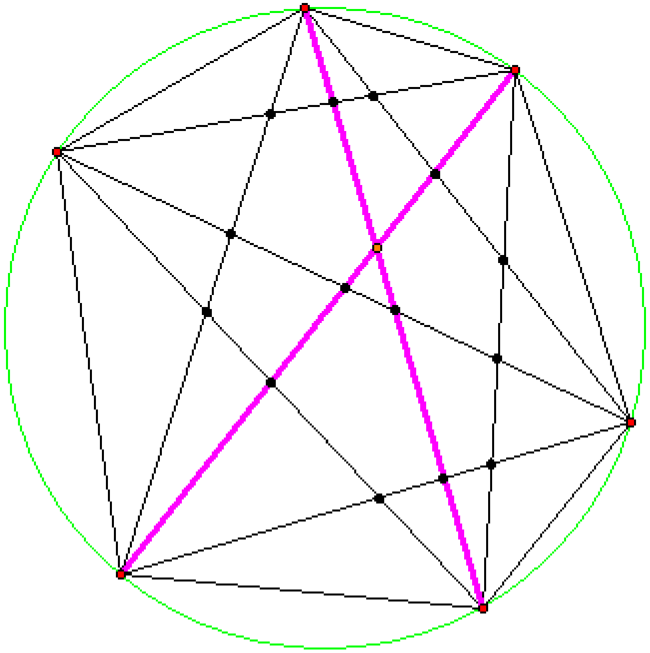
Como $v - e + f = 2$ (incluyendo la región externa al polígono), hay

$e - v + 1$ regiones adentro del polígono.

Por lo tanto,

$r(n) = e - v + 1 + n$.

Solución: modelando el problema



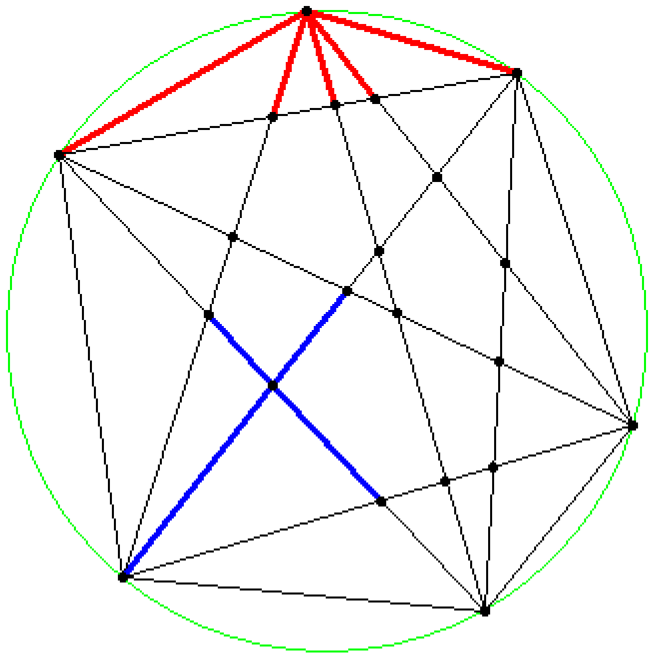
Contemos los vértices:

Hay n en el círculo.

Hay C(n,4) adentro del círculo.

Luego v = C(n,4) + n.

Solución: modelando el problema



Contemos las aristas así:

Contamos el número de aristas en cada vértice, sumamos para todos los vértices y dividimos entre 2.

Para cada uno de los n vértices en el círculo hay

n – 1 aristas.

Para cada uno de los C(n,4) vértices interiores hay 4 aristas.

Solución: modelando el problema

Luego, $e = (1/2)[n(n-1) + 4C(n,4)]$

$e = 2C(n,4) + C(n,2)$

Recordemos que $v = C(n,4) + n$, y que

$r(n) = e - v + 1 + n$

Por fin, $r(n) = C(n,4) + C(n,2) + 1$

$r(n) = C(n,4) + C(n,2) + C(n,0)$

$r(n) = (1/24)(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$

Octavo ejemplo: reparto

Alrededor de una mesa están sentadas *n* personas.

Cada una tiene inicialmente una cantidad de algo.

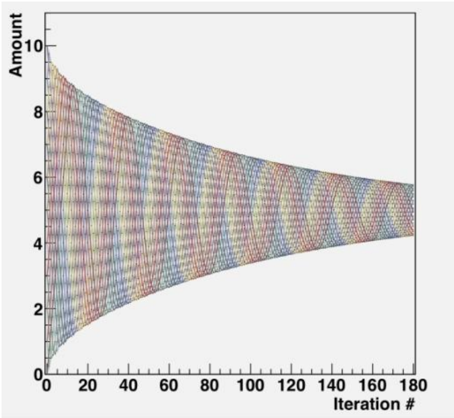
Sea r una constante, $0 < r < 1$.

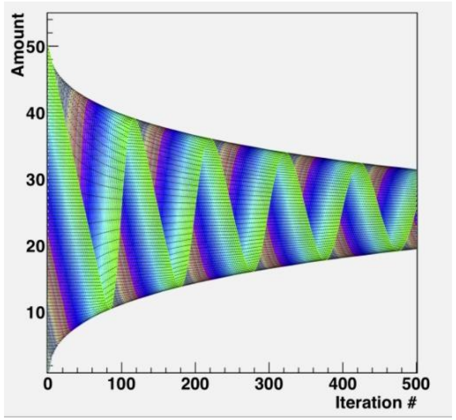
Se itera indefinidamente el siguiente proceso:

- cada persona entrega una porción *r* de lo que tiene a la persona que está a su derecha.

¿Qué ocurrirá con este juego a lo largo del tiempo?

Octavo ejemplo: reparto





Estas simulaciones muestran dos ejemplos de la evolución del juego.

A la izquierda, hay 20 jugadores con cantidades iniciales entre 0 y 10, y $r = 3/4$.

A la derecha, hay 50 jugadores con cantidades iniciales entre 0 y 50, y $r = 1/2$.

Octavo ejemplo: reparto

Estos ejemplos, al igual que nuestra intuición, indican que el juego tiende a la equidistribución.

En efecto, eso es lo que ocurre, pero

¿cómo probarlo?

Solución: modelando el problema

Transformación lineal para modelar el reparto.

Álgebra lineal para resolver el problema.

Solución: modelando el problema

Sean a_1, … ,a_n las cantidades iniciales, y

a_i^l la cantidad de la persona i después de l iteraciones.

Entonces tenemos que

$$a_i^{l+1} = r a_{i-1}^l + (1-r) a_i^l$$

(sub-índices módulo n)

Solución: modelando el problema

Modelamos el reparto con la transformación lineal

$$T_r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

dada por

$$T_r(z_1, \ldots, z_n) = \big(rz_n + (1-r)z_1,\ rz_1 + (1-r)z_2,\ \ldots,\ rz_{n-1} + (1-r)z_n\big).$$

Observamos que

$$(a_1^\ell, \ldots, a_n^\ell) = T_r^\ell(a_1, \ldots, a_n)$$

Solución: modelando el problema

La matriz de T_r (en la base canónica) es

$$A_r = \begin{pmatrix} 1-r & 0 & \dots & 0 & r \\ r & 1-r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & 1-r \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$f_r(t) = \det(t\,\mathbb{I} - A_r) = (t-(1-r))^n - r^n.$$

Solución: modelando el problema

T_r tiene n autovalores distintos, por lo que es diagonalizable.

Sean $\lambda_1 = 1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ los autovalores.

Entonces $|\lambda_i| < 1$ para i = 2, … n.

Solución: modelando el problema

Sean $v_1 = (1,1,\ldots,1), v_2, \ldots, v_n$ autovectores para $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (respectivamente): $T_r(v_i) = \lambda_i v_i$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{C}^n$

Si $(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, tenemos que

$$(a_1^\ell, \ldots, a_n^\ell) = T_r^\ell(a_1, \ldots, a_n) = T_r^\ell\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^\ell v_i.$$

Solución: modelando el problema

Por fin, $\lim_{\ell \to \infty} (a_1^\ell, \ldots, a_n^\ell) = \alpha_1 v_1 = (\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_1)$

(donde $\alpha_1 = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$)

Es decir, el juego tiende a la equidistribución.

Las matemáticas econdidas

Gracias

Emiliano Gómez   emgomez@berkeley.edu

985 Evans Hall, Department of Mathematics

University of California, Berkeley

Berkeley, CA 94720-3840

Estados Unidos de América