



TALLER DE MATEMÁTICAS



“Matemáticas en Acción 2011”



Una propuesta arquitectónica como puente entre literatura y geometría



M^a Francisca Blanco Martín
Universidad de Valladolid
E.T.S. Arquitectura
Departamento de Matemática Aplicada
fblanco@maf.uva.es

Una propuesta arquitectónica como puente entre literatura y geometría

En los años treinta del pasado siglo surgió una iniciativa para construir en Roma un centro de estudio y recopilación de la obra del poeta italiano Dante.

El arquitecto Terragni, en 1938, realizó un proyecto arquitectónico, que no llegó a construirse, en el que concibe un edificio para tal fin, que denomina Danteum, en clara alusión al nombre del poeta.

En la composición de dicho proyecto plantea una relación plástica, análoga a la estructura de su composición poética más significativa, La Divina Comedia, estableciendo un camino procesional ascendente, Infierno-Purgatorio-Paraíso, hasta alcanzar la perfección.

Una propuesta arquitectónica como puente entre literatura y geometría

En el borrador de la memoria del proyecto arquitectónico elaborado por Terragni, que ha llegado hasta nosotros podemos leer:

..”la expresión Arquitectónica podía adecuarse a la Obra Literaria solo a través de un examen de la admirable estructura del Divino Poema, fidelísimo a un criterio de repartición y de interpretación de algunos números simbólicos, 1,3,7,10 y sus combinaciones que por su ulterior selección pueden sintetizarse en el 1 y 3 (unidad y trinidad)”.

“ ..Solo hay un rectángulo que exprese con claridad la ley armónica de la unidad en la trinidad, y es el Rectángulo históricamente definido Áureo”.

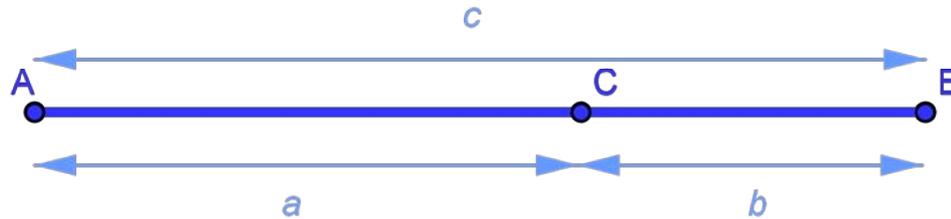
Una propuesta arquitectónica como puente entre literatura y geometría

Atendiendo a las reflexiones que efectúa Terragni en su Memoria del Proyecto, vamos a dividir esta presentación en tres partes:

1. División áurea de un segmento. Rectángulo áureo y propiedades.
2. Resumen del poema de “*La Divina Comedia*” de Dante.
3. Respuesta gráfica del arquitecto Terragni: *El Danteum*.

PROPORCIÓN ÁUREA EN UN SEGMENTO

Sea un segmento AB de longitud c y un punto C situado entre A y B que lo divide en dos segmentos de longitudes a , b .



Se dice que el segmento AB está dividido según la proporción áurea o divina si la relación entre AC y CB es igual a la relación entre AB y AC:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow a^2 = ab + b^2 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0, b \neq 0$$

PROPIEDADES DEL NÚMERO DE ORO

Si denotamos, $x = a/b$, $x = 1 + \frac{1}{x}$

La ecuación de segundo grado, $x^2 - x - 1 = 0$

tiene dos soluciones reales:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ número de oro y } \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Las soluciones de una ecuación de segundo grado tienen las propiedades:

$$\varphi + \varphi' = 1, \quad \varphi\varphi' = -1$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \qquad \varphi'^2 - \varphi' = 1$$

$$\varphi(\varphi - 1) = 1 \qquad \varphi^{-1} = \varphi - 1 \qquad \varphi^{-1} + 1 = \varphi$$

La solución del problema geométrico planteado es la solución positiva de la ecuación, φ .

PROPIEDADES DEL NÚMERO DE ORO

Si multiplicamos por las correspondientes potencias de φ , la ecuación

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$$

$$\varphi^3 - \varphi^2 = \varphi$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2$$

$$\varphi^4 - \varphi^3 = \varphi^2$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$$

$$\varphi^{n+1} - \varphi^n = \varphi^{n-1}$$

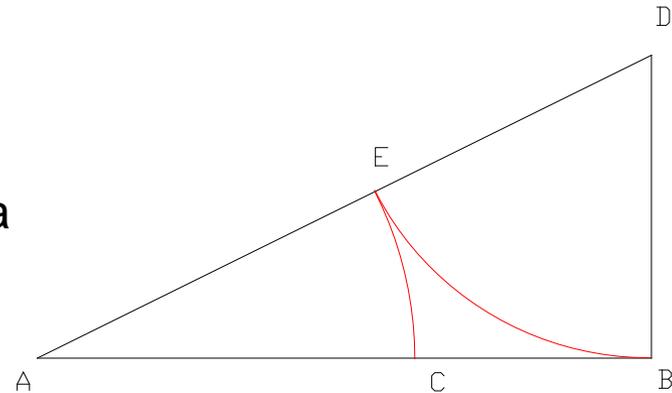
Esta relación es válida para todo exponente entero.

Cuando n es negativo podemos comprobarlo multiplicando sucesivamente por las correspondientes potencias negativas de φ , la ecuación

$$\varphi^{-1} + 1 = \varphi$$

CONSTRUCCION DE LA DIVISION AUREA DEL SEGMENTO AB

Dado el segmento AB de longitud c , se traza por B un segmento perpendicular a AB de longitud $c/2$. Con centro en B y radio BD, se traza el arco de circunferencia hasta cortar a AD en el punto E, y con centro en A y radio AE se traza el arco hasta cortar a AB en el punto C, división áurea del segmento AB.



Aplicando el teorema de Pitágoras: $AD^2 = AB^2 + BD^2$, $AD^2 = c^2 + (c/2)^2 = 5c^2/4$

$$AC = AE = AD - DE = \frac{\sqrt{5}}{2}c - \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}c = -\phi'c = \phi^{-1}c$$

$$AB/AC = c/\phi^{-1}c = \phi$$

$$\text{Si } AB = 1, AC = \phi^{-1},$$

$$CB = AB - AC = 1 - \phi^{-1} = \phi^{-2}$$

PROLONGACIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

Dado el segmento AB de longitud a , se traza por B la perpendicular al segmento AB, el punto D a distancia a de B. Sea M el punto medio de AB.

Se traza el segmento $MD = a \frac{\sqrt{5}}{2}$

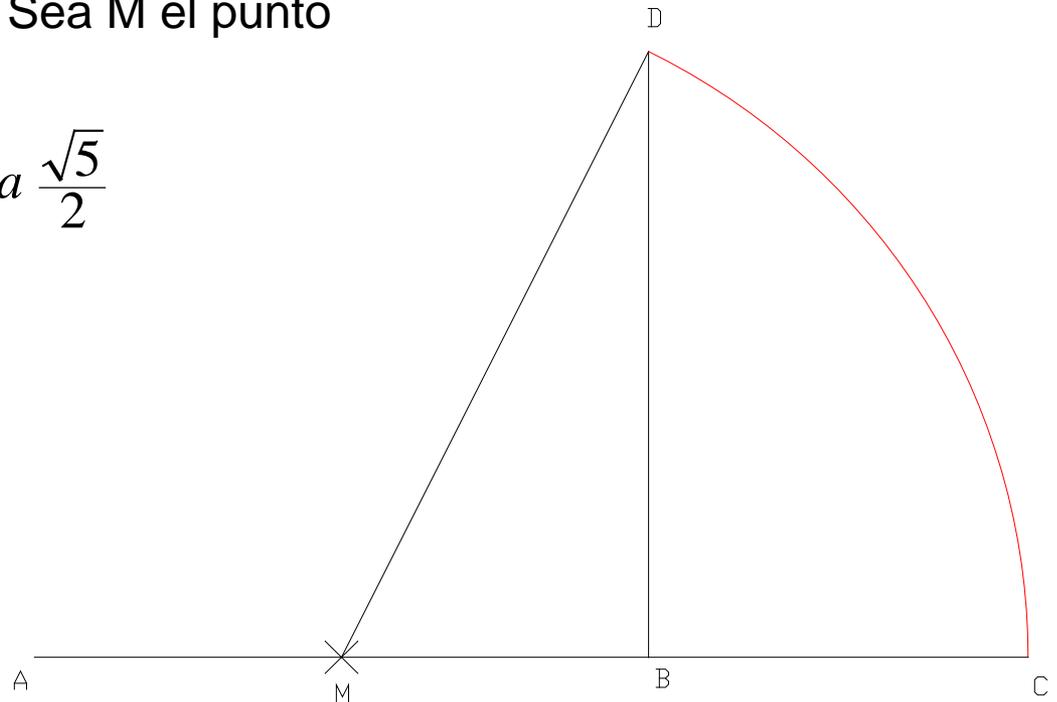
Con centro en M y radio MD se traza el arco que corta a la recta AB en C.

$MD = MC$, luego

$AC = AM + MC =$

$$a/2 + \frac{\sqrt{5}}{2}a = \varphi a.$$

$$CB = \varphi a - a = \varphi^{-1}a$$

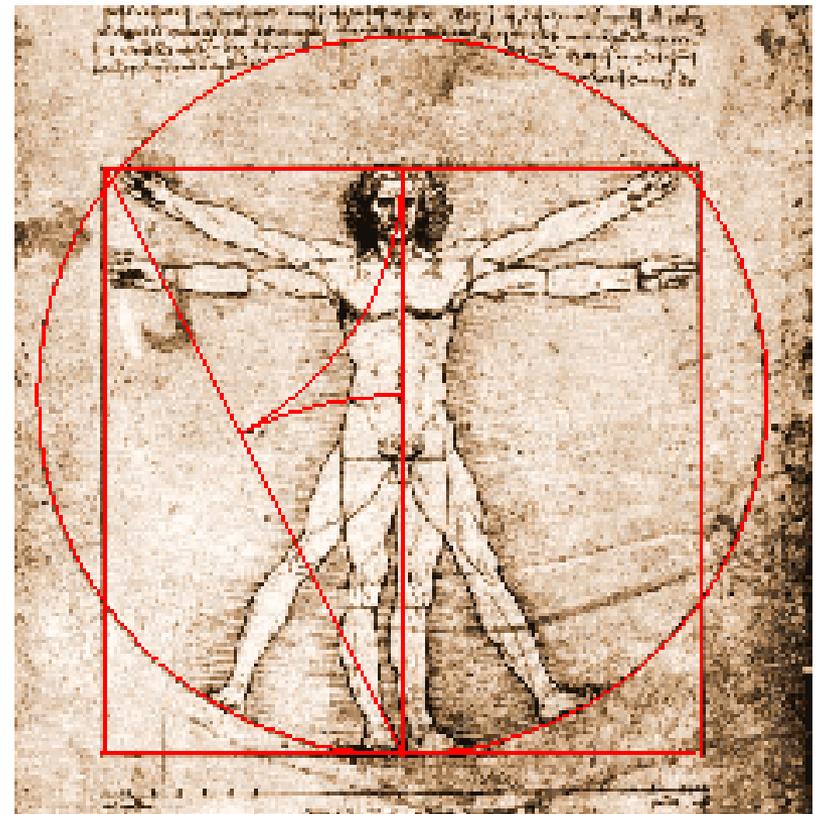


$$AC/AB = \varphi, \text{ y } AC/AB = AB/CB = \varphi$$

Representación del hombre de Leonardo

Leonardo da Vinci (1452- 1519), en sus “Cuadernos”, elaboró una auténtica teoría sobre la figura humana en reposo o en movimiento.

“Si abres las piernas hasta reducir tu altura en una decimocuarta parte, y si extiendes y levantas los brazos hasta que los dedos corazón lleguen al nivel de la cima de la cabeza verás que el centro de los miembros extendidos se halla en el ombligo, y que el espacio entre las piernas formará un triángulo equilátero”. Haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia.

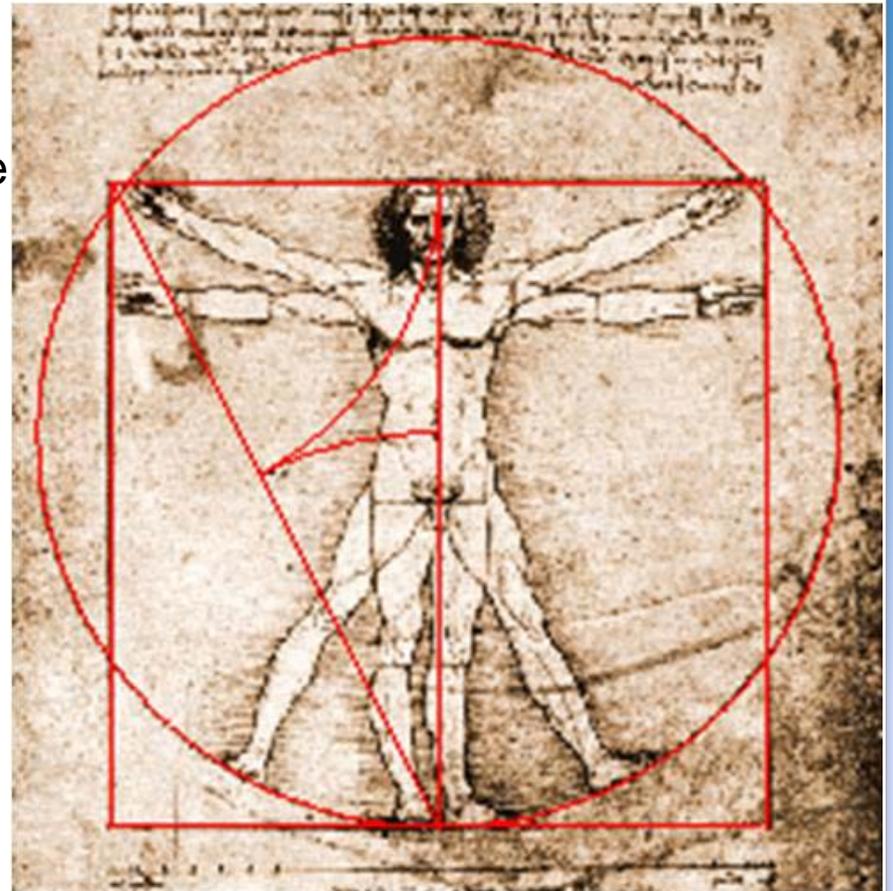


Representación del hombre de Leonardo

Pacioli propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas.

En un cuerpo armonioso la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos, cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90° con el tronco, coincide con su altura, lo que permite inscribir el cuerpo en un cuadrado de lado su altura.

El ombligo se encuentra en el punto que divide de forma áurea la longitud del cuerpo



Proporción en un Rectángulo

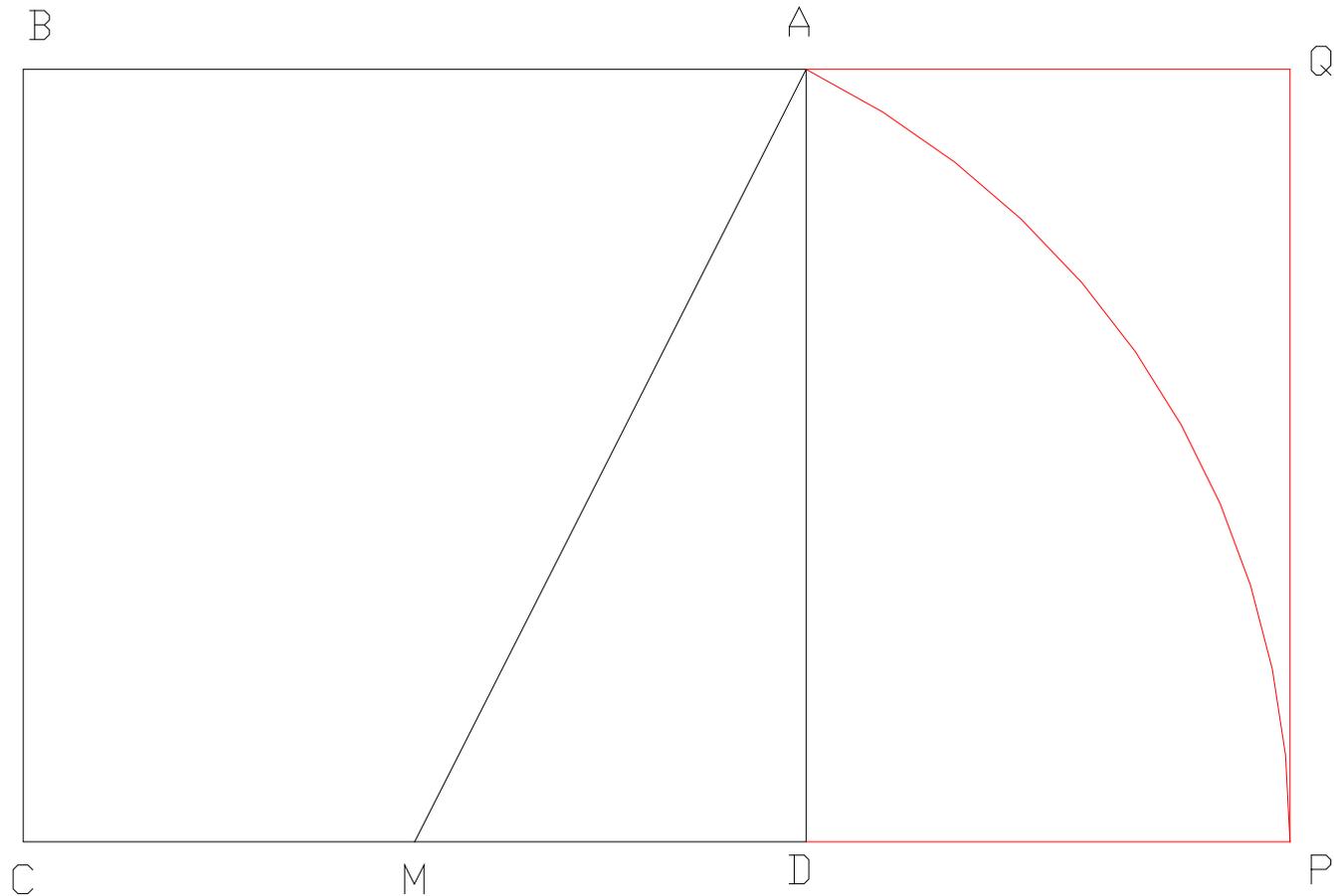
Definimos la proporción en un rectángulo R , como la tangente del ángulo α , ángulo mayor o igual que $\pi/4$, que forma una de sus diagonales con uno de sus lados, o bien como el cociente entre la longitud del lado mayor y la longitud del lado menor.

Como consecuencia inmediata de la definición, se deduce que rectángulos con diagonales paralelas o perpendiculares tienen la misma proporción, y que la proporción en un rectángulo es un número mayor o igual a uno.

Llamamos rectángulo áureo a un rectángulo cuya proporción es el número de oro.

CONSTRUCCION del RECTÁNGULO ÁUREO

A partir del cuadrado ABCD se efectúa la prolongación áurea del lado CD, obteniéndose el rectángulo áureo CPQB:



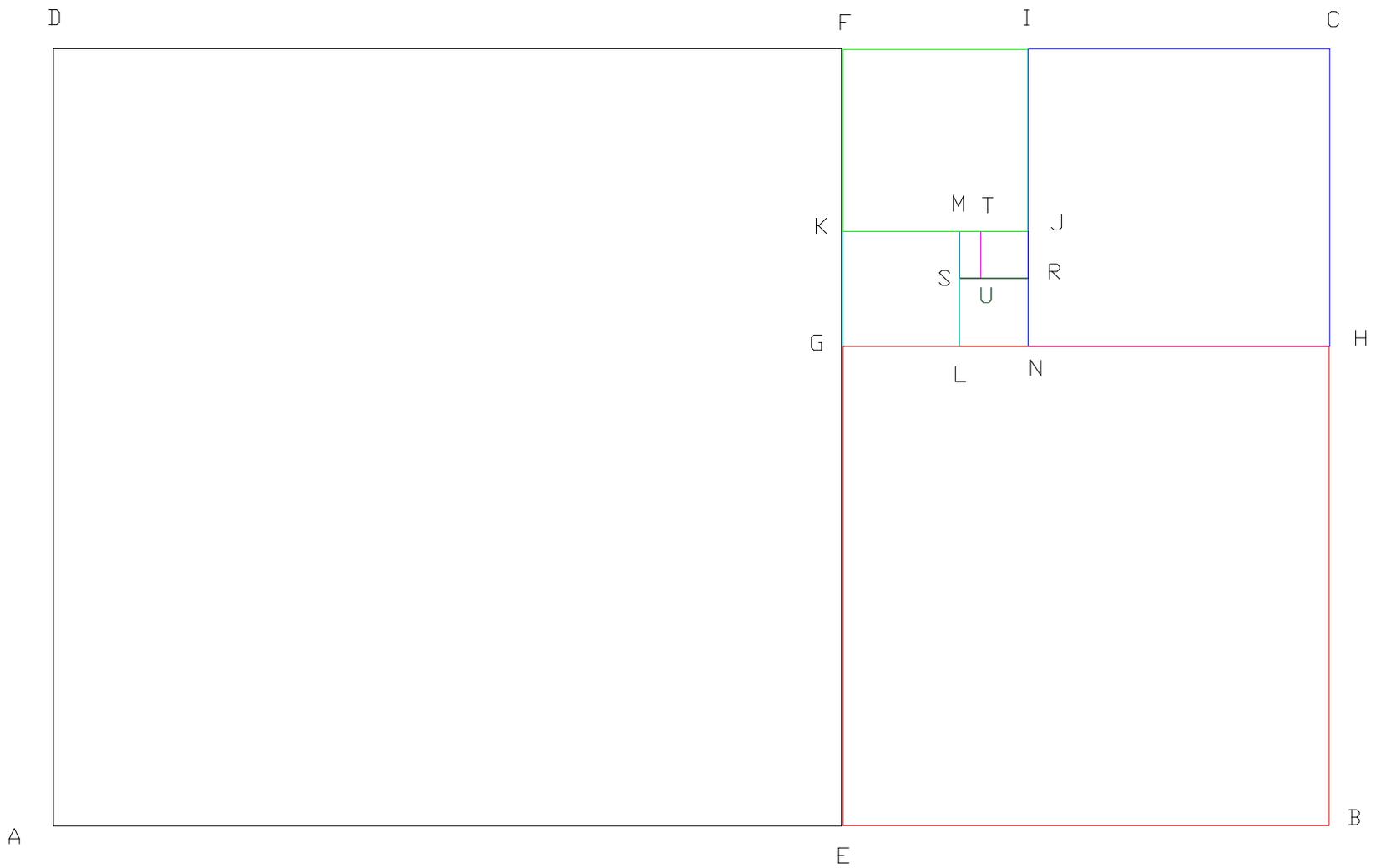
Sucesión creciente de rectángulos áureos

Si a un rectángulo áureo de lados 1 y φ le añadimos por el lado mayor un cuadrado, obtenemos un segundo rectángulo áureo, de lados φ y φ^2 ; e iterando este proceso, obtenemos una sucesión creciente de rectángulos áureos cuyos lados son dos términos consecutivos de la sucesión $\{\varphi^n\}$

La sucesión $\{\varphi^n\}$, progresión geométrica de razón φ , es una sucesión recurrente que satisface la relación $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, llamada sucesión de Fibonacci, que tiene la propiedad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \varphi$$

Sucesión creciente de rectángulos áureos



Leer comenzando por el rectángulo SUTM

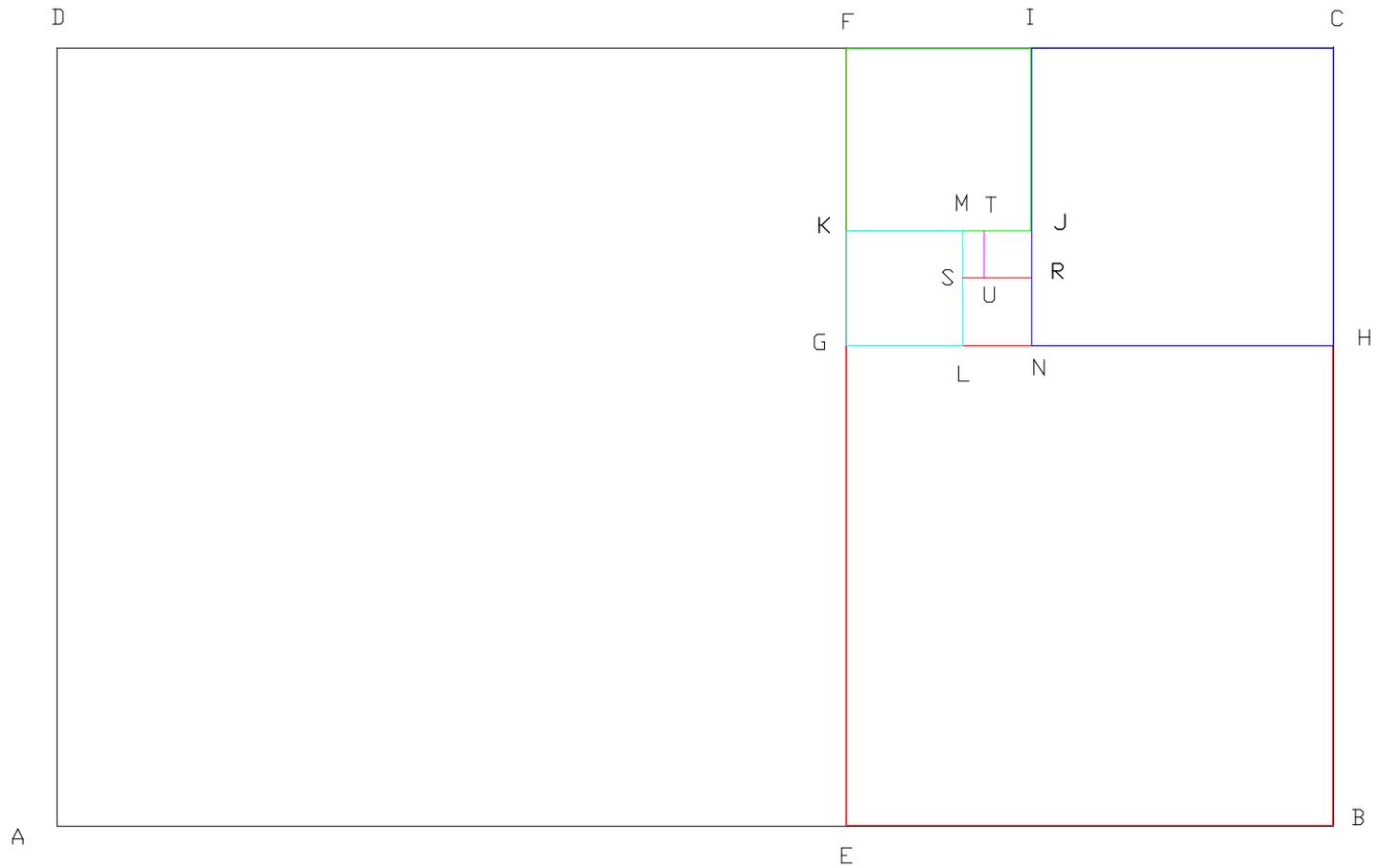
Sucesión decreciente de rectángulos áureos

Si a un rectángulo áureo de lados 1 y φ le restamos por el lado menor un cuadrado, obtenemos un segundo rectángulo áureo, de lados φ^{-1} y 1; e iterando este proceso, obtenemos una sucesión decreciente de rectángulos áureos cuyos lados son dos términos consecutivos de la sucesión $\{\varphi^{-n}\}$

La sucesión $\{\varphi^{-n}\}$ es una progresión geométrica de razón φ^{-1} , cuya suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} = \frac{1}{1-\varphi^{-1}} = \frac{\varphi}{\varphi-1} = \varphi^2$$

Sucesión decreciente de rectángulos áureos



Leer comenzando por el rectángulo ABCD

PROCESOS ITERATIVOS

Este proceso infinito podemos enunciarlo :

Si utilizamos como semilla o inicio del proceso un rectángulo áureo y le aplicamos cualquiera de los dos procesos iterativos:

A.1: Añadirle un cuadrado (por el lado mayor).

R.1: Restarle un cuadrado.

obtenemos un rectángulo semejante a la semilla.

LA DIVINA COMEDIA

Poema escrito por Dante (1265-1321), considerado como el poema más grande de la literatura italiana y uno de los mejores de la literatura universal. Se desconoce la fecha exacta en que fue escrito, entre 1304 y 1321, fecha de su muerte, estando Dante en el exilio.

Recibe el nombre de comedia, de acuerdo al esquema clásico, no podía llamarse tragedia al ser una obra con final feliz.

Es un poema teológico, una síntesis del cristianismo y de la cultura clásica, la teología, la poesía y la política, escrito en tercetos encadenados de versos endecasílabos, distribuidos en tres cánticos.

LA DIVINA COMEDIA

La composición poética de la Divina Comedia está formada por tres partes o cánticos: Infierno, Purgatorio y Paraíso, cada una de ellos compuesto por 33 cantos, más un canto preliminar o introducción, es decir 100, cuadrado de 10, número al que se le atribuye la perfección.

De la lectura del poema podemos deducir la importancia y el simbolismo que adquieren algunos números, como, el 3 y el 7, así como su suma.

LA DIVINA COMEDIA

La presencia del número 3 podemos observarla tanto en la composición: tercetos encadenados, tres cánticos compuestos por 33 cantos (múltiplo de 3), como en la descripción: tres personajes principales, Dante, que personifica al hombre, Beatriz, que personifica a la fe, y Virgilio, que personifica a la razón y 3 “lugares” o situaciones espirituales, a las que el alma llega cuando la persona muere, Infierno, Purgatorio y Paraíso.

El poeta narra en el poema un camino, que él recorre en procesión ascendente. Dante a la edad de 35 años (múltiplo de 7), “la mitad del camino de la vida”, describe una visión que tiene en sueños, en la que el poeta, humanidad pecadora, se halla perdido en una selva, “selva de los vicios humanos”, donde le acosan una pantera, un león y una loba, fieras que representan los 7 pecados capitales.

LA DIVINA COMEDIA

Acude en su ayuda, para salir del extravío, la sabiduría clásica, representada por la figura del poeta Virgilio, que por la intersección de su amada Beatriz que está en el Paraíso, le conduce a las puertas del Infierno, región donde están los condenados, y le acompañará en el recorrido por el mismo, así como por la región de los que sufren contentos, el Purgatorio.

En el canto XXX, múltiplo de 3, desaparece Virgilio, que vivió antes de Cristo (70-19 a. C.), por lo que le está vedada la entrada en el Paraíso y aquí le sustituye Beatriz, como guía, para conducirlo al Paraíso y alcanzar la perfección o la gracia.

INFIERNO

La primera parte narra el descenso del autor al Infierno, acompañado por el poeta latino Virgilio, autor de “La Eneida”, a quien Dante admiraba.

Acompañado por su maestro y guía, describe los círculos en los que son sometidos a castigo los condenados, según la gravedad de los pecados cometidos en vida.

Dante encuentra en el Infierno a muchos personajes antiguos, pero también de su época, y alguno de ellos narra su historia brevemente a cambio de que prometa mantener vivo su recuerdo en el mundo.

Dante sale del Infierno con 7 P grabadas en su frente, correspondientes a los 7 pecados capitales.

PURGATORIO

En la segunda parte, Dante y Virgilio atraviesan el Purgatorio, que es una montaña de cumbre plana cuyas laderas son escalonadas. En cada escalón se redime un pecado, los personajes que lo redimen están contentos porque poseen esperanza.

Dante entra en el Purgatorio como pecador y va purificándose de sus 7 pecados, uno en cada nivel, ordenados según la gravedad de los mismos, soberbia, envidia, ira, pereza, avaricia, gula y lujuria; un ángel en cada uno de los niveles le va borrando una letra de la escritura de pecador que le han puesto encima.

Al final de este recorrido y redimidas las culpas, se despide de Virgilio, considerado pagano, su vida transcurrió antes de la era cristiana y no podía ser redimido, no le está permitido entrar al Paraíso.

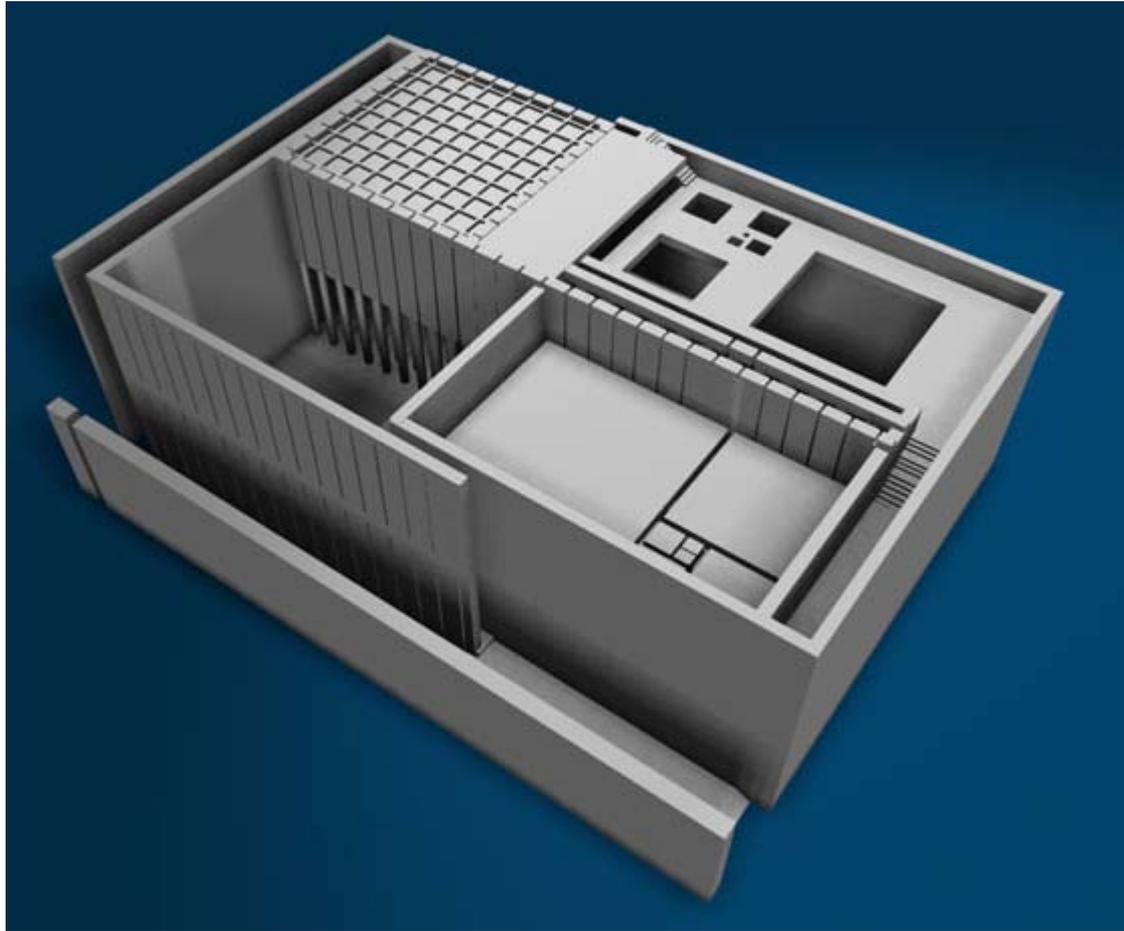
PARAISO

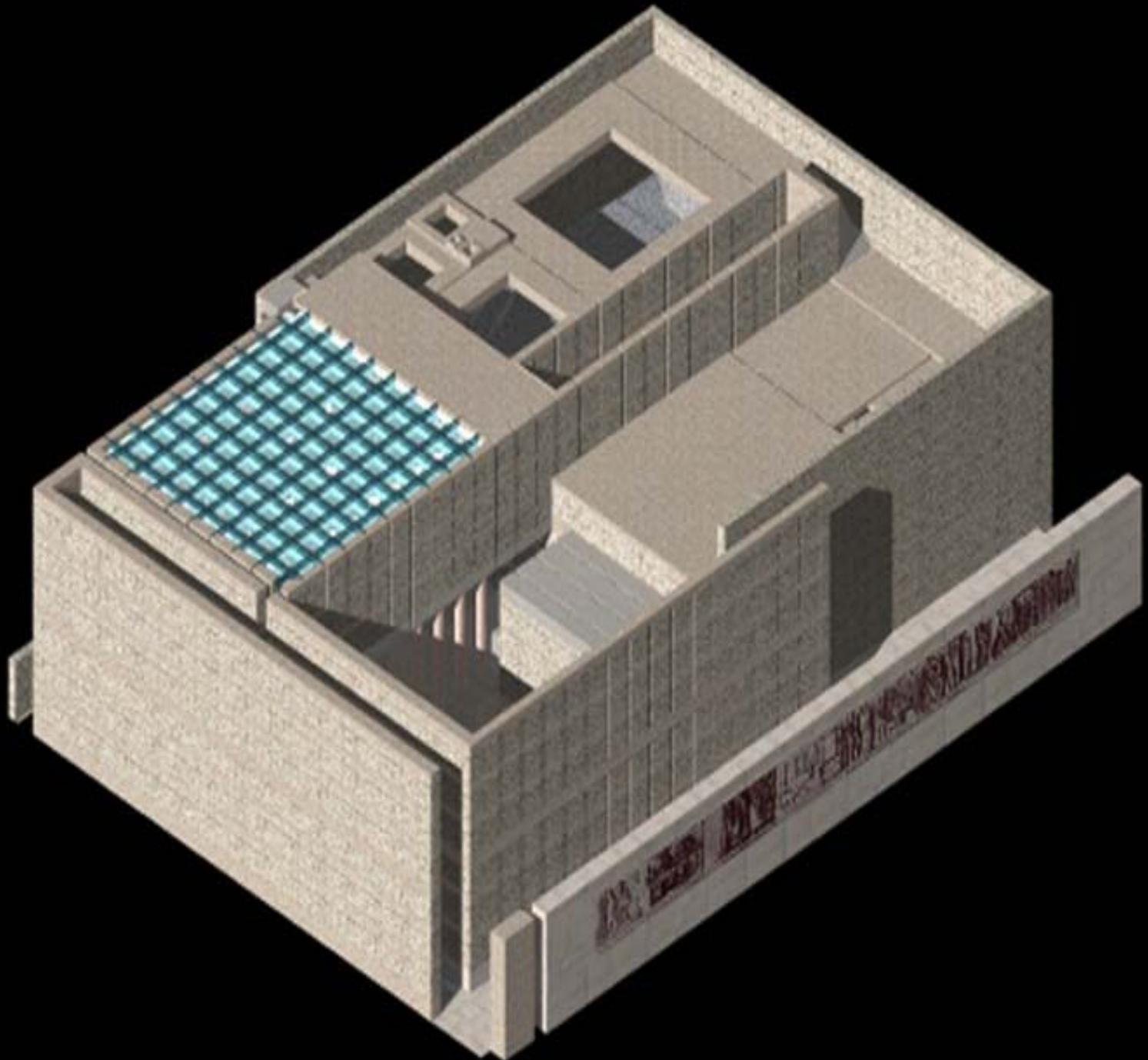
En el Paraíso, concebido como una rosa inmensa en cada uno de cuyos pétalos se encuentra un alma, y en cuyo centro se encuentra Dios, Dante encuentra a su amada, Beatrice (Beatriz) cuyo nombre significa «beatificadora» y «dadora de felicidad», cercana a Dios, rodeado de los coros angélicos.

En este recorrido le acompaña una danza formada por las 7 virtudes, 3 teologales (fe, esperanza y caridad) y 4 cardinales (prudencia, justicia, fortaleza y templanza)

Al final del camino, cuando el poeta dirige la mirada a Dios, su memoria se desborda, se desmaya y despierta.

DANTEUM





Encargo de Mussolini para la construcción de un lugar de estudio de la obra de Dante

El arquitecto italiano Terragni (1904-1941), principal exponente de la arquitectura del Movimiento Moderno en Italia, recibe el encargo, a través de Rino Valdameri, director de la pinacoteca *Brera* de Milán, de realizar un edificio que se dedicará a la recopilación y el estudio de la obra de Dante.

En 1938 realiza un proyecto, no construido debido a las circunstancias políticas del momento, como homenaje a Dante, denominado *Danteum*.

Una primera versión del proyecto fue aprobada por Mussolini, pero tanto cliente como arquitecto murieron en la II Guerra Mundial, razón por la que no se llegó a construir.

Terragni toma como “modelo”, la obra más característica de Dante, *La Divina Comedia* y plantea una analogía y relación plástica de la composición del proyecto arquitectónico con la estructura de la composición poética, estableciendo un camino procesional ascendente que parte del Infierno, pasa por el Purgatorio, para llegar al Paraíso y alcanzar la perfección.

Terragni, no solo proyecta un monumento a Dante y su visión del mundo en *La Divina Comedia*, sino que tiene en cuenta su ubicación, procurando una armonía en el entorno.

El *Danteum* es un proyecto para un monumento que debía situarse en el Foro Romano y constituir un emblema de la continuidad de la cultura itálica, la unidad del nuevo imperio italiano y su paralelismo con los anteriores.

El proyecto de Terragni se sitúa en el entorno de las grandes ruinas del antiguo Imperio Romano. En la Vía del Imperio y en las inmediaciones del Coliseo.

A lo largo de esta Vía se levanta la Basílica de Majencio, importante símbolo de la antigua Roma.

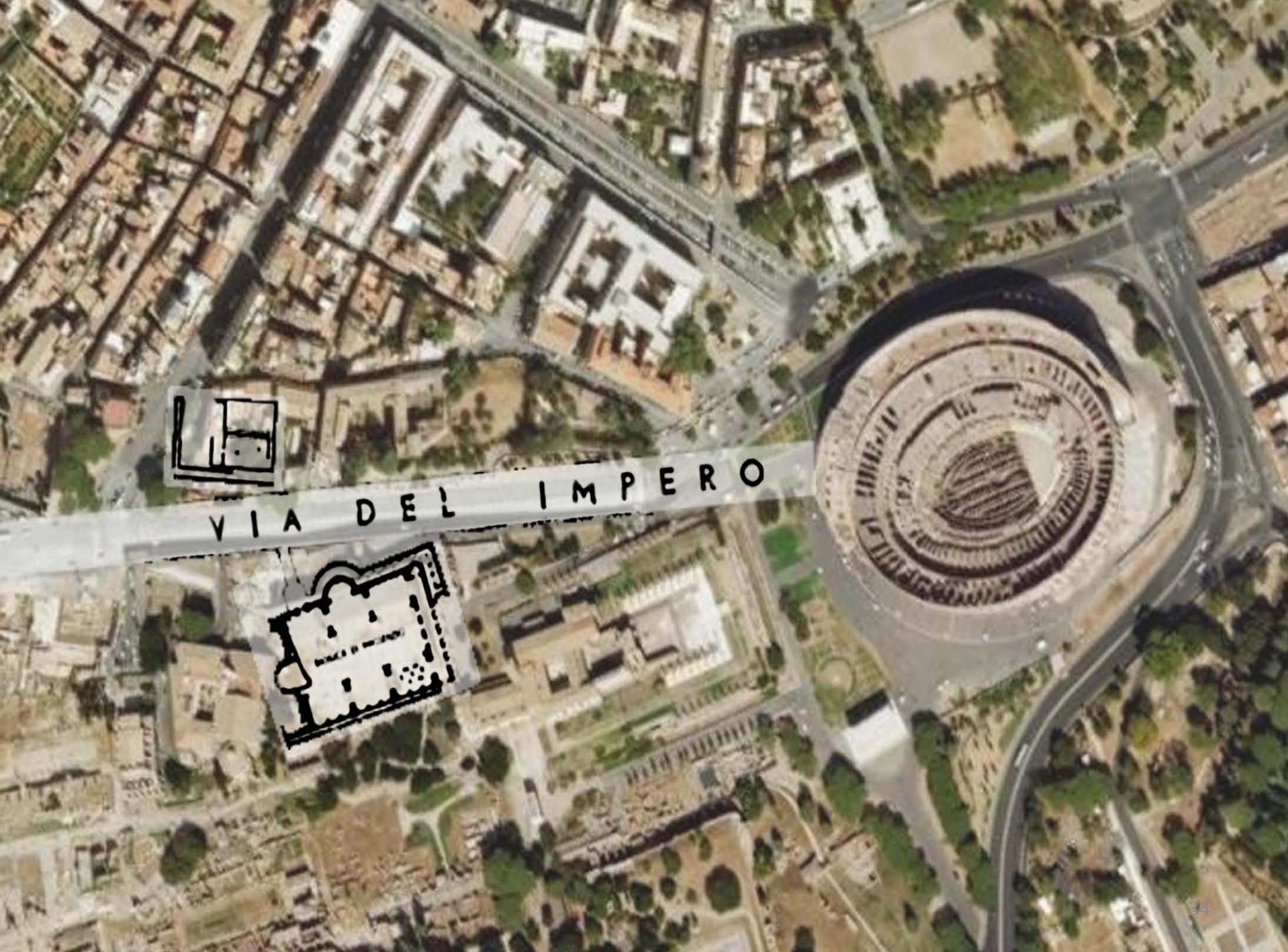
La elección de los materiales también obedece al emplazamiento del edificio, eligiéndose la piedra y el mármol para las fachadas exteriores, pretendiendo con ello una mayor integración con el entorno.

En el borrador de la memoria del proyecto arquitectónico elaborado por Terragni, también podemos leer:

“ .. “El rectángulo áureo es, además una de las formas planimétricas adoptadas con frecuencia también en la antigüedad, Asirios, Egipcios, Griegos y Romanos...”. “El ejemplo más evidente lo tenemos en la Via dell’Imperio, con la Basílica Masencio, cuya planta coincide con un rectángulo áureo.”

*“La planta así fijada para el Danteum viene a ser, así, el rectángulo similar al de la planta de la Basílica, y con dimensiones derivadas directamente de las de aquella insigne Construcción Romana (el lado mayor del Danteum es igual al lado menor de la Basílica, mientras que el lado menor es igual, consecuentemente, a la diferencia entre los dos lados de la Basílica)”.
(Borrador de la memoria, 1938).*

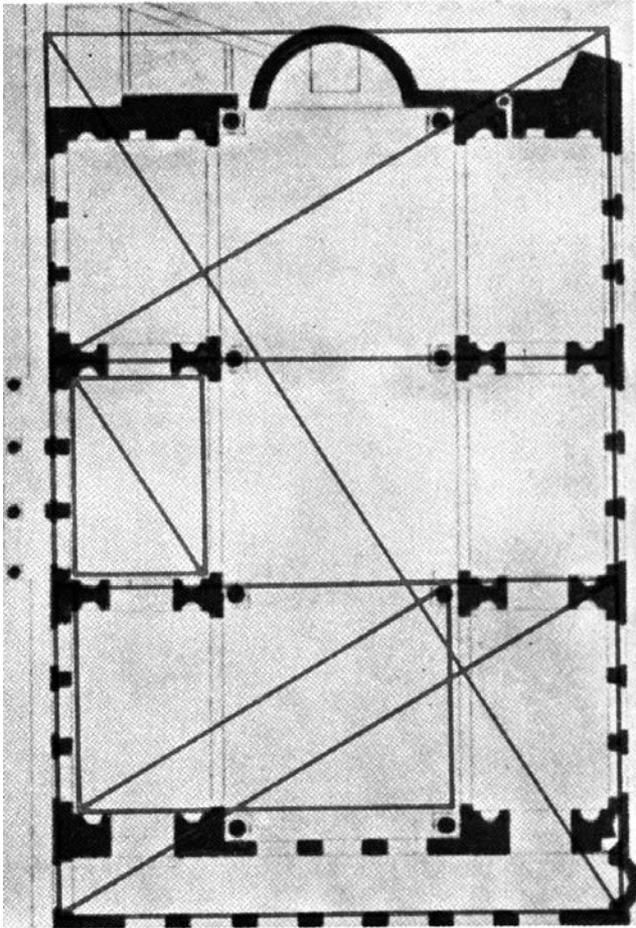




VIA DEL IMPERO



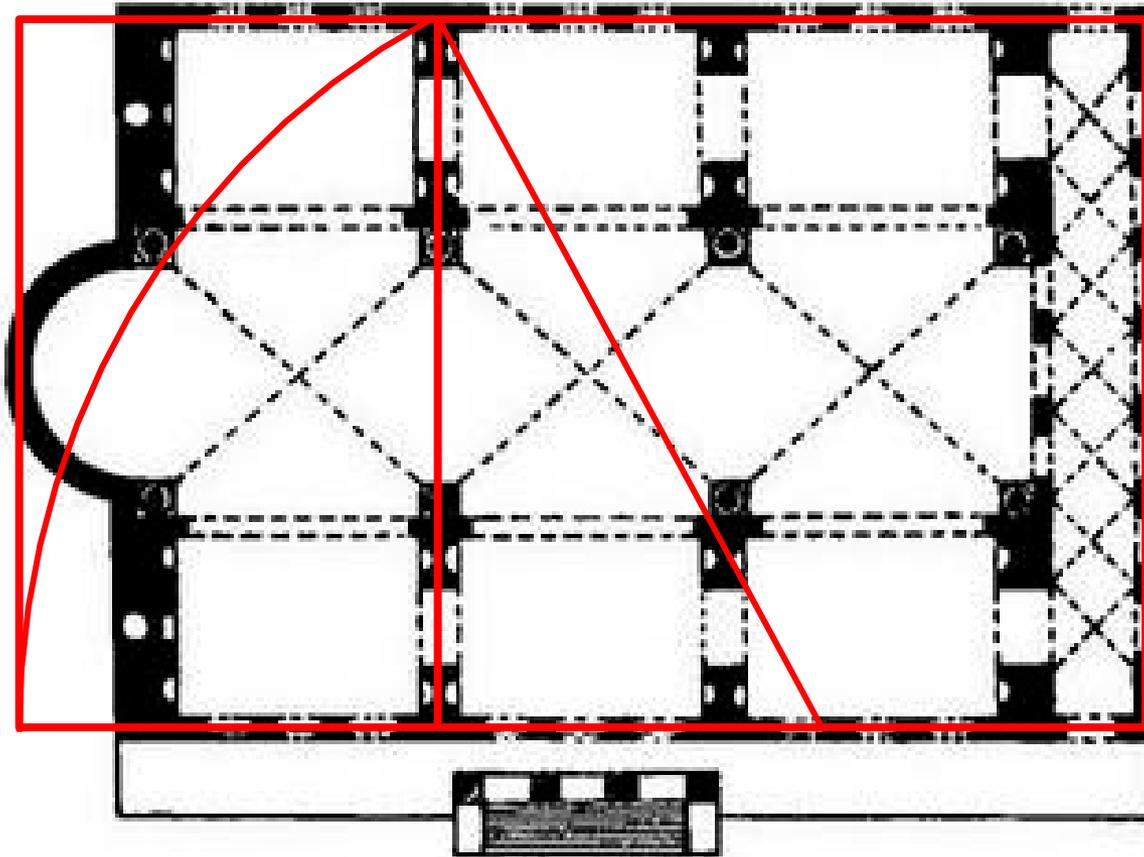
Basílica de Majencio



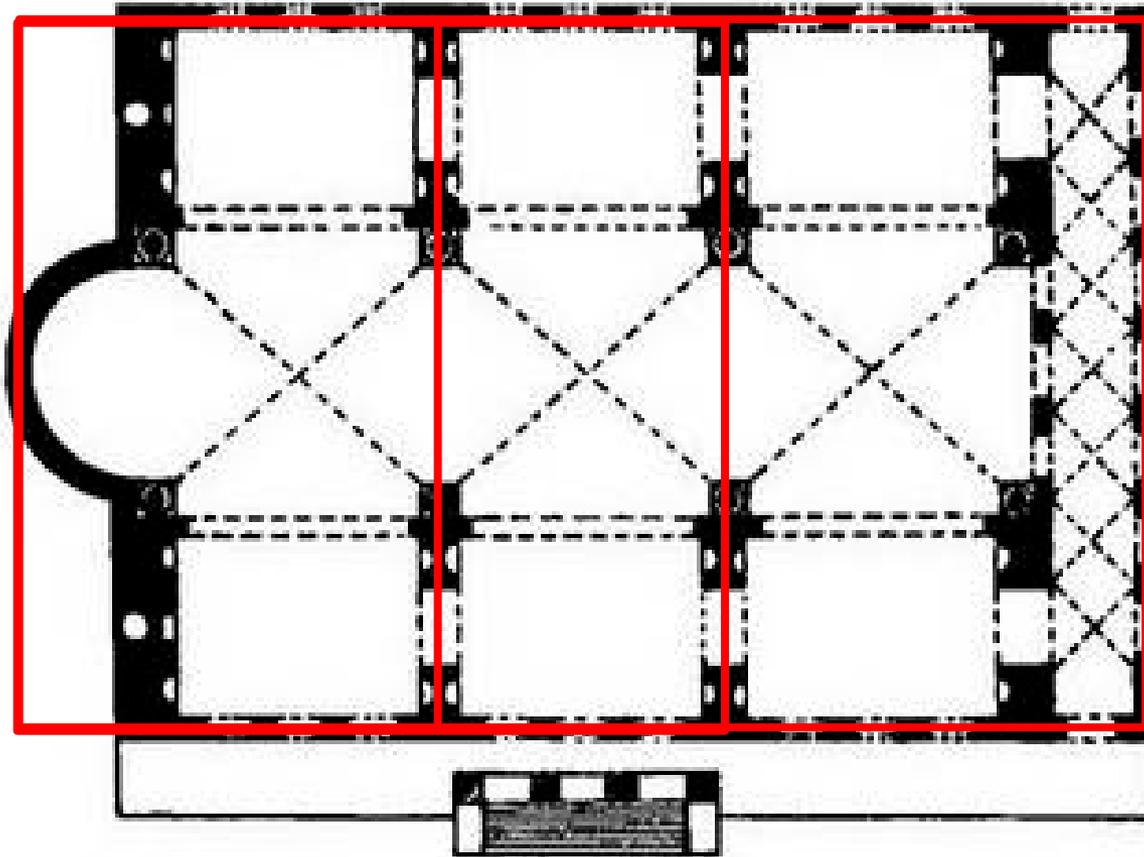
La Basílica se encuentra dividida transversalmente por dos líneas de pilares, correspondientes a la aplicación del algoritmo R1 al rectángulo de la planta. Estos pilares marcan también una división longitudinal en tres naves, número recurrente en el Danteum.

Todos los espacios principales son rectángulos áureos.

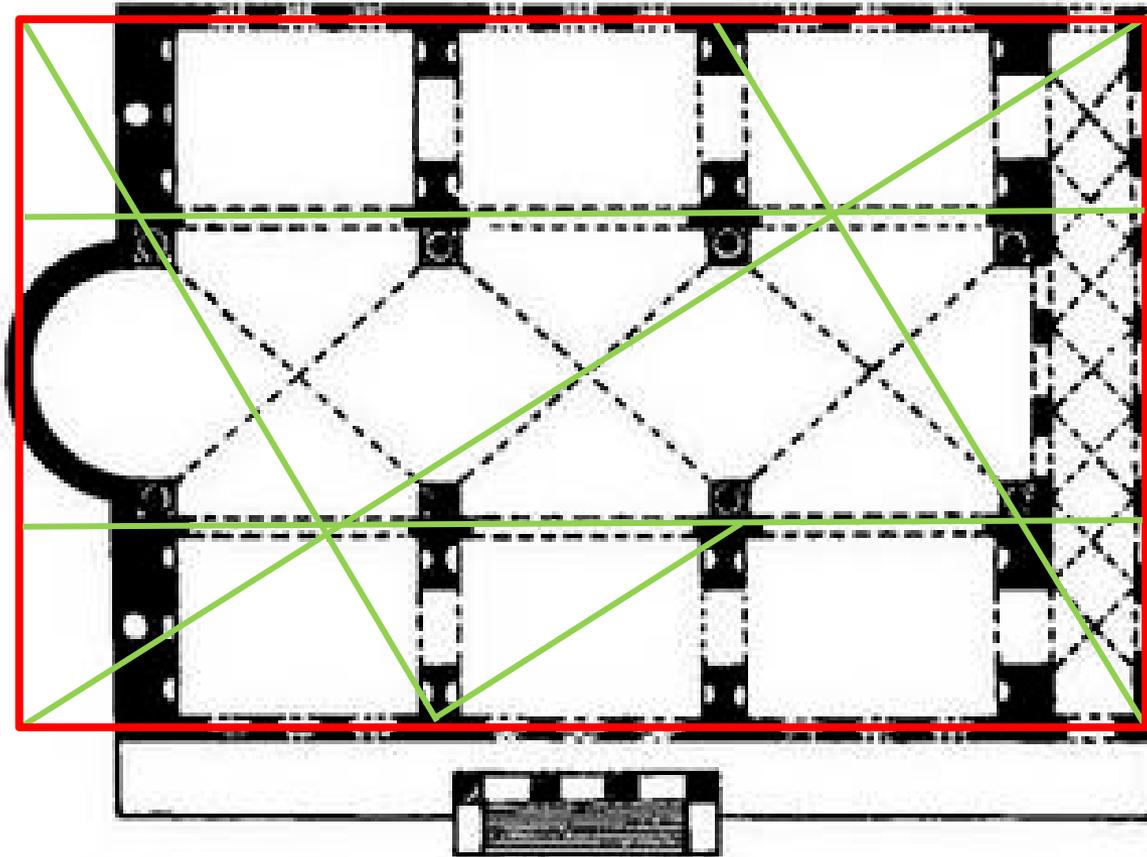
Basílica de Majencio



Basílica de Majencio

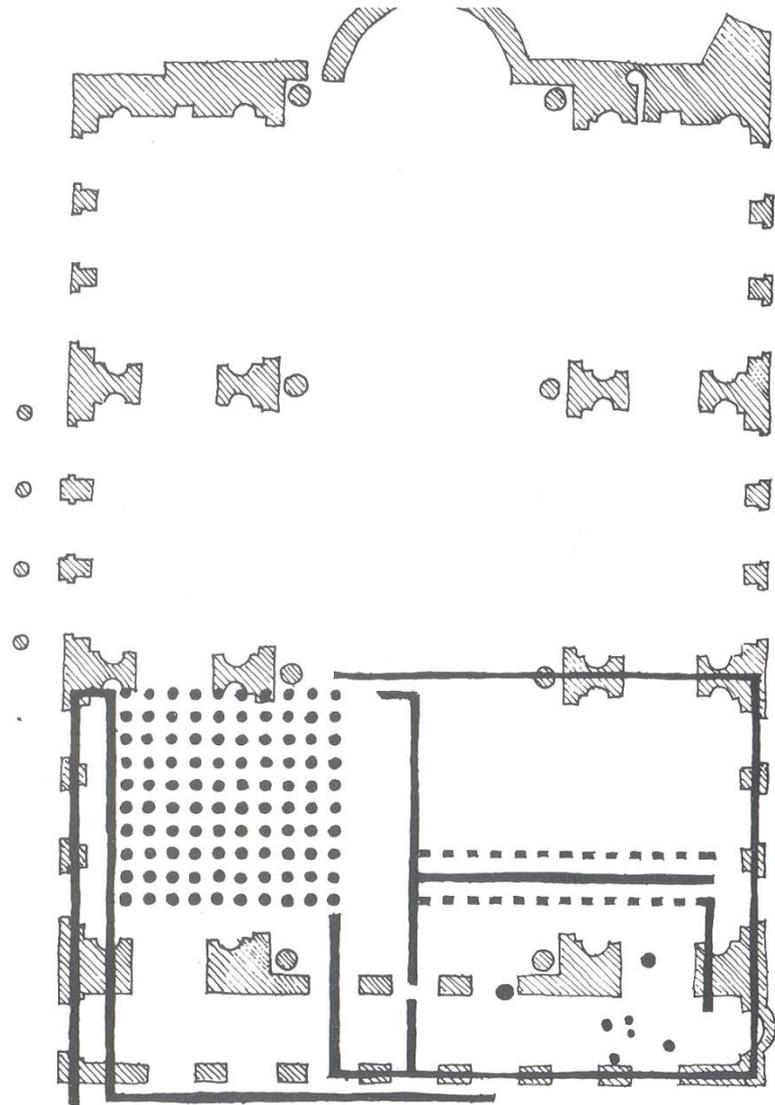


Basílica de Majencio

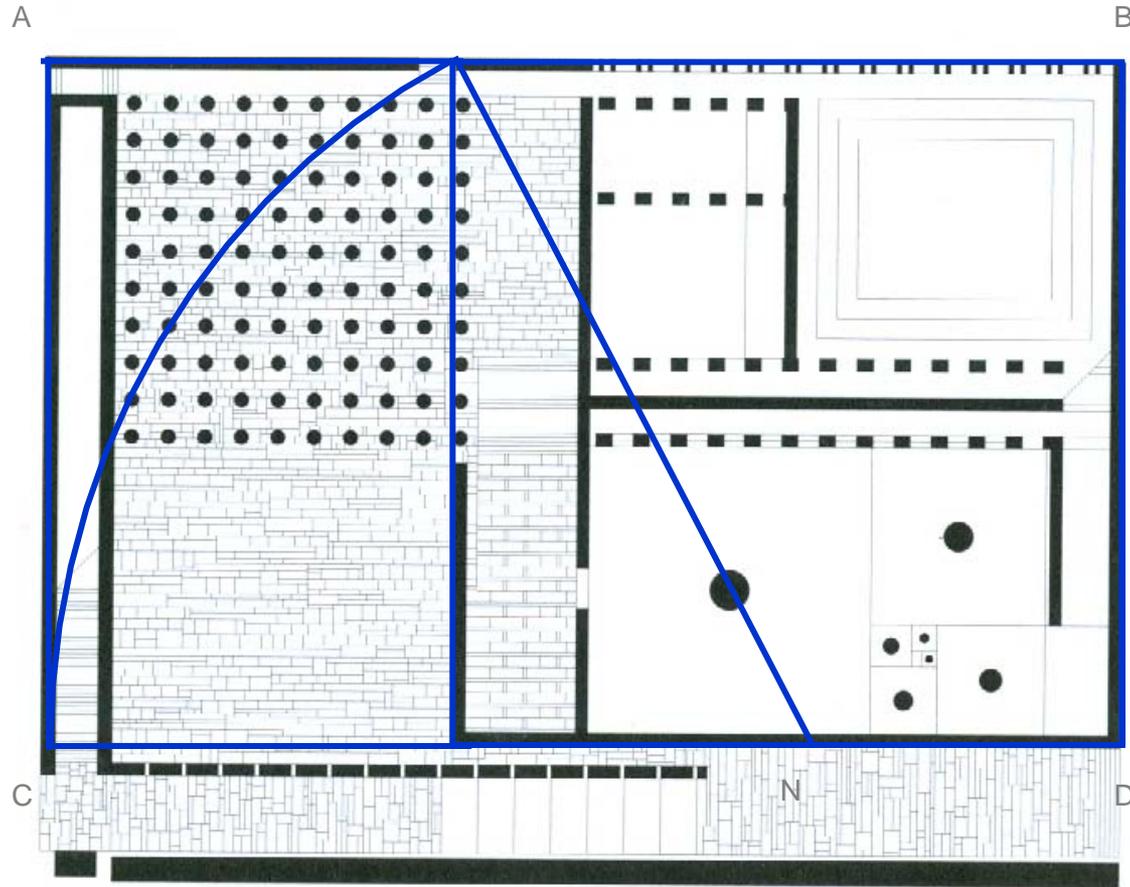


DANTEUM

La planta del Danteum es un rectángulo áureo, cuyas dimensiones derivan de la sustracción del cuadrado mayor posible del rectángulo áureo correspondiente a la planta de la Basílica Majencio.



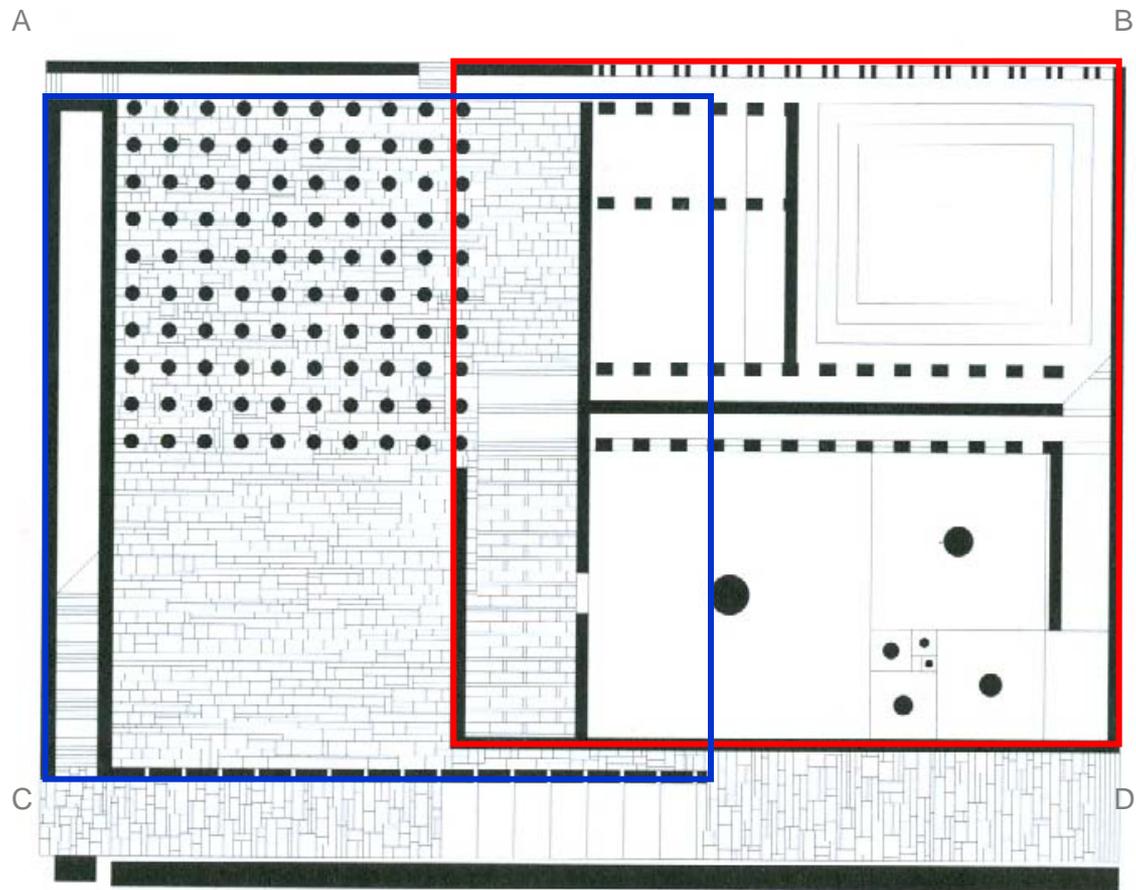
DANTEUM



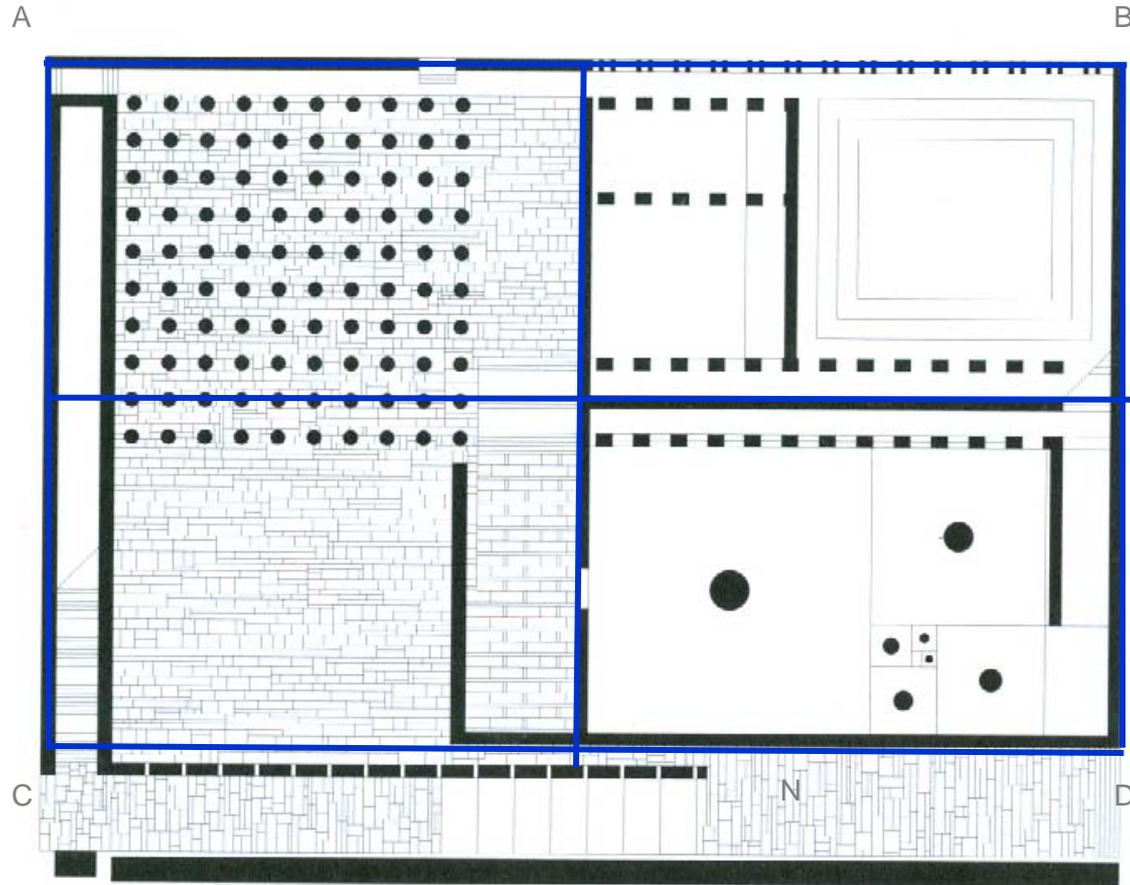
DANTEUM

Al aplicar el algoritmo R1 a cada uno de los lados posibles del rectángulo áureo correspondiente a la planta, se obtienen los dos cuadrados sobre los lados menores del rectángulo; que se desplazan con el fin de conseguir el paso que permita iniciar el recorrido, donde se sitúa la escalera de 7 escalones.

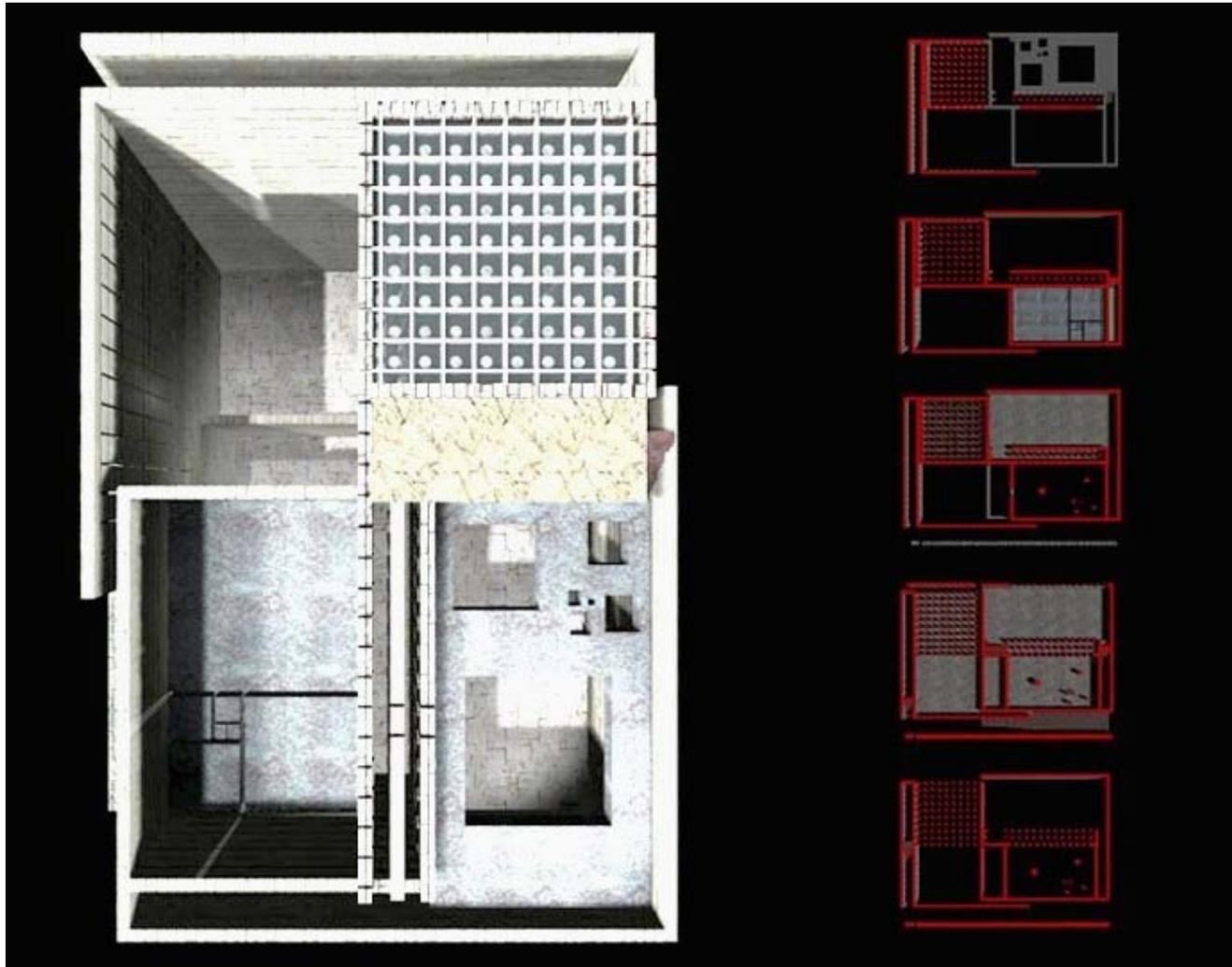
El rectángulo áureo de la planta del Danteum se divide en cuatro rectángulos iguales, rectángulos que también son áureos, puesto que la proporción es invariante por semejanza, en este caso de razón $\frac{1}{2}$.



DANTEUM



DANTEUM



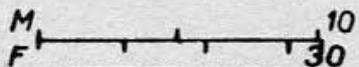
EL BOSQUE OSCURO

El viaje a través del edificio, comienza, al igual que en el poema de Dante, con el paso hacia la oscuridad, hacia las profundidades.

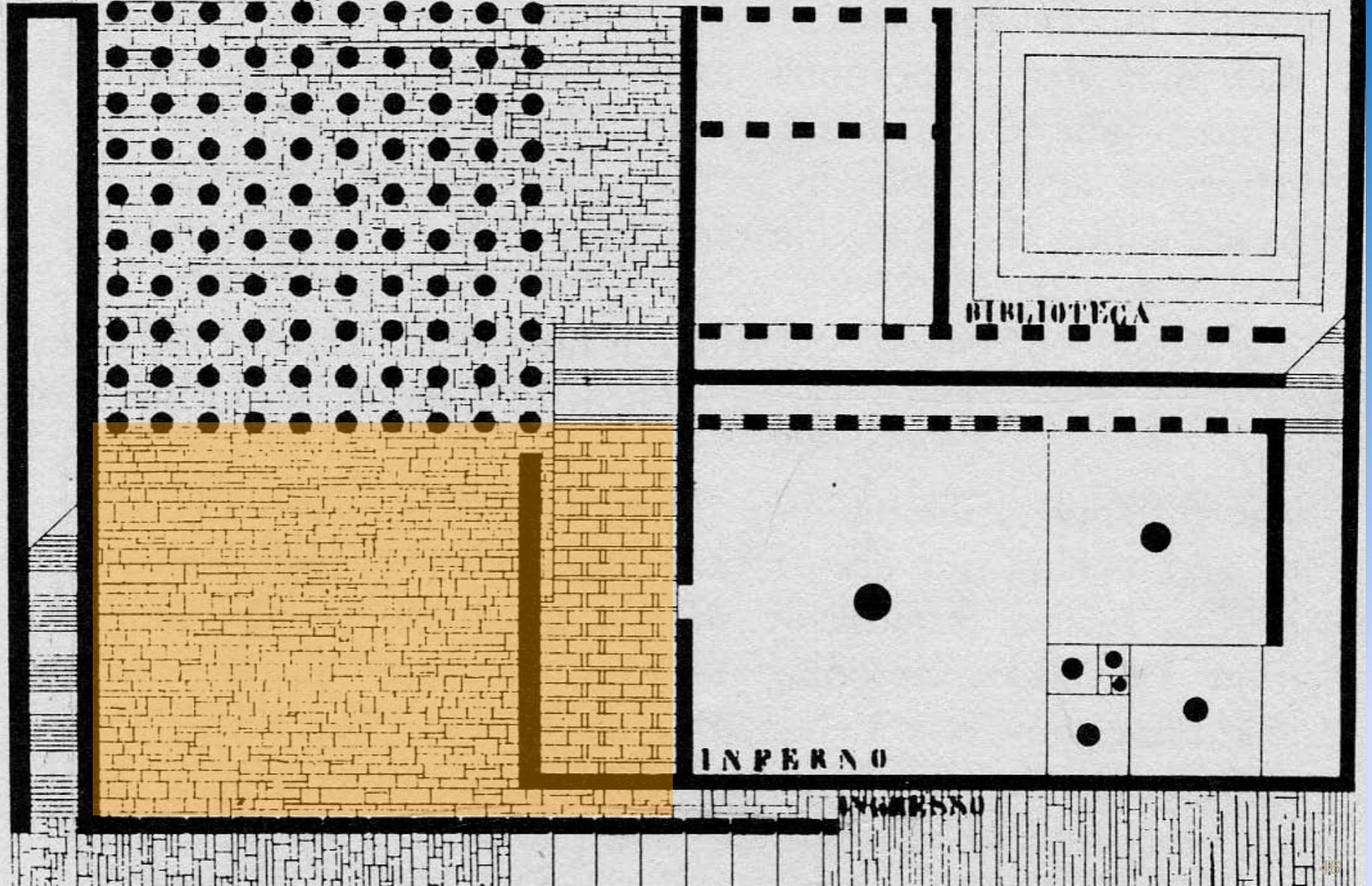
El primer encuentro entre Dante y Virgilio, su guía en este largo viaje, se produce en un bosque en el que Dante está perdido. Es desde allí, desde donde comenzarán su travesía

El bosque se representa mediante una densa red de columnas, como un frondoso bosque.

M
F



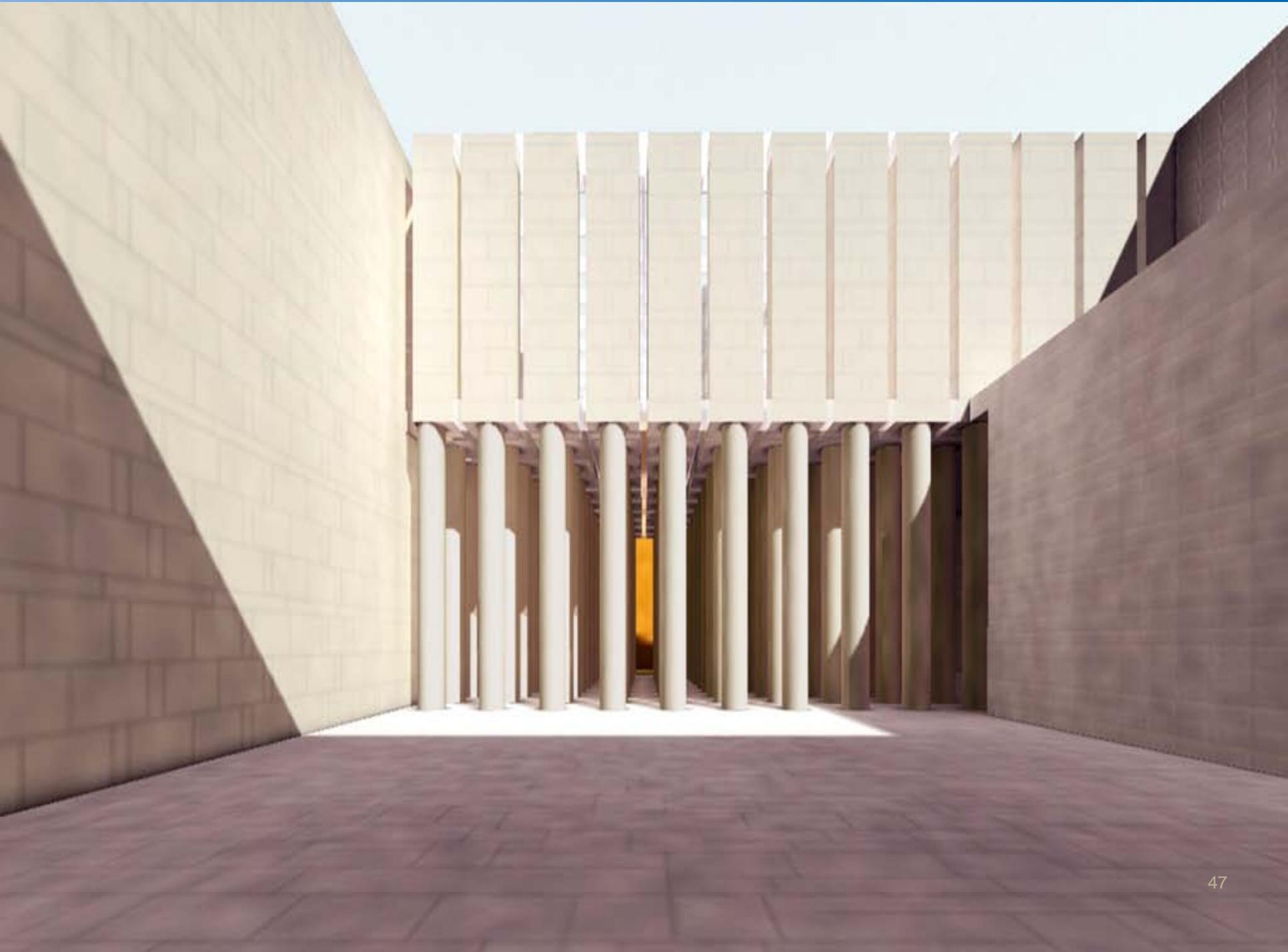
10
30



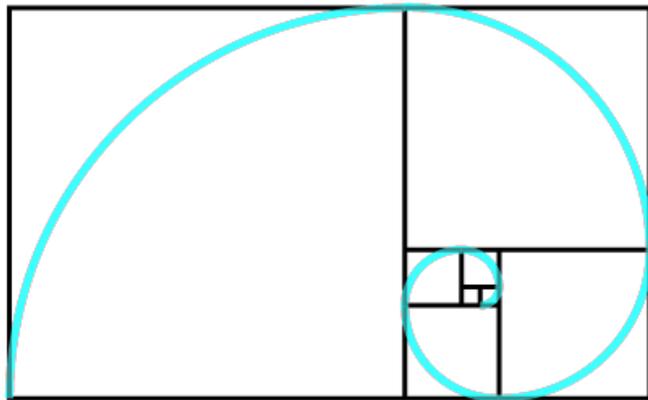
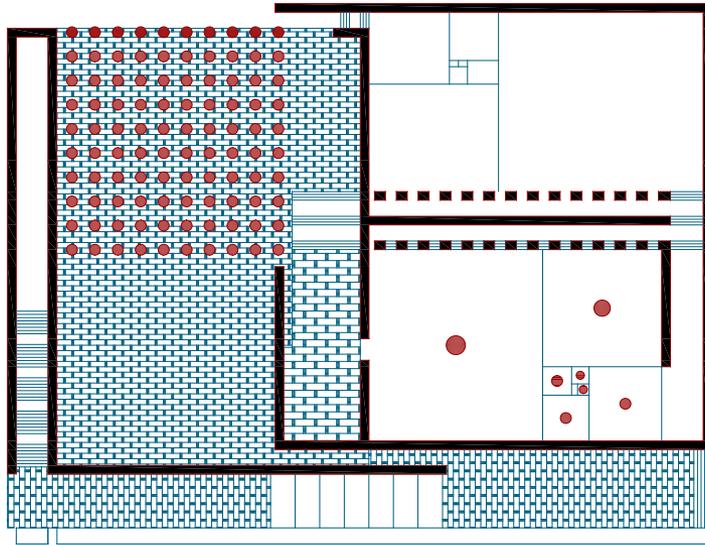
BIBLIOTECA

INTERNO

INGRESSO



Sala del Infierno

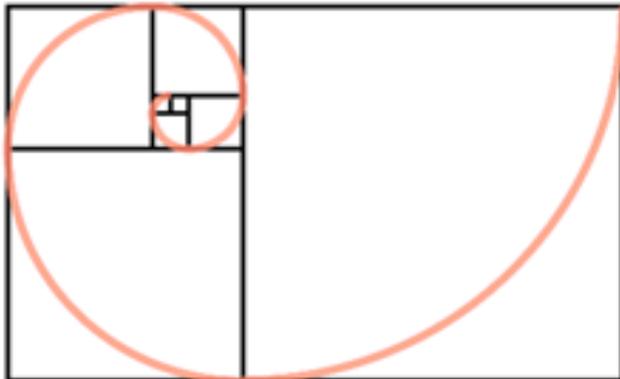
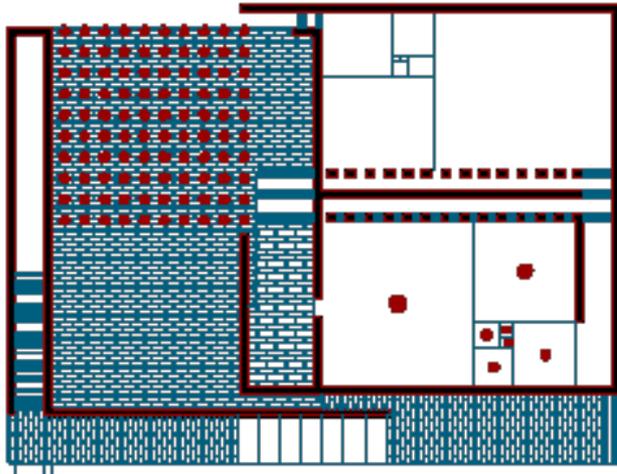


La sala del Infierno, se divide armónicamente aplicando el proceso iterativo R1 de restarle un cuadrado al rectángulo áureo, hasta el orden 7, en representación los siete vicios capitales en contraposición de las 7 virtudes: 3 teologales y 4 cardinales, y los 7 días de la Creación.

En el centro de cada uno de los cuadrados se sitúa una columna, cada una de estas 7 columnas tienen un espesor proporcional al peso que soportan.

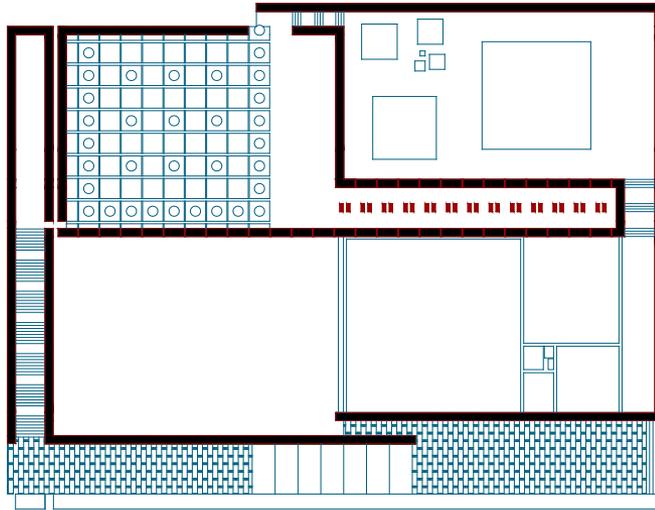
Los lados de los cuadrados determinan una espiral.

Sala del Purgatorio



La sala del Purgatorio obedece a la misma idea planteada en el Infierno, con la división del rectángulo áureo de la planta en 7 rectángulos áureos pero en dirección opuesta, para seguir el itinerario ascendente que debe recorrer el visitante. (Rectángulo superior derecho)

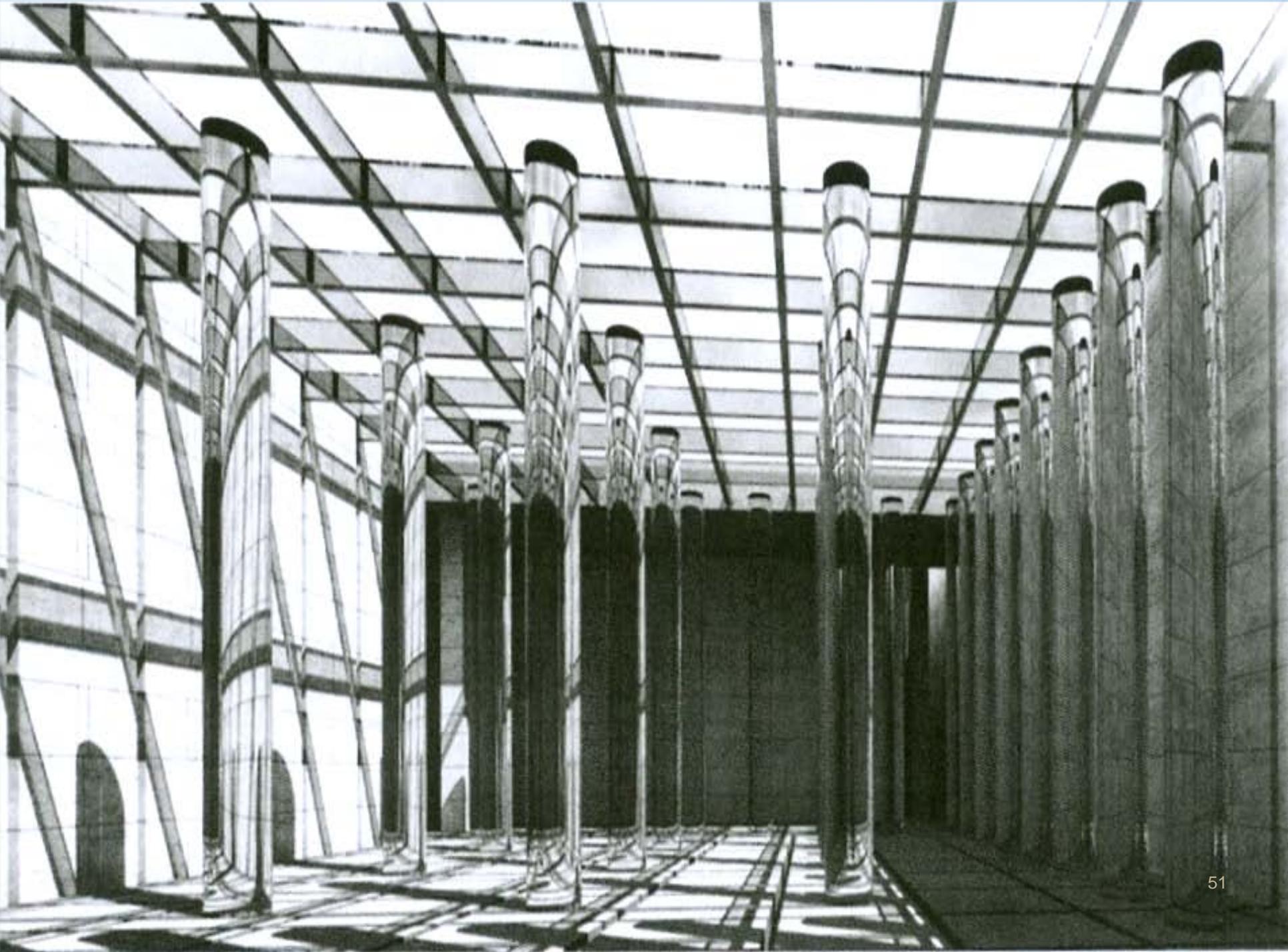
Sala del Paraíso



La sala del Paraíso es un espacio abierto con una retícula de columnas de cristal ocupando el cuadrado asociado al rectángulo áureo.



Hay un acceso al Paraíso directo desde la calle, que se supone destinado a los Inocentes.



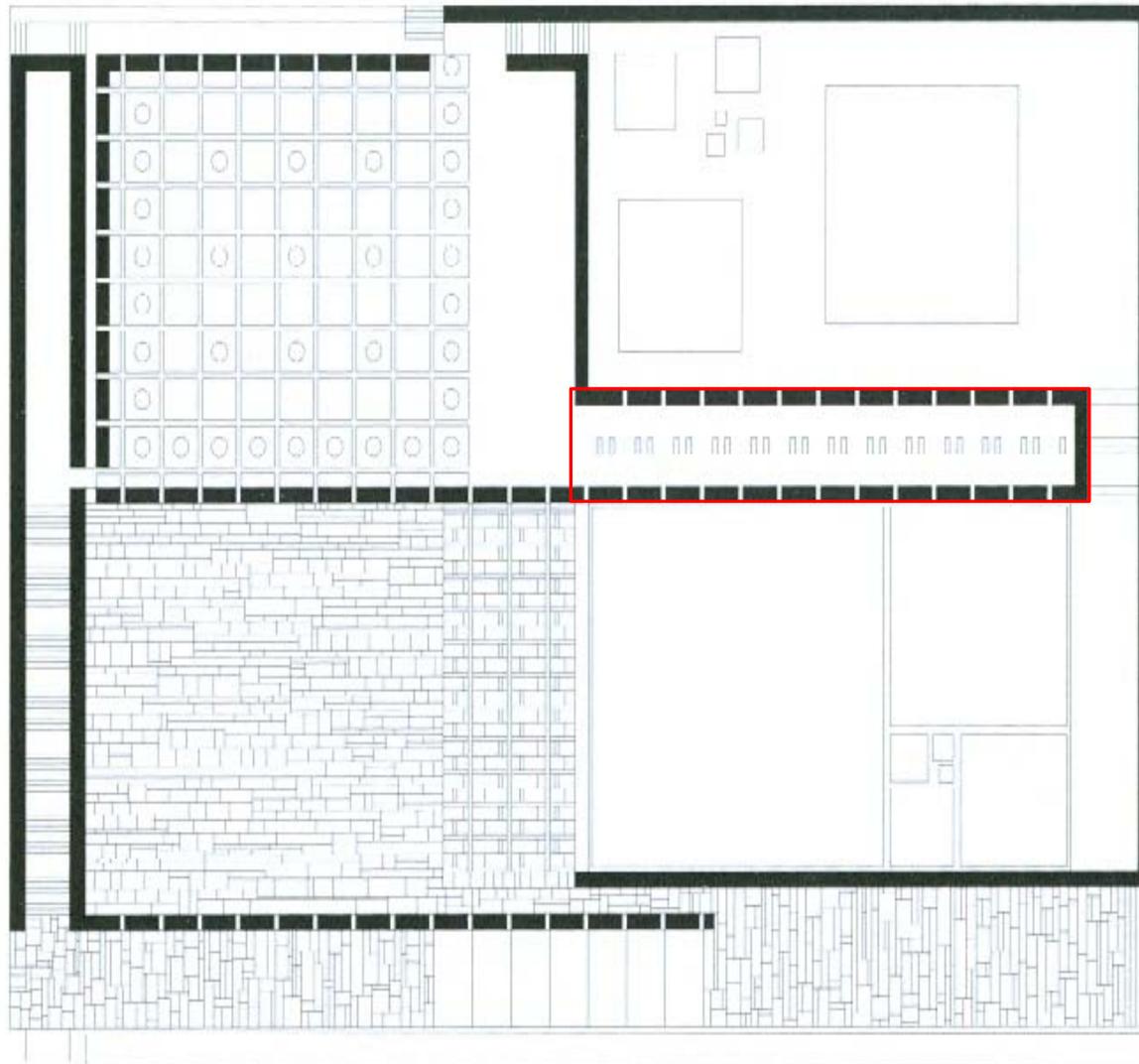
SALA DEL IMPERIO

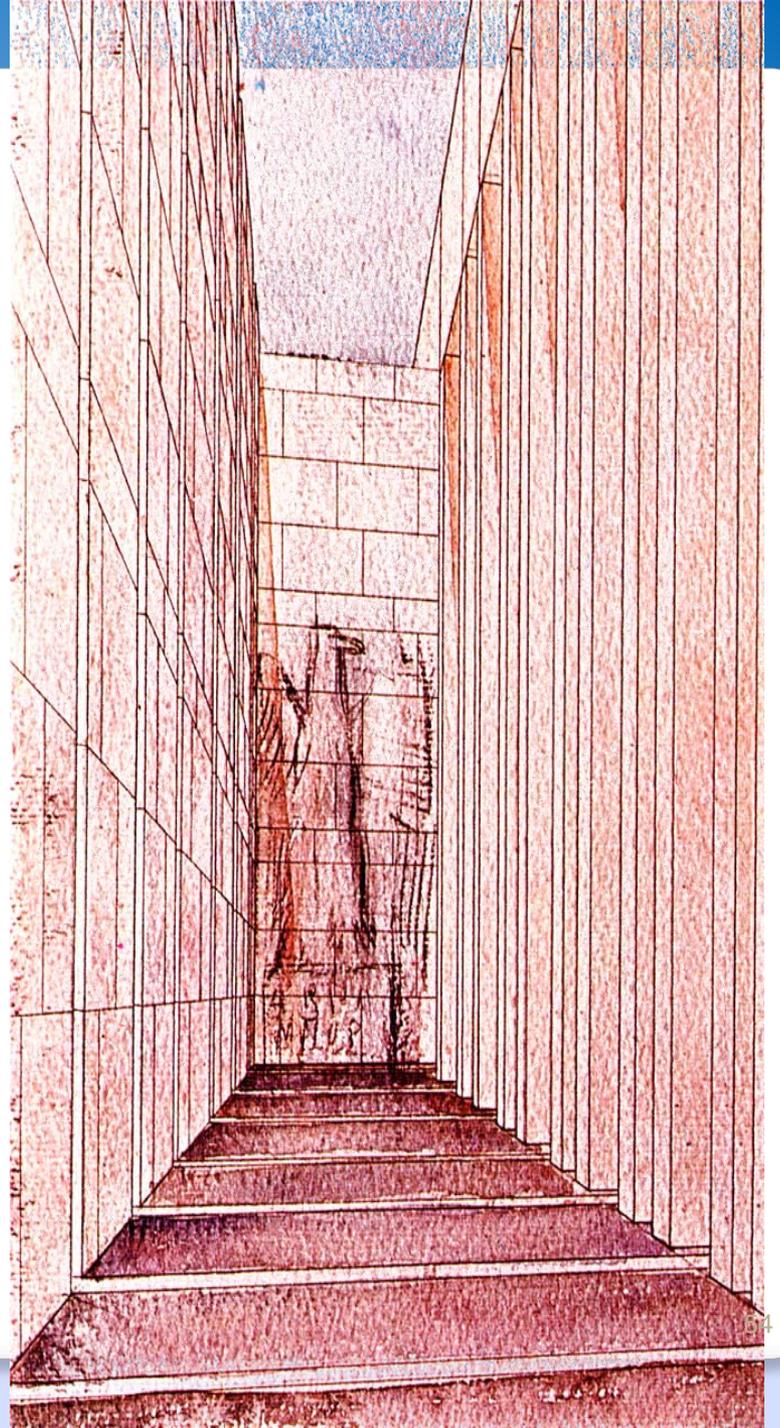
Este espacio no tiene equivalente en los versos de Dante. La sala es un añadido al recorrido dantesco para relacionarlo con la ideología fascista italiana en la que se concibió el edificio.

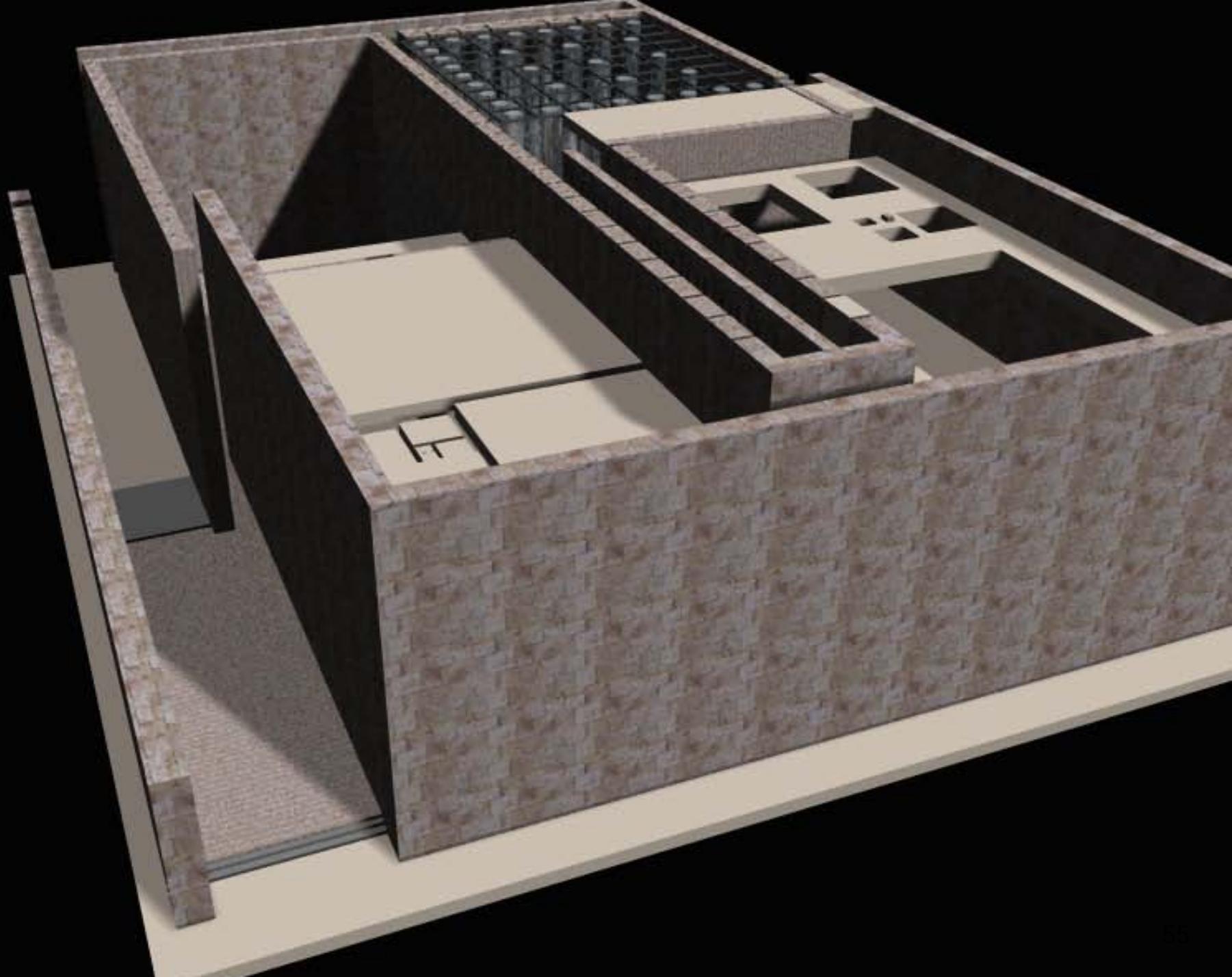
La sala se conforma como un rectángulo jalonado por columnas monumentales en cuyo extremo se representa el águila, símbolo del imperio italiano y de la ideología promulgada por Mussolini.

Curioso es, sin embargo, que se trata de una sala ciega, sin salida.

SALA DEL IMPERIO







A pesar de que el proyecto del *Danteum* nunca se construyó, figura como una de las ideas más sutiles y complejas que se concibieron en el Movimiento Moderno, su planteamiento intelectual surge como una posibilidad para refundir lo antiguo y lo moderno.

MUCHAS GRACIAS

Bibliografía

- [1] APARICIO GUISTADO, J. *Giuseppe Terragni. El Danteum*. Editorial Rueda, Madrid, 2004.
- [2] BLANCO MARTÍN, M.F.& NIETO, E. *Morphological Interpretations of the golden rectangle*. ISAMA. First Interdisciplinary Conference of the International Society of The Arts, Mathematics and Architecture. pp 53-60, San Sebastián, Junio 1999. ISBN 84-93069-0-7.
- [3] BLANCO MARTÍN, M.F.& NIETO, E. *Matemática y Diseño: el rectángulo áureo*. Actas del II Congreso Nacional de la Sociedad de Estudios Morfológicos de Argentina- SEMA, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, Octubre 1999.
- [4] BLANCO MARTÍN, M.F.& NIETO, E. *Rectángulos, Cuadrados, Orden y Belleza*. Proceeding 4º Congreso Nacional y 1º Encuentro Internacional de EGRAFÍA. Rosario, Argentina. Octubre 2004.
- [5] BLANCO MARTÍN, M.F.& NIETO, E. "New ways in symmetry". Bridges London, 2006. pp 491-496, London, 2006. ISBN: 0-9665201-7-3.
- [6] BLANCO MARTÍN, M.F.& NIETO, E. *Forma y Simetría: una relación vigente*
• ISIS-SEMA, pp 106-109, Buenos Aires, 2007. ISSN: 1447-607X.
- [7] DANTE ALIGHIERI, *La divina Comedia*
- [8] GHYKA, M.: *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes*. Editorial Poseidón.
- [9] GHYKA, M.: *El número de oro*. Editorial Poseidón. 1978.
- [10] HUNTLEY: *The Divine Proportion*. Editorial Dover, 1970
- [11] KAPPRAFF, J.: *Connections* . Editorial McGraw Hill, 2002.
- [12] MONTANELLI, I.: *Dante y su siglo*, Ediciones G.P., Barcelona 1969.
- [13] SCHUMACHER, Thomas L.: *The Danteum : a study in the architecture of literature*. Princeton Architectural Press, 1975.
- [14] TERRAGNI, G.: *Manifiestos, memorias, borradores y polémica / Giuseppe Terragni ; prólogo de José Quetglas ; [traducción de Pere Vegé]*. Murcia : Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos de Murcia, 1982.