LAS GEOMETRÍAS NO EUCLÍDEAS Y LA COMPRENSIÓN DEL UNIVERSO

Manuel de León
Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT)
Consejo Superior de Investigaciones Científicas
Real Academia de Ciencias
International Mathematical Union

MATEMÁTICAS EN ACCIÓN 2012
Universidad de Cantabria

Las matemáticas y la comprensión del universo

Algunos comentarios previos

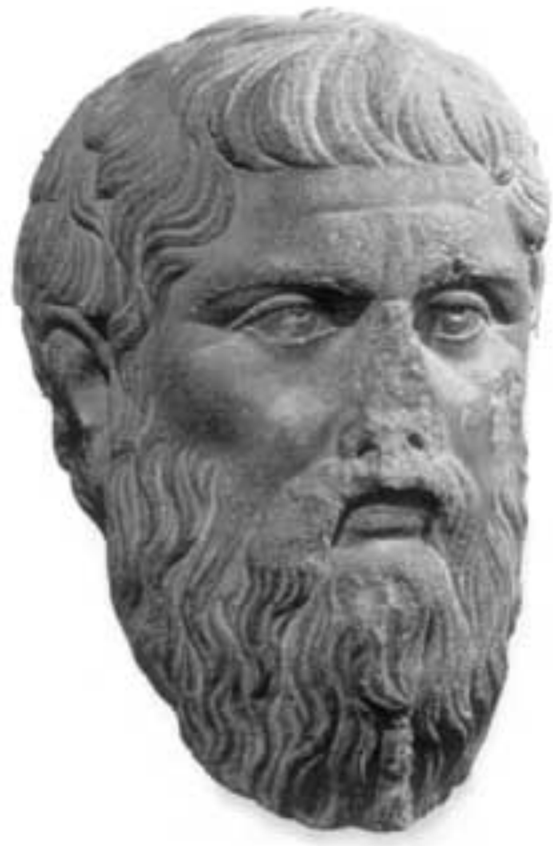
¿Qué son las Matemáticas y para qué sirven?

Matemáticas viene del griego

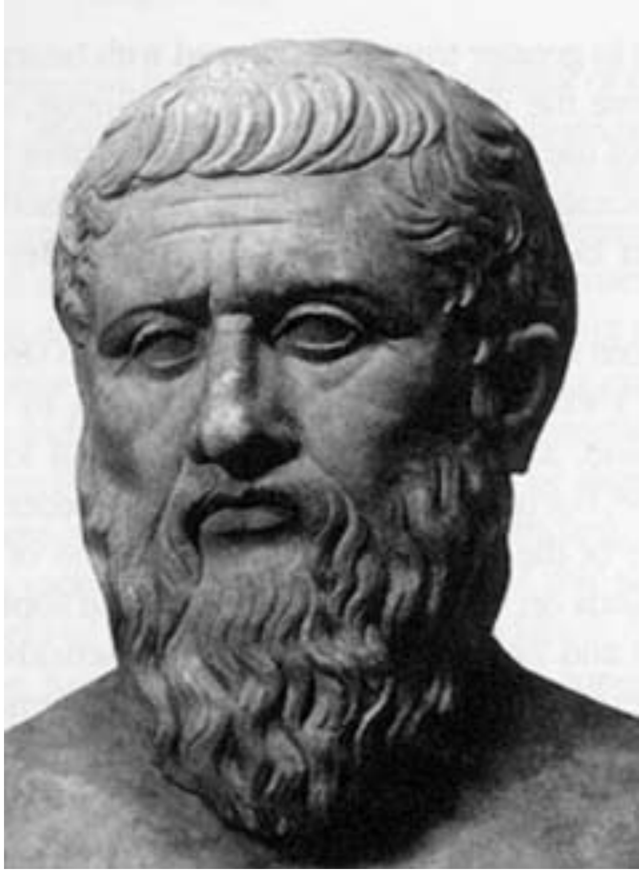
- ***μάθημα, máthema: ciencia, conocimiento, aprendizaje,***
- ***μαθηματικός, mathematikós: el que aprende, aprendiz***
- Lo que puede aprenderse
- Lo que puede enseñarse

La Academia de Platón

- En la entrada a la Academia de Platón, situada en los jardines de Academos, colgaba un letrero que advertía: "No entre aquí nadie ignorante de la Geometría" .
- Platón creía que el estudio de las matemáticas y la filosofía proporcionaban el entrenamiento más adecuado para aquellos que en el futuro iban a desempeñar puestos de responsabilidad en el estado, como se recoge en la obra *República*, libro en el que debate sobre aritmética, geometría, astronomía, música. ..



- En el *Timeo* incluye un debate sobre los cinco sólidos regulares, también llamados platónicos en su honor.
- En el libro VII de la República, Socrátes debate con Glaucón acerca de los estudios que debe emprender el futuro hombre de estado. Sobre el cálculo dice Socrátes: "¿y no has observado que los calculadores , por naturaleza son rápidos, por así decirlo, en todos los estudios, en tanto que los lentos, cuando son educados y ejercitados en este estudio, aunque no 'obtengan ningún otro provecho, mejoran, al menos, volviéndose más rápidos que antes? -Así es. -y no hallarás fácilmente, según pienso, muchos estudios que requieran más esfuerzo para aprender y practicar. -No, en efecto. -Por todos estos motivos, no hay que descuidar este estudio, sino que los mejores deben educar sus naturalezas en él."

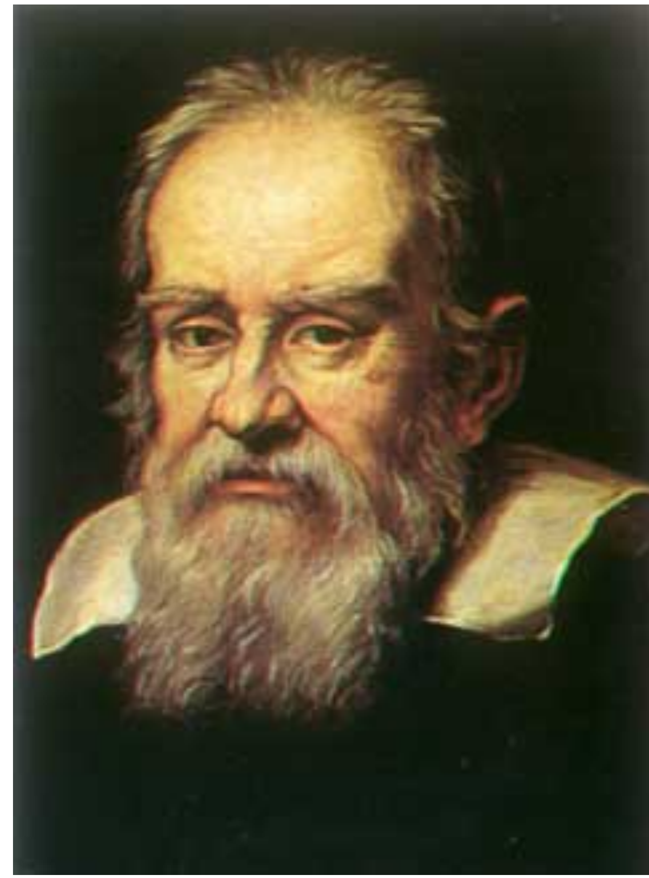


Más adelante, refiriéndose a las dificultades de la geometría de los sólidos, manifiesta: "En efecto, y son dos las causas de ello: la primera es que ningún Estado le dispensa mucha estima y, por ser difícil, se la investiga débilmente; la segunda, que quienes investigan necesitan un supervisor, sin lo cual no podrían descubrir mucho. ..Pero si el Estado íntegro colabora en la supervisión guiándolos con la debida estima, aquéllos se persuadirían, y una investigación continuada y vigorosa llegaría a aclarar cómo es el asunto, puesto que incluso ahora mismo, en que éste es subestimado y mutilado por muchos, inclusive por investigadores que no se dan cuenta de su utilidad, a pesar de todo esto florece vigorosamente en su propio encanto, de modo que no sería asombroso que se hiciera manifiesto."

La matemática es la puerta y la llave de estas ciencias.

Roger Bacon, Opus majus.

La filosofía está escrita en este vasto libro que continuamente se ofrece a nuestros ojos (me refiero al universo), el cual, sin embargo, no se puede entender si no se ha aprendido a comprender su lengua y a conocer el alfabeto en que está escrito. Y está escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguiría vagar por oscuros laberintos.



Galileo Galilei
Il Saggiatori, VI, 232, año 1623

- **Galileo Galilei** (Pisa,1564 -1642), fue astrónomo, filósofo, matemático y físico.
- Pionero de la revolución científica que llevó al nacimiento de la ciencia moderna.
- Mejoró los telescopios y realizó importantes descubrimientos astronómicos.
- Descubre los satélites galileanos: Calixto, Europa, Ganimedes e Io; los anillos de Saturno, las montañas lunares, las manchas solares, etc.
- Echa por tierra la ciencia de Aristóteles (modelo heliocéntrico de Nicolás Copérnico).
- En 2009 se celebró el Año Internacional de la Astronomía para celebrar el primer uso del telescopio por Galileo.
- Leyes de los movimientos de los cuerpos.
- **Ejemplo de matemáticas en contacto con otras ciencias.**

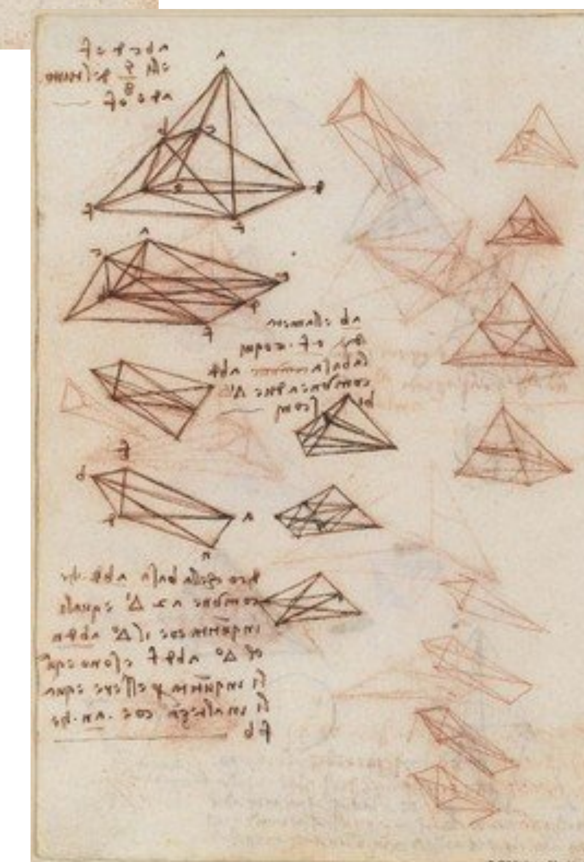
Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, se essa non passa per le matematiche dimostrazioni; e se tu dirai che le scienze, che principiano e finiscono nella mente, abbiano verità, questo non si concede, ma si nega per molte ragioni; e prima, che in tali discorsi mentali non accade esperienza, senza la quale nulla dà di sé certezza.

Trattato della Pittura

LEONARDO DA VINCI

PARTE PRIMA

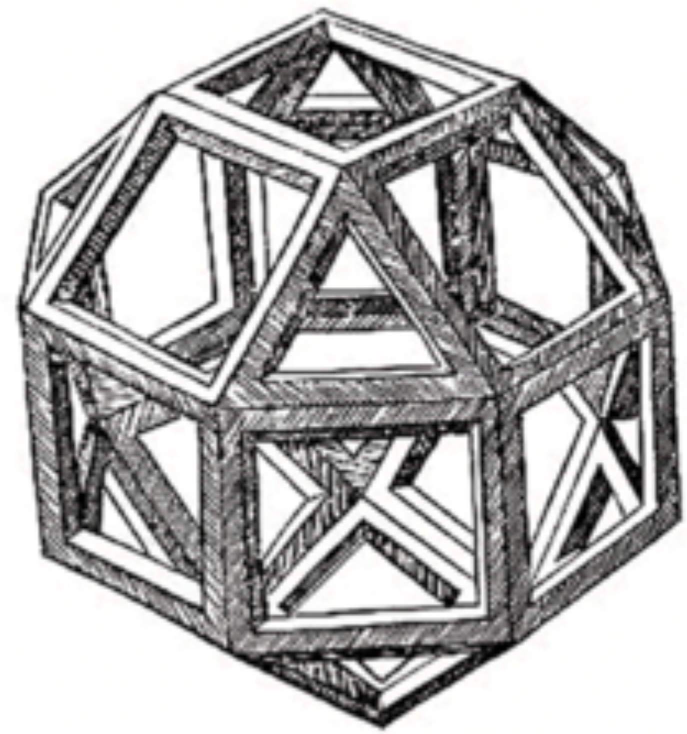
Se la pittura è scienza o no



Leonardo fue un estudioso de las matemáticas

- **Luca Pacioli**, de nombre completo Fray Luca Bartolomeo de Pacioli (Sansepolcro, 1445 - 1517), fue un fraile franciscano y matemático italiano, precursor del cálculo de probabilidades.
- Analizó sistemáticamente el método contable de la partida doble usado por los comerciantes venecianos en su obra **Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita** (Venecia, 1494), que a pesar de su título latino, incluye la primera obra matemática impresa en lengua romance.

- Su obra más divulgada e influyente es **De Divina Proportione,** escrita en Milán entre 1496 y 1498, y que trata también, en su primera parte, de los polígonos y la perspectiva usada por los pintores del Quattrocento (Compendio Divina Proportione); en su segunda, de las ideas arquitectónicas de Vitruvio (Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita); y en su tercera, de los sólidos platónicos o regulares (De quinque corporibus regularibus).
- Para ilustrarlo encargó dibujos a Leonardo da Vinci, que en la época formaba parte de la corte milanesa de Ludovico Sforza (il Moro).



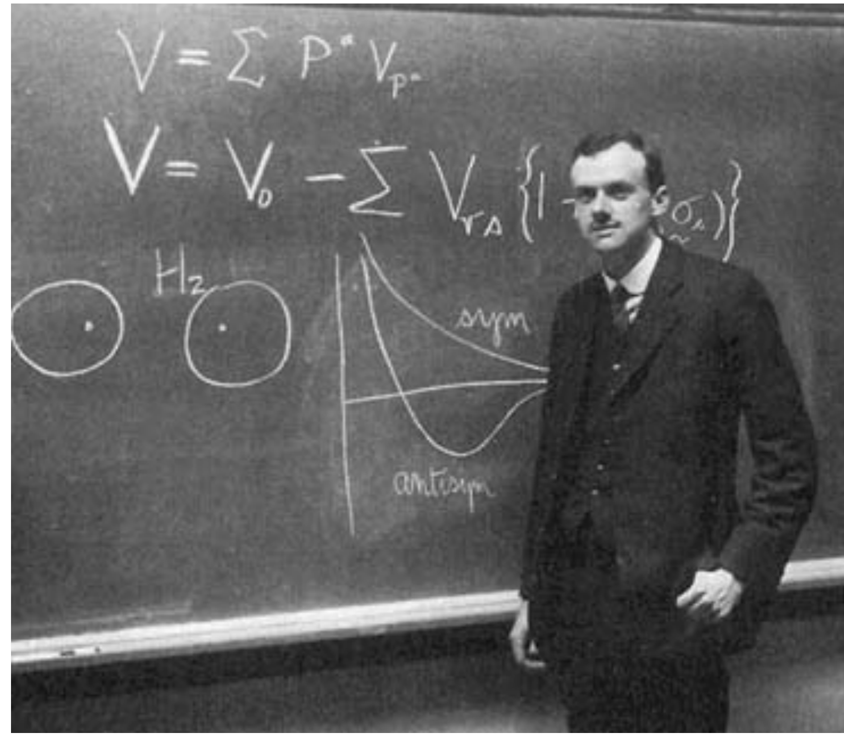
Yo hube de estudiar la política y la guerra para que mis hijos tengan la libertad de estudiar matemáticas y filosofía. Mis hijos deberán estudiar matemáticas y filosofía, geografía, historia natural, arquitectura naval, navegación comercio y agricultura para que sus hijos tengan el derecho de estudiar pintura, poesía, música, arquitectura, escultura, tapices y porcelana.

John Adams, segundo presidente de los Estados Unidos.

“God used beautiful mathematics in creating the world.”

“This result is too beautiful to be false; it is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment.”

Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), Premio Nobel de Física 1933



“If I understand Dirac correctly, his meaning is this: there is no God, and Dirac is his Prophet.”

Wolfgang Pauli, Premio Nobel 1945

¿Aritmética o Geometría?

- **San Isidoro de Sevilla** (Cartagena hacia 556? – Sevilla, 636) fue arzobispo de Sevilla durante más de tres décadas (599-636) y canonizado por la Iglesia católica.
- En las **Etimologías**, Isidoro de Sevilla explica que los antiguos dividieron la Filosofía en tres partes, que según el formato de la Tabla de Tríadas se puede presentar así: Física, Lógica y Ética. Cada una de ellas se puede subdividir a su vez:
  - División de la Física: Geometría/Aritmética/Música
  - División de la Lógica: Gramática/Dialéctica/Retórica
  - División de la Ética: Justicia/Prudencia/Fortaleza/ Templanza

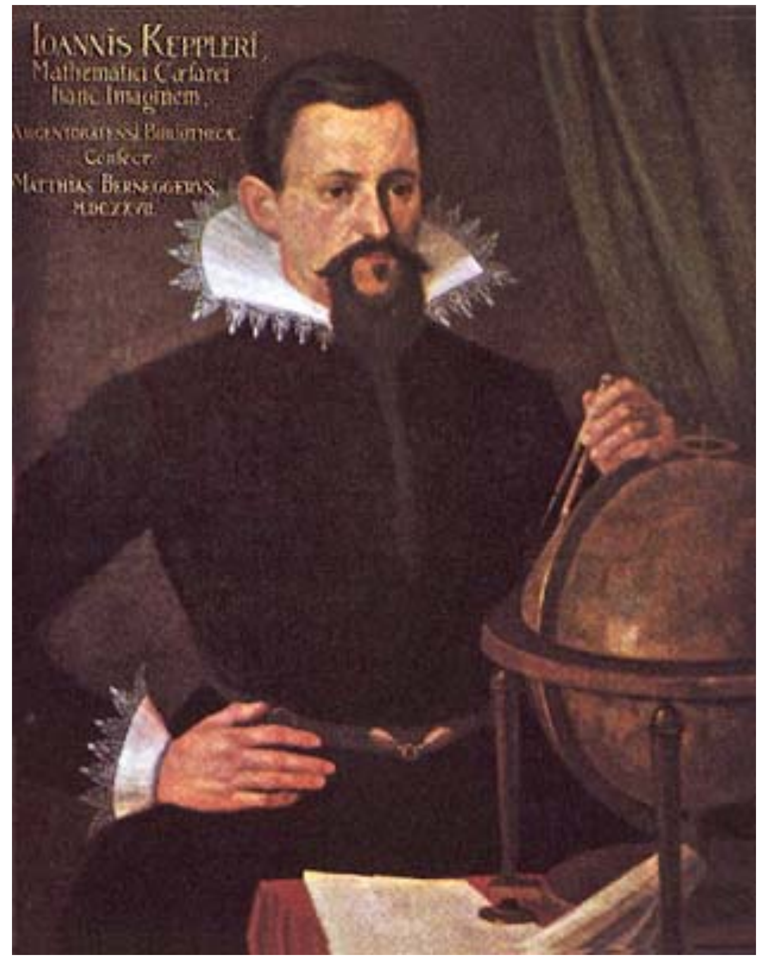
“Quita el número de las cosas y todas se destruirán.”

Dios hace aritmética.

Karl Friedrich Gauss

- **Johann Carl Friedrich Gauss** (Gauß) (30 de abril de 1777, Brunswick – 23 de febrero de 1855, Göttingen), fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.
- Considerado **el príncipe de las matemáticas**, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia.

Johannes Kepler



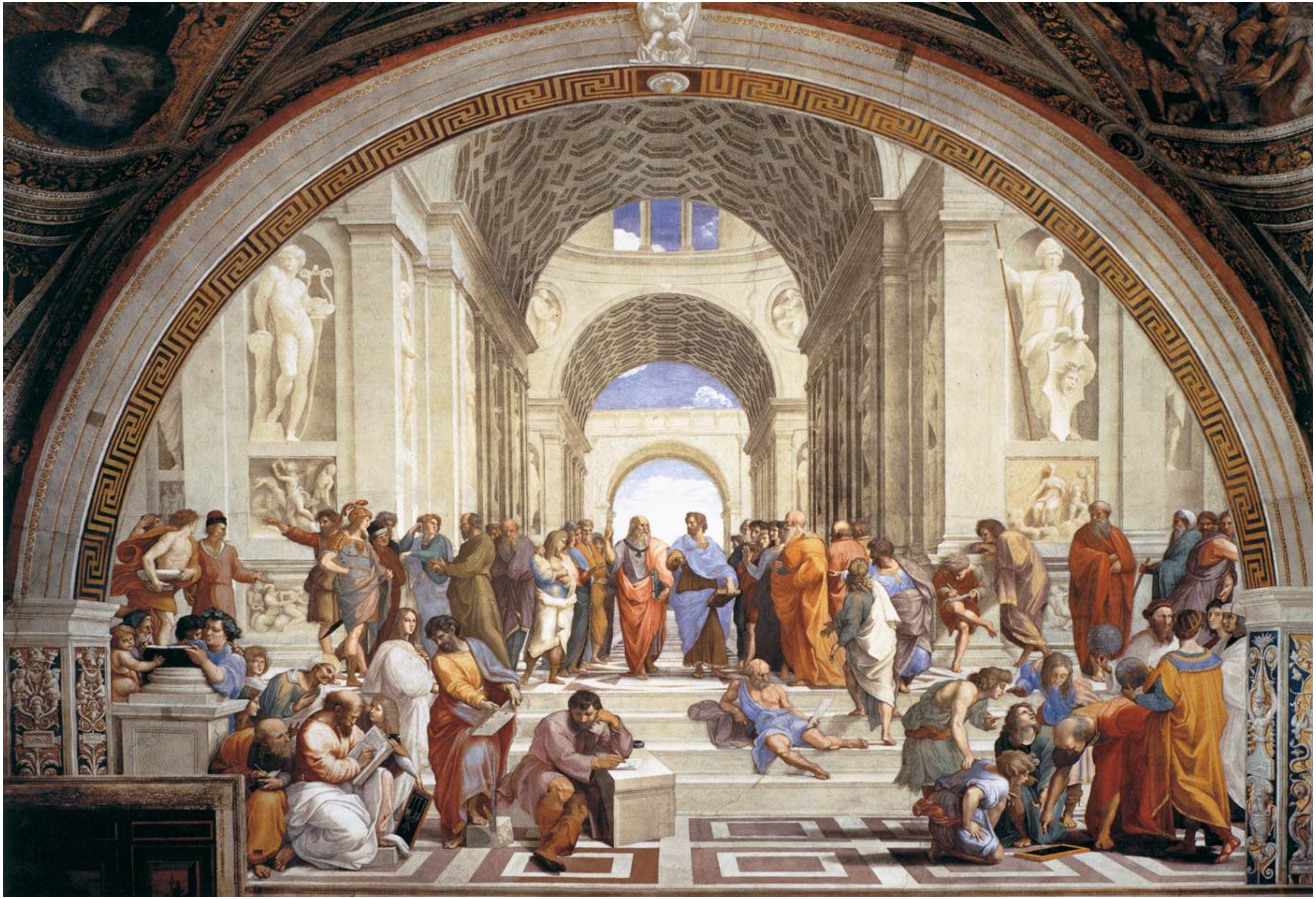
“Donde hay materia,
hay geometría”

- **René Thom** (Montbéliard 21 de septiembre de 1923 – 25 de octubre de 2002).
- Matemático francés fundador de la teoría de las catástrofes.
- Recibió la medalla Fields en 1958.

“Comprender quiere decir, pues, ante todo, geometrizar.”

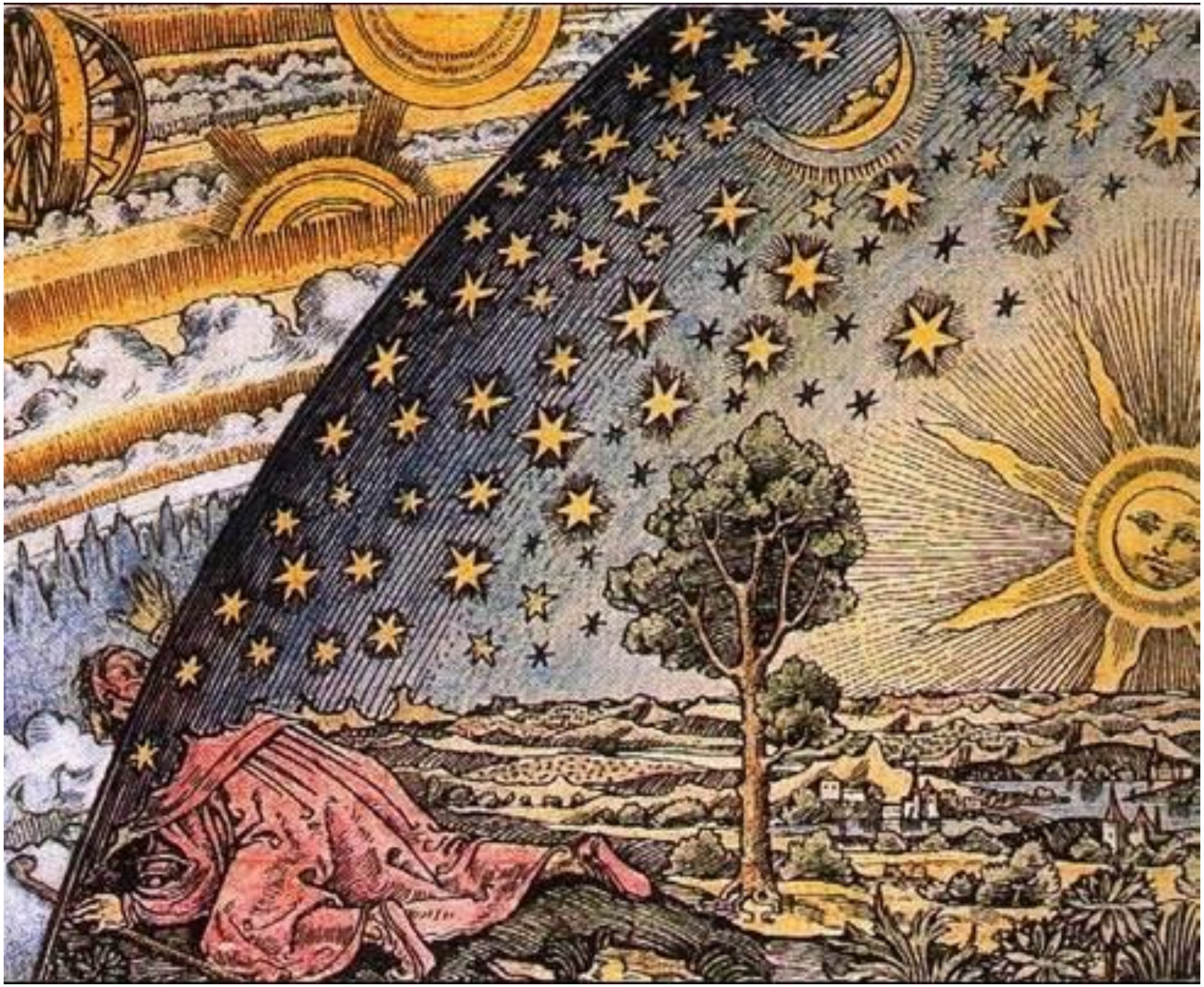
La Academia de Platón

“No entre aquí quien no sepa Geometría”



Las geometrías no euclídeas ofrecen un ejemplo perfecto de cómo:

- Las matemáticas sirven para describir el universo de una manera admirable.
- Las matemáticas más elementales han derivado a otras más sofisticadas para poder seguir desempeñado esa labor de descripción del universo.
- Las matemáticas siguen presentes en el día a día de la sociedad.

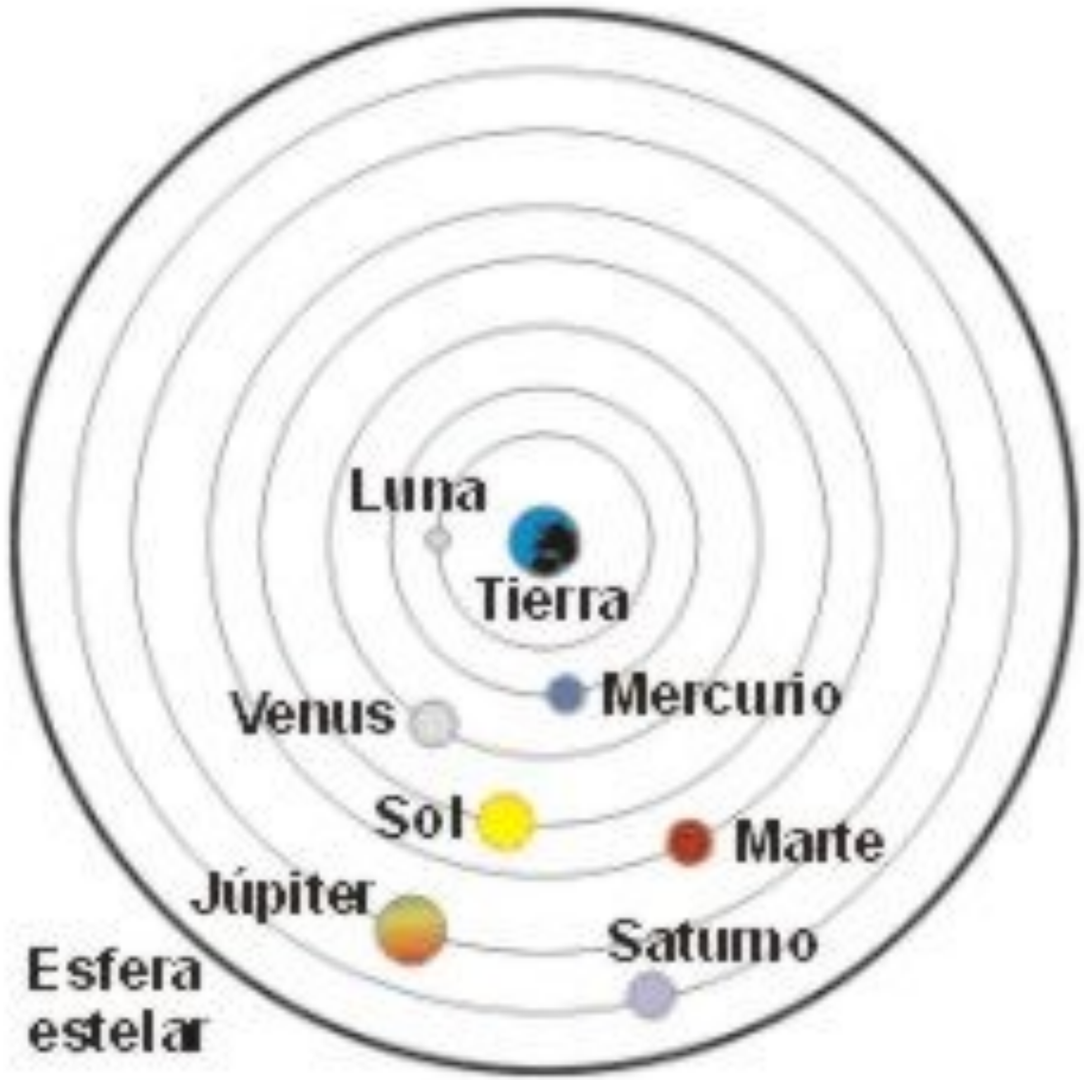


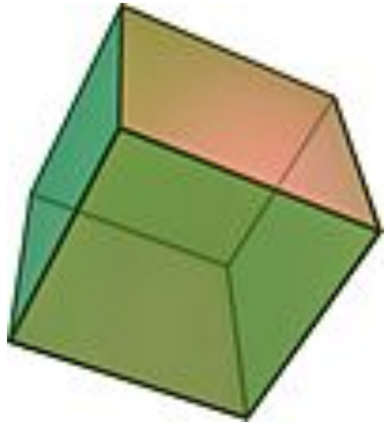
- La imagen es un grabado llamado de Flammarion, que aparece por primera vez en el libro de Camille Flammarion publicado en 1888, L'atmosphère: météorologie populaire, en el capítulo La forme du ciel.
- Se muestra a un hombre (posiblemente un peregrino, por el bastón que porta) observando a través de la atmósfera terrestre como si ésta fuera una cortina que se pudiese apartar para observar el funcionamiento del Universo.
- En el libro de Flammarion, la imagen se acompañaba de una leyenda
  - "Un missionnaire du Moyen Âge raconte qu'il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent . Qu'y a-t-il, alors, dans ce ciel bleu, qui existe certainement, et qui nous voile les étoiles durant le jour ?"


ASIA
AFRICA
MARE INDICVM
MARE PROSADVM

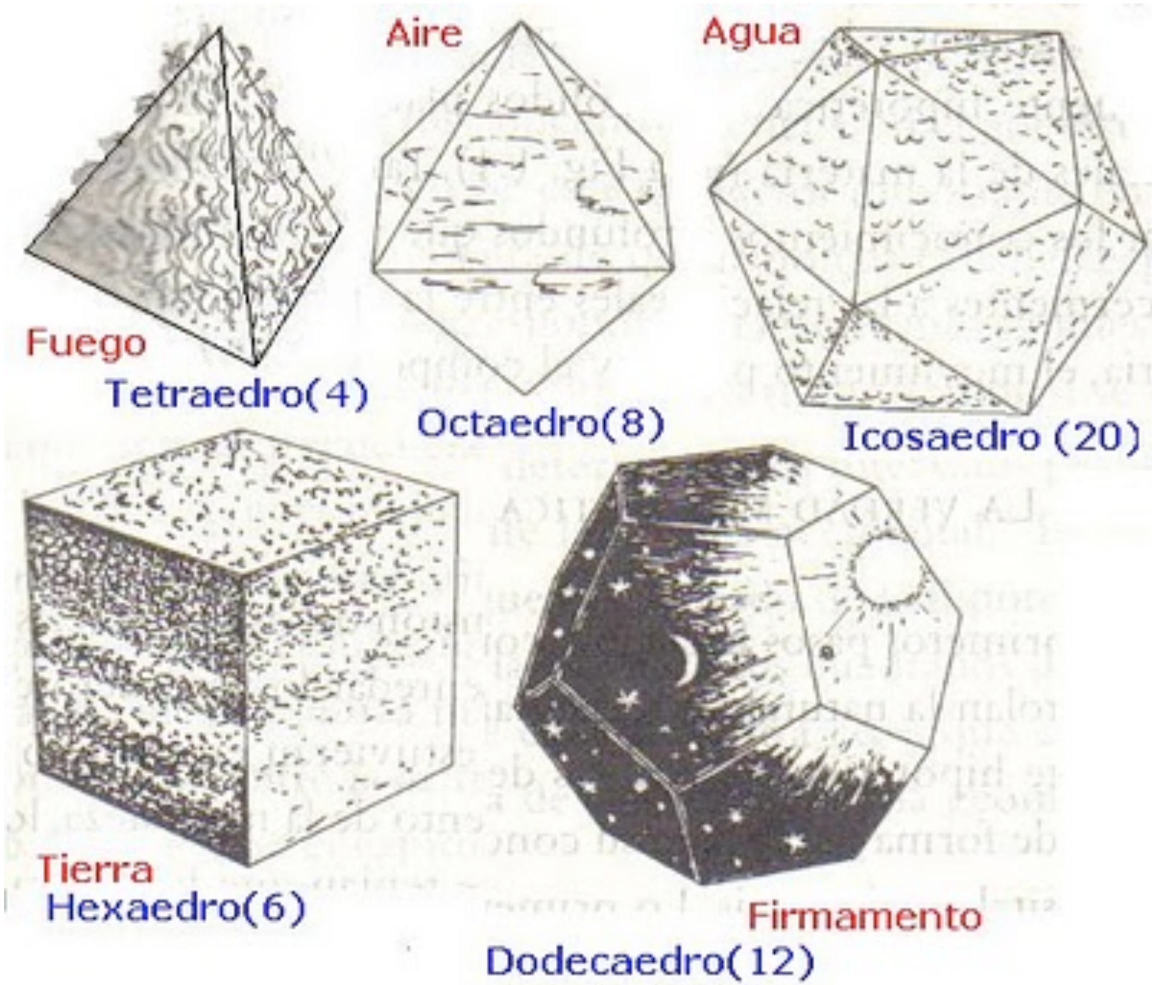
- Tras Tolomeo, no hubo muchos avances hasta el descubrimiento de la brújula; téngase en cuenta que los marinos navegaban fundamentalmente con la costa a la vista, al no posponer de instrumentos fiables.
- Es entonces cuando aparecen los llamados mapas portulanos, elaborados por los grandes navegantes en la época (venecianos, portugueses, españoles).

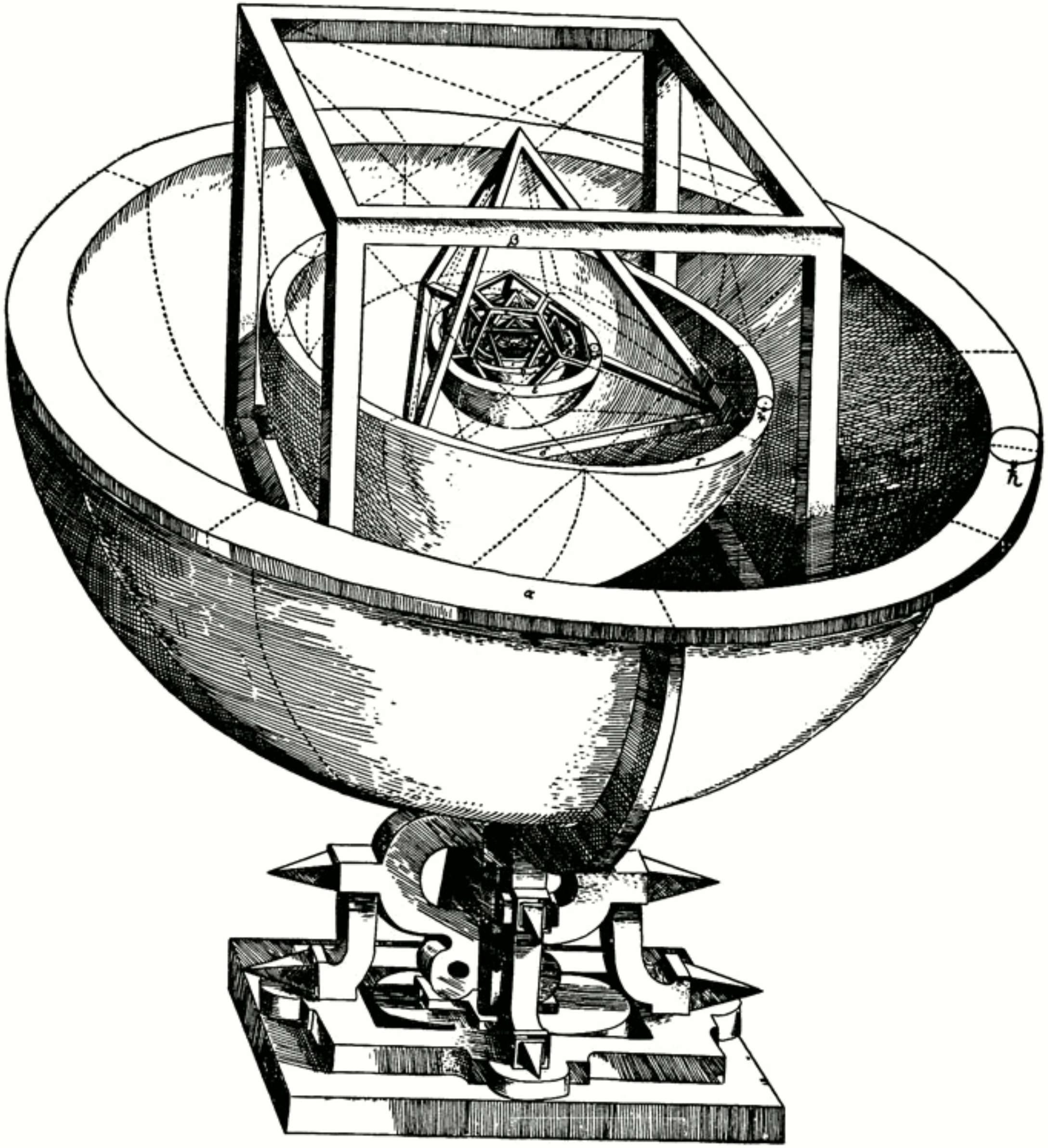
El universo geocéntrico de los griegos



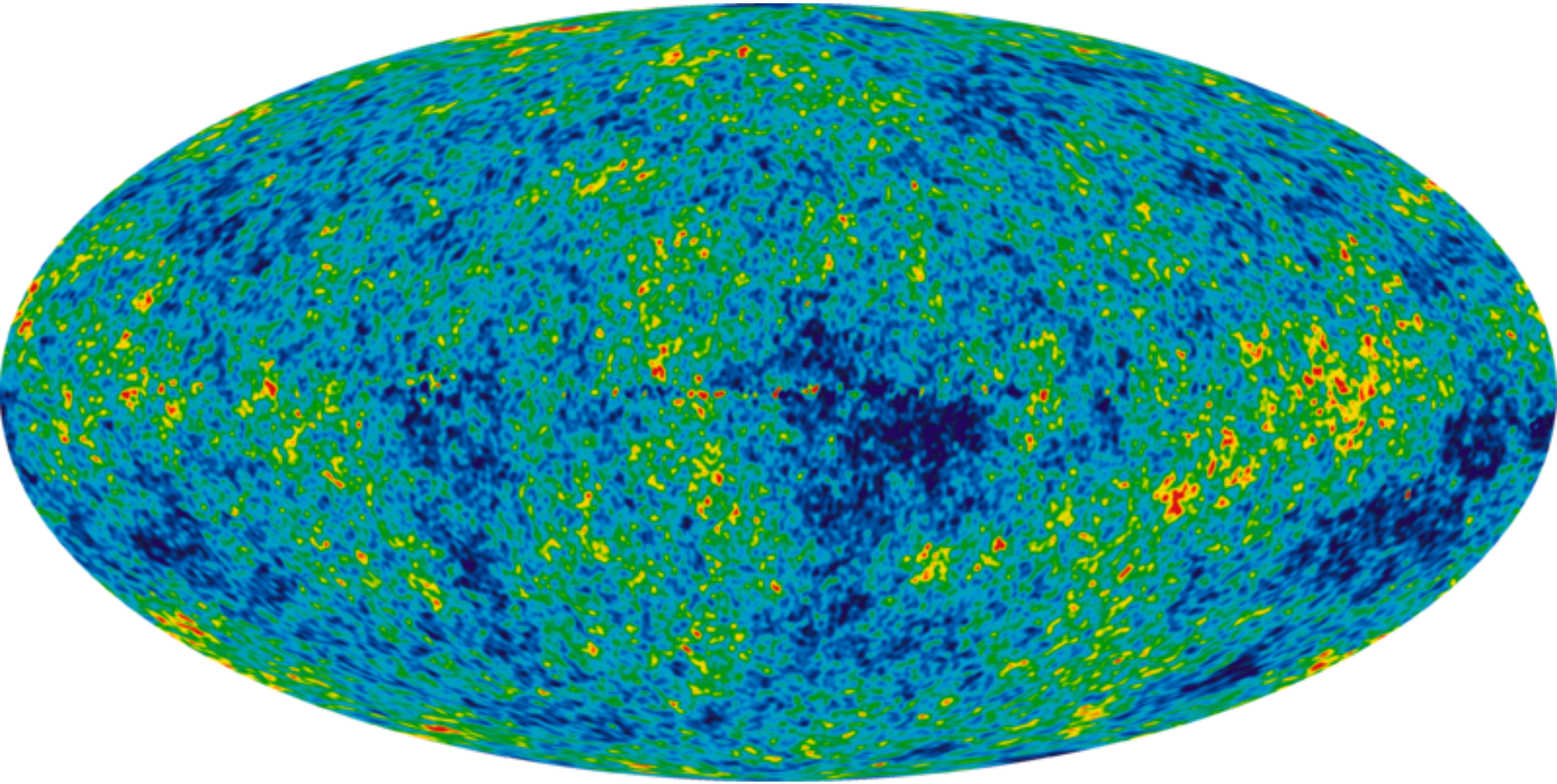




Solo son posibles cinco poliedros regulares: tetraedro (cuatro triángulos equiláteros), cubo o hexaedro (seis cuadrados), octaedro (ocho triángulos equiláteros), dodecaedro (doce pentágonos regulares) e icosaedro (veinte triángulos equiláteros):


Aire
Agua
Fuego
Tetraedro(4)
Octaedro(8)
Icosaedro (20)
Tierra
Hexaedro(6)
Firmamento
Dodecaedro(12)



El modelo de Kepler del sistema solar basado en los sólidos platónicos
(Mysterium Cosmographicum, 1600)



El axioma de las paralelas y la forma del universo: de Euclides al big-bang

Euclides de Alejandría

La vida de Euclides

- Euclides de Alejandría (ca. 325 - ca. 265 a. C.) es el más relevante matemático de la antigüedad
- Conocido por su obra **Los Elementos** (el segundo libro más editado tras la Biblia)
- Apenas existen datos fiables de su vida (Proclus, filósofo, 450)

El carácter de Euclides

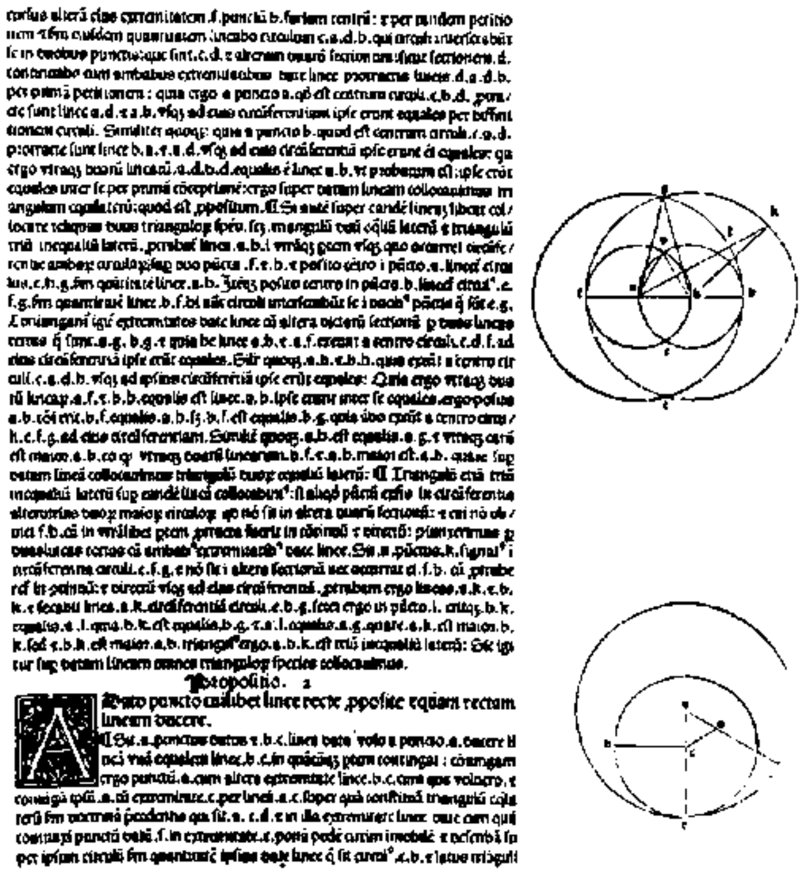
- Euclides deviene con el tiempo un personaje de historias y leyendas, a veces presa de malentendidos.
- Según Estobeo, cuando uno de sus oyentes, nada más escuchar la demostración de un teorema, le había preguntado por la ganancia que cabía obtener de cosas de este género, Euclides, volviéndose hacia un sirviente, había ordenado: **«Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende»**.
- En otra ocasión, al preguntarle el rey Tolomeo I por una vía de acceso a los conocimientos geométricos más fácil y simple que las demostraciones de los Elementos, Euclides había respondido: **«No hay camino de reyes en geometría».**

Los Elementos

- Trece libros
- Libros I a VI: Geometría Plana
- Libros VII a IX: Teoría de Números
- Libro X: Números irracionales
- Libros XI a XIII: geometría del espacio

A fragment of Euclid's elements found at Oxyrhynchus, which is dated to circa 100 AD. The diagram accompanies Proposition 5 of Book II of the Elements.

Los Elementos, edición de Campani de 1482



The frontispiece of an Adelard of Bath Latin translation of Euclid's Elements, c. 1309–1316; the oldest surviving Latin translation of the Elements is a 12th century work by Adelard, which translates to Latin from the Arabic.

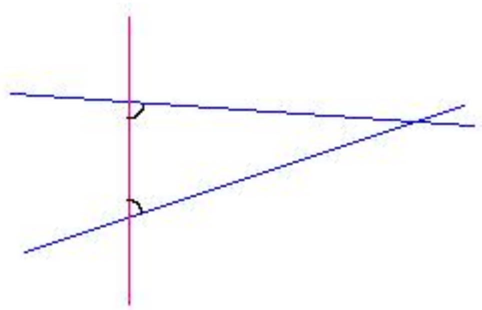
- Definición 1. Un punto es lo que no tiene partes.
- Definición 2. Un línea es una longitud sin anchura.
- Definición 3. Los extremos de una línea son puntos.
- Definición 4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
- Definición 5. Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
- Definición 6. Los extremos de una superficie son líneas.
- Definición 7. Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
- Definición 8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.

Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de **axiomas** (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que Euclides llamó ***postulados.*** Los famosos ***cinco postulados de Euclides*** son:

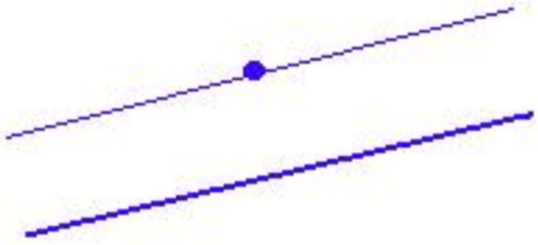
- **I.-** Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.
- **II.-** Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.
- **III.-** Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
- **IV.-** Todos los ángulos rectos son iguales.
- **V.-** Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Quinto postulado

Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.



Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

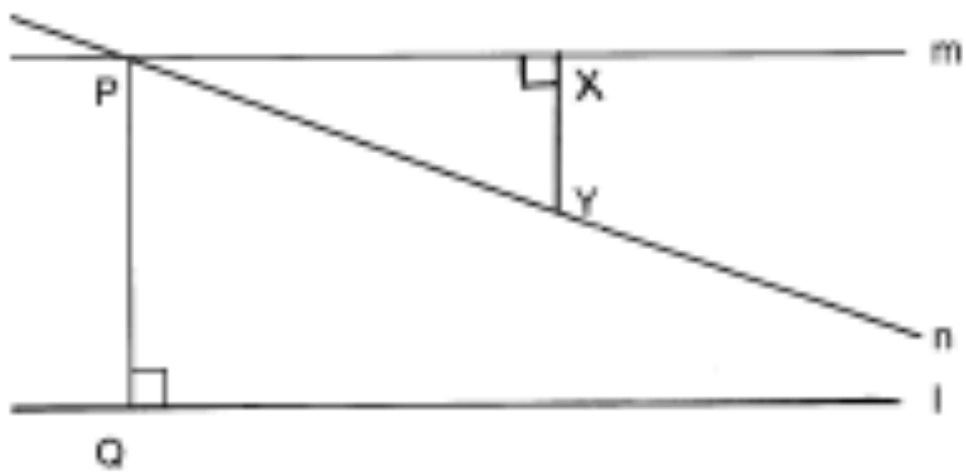


Proclo

- Nació el 8 Feb 411 en Constantinopla (Estambul), y murió el 7 April 485 en Atenas, Grecia
- Dirigió la Academia de Platón
- Comentó los Elementos de Euclides
- Dió la formulación alternativa del quinto axioma.
- *Todas las historias que se han escrito referentes a este punto caen en la cuenta del desarrollo de esta ciencia. No mucho tiempo después de la llegada de Euclides, reunió en los Elementos la sistematización de los Teoremas de Theatetus y añadiendo las irrefutables demostraciones de las proposiciones que sus precursores no habían establecido. Él vivió en la época de Tolomeo I ya que Arquímedes que vivió después ya mencionaba a Euclides. Se dice que Tolomeo I una vez preguntó a Euclides si había un camino más corto para aprender geometría que no fuera a través de los Elementos y Euclides replicó que no había un camino real hacia la geometría. Euclides por lo tanto es posterior al grupo de Platón y anterior a Eratosthenes y Arquímedes que eran contemporáneos tal y como Eratosthenes dice en alguna ocasión. Euclides se rindió a la persuación de Platón y siguiendo su filosofía concibió los Elementos en toda su globalidad y un camino fué la construcción de los conocidos sólidos platónicos.*

- Proclo: "Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolomeo se puso a resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: La proposición conversa es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema. La afirmación de que puesto que cuando las rectas son prolongadas más y más, alguna vez se cortarán parece plausible pero no necesaria. Por esto, es claro que debemos dar una prueba de este teorema, que es ajeno al carácter especial de los postulados"

- "Dadas dos rectas paralelas m y l. Suponer que n es distinta de m y que corta a m en P. Sea Q el pie de la perpendicular desde P a l. Veamos que n corta a l. Si n coincide con la recta PQ, n corta a l. Si n no coincide con la recta PQ una de las semirectas de n, la PY, está entre la semirecta PQ y una semirecta de m. Sea X el pie de la perpendicular de Y hasta m. Ahora si Y se desliza hasta el final de n, el segmento XY crece indefinidamente y como la distancia entre m y l es constante, en algún momento deberá cruzar l."



Hay dos errores en el argumento anterior:

- En primer lugar, una magnitud puede crecer indefinidamente sin rebasar un tope prefijado.
- En segundo lugar, no podemos presuponer que la distancia entre m y l es constante. Si se dice que son paralelas, lo que quiere decir es que no se cortan y no se dice nada de la distancia entre ellas.

- Se atribuyó a **John Playfair** (1748 – 1819), geómetra, geólogo y físico, y se conoció como Axioma de Playfair

- John Playfair nació el 10 de marzo de 1748 en Benvie, Escocia. Su padre fue James Playfair, ministro de Benvie, quien lo educó en la casa hasta la edad de catorce años, cuando ingresó a la Universidad de Saint Andrews con el propósito de estudiar teología. Su aprendizaje iba a tal velocidad, que su profesor de filosofía natural, Wilkie, lo escogió para que continuara sus clases.
- En 1765, se graduó con una maestría. En 1769, terminó sus estudios en teología y se trasladó a Edinburgo, en donde siguió su vocación de ministro y fue autorizado a predicar en 1770. Después de la muerte de su padre, lo eligieron como el ministro de la Parroquia de Liff, y se mudó allí para supervisar la educación de sus hermanos y hermanas.
- En 1779, se publicó su primer estudio presentado a la Royal Society de Londres.
- En 1783, en Edinburgo, participó en el establecimiento de la Royal Society de esa ciudad y fue uno de los primeros miembros.
- En 1785, fue elegido como profesor de la Universidad de Edinburgo y desempeñó este puesto durante veinte años.
- Murió el 20 de julio de 1819 en Burntisland, Fife, Escocia.

- Uno de los primeros centros de enseñanza occidentales fue el creado por **Gerberto de Aurillac** (940-1003) en la ciudad francesa de Reims.
- En su escuela Gerberto enseñaba numerosos métodos de cálculo con la importante novedad de que también empleo los guarismos indo-árabes.
- Entre los libros escritos por Gerberto citamos su *Geometría* en la que podemos encontrar la siguiente descripción:
- "Dos líneas rectas distintas continuamente una de la otra por el mismo espacio y que cuando se prolongan indefinidamente nunca se cortan se denominan paralelas; es decir, equidistantes."
- Esta definición de rectas paralelas recoge dos aspectos: El primero, es que no tengan puntos comunes y el segundo que la distancia entre estas sea constante.

- Gerberto de Aurillac alcazó gran renombre como teólogo y filósofo, pero destacó sobre todo como matemático:
- introdujo en Francia el sistema decimal y el cero que se utilizaban desde que Al-Khuwarizmi los trajera de la India y los difundiera en Europa a través de Al-Ándalus y la Marca Hispánica.
- También difundió el astrolabio, de origen árabe.
- Utilizó su cargo de papa (Silvestre II) para obligar a utilizar el sistema decimal por los clérigos occidentales, lo que facilitó enormemente el cálculo, ya que, por ejemplo, hacia el año mil, la práctica de la división, sin usar el cero, requería unos conocimientos que sólo poseían los eruditos.
- Se le acusó de tener un pacto con el diablo y de inspirarse en obras de autores herejes.

La teoría de las paralelas fue también estudiada por los matemáticos de Oriente.

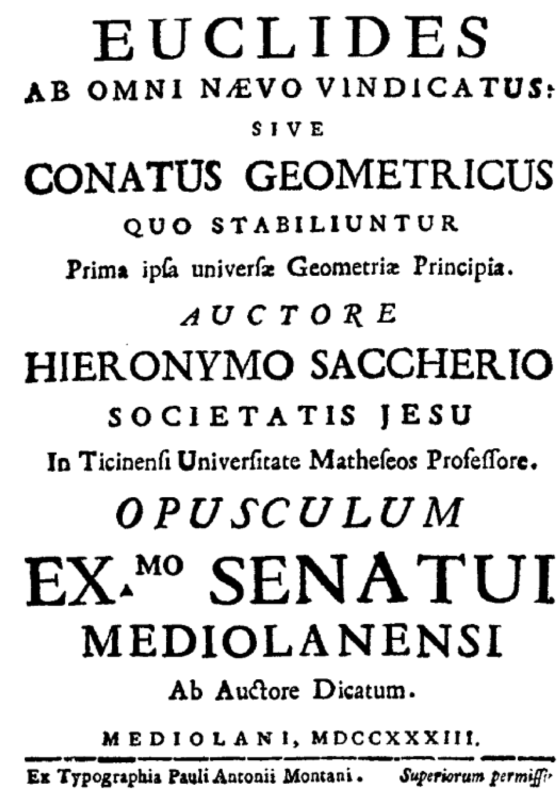
- AL-HA-SAN-IBN-AL-HAYTHAM, nacido en Basta (Al Basra, Basora, Irak), hacia el año 965 y fallecido en El Cairo, Egipto, en el año 1039, conocido como **Alhazen** en Occidente, dio una demostración del quinto postulado argumentando que si un cuadrilátero tiene tres ángulos rectos también es recto el cuarto. En su demostración supuso que el lugar geométrico de los puntos equidistantes a una recta dada era de nuevo una recta. Cayó en la trampa de la línea equidistante. La simple afirmación de que existan dos rectas equidistantes es equivalente al quinto postulado. Por otro lado, la propiedad que afirma que en un cuadrilátero si tres de sus ángulos son rectos también lo es cuarto, es también equivalente al quinto postulado.

- **Omar Khayyam** (en torno a 1050-1123) estudió el problema en "La Verdad de las Paralelas y Discusión sobre la famosa duda" que es la parte I de su Discusión sobre las dificultades de Euclides. Omar Khayyam se adelantó a los argumentos de Saccheri.
- El astrónomo árabe **Nasir Eddin** (1201-1274) que trabajó para Hulagu Khan, hermano de Kublai Khan y nieto de Genghis Khan dio otra demostración falsa del quinto postulado.

- **Gersónides**, rabí de Aviñon conocido por (1288-1344) que trabajó con cuadriláteros equiláteros y equiángulos, trabajó en este tema y probó que la proposición que afirma que los ángulos de un cuadrilátero equilátero y equiángulo son rectos es también equivalente al quinto postulado.
- Posteriormente, Cristóbal **Clavio** (1538-1612), publicó una edición comentada de los Elementos de Euclides en Roma en 1584, añadiendo a las 468 proposiciones de Euclides otras 671 más.
- Clavio incluyó una demostración del quinto postulado en la que otra vez se utilizaba el argumento erróneo de que una línea equidistante a una línea recta es una paralela.
- Clavio es considerado a veces como el Euclides del siglo XVI.
- Clavio fue discípulo de Pedro Nunes en Coimbra.
- Saccheri y Descartes aprendieron geometría de la edición de Clavio.

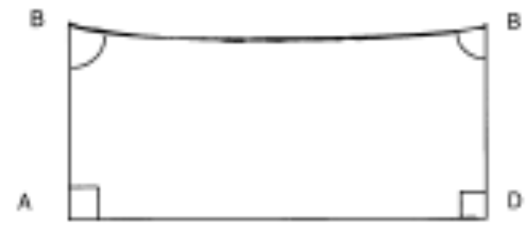
- **John Wallis** (1616-1703), profesor de la Universidad de Oxford, fue un precursor del cálculo infinitesimal e introdujo la utilización del símbolo ∞ para representar la noción de infinito.
- Entre 1643 y 1689 fue criptógrafo del Parlamento y posteriormente de la Corte real.
- Fue también uno de los fundadores de la Royal Society.
- Se interesó en el trabajo de Nasir Eddin, y tradujo al latín los comentarios del astrónomo persa sobre las paralelas.
- Como consecuencia de este interés, John Wallis dio una nueva demostración en el año 1663.
- Para ello Wallis presuponía que dado un triángulo siempre existían triángulos similares a éste y no congruentes. Sin embargo, esta afirmación es equivalente al quinto postulado.

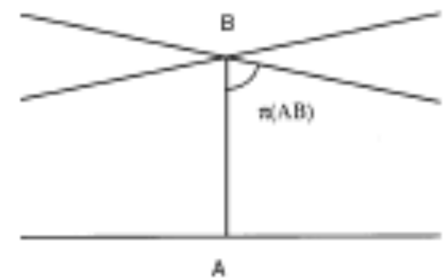
- **Giovanni Saccheri** nació el 5 de setiembre de 1667 en San Remo, Génova, Italia.
- En 1685, ingresó a la Orden Jesuita en Génova y cinco años más tarde se trasladó a Milán, donde estudió filosofía, teología y matemáticas en la Universidad Jesuita. En 1 694, se ordenó como sacerdote en Como y a partir de ese momento impartió lecciones alrededor de las Universidades Jesuitas en Italia: en Turín, enseñó filosofía de 1694 a 1697; en Pavía enseñó filosofía y teología a partir de 1697. Dos años más tarde, ocupó el puesto de presidencia de la sección de matemáticas en esa ciudad.
- En 1693, publicó su primer trabajo acerca de geometría. Entre sus trabajos más importantes está el que hizo intentando demostrar el postulado paralelo de Euclides. Además trabajó en lógica matemática y escribió destacables trabajos sobre geometría no-euclidiana.
- Saccheri murió el 25 de octubre de 1733 en Milán, Italia.

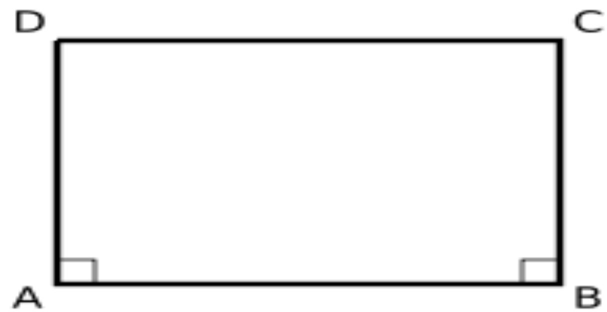


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.^{MO} SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permiſſ*

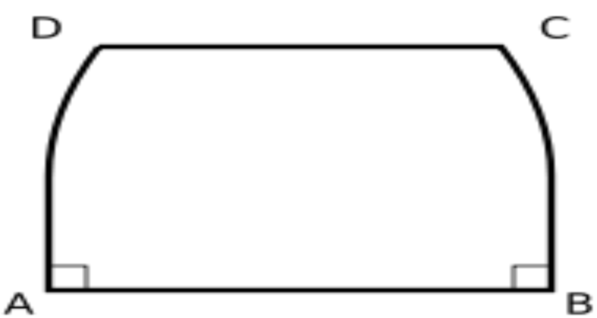
- Sacheri aplicó el método de "la reducción al absurdo" para probar el quinto postulado.
- Estudió cuadriláteros ABCD en los que AB es congruente con DC y los ángulos en A y D son rectos, exactamente iguales que los que había estudiado Omar Khayyam.
- En los cuadriláteros de Saccheri existen tres casos posibles:
  - 1) Los ángulos en B y C son rectos.
  - 2) Estos ángulos son obtusos.
  - 3) Dichos ángulos son agudos.
- Se puede probar que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero de Saccheri es menor o igual que dos llanos. Así que el segundo caso queda descartado. Sin embargo, no consiguió llegar a una contradición suponiendo que se verificara el tercer caso.



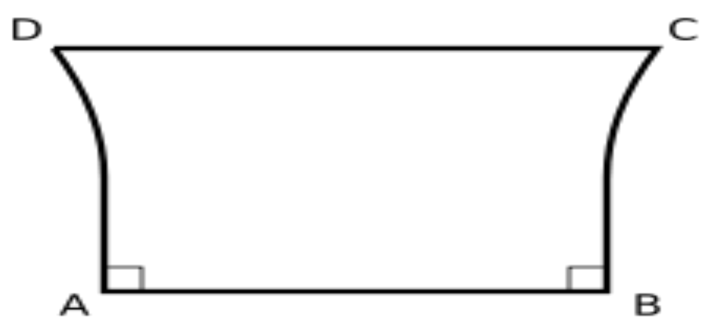




right



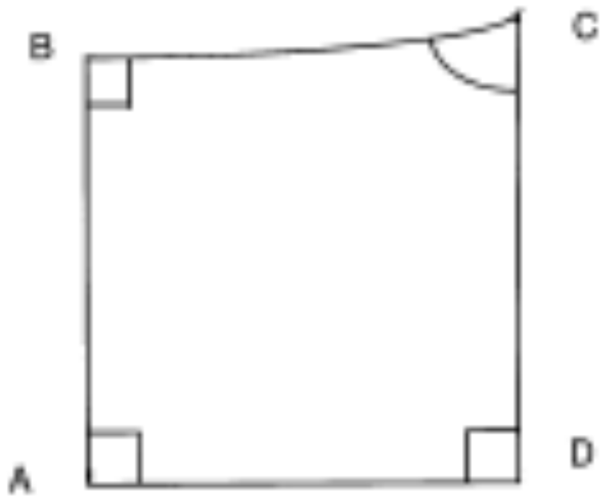
obtuse



acute

- Sacheri probó que bajo las hipótesis del Ángulo Recto, Ángulo Obtuso o Ángulo Agudo, respectivamente se tiene que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, mayor que dos rectos o menor que dos rectos.
- La geometría resultante cuandose considera la hipótesis el Ángulo Agudo no es compatible con el quinto postulado y aparecen proposiciones diferentes a las de la geometría euclidiana.
- Sacheri estuvo a punto de descubrir las geometrías no euclídeas.

- **Johann Heinrich Lambert** (1728-1777) escribió la obra "Die Theorie der Parallellinien" (La teoría de las Paralelas) que se publicó después de su muerte.
- En su trabajo Lambert se preguntó si el quinto postulado se podría deducir a partir de los demás o si sería necesaria alguna hipótesis adicional. Después dio diferentes afirmaciones que necesitaban ser probadas pero que implicaban el quinto postulado.
- En la parte final consideró cuadriláteros pero con tres ángulos rectos. De nuevo tenía las tres hipótesis posibles respecto al cuarto ángulo.



- **Adrien-Marie Legendre** (París, 18 de septiembre de 1752 - Auteuil, Francia, 10 de enero de 1833) fue un matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la estadística, la teoría de números, el álgebra abstracta y el análisis matemático.
- Legendre, tras 40 años de trabajo, probó que el quinto postulado era equivalente a que la suma de los ángulos de triángulo es de 180º.

- Sus varios intentos aparecieron en las doce ediciones de sus "Élements de géométrie" desde 1794 hasta 1823.
- Su monografía *"Réflexions sur differéntes manières de démostrer la théorie des paralléles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle"* apareció en 1833, cien años después de la publicación del libro de Saccheri.
- Obtiene de nuevo resultados de Saccheri (que a su vez contenía resultados ya probados por Omar Khayyam).
- Legendre no aportó novedades sustanciales, pero su obra fue muy difundida.

- Jean le Rond **D'Alembert** (París; 16 de noviembre de 1717 - París; 29 de octubre de 1783) fue un matemático, filósofo y enciclopedista francés, uno de los máximos exponentes del movimiento ilustrado, creador con Diderot de la L'Encyclopédie y por su labor en el campo de las matemáticas (mecánica, ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales).

- D’ Alembert era consciente de los muchos intentos para probar que el quinto postulado se deducía de los otros cuatro o que era independiente (con muchas pruebas falsas), desde el siglo III a. C. hasta el siglo XIX.
- Ante la imposibilidad de encontrar respuestas, D’ Alembert llamó a este problema en 1767 **el escándalo de la geometría elemental**.
- En efecto, faltaba una buena definición de recta (que Legendre ya definió como el camino más corto entre dos puntos), lo que llevó a d’Alembert a decir textualmente:
- "La définition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes parallèles, sont donc l'écueil et le scandale des éléments de Géométrie. ”

- Gauss fue el primero en entender el problema. Comenzó a trabajar en él con 15 años en 1782.
- En 1817 llegó al convencimiento que el quinto axioma era independiente de los otros cuatro.
- Comenzó a idear una geometría en la cuál se podía trazar más de una paralela por un punto externo.
- Gauss nunca publicó su trabajo, lo mantuvo en secreto para evitar controversias con Kant.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)
Príncipe de los matemáticos

- Gauss discutió este tema con su amigo, el matemático Farkas Bolyai, quién había sido autor de varias pruebas falsas.
- Su hijo, el matemático János Bolyai, a pesar de que su padre le advirtió que no malgastara su tiempo en esto, trabajó en el problema.
- En 1823 Bolyai escribió a su padre: “He descubierto cosas tan maravillosas que estoy asombrado … de la nada he creado un nuevo mundo”.
- Dos años después escribió sus resultados como un apéndice en el libro de su padre.
- Gauss quedó impresionado.
- Bolyai no había construido la nueva geometría, solo había probado que era posible.

János Bolyai

1802 - 1860

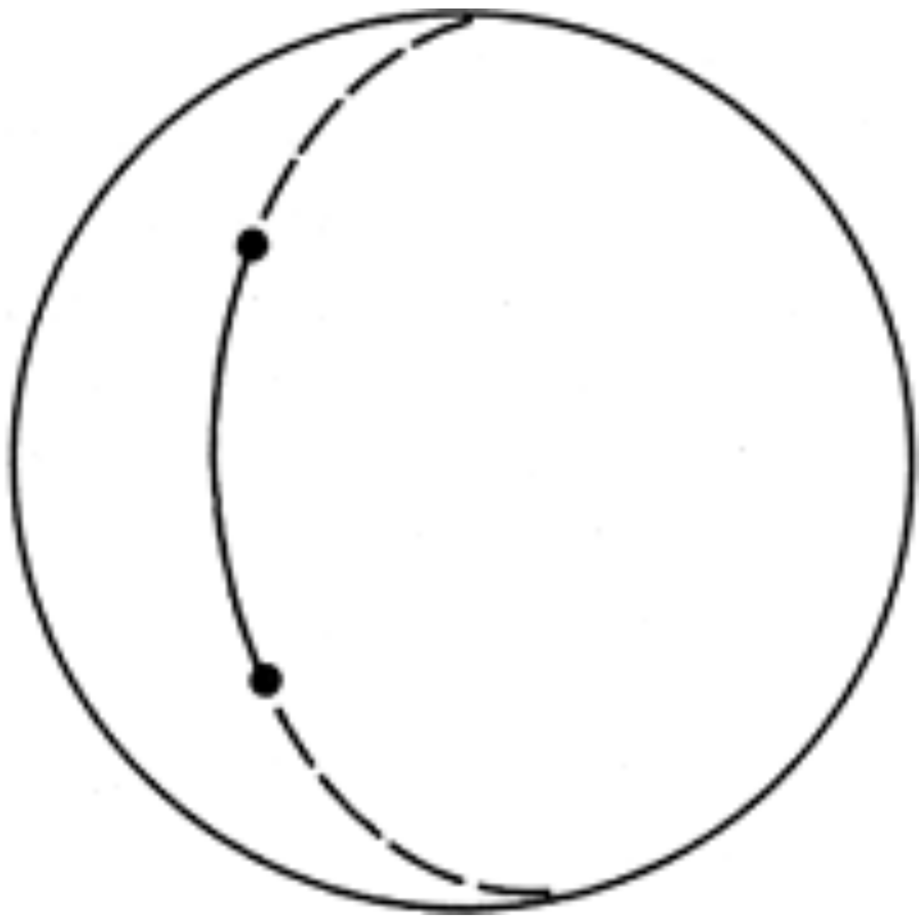
- Ni Bolyai ni Gauss conocían el trabajo de Lobachevsky publicado en 1829.
- Este fue publicado en ruso en una revista local (Kazan Messenger), trabajo que había sido rechazado por Ostrogradski.
- Lobachevsky publicó sus Geometrical investigations on the theory of parallels en 1840 (61 páginas).
- Un resumen en francés en el Journal de Crelle le dio difusión, pero los matemáticos no aceptaron sus ideas revolucionarias.
- Lobachevsky reemplazó el quinto postulado de Euclides por este:
  - Existen dos rectas paralelas a una dada por un punto externo a la recta.

Nikolai Ivanovich Lobachevsky
1792 - 1856

- En 1848 Bolyai descubrió que Lobachevsky había publicado una obra que contenía resultados similares a los suyos. János estudió el trabajo de Lobachevsky línea a línea, e incluso llegó a pensar que Lobachevsky no existía y todo había sido una maquinación de Gaus. Sin embargo, fue capaz de apreciar la genialidad de ese trabajo.
- Janos trabajó mas tarde en problemas de números complejos, colaborando con su padre, hasta que dejó de interesarse en la investigación matemática, pasando a trabajar en sociología y linguística. A pesar de haber publicado muy poco, Janos dejó al morir unas 20.000 páginas manuscritas.

Georg Friedrich Bernhard Riemann
1826 - 1866

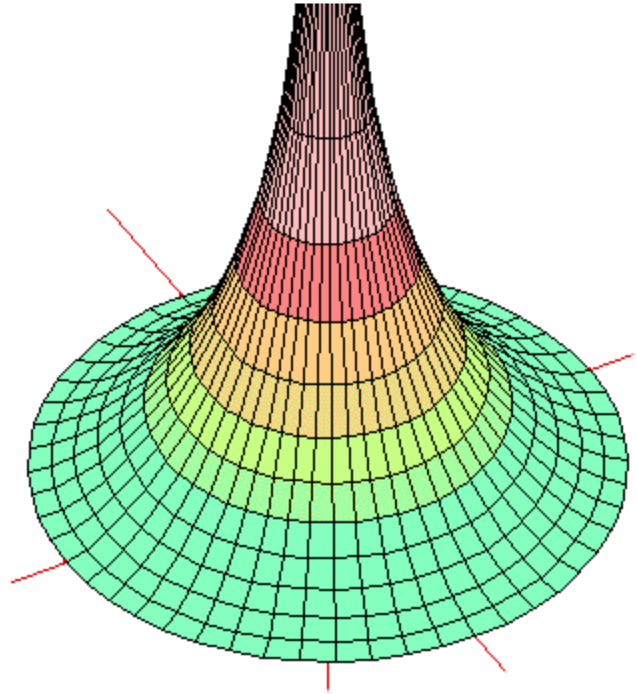
- Otro matemático que juega un papel estelar en la historia del quinto postulado (y que de hecho cierra el panorama) es Bernard Riemann, cuya tesis doctoral dirigió Gauss, y que impartió su lección inaugural el 10 de junio de 1854 en la que reformuló el concepto de geometría.
- Desde Riemann: La geometría es un espacio más una estructura (la métrica) que permitía medir.
- La memoria que recoge su lección inaugural se publicó en 1868, dos años después de morir.
- En ella, Riemann consideró una geometría en la que las paralelas no son posibles, la geometría esférica. Estas geometrías no eran diferentes de la geometría euclidiana en el sentido que no había contradicciones.
- Así como en la geometría del plano euclidiano la línea recta que los une es la trayectoria más corta entre ellos, en una superficie esférica esta propiedad la poseen los círculos máximos. En lenguaje geométrico, los círculos máximos son las "geodésicas" de la geometría de la esfera, tal y como muestra esta imagen:



- El primero en colocar la geometría de Bolyai - Lobachevsky al mismo nivel que la euclidiano, fue Eugeni Beltrami (1835-1900).
- En 1868 escribió *Essay on the interpretation of non-Euclidean geometry* y dio un modelo en dimensión 2 en un espacio euclidiano de dimensión 3, la pseudo-esfera.
- En este modelo, los cuatro primeros axiomas se cumplían pero no el quinto.
- El modelo lo completó Klein en 1871 quién dio además modelos de otras geometrías no-euclidianas, como la de Riemann.
- Klein demostró que hay tres tipos de geometrías:
  - Hiperbólica (Bolyai – Lobachevsky)
  - Esférica (Riemann)
  - Euclídea.

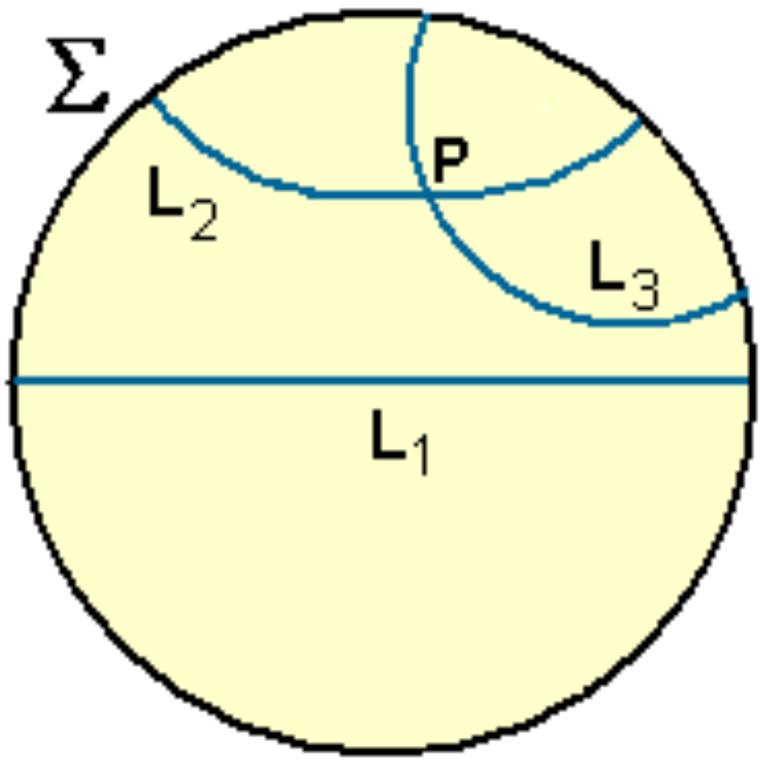
Eugenio Beltrami
1835 - 1900

Seudo-esfera



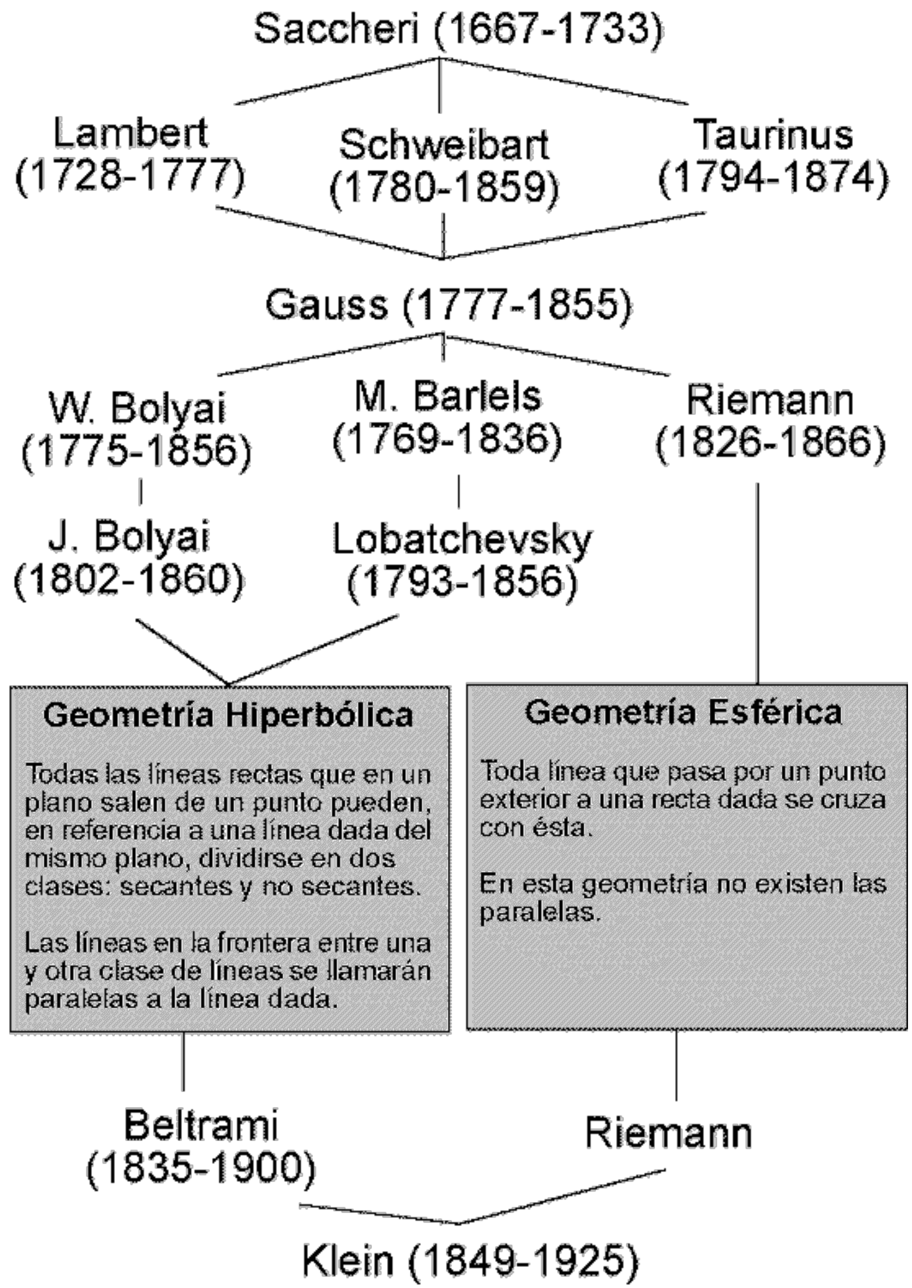
The top half of a pseudo-sphere

- En el caso del disco de Poincaré, las geodésicas son diámetros o arcos de círculo que cortan perpendicularmente a la frontera del disco, tal y como se muestra en esta figura:



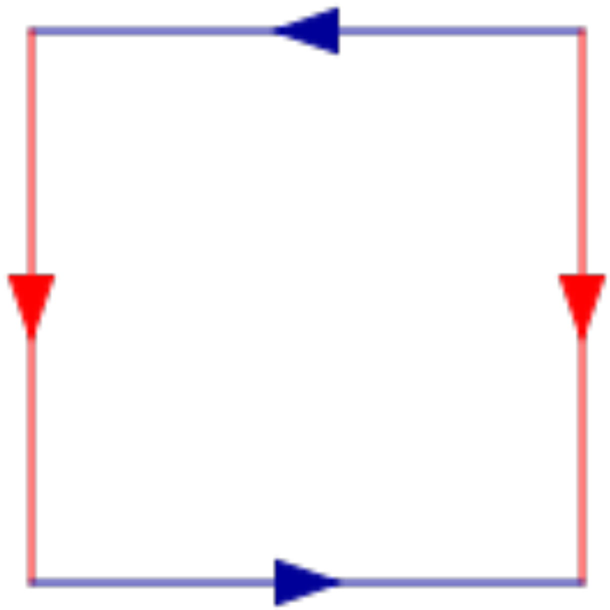
Felix Christian Klein

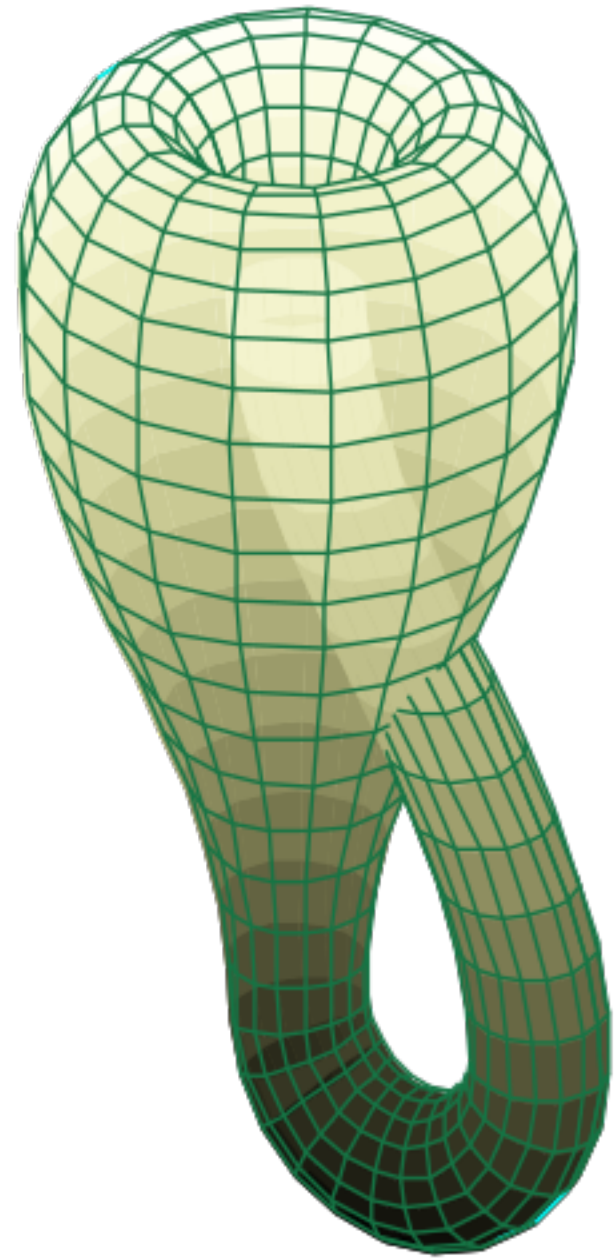
1849 - 1925


Saccheri (1667-1733)
Lambert (1728-1777)
Schweibart (1780-1859)
Taurinus (1794-1874)
Gauss (1777-1855)
W. Bolyai (1775-1856)
M. Barlels (1769-1836)
Riemann (1826-1866)
J. Bolyai (1802-1860)
Lobatchevsky (1793-1856)
Geometría Hiperbólica
Todas las líneas rectas que en un plano salen de un punto pueden, en referencia a una línea dada del mismo plano, dividirse en dos clases: secantes y no secantes.
Las líneas en la frontera entre una y otra clase de líneas se llamarán paralelas a la línea dada.
Geometría Esférica
Toda línea que pasa por un punto exterior a una recta dada se cruza con ésta.
En esta geometría no existen las paralelas.
Beltrami (1835-1900)
Riemann
Klein (1849-1925)

Félix Klein:

- Demostró que las geometrías métricas, euclidianas o no euclidianas, constituyen casos particulares de la geometría proyectiva.
- En 1872, con ocasión de su conferencia en la toma de posesión de la cátedra en la universidad de Erlangen, presentó el llamado "Programa de Erlangen", en el que probó que el concepto de grupo es esencial, de manera que una geometría está caracterizada por su grupo de transformaciones.
- Trabajó en teoría de funciones, teoría de números, geometría, teoría de grupos, entre otros temas.
- Diseñó la superficie que lleva su nombre, la botella de Klein, una superficie no orientable de una sola cara que se obtiene identificando los lados opuestos de un cuadrado en direcciones contrarias. Es una superficie que no se puede embeber en un espacio euclidiano de tres dimensiones, requiere cuatro dimensiones. Parece que hubo un malentendido con el nombre original de la superficie, Kleinsche Fläche, superficie de Klein, lo que fue interpretado como Kleinsche Flasche, botella de Klein.





Triángulos en las geometrías no euclidianas

- Hemos visto que el quinto postulado era equivalente a que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°. Puesto que en las geometrías esférica e hiperbólica no se cumple el quinto postulado, tampoco ocurrirá los mismo en el caso de los ángulos internos de un triángulo:
  - En efecto, si la geometría es hiperbólica, la suma será menor que 180°, y habrá un defecto.
  - En el caso de la geometría esférica (o elíptica) ocurre lo contrario, y ese valor es mayor que 180°, es decir, hay un exceso.
  - Ambos, defecto y exceso, están relacionados obviamente con la curvatura.

LO DEFINITIVO SOBRE CUESTIONES DE CERTEZA

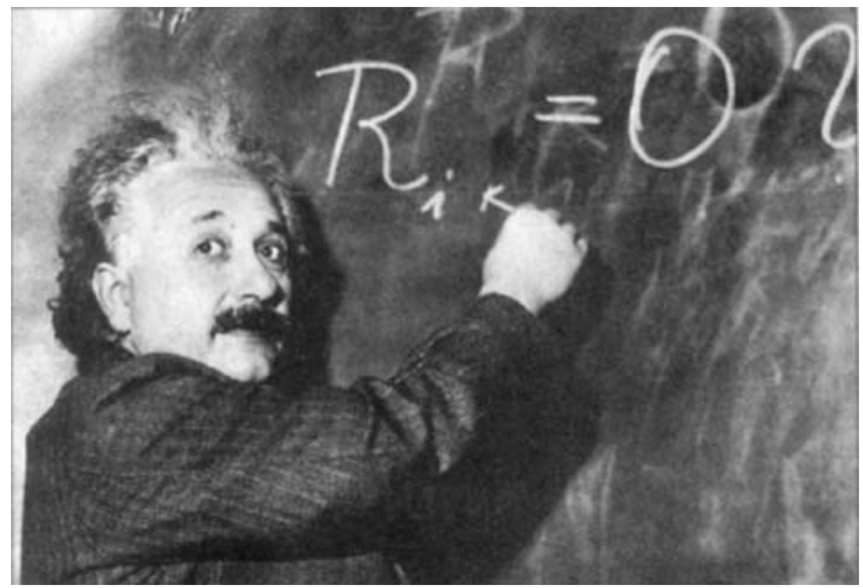
Hay enunciados.
Hay enunciados que son verdaderos.
Hay enunciados que no son verdaderos.
Hay enunciados en los que no se puede decidir
si son verdaderos o falsos.
Hay enunciados en los que no se puede decidir
si el enunciado que no se puede decidir
si es verdadero o no,
es verdadero o no,
etc.

Los elixires de la ciencia
Hans Magnus Enzensberger

Traducción de José Luis Reina Palazón

- Estas nuevas geometrías son las que aparecen cuando queremos estudiar nuestro universo (son sus posibles formas).
- Esta es la nueva visión del universo en el que vivimos tras la Teoría de la Relatividad de Albert Einstein, que incorpora el tiempo al espacio.
- Muchos otros nombres de físicos y matemáticos están ligados a estos avances durante el siglo XX.

Albert Einstein: Nació el 14 de marzo de 1879 en Ulm (Alemania); murió en el 18 abril de 1955 en Princeton (EEUU)



Teoría de la relatividad especial

- Los postulados básicos son:
  - Las leyes de la física toman la misma forma en todos los marcos de referencia inerciales (en movimiento uniforme entre sí)
  - En cualquier marco inercial, la velocidad *c* de la luz es siempre la misma.

1916. № 7.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. ***Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie;***
von A. Einstein.

Die im nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise entwickelt, so daß ein Studium mathematischer Literatur für das Verständnis der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich ist. Endlich sei an dieser Stelle dankbar meines Freundes, des Mathematikers Grossmann, gedacht, der mir durch seine Hilfe nicht nur das Studium der einschlägigen mathematischen Literatur ersparte, sondern mich auch beim Suchen nach den Feldgleichungen der Gravitation unterstützte.

Annalen der Physik. IV. Folge. 49. 50

- No hay tiempo ni espacio absolutos (ni “éter”).
- Los intervalos de tiempo y de longitud dependen del sistema de referencia en los que se realiza la experiencia.
- Desaparece la noción de simultaneidad de sucesos (depende del observador).

Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

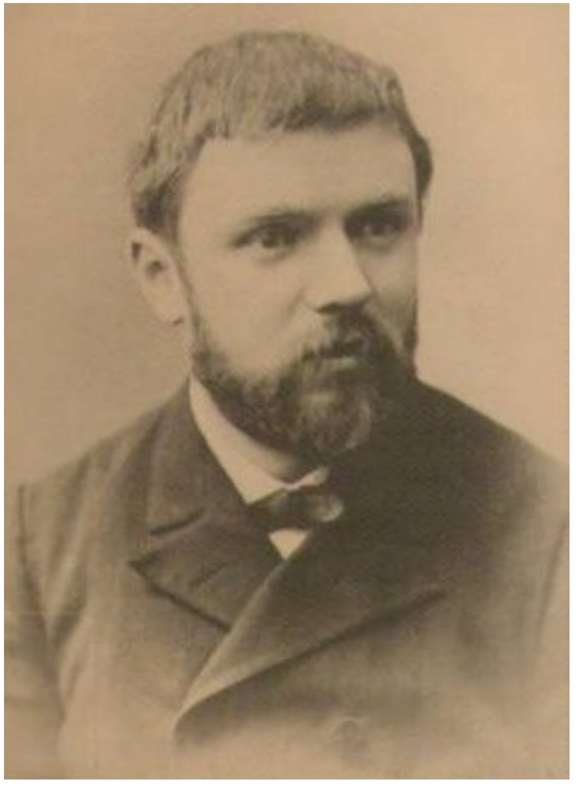
~~A. Prinzipielle Erwägungen zum Postulat der Relativität.~~

~~§1. Die spezielle Relativitätstheorie.~~

Die im Nachfolgenden dargelegte Theorie bildet die denkbar weitgehendste Verallgemeinerung der heute allgemein als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie; die letztere nenne ich im folgenden zur Unterscheidung von der ersteren „spezielle Relativitätstheorie" und setze sie als bekannt voraus. ~~Diese~~ Die Verallgemeinerung der Relativitätstheorie wurde sehr erleichtert durch die Gestalt, welche der speziellen Relativitätstheorie durch Minkowski gegeben wurde, welcher Mathematiker zuerst die formale Gleichwertigkeit der räumlichen Koordinaten und der Zeitkoordinate klar erkannte und für den Aufbau der Theorie nutzbar machte. Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem „absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, ~~und~~ Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits ~~für~~ auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde. Ich habe im Abschnitt B der vorliegenden Abhandlung alle für uns nötigen, bei dem Physiker nicht als bekannt vorauszusetzenden mathematischen Hilfsmittel ~~[illegible]~~ in möglichst [illegible] entwickelt, sodass ein Studium

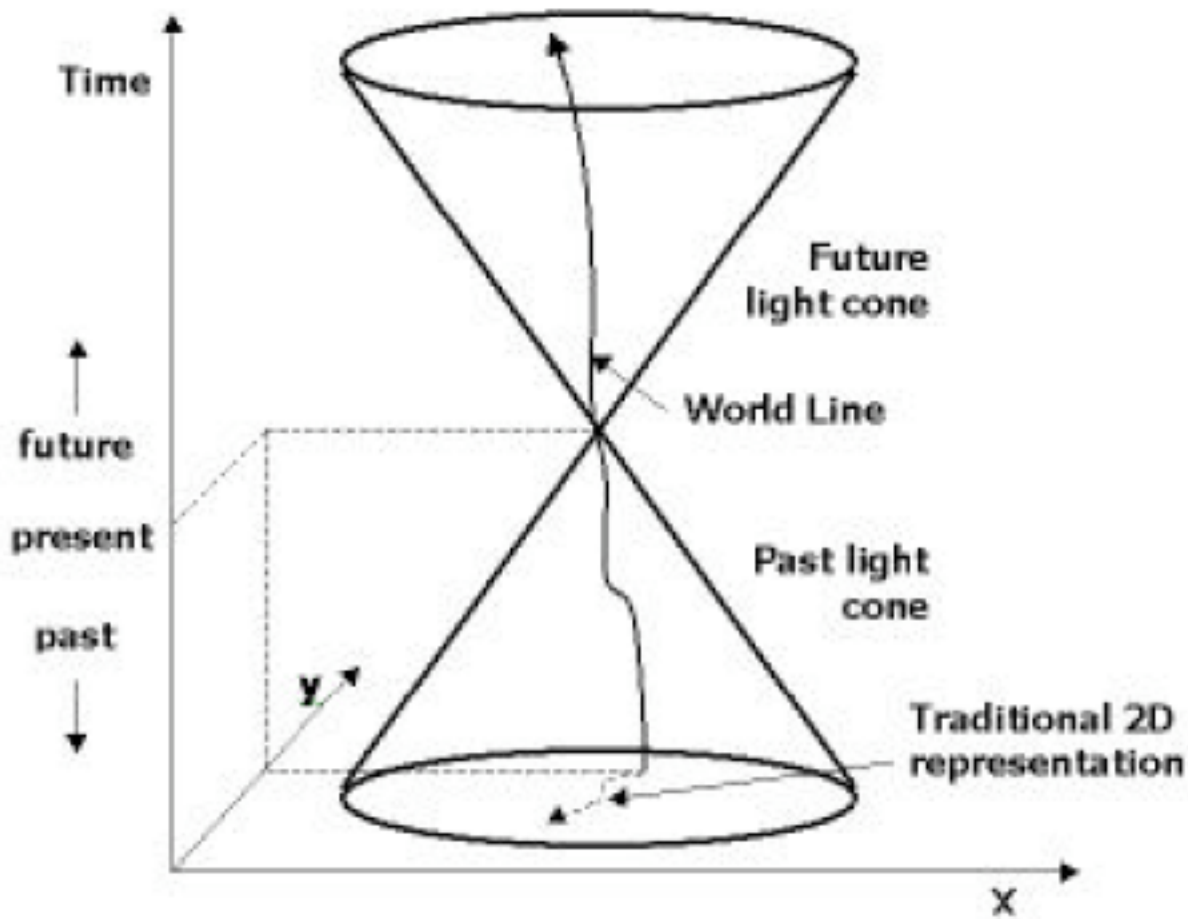
PRECURSORES DE LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

- Uno de los geométras que contribuyeron en gran medida al desarrollo de la Teoría de la Relatividad es **Henri Poincaré**.
- Hendrik A. Lorentz introdujo en algunas ecuaciones que trataban de refinar las ecuaciones de Maxwell lo que denominó “tiempo local” que dependía de la velocidad relativa de los observadores, aunque no le dio relevancia física, sino que lo trató como una herramienta matemática.
- Poincaré estaba muy al tanto del trabajo de Lorentz, y llevó más allá las ideas del holandés: según Poincaré, el “tiempo local” de Lorentz apuntaba a algo profundo en nuestro concepto de tiempo y simultaneidad. En 1898, siete años antes del annus mirabilis de Einstein, publicó La mesure du temps, donde se planteaba cómo definir exactamente qué es, cómo medirlo y qué queremos decir cuando hablamos de que dos sucesos son simultáneos o no lo son.
- Según Poincaré, no tiene sentido hablar de simultaneidad o tiempo entre dos sucesos utilizando nuestra intuición. Es más, no podemos estar seguros de que cualquier definición sea la “buena”, de modo que debemos olvidarnos de reglas aplicadas al tiempo que sean “ciertas”. La definición de simultaneidad que debemos emplear es la que nos permita formular leyes físicas de manera eficaz.



- **Hermann Minkowski** dio una nueva visión de la teoría de la relatividad especial en 1908, al reformularla naturalmente en un espacio de 4 dimensiones, 3 espaciales y 1 temporal, indisolublemente ligadas (un espacio-tiempo de 4 dimensiones, con una métrica especial).
- Einstein no apreció en un principio la importancia de este desarrollo geométrico.

Figure 1. Minkowski's light cone



- Sin embargo, la influencia de Hermann Minkowski, David Hilbert y Felix Klein se hace notar y Albert Einstein comenzó a considerar a las matemáticas como lo esencial para su trabajo.
- Las herramientas geométricas que habían surgido en el siglo XIX en gran parte por el estudio del problema del quinto postulado de Euclides, estaba a su disposición:
  - Cálculo tensorial
  - Curvatura
  - Conexiones y geodésicas

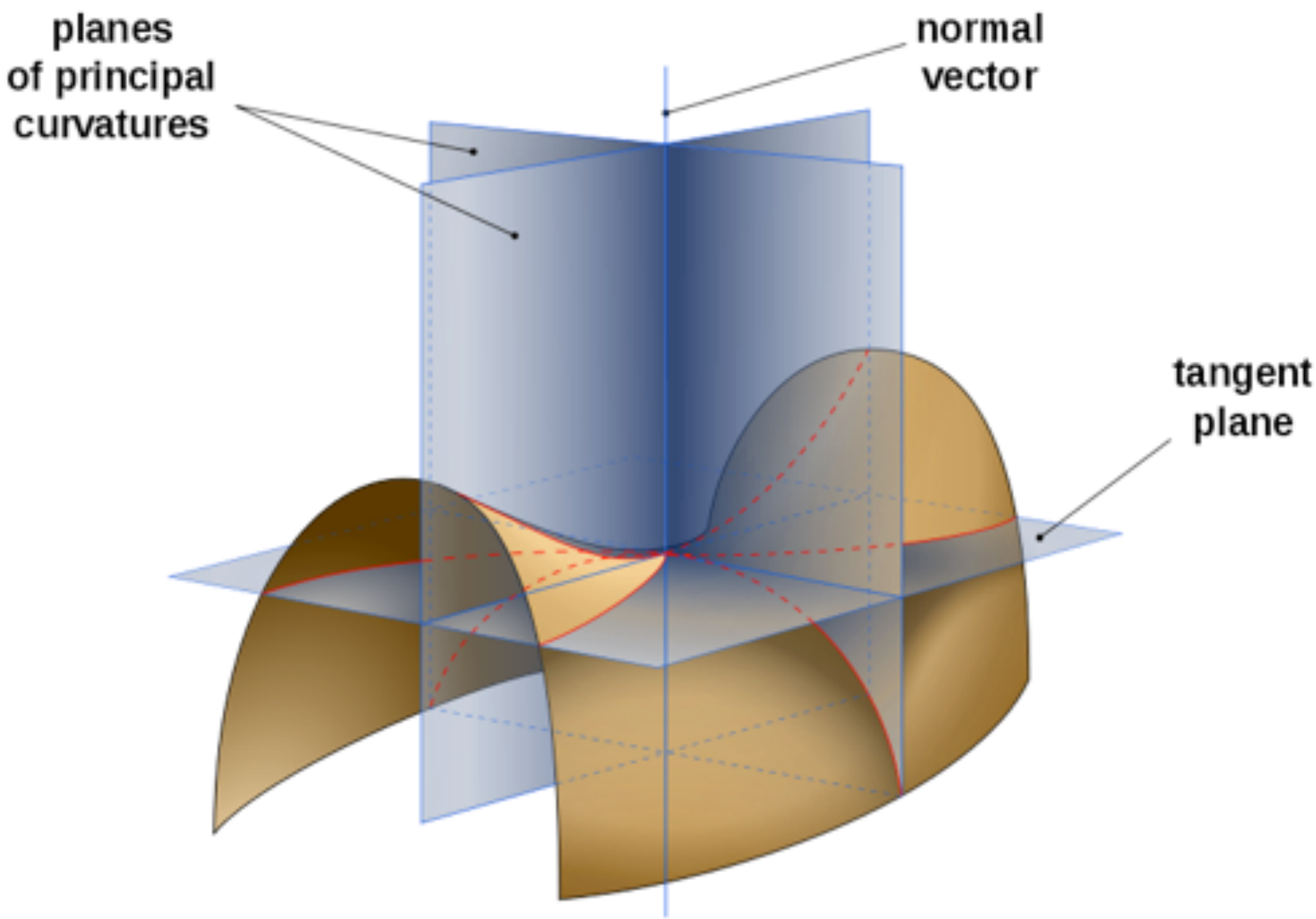
- Gauss demostró que es posible detectar la curvatura para "seres planos" que viven sobre la cáscara de la esfera.
- Es decir: la curvatura puede medirse intrínsecamente sin salirse de la superficie (sin salir al espacio ambiente).
- El *Theorema Egregium* dice que la curvatura gaussiana de una superficie diferenciable puede determinarse por completo midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie, sin hacer referencia a la forma particular en que se curva dentro del espacio euclídeo tridimensional. Es decir, el concepto de curvatura es un invariante intrínseco de una superficie.

La curvatura de un espacio

- Un concepto fundamental para conocer las características de una superficie (y de lo que se llama una variedad riemanniana o semi-riemanniana que es la versión de las superficies en dimensiones superiores) es su curvatura, de manera que esta determina en muchas ocasiones las propiedades "topológicas" de la propia superficie, es decir, aquellas que son independientes de la métrica que hemos usado para medir la curvatura.
- En una superficie, el concepto clave es el de curvatura de Gauss, que no es más que el producto de las llamadas curvaturas principales en el punto en cuestión. Dado un punto p de la superficie, existirá un vector que es normal al plano tangente a la superficie. Un plano normal es cualquiera que contiene a este vector (digamos que podíamos pensar en un plano que va girando sobre el vector normal). Estos planos cortarán a la superficie en curvas (planas, ya que están contenidas en ese plano) y cada una de ellas tendrá una curvatura. Bien, las curvaturas principales serán los valores máximo y mínimo que estas curvaturas pueden tomar.
- Ahora, la curvatura de Gauss (o curvatura gaussiana) es

$$\mathrm{K} = \kappa_1 \kappa_2$$

donde κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales.


planes
of principal
curvatures
normal
vector
tangent
plane

- Los tensores y conexiones estudiados por Christoffel (1829-1900), Gregorio Ricci (1853-1925) y Tullio Levi-Civita (1873-1941), y la teoría geométrica desarrollada por Riemann eran los instrumentos necesarios.
- Levi-Civita mantuvo una correspondencia con Einstein para corregir algunos errores de este último, correspondencia de la que damos aquí un extracto:
  – *Admiro la elegancia de su método de cálculo; debe ser estupendo cabalgar esos campos sobre el caballo de las auténticas matemáticas mientras nosotros tenemos que hacer nuestro laborioso trabajo a pie.*

Albert Einstein.

- Su definición está ligada a un espacio euclidiano y a su representación en coordenadas (cartesianas o de otro tipo).
- Digamos que estamos en el espacio de tres dimensiones; entonces, un tensor de tipo (n, m) es una asignación de n x m números

$$T^{i1,i2,i3,\ldots i_n}_{j1,j2,j3,\ldots j_m}$$

a cada sistema de coordenadas, de manera que al cambiar de coordenadas, esos números cambian según una determinada ley:

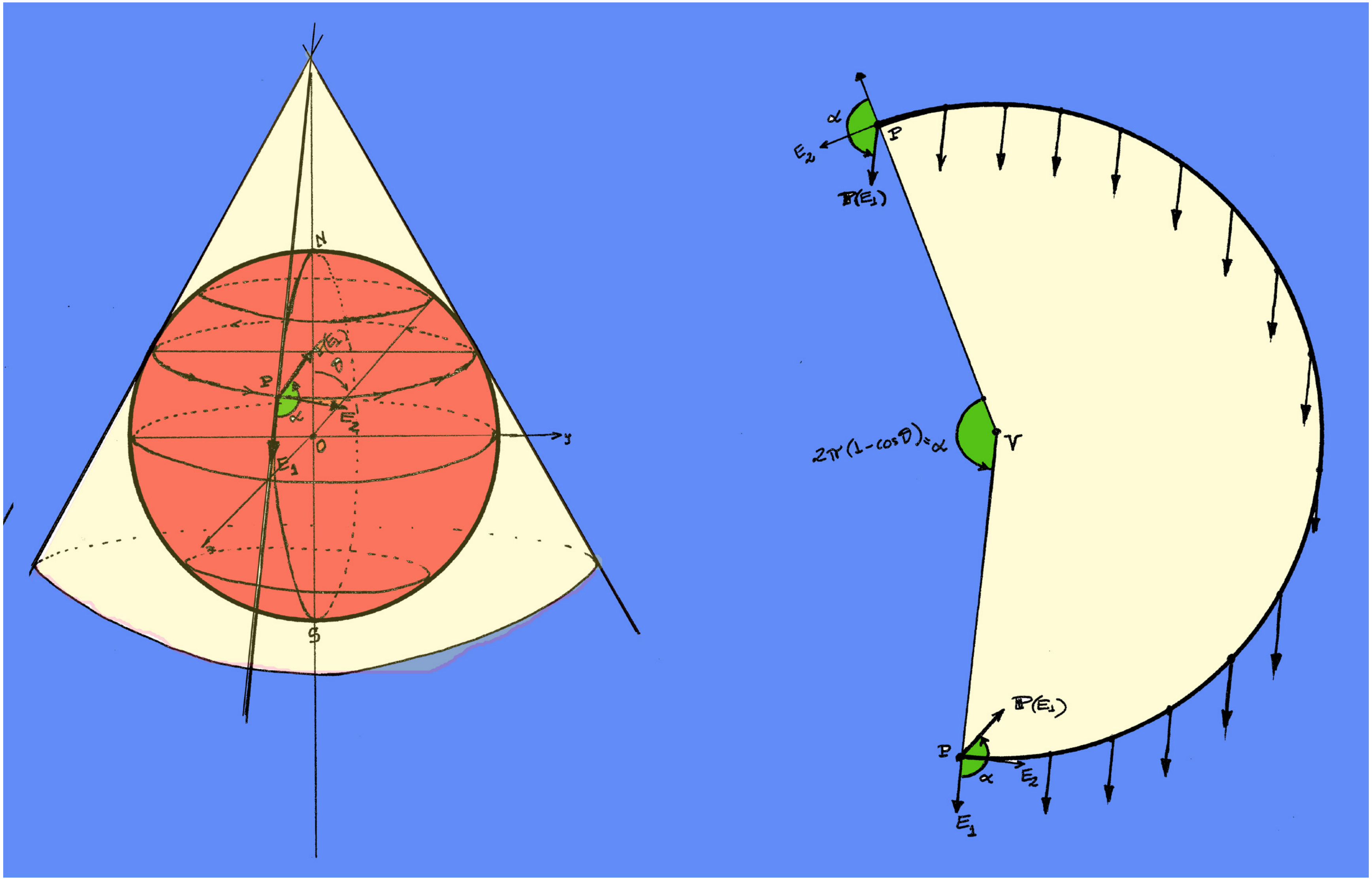
$$\bar{T}^{i_1,i_2,\ldots i_p}_{j_1,j_2,\ldots j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{r_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{r_p}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{s_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} T^{r_1,r_2,\ldots r_p}_{s_1,s_2,\ldots s_q}$$

en donde intervienen los jacobianos del cambio de coordenadas.

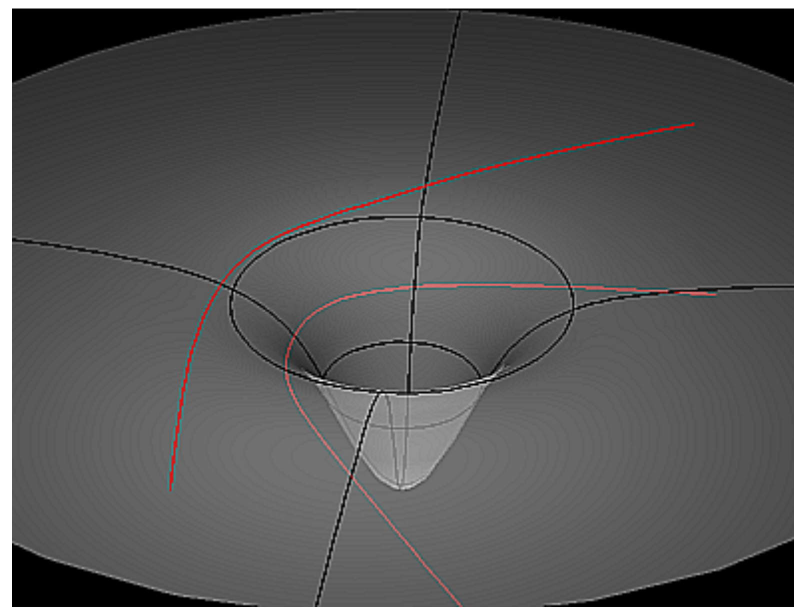
- El tensor se dice que es m veces covariante y n veces contravariante.

- La noción de **conexión** es precisamente la que permite expresar el principio general de covariancia que establece que todos los sistemas de coordenadas son equivalentes para la formulación de las leyes generales de la naturaleza.

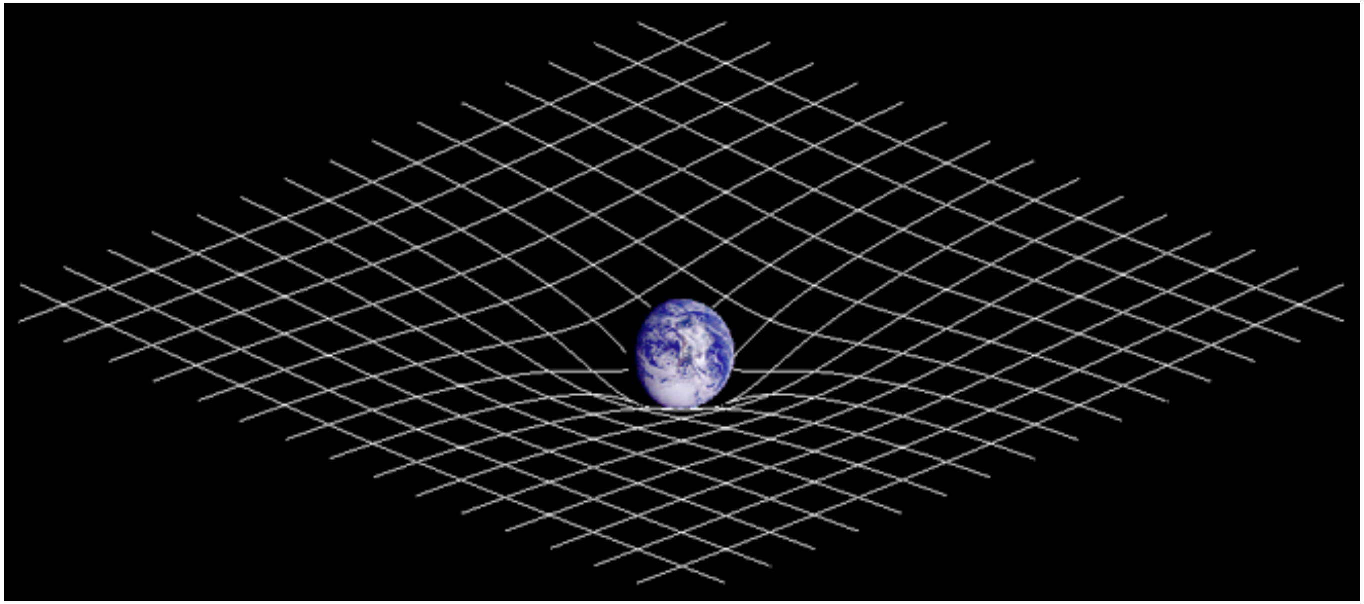
- Otro nombre clave en la historia la Teoría de la relatividad general es el de Elwin Bruno **Christoffel** (1829–1900), Los llamados símbolos de Christoffel no son tensores, aunque también son grupos de números (n x n x n) que se asocian a cada sistema de coordenadas, pero cambian de una manera diferente a los tensores.
  – Los **símbolos de Christoffel** son las componentes de lo que se llama una conexión en la variedad.
- La noción de conexión, está asociada al hecho de cómo se puede transportar datos a lo largo de una curva de manera que se extienda la noción del paralelismo euclidiano.
- Por ejemplo, en el plano, se puede entender muy fácilmente como hacer un transporte paralelo a lo largo de una curva: si comenzamos con un vector en un punto de una curva, simplemente trazamos un vector paralelo al dado en el punto a donde queremos trasladarlo. Imaginemos ahora que queremos hacer lo mismo a lo largo de una superficie: el vector transportado paralelamente en el espacio euclidiano de tres dimensiones ya no será tangente a la esfera. ¿Cómo hacemos entonces?
- Imaginemos por ejemplo que queremos hacer esto a lo largo de un paralelo de la esfera. En ese caso, se considera el cono construido sobre ese paralelo, de manera que es tangente a la superficie de la esfera, y por tanto, el vector de partida es tangente a ambas superficies, la esférica y la cónica.
- Pero un cono lo podemos "abrir" por una de sus generatrices y desplegar en un plano (técnicamente, es lo que denominamos una superficie desarrollable, que se puede "desarrollar o desplegar" sobre el plano); haríamos ahora el transporte euclidiano en el plano de nuestro vector, y lo llevaríamos de nuevo a la superficie de la esfera deshaciendo la operación de despliegue.
- Lo que habremos conseguido es un vector que ahora sí es paralelo a la superficie esférica y que sería el transportado paralelo del dado (y que no coincidirá con el de partida).


N
P
α
E2
E1
O
y
S
P
E2
P(E1)
α
V
2π(1-cosθ)=α
P(E1)
P
E2
α
E1

- En una variedad riemanniana las geodésicas son (localmente) la ruta más corta entre dos puntos en el espacio.
- Un ejemplo físico, de variedad semiriemanniana es el que aparece en la teoría de la relatividad general: las partículas materiales se mueven a lo largo de geodésicas temporales del espacio-tiempo curvo.



- Las trayectorias de partículas sin aceleración (con vector velocidad “constante”), son geodésicas.
- La geometría del espacio-tiempo depende de la distribución de la masa, capaz de curvar el espacio.



- Las ecuaciones de campo de la Relatividad General pueden ser modificadas con la introducción de un término constante, una constante cosmológica Λ, con la cual dichas ecuaciones escritas en notación de componentes resultan ser:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

- Si queremos ahora obtener la ecuación correspondiente para el vacío, llegamos a:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

- Esto nos dice que si la constante cosmológica no es igual a cero entonces, incluso en ausencia de materia el espacio-tiempo tendría aún así una curvatura intrínseca, que podría equilibrar la curvatura ocasionada por la masa-energía. De ahí que Einstein introdujera este concepto para poder tener soluciones estáticas.

$$R_{\mu\nu} = 0$$

son las ecuaciones de campo para el vacío, y son el enunciado matemático de que en donde no haya presencia alguna de masa-energía no habrá curvatura alguna en el espacio-tiempo.

Matemáticamente, la Teoría de la Relatividad Especial pasa a convertirse en un caso especial de la Teoría de la Relatividad General para la situación en la cual no hay presencia de masa-energía o la presencia de la misma es tan poca que la curvatura producida en el espacio-tiempo es insignificante.

Gravitación y otras fuerzas

- Una de las consecuencias de la teoría de Einstein fueron los intentos de combinarla con el resto de las fuerzas básicas de la naturaleza.
- En particular, la llamada teoría de Kaluza-Klein es un intento de unificar la gravitación y el electromagnetismo. Fue propuesta por Theodor Kaluza en 1919, y refinada posteriormente por Oskar Klein en 1926. Kaluza había enviado sus resultados a Einstein, en los que consideraba un espacio-tiempo de cinco dimensiones, en vez de cuatro. Las ecuaciones resultantes dan las ecuaciones de Einstein convencionales para el campo gravitatorio y además las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético.
- La estructura geométrica es la de un espacio fibrado principal con fibra el círculo, un concepto que se debe fundamentalmente a los matemáticos franceses Elie Cartan y Charles Ehresmann. Para entendernos, el prototipo de un espacio fibrado es la colección de todas las referencias en todos los puntos de la variedad. En el caso de Kaluza-Klein, encima de cada punto se ha colocado un círculo.
- Posteriormente se han desarrollado generalizaciones con espacio-tiempos de más de cinco dimensiones.

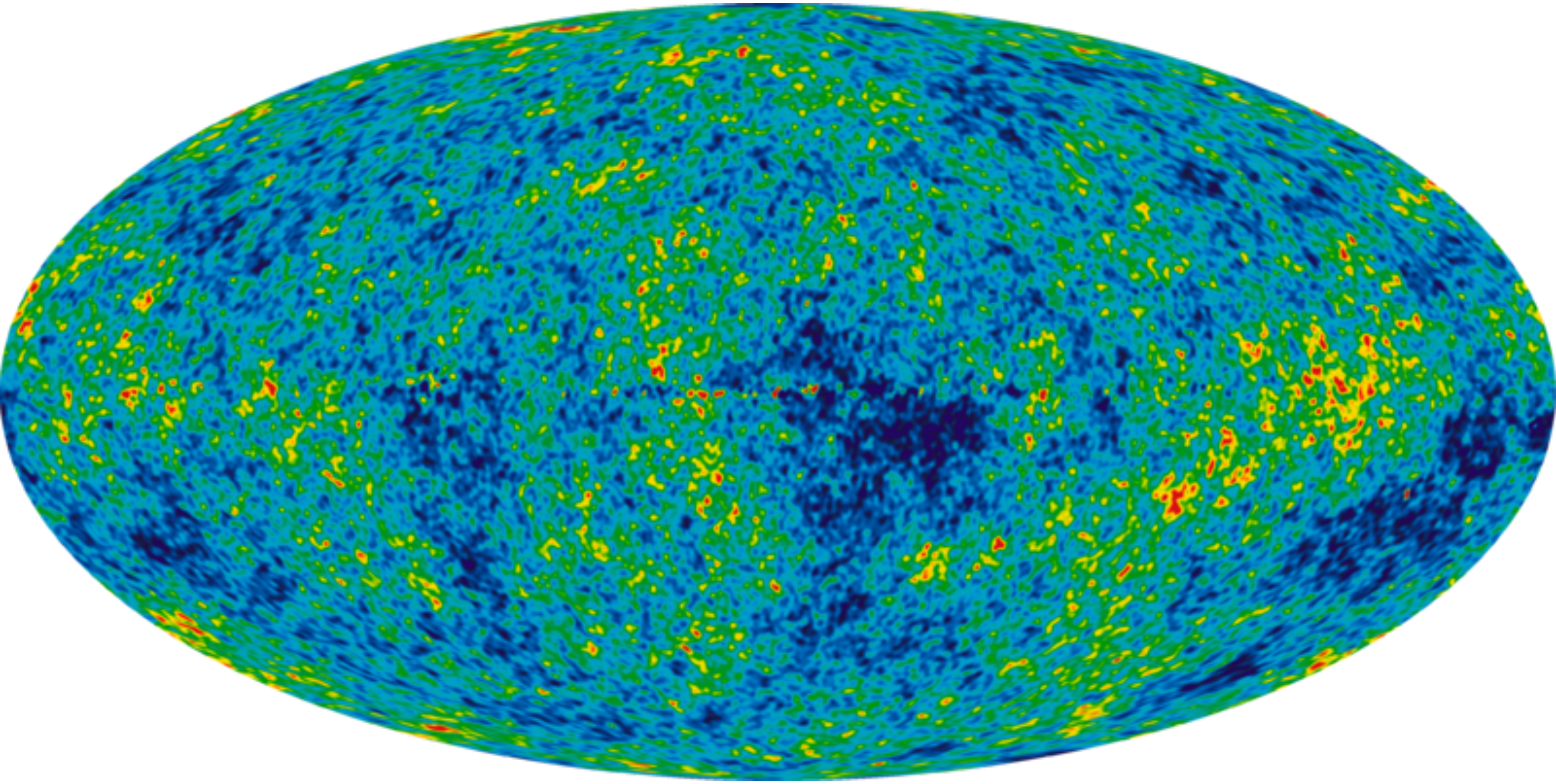
- Estos desarrollos tratan de conseguir una teoría que unifique las cuatro interacciones (fuerzas) fundamentales: interacción nuclear fuerte (mantiene unidos los núcleos de los átomos), interacción nuclear débil (gobierna la radioactividad), interacción electromagnética (unifica electricidad y magnetismo) e interacción gravitatoria.
- La llamada "teoría de campos cuánticos" describe el funcionamiento de tres de las cuatro fuerzas que se conocen en el universo: la fuerza nuclear fuerte, la fuerza nuclear débil, y el electromagnetismo.
- Pero el santo Grial de los físicos teóricos es unificar la gravitación con la mecánica cuántica, lo que no se ha conseguido todavía.
- La teoría de las **supercuerdas** sería un método de unificación de dichas teorías, pero el objetivo está lejos de conseguirse. Una partícula se piensa ahora no como un punto (dimensión cero) sino como un lazo (dimensión 1).

Cuerda abierta y cuerda cerrada

- Hoy en día, creemos que el universo se formó en una singularidad del espacio-tiempo, tal y como muestran las ecuaciones de Einstein. Esta singularidad inicial es lo que se conoce como el Big Bang o teoría de la gran explosión. Los datos actuales sugieren que ese inicio fue hace unos 13.750 millones de año, y esa sería la edad de nuestro mundo.
- De acuerdo con esta teoría, el universo fue en su momento inicial, muy caliente y denso, y se expandió rápidamente, con el consecuente enfriamiento. Lo que medimos hoy es una expansión continuada, reflejada en el desplazamiento hacia el rojo de los espectros de luz que nos llega de las galaxias.
- Tras el estallido inicial se fueron formando las partículas subatómicas (electrones, protones, neutrones), los primeros núcleos atómicos, los primeros elementos. Posteriormente, todo esto se combinó para formar las estrellas y las galaxias, y es en las estrellas donde se formaron los elementos más pesados.
- La teoría del Big Bang está fundada sobre la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, suponiendo unas ciertas condiciones de homogeneidad e isotropía en el universo. Las ecuaciones de Einstein implicaban soluciones dinámicas, así que el universo tenía que estar expandiéndose o contrayéndose.
- La aplicación de la relatividad a la cosmología fue desarrollada por el físico-matemático ruso Alexander Friedman, que encontró soluciones convenientes a las ecuaciones de Einstein: sus modelos de universo de curvatura constante positiva, negativa o nula. Ahora son los llamados modelos de Friedmann- Lemaître - Robertson – Walker.

- Entre 1927 y 1930, el sacerdote belga Georges Lemaître obtuvo independientemente las ecuaciones y propuso que el Universo se inició con la explosión de un átomo primigenio, lo que más tarde se denominó Big Bang. Por su parte, en 1929, Edwin Hubble realizó observaciones que sirvieron de fundamento para comprobar la teoría de Lemaître, y descubrió –obsevando el desplazamiento al rojo de los espectros- que las galaxias se alejan unas de otras a velocidades directamente proporcionales a su distancia (la ley de Hubble).
- Un modelo alternativo era el de Fred Hoyle, según la cual se genera nueva materia mientras las galaxias se alejan entre sí. En este modelo (el del universo estacionario), el Universo es básicamente el mismo en un momento dado en el tiempo. Sin embargo, este modelo fue abandonado, y prevaleció la teoría del Big Bang. Irónicamente, este nombre se le debe precisamente al propio Hoyle, que además de cosmólogo fue un notable autor de novelas de ciencia-ficción.
- Hubo también teorías de un universo oscilante (debidas a Richard Tolman) pero Stephen Hawking y otros demostraron que esta idea no era factible, y que la singularidad es un componente esencial de la gravedad de Einstein. Así que finalmente la teoría de una singularidad inicial y una edad finita para el universo es la que todos los cosmólogos han aceptada como buena.

- Un avance significativo en los aspectos observacionales ha sido el descubrimiento de la radiación de fondo de microondas (en inglés, Cosmic Microwave Background o CMB), llamada también radiación de fondo cósmica, predicha por la teoría.
- El universo temprano, debido a su alta temperatura, se habría llenado de luz emitida por sus otros componentes. Mientras el universo se enfriaba debido a la expansión, su temperatura habría caído por debajo de 3.000 K. Por encima de esta temperatura, los electrones y protones están separados, haciendo el universo opaco a la luz. Por debajo de los 3.000 K se forman los átomos, permitiendo el paso de la luz a través del gas del universo. Esto es lo que se conoce como disociación de fotones. La radiación en este momento habría tenido el espectro del cuerpo negro y habría viajado libremente durante el resto de vida del universo, sufriendo un corrimiento hacia el rojo como consecuencia de la expansión de Hubble. Esto hace variar el espectro del cuerpo negro de 3.345 K a un espectro del cuerpo negro con una temperatura mucho menor. La radiación, vista desde cualquier punto del universo, parecerá provenir de todas las direcciones en el espacio.
- En 1965 Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron la radiación cósmica de fondo. Ello proporcionó una confirmación sustancial de las predicciones generales respecto al CMB —la radiación resultó ser isótropa y constante, con un espectro del cuerpo negro de cerca de 3 K— e inclinó la balanza hacia la hipótesis del Big Bang. Penzias y Wilson recibieron el Premio Nobel este gran hallazgo.
- La NASA lanzó en 1989 el COBE (Cosmic Background Explorer) que confirmó los datos acerca de la radiación de fondo de microondas. En 2003, los resultados de la sonda Wilkinson de Anisotropías del fondo de Microondas (en inglés Wilkinson Microwave Anisotropy Probe o WMAP), confirmó una vez más los datos.



La forma del universo

- Como conclusión de todas las matemáticas que hemos visto hasta ahora, ¿podíamos ya decidir cuál es la forma del universo? La geometría nos dice que hay tres posibilidades, tres posibles geometrías. En efecto, si suponemos que el universo es isótropo, la curvatura sería constante. Por lo tanto:
  - Si la geometría es elíptica o esférica, entonces la curvatura sería positiva. De manera que el universo continuará expandiéndose hasta un momento en el que comenzará a contraerse (el llamado Big Crunch) hasta llegar de nuevo a una singularidad.
  - Si el universo es plano, es decir, euclidiano, con curvatura cero, la expansión irá disminuyendo poco a poco, pero no cesará la expansión actual se irá acelerando.
  - Si el universo es hiperbólico, la expansión actual proseguirá pero aumentando la velocidad conforme vaya pasando el tiempo.
- El primer modelo corresponde a los que los matemáticos llaman un espacio compacto, mientras que los otros dos serían no compactos (abiertos, en la terminología que gusta a los cosmólogos).
- ¿De que depende la curvatura? Ya hemos dicho que es la masa la que curva el espacio, en particular, la densidad de materia. Hay un valor crítico para la densidad para el cuál la curvatura es cero, pero si es menor que el valor crítico, la curvatura será negativa, y si es mayor, positiva.

- Los datos que se han recogido en los últimos años indican una contradicción; por una parte el universo sería plano, pero la expansión se está acelerando. Eso ha llevado a la hipótesis de la existencia de materia de naturaleza desconocida, que los físicos teóricos y los cosmólogos han dado en llamar oscura.
- Otro elemento que ha entrado en juego es la llamada energía oscura, de la que puede depender que el universo se siga expandiendo hasta que se produzca el llamado Big Rip (el Gran Desgarro). Y esto está relacionado con la constante cosmológica que inicialmente Einstein añadió a sus ecuaciones de campo y de la que luego abominó.
- El debate está servido, y la geometría (y las matemáticas en general) tendrán mucho que decir (como siempre) en el mismo. Nos esperan sin duda tiempos apasionantes.

¿Es el universo un dodecaedro?

- Hemos visto como los sólidos platónicos fueron utilizados por Kepler para dar una imagen del universo, lo que nos pareció entonces algo lejano de la ciencia y próximo al ocultismo. Pero hace unos años, en un artículo de Nature (J-P Luminet et al. 2003 Nature 425 593) el cosmólogo Luminet y sus colaboradores hicieron una propuesta revolucionaria.
- Si el universo se suponía infinito y llano, de repente estos cosmólogos sugerían un universo finito y con forma de dodecaedro, lo que explicaba las medidas de la radiación cósmica de fondo.
- Esta radiación de fondo da una imagen del universo tal como era 400.000 años después del Big Bang. En ese momento, el universo se había ya enfriado de manera que las variaciones o la anisotropía en la temperatura reflejaba las variaciones de la densidad del universo. Esas fluctuaciones se podían expresar como armónicos.

- Jean-Pierre Luminet (y sus colaboradores creen que el tamaño finito del universo explica el comportamiento observado, y que la forma sería la de un dodecaedro (doce caras pentagonales), de manera que las caras opuestas estarían identificadas. El universo observable estaría incluido en ese dodecaedro y no sabríamos lo que hay en medio. No cabe duda de que Kepler y su música de las esferas estarían muy felices con este hallazgo.
- Esta teoría requerirá nuevos datos observacionales de la radiación cósmica de fondo, pero nos hace pensar en lo poco que sabemos todavía de la forma del universo. ¡Y no olvidemos que esa forma se correspondería con lo que se llama una esfera de homología de Poincaré! De cualquier forma, esta teoría es por ahora una especulación.

El flujo oscuro

- Los cosmólogos A. Kashlinsky, F. Atrio-Barandela, D. Kocevski, y H. Ebeling en dos artículos recientes en Astrophys. J. en 2008 y 2009 han sugerido la existencia de un llamado flujo oscuro que explicaría algunos datos sorprendentes en estudios recientes del movimiento a gran escala de grandes cúmulos galácticos, que parecen desplazarse hacia una zona entre las constelaciones de Vela y Centauro.
- Esos cúmulos se desplazan a una velocidad que no es la predicha por la teoría de la expansión del universo, y la velocidad no parece decrecer con la distancia, tal como seria predecible si estos cúmulos estuvieran acumulando velocidad como consecuencia de la gravedad ordinaria.
- Para explicarlo, los investigadores han postulado que diferentes partes del universo tienden a tener diferentes velocidades, como ocurriría con las bolas de golf si el campo fuese plano (lo esperable) o si tuviese una pendiente.
- Podría esto deberse a la gravedad provocada por estructuras fuera del universo observable. Sin embargo, esta teoría está en suspenso hasta que se confirme o desmiente por los datos experimentales que pueda proporcionar el satélite Planck de la ESA.

Universos Paralelos: el MultiVerso

- Multiverso es un término define la existencia de los múltiples universos posibles, incluido nuestro propio universo. Este concepto nace de la idea de que el universo que se puede observar es sólo una parte de la realidad física. Los diferentes universos dentro del multiverso son lo que los escritores de ciencia-ficción llaman universos paralelos.
- El término de multiverso se debe a al filósofo norteamericano William James en 1985.
- En la teoría M se da una descripción del multiverso según la cuál los diferentes universos podrían interactuar vía la fuerza de la gravedad.
- ¿Ciencia-ficción o realidad?