

Por el giro de una aguja



Malevich
Suprematismo



Frechilla del Rey
Mirando a lo alto

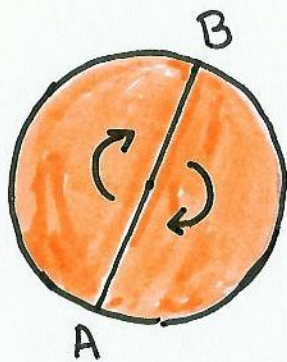


Estalactitas
El Soplao (Santander)

Santander, Abril 2013

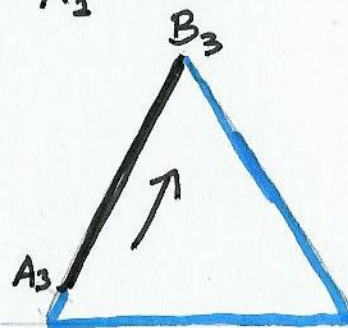
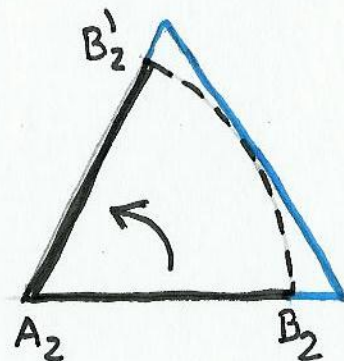
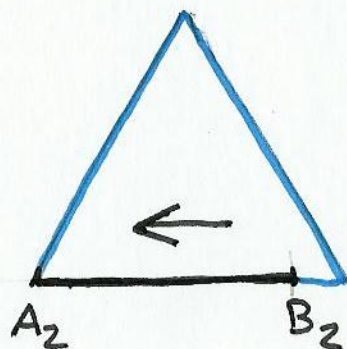
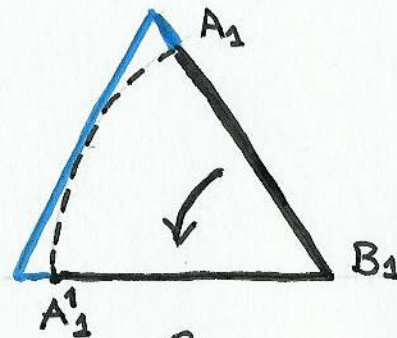
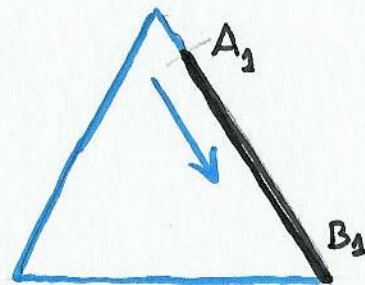
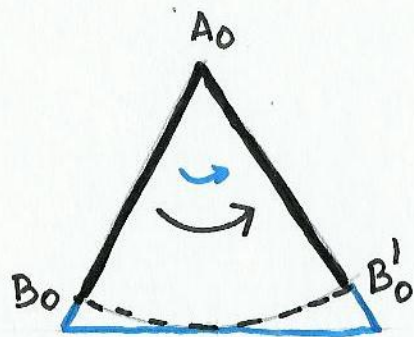
1
SOICHI KAKEYA: Some problems on
máxima and mínima regarding
ovals. Tohoku Sci. Reports, 1917.

"Hallar un conjunto plano de
área mínima, dentro del cuál
sea posible mover continuamente
un segmento hasta invertir su
posición".



$$\text{area} = \frac{1}{4}\pi$$

$$\text{area} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\pi}{4}$$



Teorema (A.S. Besicovitch, 1928):

Dado $\varepsilon > 0$ construimos un conjunto de área menor que ε donde es posible invertir continuamente la posición de la aguja.

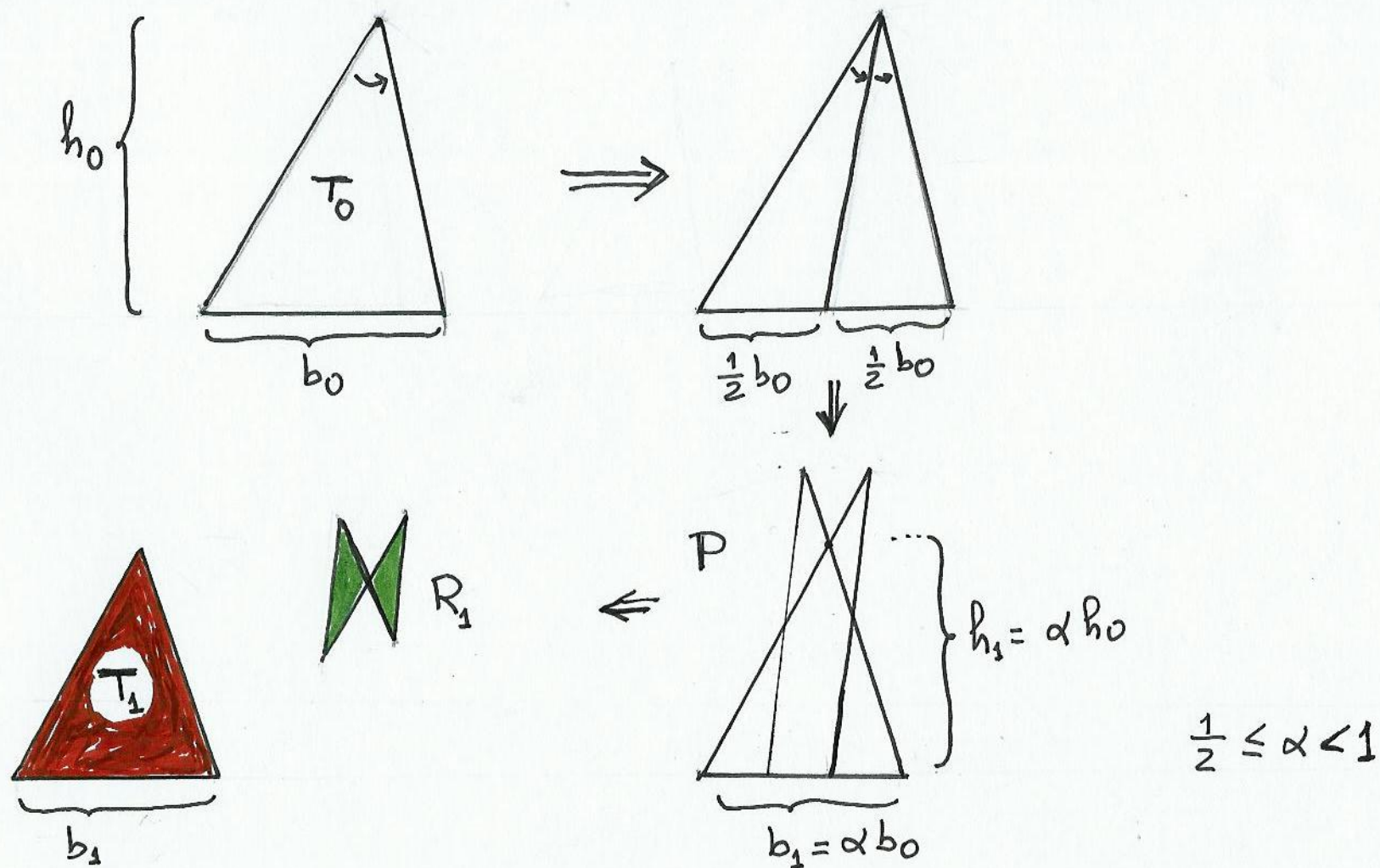
A.S. Besicovitch: On Kakeya's problem and a similar one. Math. Z. (1928).

C. Fefferman: The multiplier problem for the ball. Ann. of Math. (1971).

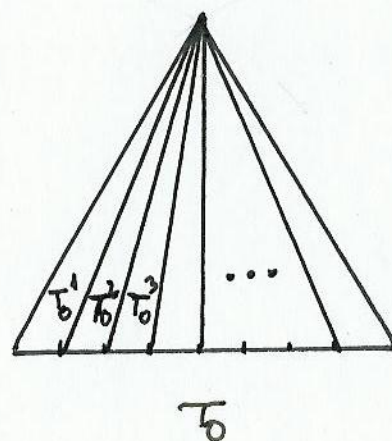
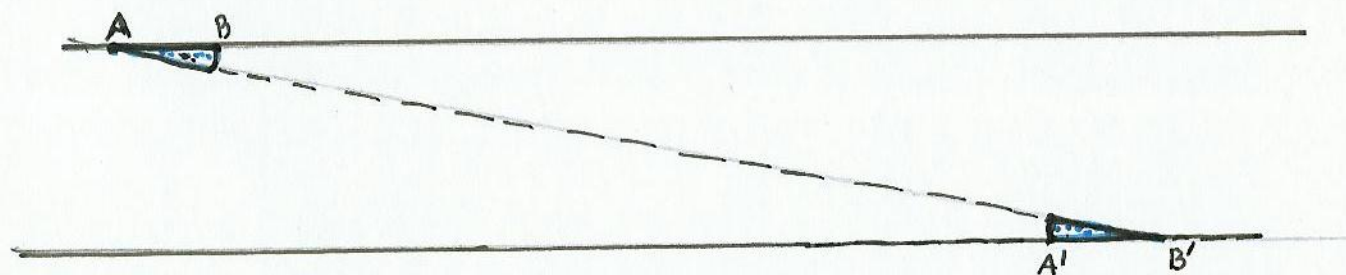
R. Davies: Some remarks on the Kakeya problem. Proc. Cambridge Ph. Soc., (1971).

A. C.: The Kakeya maximal function and the Spherical Summation multipliers. Amer. J. (1977).

A. C.: The fat needle problem. Bull. London Math. Soc. (1993).



$$|P| \leq |T_1| + |R_1| = \{\alpha^2 + 2(1-\alpha)^2\} |T_0|.$$



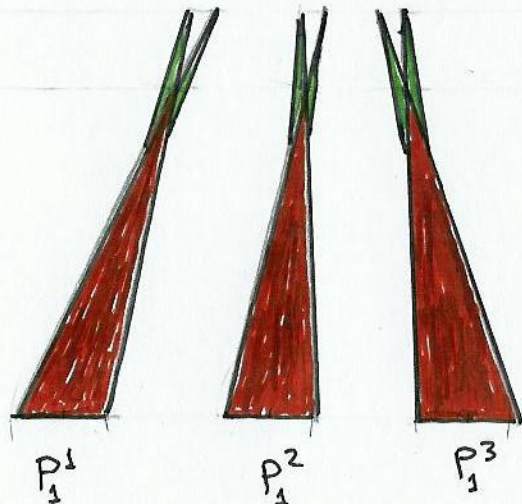
$$T_0 = T_0^1 \cup T_0^2 \cup \dots \cup T_0^{2^n}$$

Con cada pareja T_0^{2k-1}, T_0^{2k}

Construimos

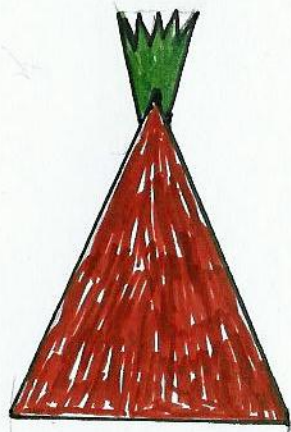
$$P_1^k = T_1^k \cup R_1^k$$

Con un parámetro $\alpha_1: \frac{1}{2} \leq \alpha_1 < 1$



...

$$P_1^k = T_1^k \cup R_1^k$$



$$T_1 \sim \alpha_1 T_0$$

$$A_1 = T_1 \cup \tilde{R}_1^1 \cup \tilde{R}_1^2 \cup \dots \cup \tilde{R}_1^{2^{n-1}}.$$

$$|A_1| \leq [\alpha_1^2 + 2(1-\alpha_1)^2] |T_0|.$$

T_1 es unión de 2^{n-1} triángulos
de base $\alpha_1 b_0 2^{-n+1}$ y altura $h_1 = \alpha_1 \cdot h_0$.

Se repite el proceso n veces con
parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

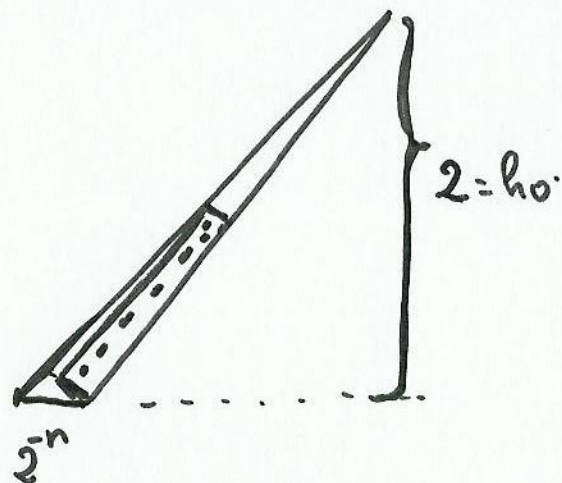
$$\dots \Rightarrow A_n = T_n \cup \{\text{ramas}\}.$$

$$\begin{aligned} \text{área}(A_n) \leq & \{ \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_n^2 + 2[(1-\alpha_1)^2 + \alpha_1^2(1-\alpha_2)^2 + \dots + \\ & + \alpha_1^2 \dots \alpha_{n-1}^2 (1-\alpha_n)^2] \} \text{área}(T_0). \end{aligned}$$

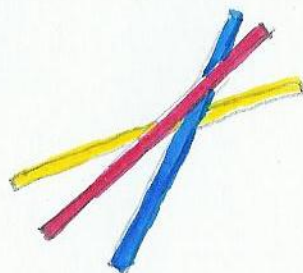
Escogemos $\alpha_k = 1 - \frac{1}{n+2-k} = \frac{n+1-k}{n+2-k}, k=1, \dots, n$

obtenemos

$$\text{área}(A_n) \leq \left\{ \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 + 2n \left(\frac{1}{n+2} \right)^2 \right\} \text{área}(T_0) \leq \frac{3}{n} \text{área}(T_0).$$



Teorema.— Para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto plano P_ε de área menor que $C |\log \varepsilon|^{-1}$ (donde C es una constante fija e independiente de ε), de manera que cualquier rectángulo del plano de dimensiones $\varepsilon \times 1$ y dirección arbitraria puede ser trasladado dentro de P_ε .



Teorema.- Todo subconjunto del plano que contenga a un rectángulo de dimensiones $\varepsilon \times 1$ en cada dirección, tiene área mayor que $C / |\log \varepsilon|$, donde $C > 0$ es una constante fija.

Demostración:

Para cada j , $0 \leq j \leq \varepsilon^{-1}$, sea R_j un rectángulo de dimensiones $\varepsilon \times 1$ contenido en P y de dirección $\omega_j = \frac{1}{2}\pi \varepsilon j$.

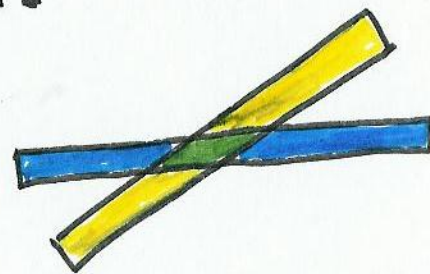
Tenemos:

$$1 \leq \sum_j \text{área}(R_j) = \iint \sum_j \chi_{R_j}(x, y) dx dy \leq$$

$$\leq [\text{área}(\cup R_j)]^{1/2} \left[\iint \left(\sum_j \chi_{R_j}(x, y) \right)^2 dx dy \right]^{1/2}.$$

$$\iint \left(\sum_j \chi_{R_j}(x, y) \right)^2 dx dy = \sum_{j, k} \int \chi_{R_j}(x, y) \chi_{R_k}(x, y) dx dy$$

$$= \sum_{j, k} \text{área}(R_j \cap R_k) \leq \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{|j-k|+1}$$



$$1 \leq \frac{1}{2} [\text{área}(P)]^{1/2} \left[\varepsilon \sum_{j,k=1}^{\bar{\varepsilon}^2} \frac{1}{|j-k|+1} \right]^{1/2}$$

$$\leq \tilde{C} (\text{área}(P))^{1/2} |\log \varepsilon|^{1/2}.$$

$$\Rightarrow \text{área}(P) \geq \frac{C}{|\log \varepsilon|}.$$

12

Diremos que un conjunto plano K es de Kakeya si tiene medida cero y, sin embargo, contiene un segmento unitario en cada dirección.

Teorema.- Todo conjunto de Kakeya tiene dimensión fractal, o de Minkowski, máxima: $\dim_M(K) = 2$.

$$\dim_M(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[2 - \frac{\log(\text{área}(K_\varepsilon))}{\log \varepsilon} \right]$$

$$K_\varepsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}.$$

K Kataya $\Rightarrow K_\varepsilon$ contiene un rectángulo $\varepsilon \times 1$
en cada dirección.

$$\Rightarrow \text{área}(K_\varepsilon) \geq \frac{C}{|\log \varepsilon|}$$

$$\Rightarrow \frac{\log(\text{área}(K_\varepsilon))}{|\log \varepsilon|} \lesssim \frac{\log |\log \varepsilon|}{|\log \varepsilon|} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow \dim_M(K) = 2.$$